УДК 514.7 *Математика*

О НЕКОМПАКТНЫХ ОБЛАСТЯХ В МЕТРИКАХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Роберт МУСАЕЛЯН

***Ключевые слова**. угол, геодезические линии, отрицательная кривизна, метрика, некомпактные области, луч, параллельный, полуплоскость, уравнение, производная, множество.*

***Բանալի բառեր**: անկյուն, գեոդեզիական գծեր, բացասական կորության, մետրիկա, ոչ կոմպակտ տիրույթներ, ճառագայթ, զուգահեռ, կիսահարթություն, հավասարում, ածանցյալ, բազմություն:*

Keywords: *angle, geodesic lines, negative curvature, metriks, non-compact areas parallel, half-plane, half-line, parallel, equation, derivative, miltitude.*

Ռ. Մուսայելյան

ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԵՏՐԻԿԱՆԵՐՈՒՄ ՈՐՈՇ ՈՉ ԿՈՄՊԱԿՏ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Աշխատանքում ապացուցվում են պնդումներ $ds^2 = dx^2 + B^2(x,y)dy^2$ բացասական կորության մետրիկայում գեոդեզիական գծերի մասին և հենվելով նաև հրատարակված (տես [1]) արդյունքների վրա, ապացուցվում են, որ նշված բացասական կորության մետրիկայում գոյություն ունեն ոչ կոմպակտ ուռուցիկ տիրույթներ, որոնց անվանում են անվերջ բազմանկյուններ: Դրանք բազմանկյուններ են, որոնց գագաթները գտնվում են բացարձակի (абсолют) վրա: Անվերջ բազմանկյունները կարող են ունենալ ինչպես վերջավոր թվով կողմեր, այնպես էլ անվերջ թվով (նաև անհաշվելի): Հետագա ուսումնասիրությունների համար այդ բազմանկյուններից առանձնացվում են երկու դասեր և ապացուցվում դրանց գոյությունը:

R. Musaelyan

ABOUT SOME NON-COMPACT DOMAINS IN NEGATIVE CURVATURE METRIC SYSTEMS

Some statements about the geodesic lines in the matrix $ds^2 = dx^2 + B^2(x,y)dy^2$ of a negative curvature have been proved in the research work. Thus, based on the result [1] it has been proved that in the matrix of a negative curvature there are some non-compact areas called infinite polygons. These are polygons the tops of which are located in the absolute. Endless polygons may have both finite-number and infinite-number (also incountable) of sides. For further studics two classes are singled out from those polygons and their existence is proved.

В работе доказывается ряд утверждений о геодезических линиях в метрике $ds^2 = dx^2 + B^2(x,y)dy^2$ отрицательной кривизны и, опираясь также на результат [1], доказывается, что в метрике отрицательной переменной кривизны существуют некомпактные области, которые называют бесконечными многоугольниками. Это - многоугольники, вершины которых находятся на абсолюте. Бесконечные многоуголники могут иметь как конечное, так и бесконечное (та кже несчетное) число сторон. Для дальнейшего изучения выделяются два класса бесконечных многоугольников и доказывается их существование.

1. В работе будем рассматривать метрику

$$ds^2 = dx^2 + B^2(x,y)dy^2 , \qquad (1)$$

заданную на всей плоскости переменных (xoy), кривизна которой K(x,y)<0. В работе [1], рассмотренной в той же метрике, были получены некоторые оценочные результаты относительно функции Лобачевского. В этой работе, используя упомянутую работу, опираясь на другие результаты, доказывается еще некоторые утверждения. Исходя из упомянутого и полученных результатов, доказывается существование некомпактных, выпуклых областей в метрике (1), гауссова кривизна которой переменная отрицательная. Отметим, что область D в метрике переменной отрицтельной кривизны называется выпуклой, если отрезок геодезической, соединяющей любые две точки, принадлежащие D, целиком содержится в D.

Теорема 1. Пусть h_1^+, h_2^+, Ω_1^*, $O_1 = \Omega_1^* \cap \mathrm{h}_1$ определены как в теореме 4 в работе [1]. Тогда существует (притом единственный) орицикл с центральным лучом h_2^+, который касается орицикла Ω_1^* (см. рисунок 1).

