ՀՏԴ 371.31:513 Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

ԱՆԱԼՈԳԻԱՆ ՈՐՊԵՍ ՌԵՖԼԵՔՍԻՎ ԿՐԿՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՐԱԿԱՆԱՑՄԱՆ ՄԻՋՈՑ

Լիլիթ ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Բանալի բառեր. *անալոգիա, ռեֆլեքսիվ կրկնություն, հարթաչափություն, տարածաչափություն, պատկերների հատկություններ, երկրաչափական հասկացություններ, եռանկյուն, տետրաեդր:*

Ключевые слова: *аналогия, рефлексивное повторение, планиметрия, стереометрия, свойства фигур, геометрические понятия, треугольник, тетраэдр.*

Key words: *analogy, reflexive repetition, planimetry, stereometry, properties of figures, geometric concepts, triangle, tetrahedron.*

АНАЛОГИЯ КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ РЕФЛЕКСИВНОГО ПОВТОРЕНИЯ
Л. Аракелян

Работа посвящена рефлексивному повторению курса планиметрии при изучении стереометрии. Средством осуществления рефлексивного повторения была выбрана аналогия. На примерах теорем и задач о треугольнике и его пространственном аналоге тетраэдре была представлена модель проведения такого повторения. Было показано, что решение планиметрической задачи можно распространить для решения, соответствующей стереометрической задачи применяя аналогию.

ANALOGY AS A MEANS OF REALIZATION OF REFLEXIVE REPETITION
L.Arakelyan

The work is coserned with the reflexive repetition of planimetry course in the study of stereometry. As a means of realization of the reflexive repetition an analogy has been chosen. In terms of theories and tasks about triangle and its spatial analogy-tetrahedron, a model of carrying out such repetition has been introduced. It has been presented that the solution of a planimetry task can be extended for the solution of the corresponding tetrahedron task by applying an analogy.

Աշխատանքը նվիրված է տարածաչափության ուսուցման ժամանակ հարթաչափության դասընթացի ռեֆլեքսիվ կրկնությանը: Որպես ռեֆլեքսիվ կրկնության իրականացման միջոց է ընտրվել անալոգիան: Եռանկյան և նրա տարածական անալոգ հանդիսացող տետրաեդրի վերաբերյալ համապատասխան թեորեմների ու խնդիրների օրինակներով ներկայացվել է այդպիսի կրկնության իրականացման մոդելը: Ի ցույց է դրվել, որ հարթաչափական խնդրի լուծումը կարելի է տարածել նաև համապատասխան տարածաչափական խնդիրը լուծելիս՝ կիրառելով անալոգիա:

Անալոգիայի կիրառումը թույլ է տալիս կատարել ընդհանրացումներ, վարկած առաջադրել, տեղափոխել ձեռք բերած գիտելիքները, կարողությունները և հմտությունները նոր՝ ավելի բարձր մակարդակ, նախկինում ուսուցված նյութը վերաիմաստավորել ավելի ընդհանուր տեսանկյունից: Այս համատեքստում տարածաչափության ուսուցման ժամանակ հարթաչափության դասընթացի ռեֆլեքսիվ կրկնության տարբերակ կհանդիսանա տարածական մարմինների և հարթաչափական պատկերների համեմատումը:

Տարածաչափական պատկերների շատ հատկություններ նման են հարթ պատկերների հատկություններին: Օրինակ՝ եռանկյան կողմերի և տետրաեդրի նիստերի թիվը, եռանկյանը ներգծյալ շրջանագծի և տետրաեդրին ներգծյալ սֆերայի գոյությունը, արտագծյալ շրջանագծի և արտագծյալ սֆերայի գոյությունը: Մի շարք երկրաչափական հասկացություններ հարթաչափությունից ունեն տարածական անալոգներ: Օրինակ՝ զուգահեռագիծը և զուգահեռանիստը, բազմանկյունն ու բազմանիստը, շրջանագիծն ու գնդային մակերևույթը: Տետրաեդրն էլ (եռանկյուն բուրգը) կարելի է համարել եռանկյան տարածական անալոգը: Այսպես, եռանկյունը մինիմում կողմերով բազմանկյունն է, իսկ տետրաեդրը մինիմում նիստերով բազմանիստը: Հարթաչափության որոշ թեորեմների ձևակերպումներում հարթաչափական հասկացությունները փոխարինելով համապատասխան տարածաչափական հասկացություններով՝ ստացվում են տարածաչափությունում կիրառելի թեորեմներ, իսկ ինչպես հայտնի է, անալոգիայով ստացված թեորեմները և բանաձևերը հեշտ են մտապահվում: Դիտարկենք օրինակներ:

Թեորեմ 1: *Յանկացած եռանկյան կարելի է ներգծել շրջանագիծ, այն էլ միայն մեկը:*

Թեորեմ 1^0: *Յանկացած եռանկյուն բուրգի համար գոյություն ունի միակ ներգծյալ սֆերա:*

Թեորեմ 2: *Յանկացած եռանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, ընդ որում միայն մեկը:*

Թեորեմ 2^0: *Եռանկյուն բուրգն ունի միակ արտագծյալ սֆերա:*

Թեորեմ 1-ը և թեորեմ 2-ը ուսուցվում են 8-րդ դասարանում, իսկ թեորեմ 10-ը և թեորեմ 20-ը՝ 11-րդ դասարանում:

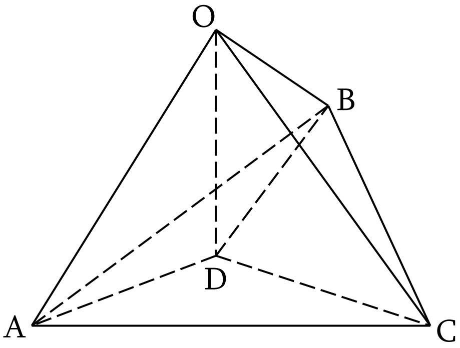
Թեորեմ 3: *Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի քառակուսին հավասար է էջերի քառակուսիների գումարին:*

Թեորեմ 3-ն ուսուցվում է 8-րդ դասարանում:

Թեորեմ 3^0: *Եթե տետրաեդրի գագաթներից մեկի բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ են, ապա այդ գագաթի հանդիպակաց նիստի մակերեսի քառակուսին հավասար է մնացած նիստերի մակերեսների քառակուսիների գումարին:*

Ապացույց: Դիցուք՝ OABC տետրաեդրի $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^0$: OAB, OBC, OCA և ABC եռանկյունների մակերեսները նշանակենք համապատասխանաբար S_{AOB}, S_{OBC}, S_{OCA}, և S: AB, BC, և CA կողերով երկնիստ անկյունները նշանակենք համապատասխանաբար $\propto$, β և γ: O կետի պրոյեկցիան ABC նիստի վրա նշանակենք D (նկ.1):

Քանի որ $\propto < 90^0$, $\beta < 90^0$, $\gamma < 90^0$, ապա D կետը գտնվում է ABC եռանկյան ներսում: OAB, OBC և OCA եռանկյունները ABC եռանկյան պրոյեկցիաներն են, ուստի



նկ. 1

$S_{AOB} = S\cos\propto$, $S_{OBC} = S\cos\beta$, $S_{OCA} = S\cos\gamma$:

ABD, BCD և CAD եռանկյունները OAB, OBC և OCA եռանկյունների պրոյեկցիաներն են ABC նիստի վրա, և այդ եռանկյունների մակերեսների գումարը հավասար է ABC եռանկյան S մակերեսին:

$$(S\cos\propto)\cos\propto + (S\cos\beta)\cos\beta + (S\cos\gamma)\cos\gamma = S(\cos^2\propto + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = S:$$

Հետևաբար՝ $\cos^2\propto + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

Ուստի՝ $S_{OAB}^2 + S_{OBC}^2 + S_{OCA}^2 = S^2(\cos^2\propto + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = S^2$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 4: *Եռանկյան միջնագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով տրոհվում 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:*

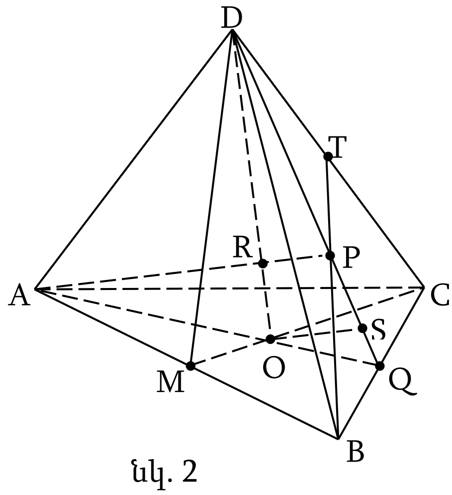
Թեորեմ 4-ն ուսուցվում է 9-րդ դասարանում:

Նախքան թեորեմ 4^0-ին անցնելը սահմանենք տետրաեդրի միջնագիծ հասկացությունը:

Սահմանում: Տետրաեդրի գագաթը հանդիպակաց նիստի միջնագծերի հատման կետին միացնող հատվածը կոչվում է տետրաեդրի միջնագիծ:

Թեորեմ 4^0: *Տետրաեդրի միջնագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով տրոհվում 3:1 հարաբերությամբ՝ հաշված գագաթից:*

Ապացույց: Դիցուք տրված է DABC տետրաեդրը, O-ն ABC եռանկյան ծանրության



նկ. 2

կենտրոնն է, P-ն՝ BCD եռանկյան ծանրության կենտրոնը, R-ը՝ տետրաեդրի DO և AP միջնագծերի հատման կետը (նկ.2):

Դիտարկենք ΔAQD: O և P կետերը տրոհում են ABC և BCD եռանկյան միջնագծերը 2:1 հարաբերությամբ: Ցույց տանք, որ R կետը տրոհում է տետրաեդրի DO և AP միջնագծերը 3:1 հարաբերությամբ:

AQD եռանկյան մեջ O կետից տանենք AP-ին զուգահեռ OS հատվածը: Այն կտրոհի PQ հատվածը 2:1 հարաբերությամբ: Եթե SQ-ն ընդունենք որպես միավոր հատված, ապա DP-ն հավասար կլինի 6-ի:

$DR : RO = DP : PS = 6 : 2 = 3 : 1$:

Հանգունորեն ապացուցվում է, որ տետրաեդրի B և C գագաթներից տարված միջնագծերը ևս տրոհում են DO միջնագիծը $3 : 1$ հարաբերությամբ և հետևաբար անցնում են O կետով: Թեորեմն ապացուցված է:

Երբեմն եռանկյան վերաբերյալ խնդրի լուծումը հնարավոր է կիրառել տետրաեդրի վերաբերյալ համապատասխան խնդիրը լուծելիս:

Խնդիր 1: ABC եռանկյան ներսում գտնվող M կետից տարված են BC, CA և AB կողմերին ուղղահայացներ, որոնց երկարությունները հավասար են համապատասխանաբար d_a, d_bև d_c: Ապացուցել, որ

$$\frac{d_a}{h_a}+\frac{d_b}{h_b}+\frac{d_c}{h_c}=1$$

որտեղ h_a, h_b և h_c-ն ABC եռանկյան բարձրություններն են:

Լուծում: M կետը միացնենք ABC եռանկյան գագաթներին: $ABCM$, CAM, ABM և ABC եռանկյունների մակերեսները նշանակենք համապատասխանաբար S_1, S_2, S_3 և S (նկ.3):

Այդ դեպքում

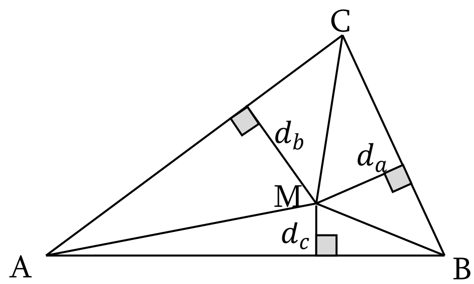
$$S_1=\frac{1}{2}a\cdot d_a,\qquad S_2=\frac{1}{2}b\cdot d_b,\qquad S_3=\frac{1}{2}c\cdot d_c \quad ⍰ \quad S=\frac{1}{2}a\cdot h_a:$$

Որտեղից կստանանք

$$\frac{S_1}{S}=\frac{d_a}{h_a},\qquad \frac{S_2}{S}=\frac{d_b}{h_b},\qquad \frac{S_3}{S}=\frac{d_c}{h_c}$$