Доказательство. Сначала отметим, что два орицикла касаются в точке M, если в этой точке существует одна единственная опорная геозедическая линия для обоих орициклов.

Орицикл, определяемой точкой O_1 и лучом h_2^+, обозначим через Ω_{11}^*. Из работы [2] следует, что для этого орицикла луч h_{12}^+, проходящий через O_1 и параллельный h_2^+, будет так же центральным лучом. Рассмотрим множество орикругов $\{\Omega_{1n}\}$ с центральным лучом h^+_{12}, удовлетворяющих следующим условиям.

1) $\Omega_{11} \supset \Omega_{12} \supset \Omega_{13} \supset \cdots$

2) длины отрезков между эквидистантными орициклами стремятся к бесконечности, при $n \to \infty$. Отметим, что орициклы Ω^*_{p} и Ω^*_{q} с одним и тем же центральным лучом называются эквидистантными.

Границы этих множеств при пересечении с орициклом Ω^*_1 образуют на нем последовательность точек (обозначим ее через O_n). То есть

$$\Omega^*_{1\mathrm{n}} \cap \Omega^*_1 = O_n,$$

Известно, что в каждой точке орицикла существует только одна опорная геодезическая (см [2]). Следовательно, в каждой точке O_n определяется угол η_n, стороны которого-суть опорные геодезические соответствующих орициклов. Этот угол удовлетворяет следующему равенству

$$\measuredangle\eta_n = \pi - \measuredangle\theta_n, \tag{2}$$

где θ_n– угол с вершиной O_n между центральными лучами h^+_{n1}, h^+_{n2} для орициклов Ω^*_1 и $\Omega^*_{1\mathrm{n}}$, соответственно.

Фактически построена функция $\varphi(\xi^*) = \theta_{\xi^*}$, которая кажой точке ξ^*, принадлежащей верхней части орицикла Ω^*_1, ставит в соответствие некоторый определенный угол θ_{ξ^*}, причем $\varphi(O_1) = \theta_1$, где $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$. По теореме 4 работы [1] эта функция-монотонно возрастающая. Докажем непрерывность функции $\varphi(\xi^*)$. Из соотношения (2) для приращения этой функции получим следующую формулу

$$\Delta\varphi(\xi^*) = \Delta\theta_n = -\Delta\eta_n \ .$$

Для вычисления угла $-\Delta\eta_n$ наложим угол η_n на η_{n-1} (см. рисунок 2) так, чтобы вершины углов и лучи h^-_{2n} и $h^-_{2(n-1)}$ являющимися сторонами углов, совпали. Отметим, что все лучи h^+_{2i}, где i принимает весщественное значение, параллельны лучу h^+_{12}, а лучи h^-_{2i} противоположны лучам h^+_{2i}. Согласно теореме 4 в работе [1], угол η_n меньше угла η_{n-1}. Следовательно, h^+_{1n} угла η_n, проведенный из точки $O_n \in \Omega^*_1$, пересечет луч h^+_1 в некоторой точке $A_n \in h^+_{1n}$. Луч, который имеет начало A_n и является частью луча h^+_1, обозначим через $h^+_{1A_n}$. Нетрудно убедиться в том, что для любой точки O_i, принадлежащей отрезку $[O_{n-1}, O_n]$ орицикла Ω^*_1, где $n-1 < i < n$, найдется отвечающая ей единственная точка луча $h^+_{1A_n}$ и наоборот. Таким образом, построено взаимнооднозначное соответствие между отрезком $[O_{n-1}, O_n]$ и лучом $h^+_{1A_n}$, причем точке O_{n-1} соответствует бесконечно удаленная точка луча $h^+_{1A_n}$, а точка O_n-точка A_n. Отсюда следут, что

$$\lim_{O_n \to O_{n-1}} (-\Delta\eta_n) = 0.$$

Этим и завершается доказательство непрерывности функции $\varphi(\xi^*)$.

Далее, применяя теорему 4 работы [1], получим

$$\theta_n > \theta_1 + \pi - (\beta_1 + \beta_2) \tag{3}$$

В неравенстве (3) угол β_1 неограниченно уменьшается при удалении вершин O_n по орициклу Ω^*_1. Это следует из следствия теоремы 4 в работе [1]. Что касается угла β_2, то он тоже обладает этим свойством, потому что при удалении вершин O_n неограниченно возрастает расстояние между этой точкой и фиксированным лучом h^+_{12}, так как орицикл-выпуклая кривая. Из этих рассуждений следует, что точка π принадлежит области значений функции $\varphi(\xi^*)$. То есть существует точка $\varphi(\xi^*_0) = \theta_{\xi^*_0} = \pi$. Из (2) следует, что в этой точке орицикл Ω^*_1 и отвечающий точке орицикл $\Omega^*_{1\mathrm{n}_0}$, касаются.

Следствие. Для любых геодезических h_1 и h_2 существует единственная геодезическая h_3, католая параллельна выбранным лучам на прямых h_1 и h_2.

Доказательство. Пусть $O \in \Omega^*_1$, отвечающая теореме точка, Ω^*_1 - орицикл с лучом h^+_1 и точкой $O_1 \in h^+_1$, отвечающая теореме 3 в работе [1]. Очевидно, луч h^+_3, проходящий через точку O и параллельный h^+_1, в противоположном направленнии будет параллелен лучу h^+_2. То есть h^-_3 параллельно h^+_2. В целом, геодезическая h_3, составленная лучами h^-_3, h^+_3, параллельна h^+_2 и h^+_1.

Покажем, что геодезическая h_3, обладающая этим свойством, является единственной. Это означает – показать, что она не зависит от выбора точки $O_1 \in h^+_1$ и орицикла Ω^*_1. Пусть точка $O_2 \in h^+_1$ правее точки $O_1 \in h^+_1$, Ω^*_2 - орицикл, проходящий через O_2 и имеющий h^+_1 как центральный луч.

Обозначим $O_3 = \ \Omega_2^* \cap h_3^+$. Луч $\bar{h}_3^+$ орицикла Ω_2^*, проведенный из точки O_3, очевидно, является частью луча h_3^+. Этот луч является центральным (см [2]) для орицикла Ω_2^*. Следовательно, $\bar{h}_3^+$ ортогонален орициклу Ω_2^* в точке O_3. Нетрудно заключить, что луч $\bar{h}_3^-$, который является продолжением луча $\bar{h}_3^+$ в противоположном направлении, параллелен h_2^+ и прямая $\bar{h}_3$ таким образом совпадает с прямой h_3.

2. В этой части работы докажем, что в E^3 существуют выпуклые множества, которые называются бесконечными многоугольниками (в дальнейшем, просто БМ).

Определение 1. Выпуклое множество, состоящее из пересечения конечного или счетного множества полуплоскостей, границы которых не имеют общих точек, называется бесконечным многоугольником.

Отметим, что полуплоскостью называют часть полной метрики, ограниченную геодезической. Границы БМ-полные геодезические. Две стороны называются соседними, если они сходятся на абсолюте.

Из множества всех БМ, у каждого из которых любая стророна имеет две соседние, выделим два множества, которые будем обозначать M_1 и M_2.

Определение 2. Множество M_1 состоит из БМ, для каждого из которых можно указать отвечающий ему орицикл O в заданной метрике такой, что нижняя грань длин ортогональных проекций сторон этого многоугольника на указанный орицикл положительна.

Определение 3. Множество M_2 состоит из БМ, для каждого из которых точная грань длин ортогональных проекций сторон рассматриваемого многоугольника на данную сторону БМ положительна.

Теорема 2. В метрике (1) существуют БМ, нринадлежащие классам M_1 и M_2.

Доказательство. Сначала отметим, что для простоты рассмотрено существование БМ в метрике (1). Можно доказать существование БМ в полных двумерных метрических пространствах отрицательной кривизны. При этом отрицательность кривизны метрического пространства определяется так: для каждого его геодезического треугольника отрезок средней линии меньше половины основания (см. [3]).

Доказательство теоремы разделим на две части. В первой части существование БМ вообще, а во второй части для БМ классов M_1 и M_2.