Հաշվի առնելով, որ $S_1+S_2+S_3=S$ և անդամ առ անդամ գումարելով այդ հավասարության բաղադրիչները կստանանք

$$\frac{d_a}{h_a}+\frac{d_b}{h_b}+\frac{d_c}{h_c}=1 \qquad (1)$$



նկ. 3

Հետևանք 1: Եթե M կետը ABC եռանկյանը ներգծյալ շրջանագծի կենտրոնն է, ապա

$$d_a=d_b=d_c=r$$

և (1) հավասարությունը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}:$$

Հետևանք 2: Եթե $h_a=h_b=h_c=h$, ապա $ah=bh=ch=2S$ առնչություններից կստանանք, որ $a=b=c$: (1) հավասարությունը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$d_a+d_b+d_c=h:$$

Այսպիսով, հավասարակողմ եռանկյան ներսում գտնվող ցանկացած կետի հեռավորությունների գումարը եռանկյան կողմերից հաստատուն մեծություն է, որը հավասար է եռանկյան բարձրությանը:

Հետևանք 3: Դիցուք՝ $h_a<h_b<h_c$:Այդ դեպքում

$$\frac{d_a+d_b+d_c}{h_a}>1 \quad ⍰ \quad \frac{d_a+d_b+d_c}{h_c}<1:$$

Հետևաբար, ոչ հավասարակողմ եռանկյան ներսում գտնվող ցանկացած կետի հեռավորությունների գումարը եռանկյան կողմերից պարփակված է փոքրագույն և մեծագույն բարձրությունների միջև.

$$h_a < d_a + d_b + d_c < h_c:$$

Խնդիր 2: $DABC$ տետրաեդրի ներսում գտնվող M կետից տարված են BCD, CAD, ABD և ABC նիստերի հարթություններին ուղղահայացներ, որոնց երկարությունները հավասար են համապատասխանաբար d_1, d_2, d_3 և d_4: Ապացուցել, որ

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} + \frac{d_4}{h_4} = 1,$$

որտեղ h_1, h_2, h_3և h_4-ը տետրաեդրի բարձրություններն են:

Լուծում: M կետը միացնենք $DABC$ տետրաեդրի գագաթներին: $MDBC$, $MDAC$, $MDAB$, $MABC$ և $DABC$ տետրաեդրների ծավալները նշանակենք համապատասխանաբար V_1, V_2, V_3, V_4 և V (նկ.4):

Այդ դեպքում

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{DBC} \cdot d_1 \quad \text{⍰} \quad V = \frac{1}{3} S_{DBC} \cdot h_1 \quad => \quad \frac{V_1}{V} = \frac{d_1}{h_1}:$$

Հանգունորեն կստանանք.

$$\frac{V_2}{V} = \frac{d_2}{h_2}, \qquad \frac{V_3}{V} = \frac{d_3}{h_3}, \qquad \frac{V_4}{V} = \frac{d_4}{h_4}:$$

Հաշվի առնելով, որ $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V$ և անդամ առ անդամ գումարելով այդ հավասարության բաղադրիչները կստանանք՝

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} + \frac{d_4}{h_4} = 1 \qquad (2)$$

Հետևանք 1: Եթե M կետը $DABC$ տետրաեդրին ներգծյալ գնդային մակերևույթի կենտրոնն է, ապա

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = r$$

և (2) հավասարությունը կստանա հետևյալ տեսքը՝

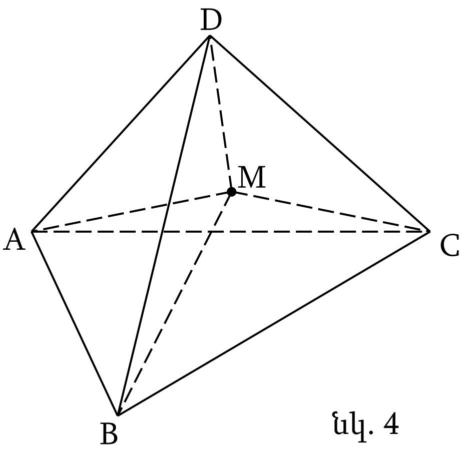
$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r}:$$

Հետևանք 2: Եթե $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h$, ապա $S_1 h = S_2 h = S_3 h = S_4 h = 3V$ առնչություններից կստանանք, որ $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$:

(2) հավասարությունը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = h$$

Հետևանք 3: Դիցուք՝ $h_1 < h_2 < h_3 < h_4$: Այդ դեպքում



նկ. 4

$$\frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{h_1} > 1 \quad \text{⍰} \quad \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{h_4} < 1 \quad =>$$