1) Пусть Г- произвольная кривая (геодезическая линия или регулярная кривая с ограниченной геодезической кривизной) в мертике (1). Кривая Г разбивает метрику на две части, которые назовем полуплоскостями. Возьмем произвольное разбиение кривой Г с помощью точек $\xi_i \in \Gamma$, где $i \in J, a\ J -$ множество, вообще говоря не счетное. В каждой точке $\xi_i \in \Gamma$ проведем геодезическую ортогональную Г. Обозначим их через h_i. Из теории дифференциальных уравнений следует, что геодезические $h_i,\ i \in J$ определяется однозначенно. Это потому, что дифференциальное уравнение геодезических - уравнение второго порядка. Геодезические h_i и $h_j,\ i,\ j \in J$ назовем ближайшими, если между точками $\xi_i, \xi_j \in \Gamma$ нет других точек разбиения. Далее, из свойства функции B(x,y) следует, что в указанной полуплоскости опредляемой кривой Г не могут быть одновременно и параллельные и расходящиеся геодезические пары $h_{i'}, h_{j'}, i', j' \in J$.

Согласно следствию, для ближайших геодезических $h_i, h_j,\ i,\ j \in J$, вообще говоря, в обоих полуплоскостях кривой Г существуют, так называемые, общие параллельные δ_{ij}^1и δ_{ij}^2, что δ_{ij}^α, $i, j \in J, \alpha = 1; 2$ параллельна и h_i и h_j. Здесь индекс $\alpha = 1; 2$ показывает принадлежность прямых δ_{ij}^α, верхней или нижней полуплоскостям Г соответственно. Множество, граница которого состоит из геодезических δ_{ij}^α, где $i,\ j \in J, \alpha = 1; 2$, очевидно, будет той выпуклой областью о которой говорилась в начале.

2) Пусть множество J счетное и разбиение Г точки $\xi_i \in \Gamma, i \in J$ такое, что нижняя грань длины дуг $\xi_i\xi_j$ больше нуля. Здесь $\xi_j = h_i \cap \Gamma,\ \ \xi_j = h_j \cap \Gamma, a\ h_i$ и h_j ближайшие геодезические. Очевидно, $\xi_i\xi_j$ есть проекция геодезической $\delta_{ij}^\alpha,\ i,\ j \in J, \alpha = 1; 2$ на кривий Г. Очевидно также то, что можно построить многоугольники БМ, принадлежащие и классу M_1 и классу M_2. Теорема доказана.

Из этой теоремы и из понятия БМ, следует несколько полезных фактов.

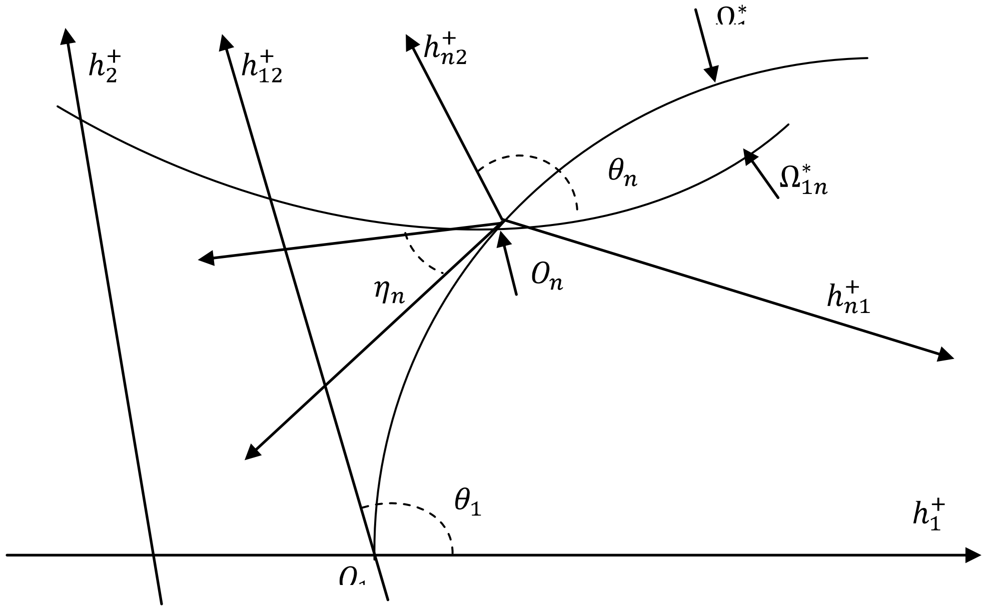

рис. 1

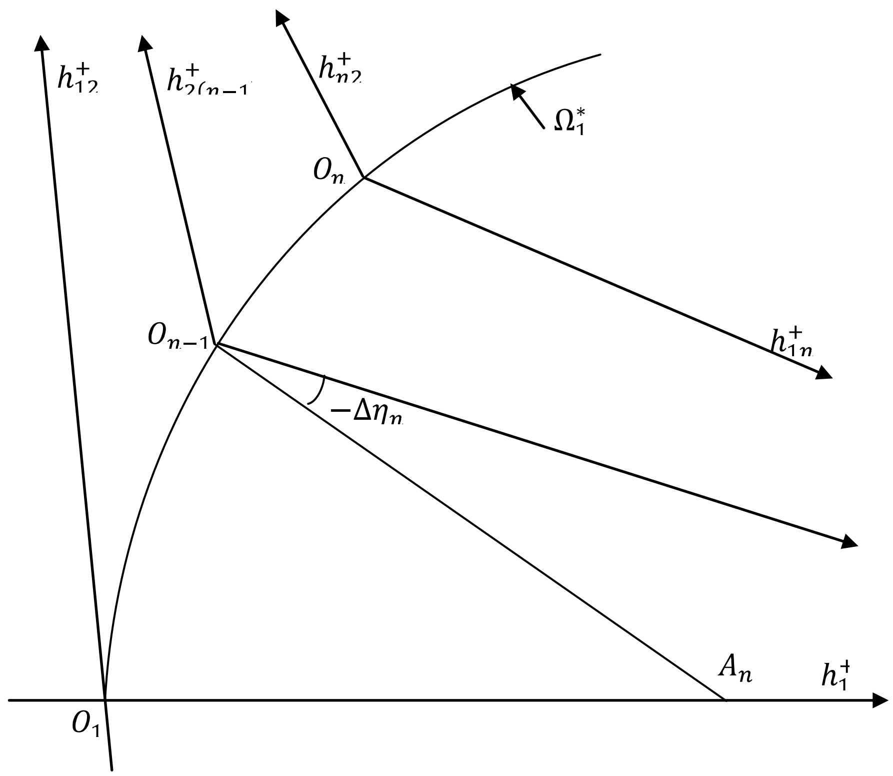

рис. 2

1) Имеются БМ, для которых не каждая сторона имеет соседнюю.
   Примером таких БМ могут служить те, которые содержат полуплоскости.
2) Существуют БМ, любая сторона которых не имеет соседнюю.
3) Любой БМ с конечным числом сторон принадлежит и классу M_1 и классу M_2.
4) Множества M_1 и M_2 различные, то есть имеются $БМ \in M_1$ и не принадлежащие M_2 и наоборот.

В конце отметим, что полученные факты становятся более понятными, наглядными, если обратиться к способу изображения метрики отрицательной кривизны в круге. Эта возможность основывается на результате R. Оссермана (см [4]), согласно которому каждая метрика отрицательной кривизны может быть конформно отображена на круге. При таком отображении геодезические метрики переходят в кривые без самопересечений, соединяющих точки границы круга (абсолюта).

Литература

1. Мусаелян Р.Ц. Некоторые оценочные результаты относительно функции Лобачевского. Ученые записки АрГУ. 1/2015.
2. Шикин Е.В. Изометрические погружения в E^3 некомпактных областей неположительной кривизны. Докт. Дис. М., 1976.
3. Буземан Г. Геометрия геодезических.-М, 1962.
4. Osserman R. On the inequality $\Delta U \geq f(n)$. Pacif. J. Math, 1957, 7, N4, 1641-2647 (РЖМат, 1959, 2671).

Сведения об авторе:
Роберт Мусаелян - канд. физ-мат наук, доцент кафедры математики и информатики,
Горисский государственный университет
E-mail: rubmus49@gmail.com, тел. 094-333-994

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, к.ф.м.н., Г.Г.Саакяном.