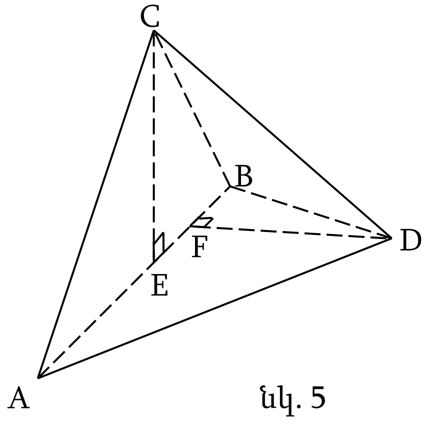
$$h_1 < d_1 + d_2 + d_3 + d_4 < h_4$$

Այսպիսով, տարածաչափական խնդրի լուծման որոնումը զգալիորեն հեշտացավ, երբ սկզբում դիտարկեցինք նմանատիպ հարթաչափական խնդիր: Սակայն պետք է հաշվի առնել, որ տետրաեդրը ավելի բարդ պատկեր է, քան եռանկյունը և նրա հատկությունները ավելի բազմազան են: Հնարավոր է, որ անալոգիա չլինի: Դիտարկենք օրինակ:

Թեորեմ 5: *Եռանկյան բարձրությունները (կամ նրանց շարունակությունները) հատվում են մի կետում:*

Թեորեմ 5-ն ուսուցվում է 8-րդ դասարանում:

Ըստ անալոգիայի, կարելի է ենթադրել, որ կամայական տետրաեդրի բարձրությունները (կամ նրանց շարունակությունները) ևս հատվում են մի կետում:



նկ. 5

Խնդիր 3: Ապացուցել, որ ճիշտ չէ հետևյալ պնդումը. կամայական տետրաեդրի բարձրությունները (կամ նրանց շարունակությունները) հատվում են մի կետում:

Լուծում: Տրված պնդումը պարունակում է ընդհանրության քվանտոր: Պնդումը հերքելու համար բավական է բերել հակաօրինակ:

Դիցուք՝ $ABCD$-ն տետրաեդր է, այնպես որ AB կողով երկնիստ անկյունը ուղիղ է (նկ.5): Այդ դեպքում տետրաեդրի CE և DF բարձրությունները ABC և ABD եռանկյունների բարձրություններ են: Եթե $AC = BC$ և $AD = BD$, ապա E և F կետերը համընկնում են AB հատվածի միջնակետի հետ, այսինքն տետրաեդրի CE և DF բարձրությունները հատվում են: Ընդ որում, տետրաեդրի մյուս երկու բարձրությունները նրանց հատման կետով չեն անցնում: Իսկ եթե $AC = BC$, բայց $AD \neq BD$, ապա CE և DF բարձրությունները խաչվում են: Այսպիսով, հնարավոր է, որ տետրաեդրի նույնիսկ երկու բարձրություններ ընդհանուր կետ չունենան:

Բայց և այնպես, գոյություն ունեն տետրաեդրներ, որոնց բոլոր չորս բարձրություններն էլ հատվում են մի կետում: Այդպիսինն է, օրինակ, $ABCD$ տետրաեդրը, որի D գագաթի բոլոր հարթ անկյունները ուղիղ են: DA, DB և DC կողերը նրա բարձրություններ են, որոնք հատվում են DD_1 չորրորդ բարձրության հետ D կետում:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Кушнир И.А., Треугольник и тетраэдр в задачах. К.: Факт, 2004. -336 с.
2. Дорофеев Г. В.. О составлении циклов взаимосвязанных задач /Г. В. Дорофеев // Математика в школе. - 1983. № 6.
3. Наземнова Н.В. Аналогия в обучении учащихся приемам распознавания геометрических образов / Наземнова Н.В. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Гуманитарные науки.- 2010. № 4.

Տեղեկություններ հեղինակի մասին
Լիլիթ Առաքելյան-ԱրՊՀ, Մաթեմատիկայի ամբիոնի ավագ դասախոս:
E-mail: lilit.rafael@yandex.com, Tel. +374 97 247492

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.դ. Ա.Մ. Խաչատրյանը: