ՀՏԴ 513.0:371 Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

# VII-VIII ԴԱՍԱՐԱՆՆԵՐԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԴԺՎԱՐԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ

*Ռուդիկ ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ*

***Բանալի բառեր.*** *Կառուցել, ուղիղ, եռանկյուն, նմանություն, միջնագիծ, անկյունագիծ, սեղան, հիմք, բարձրություն, շրջանագիծ, շոշափող, Թալես, թեորեմ, լար, տրամագիծ, կետերի երկրաչափական տեղ, միջնագիծ, շրջանագիծ, էլիպս, կիզակետ, համաչափություն:*

***Ключевые слова.*** *Построить, прямая, треугольник, сходство, медиана, диагональный, плоскость, основание, высота, окружность, касательная, Фалес, теория, хорда, диаметр, расположение геометрических точек, эллипс, фокус, симметрия.*

***Key words.*** *Build, straight, triangle similarity, median, diagonal plane base, height, circumference, tangent, Thales, theory, chord, diameter, location of geometrical points, ellipse, focus, symmetry.*

*Р.Аракелян*

## *СЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ VII-VIII КЛАССОВ*

*Опыт преподавания геометрии в школе показывает, что ученики часто сталкиваются с определенными трудностями при решении задач на построение, которые объясняются следующими обстоятельствами: решение задач на построение требует от школьника нестандартный способ мышления, знание теории геометрических преобразований, параллельный перенос, центральный и осевой симметрии, поворот, подобие фигур и т.д. Цель данной статьи состоит в том, чтобы помочь школьникам преодолеть вышеупомянутые трудности при решении задач на построении.*

*R. Arakelyan*

## *THE DIFFICULT TASKS ON CONSTRUCTION IN THE COURSE OF GEOMETRY OF VII-VIII CLASSES*

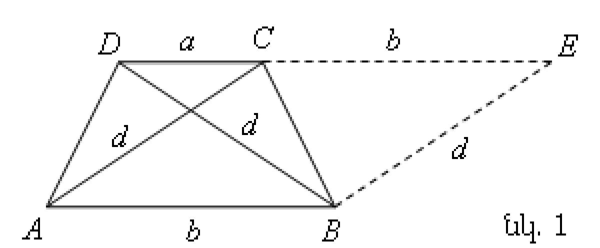
*The experience of teaching the geometry at school shows that schoolchildren often encounter certain difficulties in solving the constructive task, which are explained by the following circumstances: the solution requires the construction of surface modification, parallel movement, the central and axis symmetry, a non-standard way of thinking, rotation, similarity of figures and good knowledge of other skills, etc. The purpose of this article is to help schoolchildren to overcome the above mentioned difficulties.*

*Դպրոցական երկրաչափության դասավանդման փորձը ցույց է տալիս, որ աշակերտները կառուցման խնդիրների լուծման ընթացքում հաճախ են հանդիպում որոշակի դժվարությունների, որը բացատրվում է հետևյալ հանգամանքներով. կառուցման խնդիրների լուծումը պահանջում է հարթության ձևափոխությունների՝ զուգահեռ տեղափոխություն, կենտրոնական և առանցքային համաչափություն, պտույտ, պատկերների նմանություն և այլ գիտելիքների բավարար իմացություն, ոչ ստանդարտ մտածողություն, կառուցման գործիքների կիրառություն: Սույն հոդվածի նպատակն է օգնել աշակերտներին նշված դժվարությունները հաղթահարելու հարցում:*

Կառուցման խնդիրները մեծ դեր են խաղում դպրոցականի մաթեմատիկական պատրաստվածության հարցում: Ոչ մի այլ բնույթի խնդիր մաթեմատիկական տրամաբանության և մտածողության զարգացման համար այնքան նյութ չի հաղորդում, որքան կառուցման խնդիրը: Կառուցման խնդիրները սովորաբար թույլ չեն տալիս լուծման ստանդարտ մոտեցում և ձևական ընկալում սովորողների կողմից: Կառուցման խնդիրները նպատակահարմար են դպրոցական երկրաչափության յուրաքանչյուր տեսական նյութի ամրապնդման համար: Լուծելով կառուցման խնդիրներ աշակերտները ձեռք են բերում հմտություններ կառուցման գործիքների օգտագործման հարցում: Սույն հոդվածի նպատակն է օգնել դպրոցականներին կառուցման դժվարին խնդիրների լուծման հարցում:

**467.** Կառուցեք հավասարասրուն սեղան ըստ հիմքերի և անկյունագծերի:

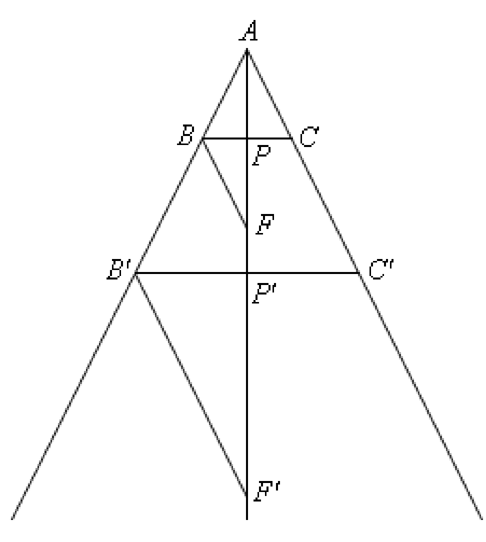
*Լուծում:* Թող $ABCD$-ն որոնելի սեղանն է, որի հիմքերը և անկյունագծերը տրված են:



նկ. 1

$AC$ անկյունագիծը զուգահեռ տեղափոխենք $AB$ վեկտորով: Կստանանք $DBE$ եռանկյունը, որի երեք կողմերի երկարությունները հայտնի են՝ $DB =$ $=$ $=$ $= +$ 000000(նկ. 1): Կառուցենք $DBE$ եռանկյունը ըստ երեք կողմերի, այնուհետև գծագիրը լրացնենք մինչև $ABCD$ սեղան: Դժվար չէ ապացուցել, որ ստացված քառանկյունը բավարարում է խնդրի պահանջներին:

**487.** Կառուցեք հավասարասրուն եռանկյուն՝ ըստ սրունքների կազմած անկյան և հիմքի ու նրան տարված բարձրության գումարի՝ $a$:



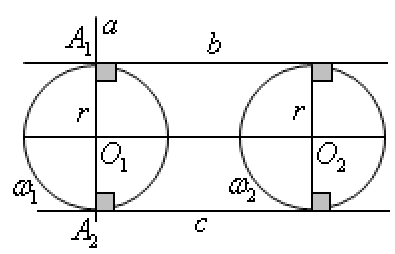
նկ. 2

*Լուծում:* Կառուցենք հավասարասրուն եռանկյուն $B'$ $'$ այնպես, որ $\angle$ $=$ : $A$ անկյան կիսորդը՝ $AP'$-ը եռանկյան $B'$ $'$ կողմը հատում է $P'$ կետում: $AP'$ ճառագայթի $P'$ կետից անջատենք $P'$ $'=$ (նկ. 2) : Այնուհետև կառուցենք $B'$ $'$ հատվածը: Մեր կառուցած $B'$ $'$ եռանկյունը բավարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին, բացի մի պայմանից՝ այն է, հիմքի և բարձրության գումարը հավասար է $AF'$: Բայց ակընհայտ է, որ կառուցած եռանկյունը նման է (հոմոտետիկ է $A$ կենտրոնի նկատմամբ) որոնելի եռանկյանը, նմանության $k =$ գործակցով: Այս վերլուծությունը մեզ հուշում է կառուցման հետագա քայլերը: $AP'$ ուղղի վրա կառուցենք $AF =$ : Կառուցենք $F$-ից զուգահեռ $F'$ $'$-ին, կստանանք $B$ կետը, այնուհետև $BC$-ն զուգահեռ $B'$ $'$-ին: Ստացված $ABC$-ն որոնելի եռանկյունն է :

**496 .** Կառուցեք տրված երկու շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողը:

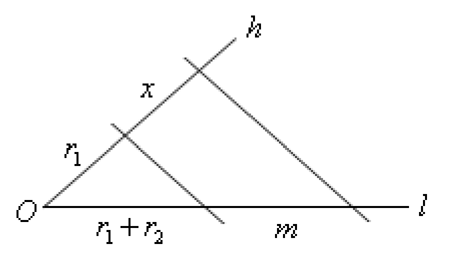
*Լուծում:* Դիտարկենք շրջանագծերի փոխադարձ դիրքի բոլոր հնարավոր դեպքերը.

ա) շրջանագծերն ունեն հավասար շառավիղ: Այս դեպքում նրանք ունեն երկու շոշափող, որոնք զուգահեռ են նրանց կենտրոնները միացնող ուղղին, որոնք կառուցելու համար կատարում ենք հետևյալ քայլերը. կառուցում ենք $a \perp$ $a \cap$ $=$ ; $b \perp$ $\perp$ $b$ և $c$ ուղիղները շոշափում են $\omega$ և $\omega$ շրջանագծերին (նկ. 3):

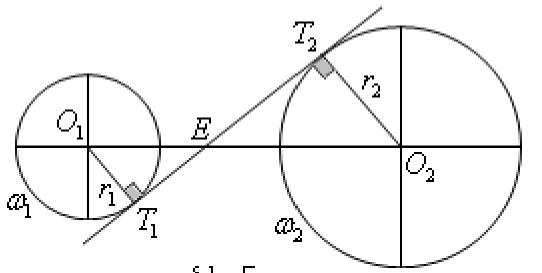


նկ. 3

բ) շրջանագծերն ունեն ոչ հավասար շառավիղներ՝ $r_1, r_2$: Նշանակենք $O_1O_2 =$ $O_1E =$ Շրջանագծերի ներքին շոշափողը կառուցելու համար պետք որոշել $E$ կետի դիրքը $T_1T_2$ ուղղի վրա (նկ. 5): $O_1T_1E$ և $O_2T_2E$ ուղղանկյուն եռանկյունները նման են,



նկ. 4



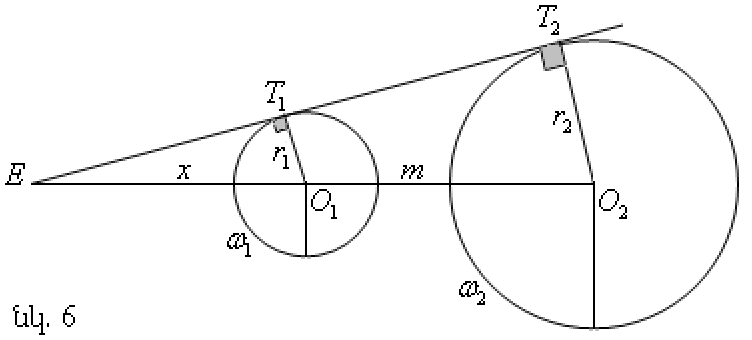
նկ. 5

ուստի $\frac{EO_2}{O_1E} = \frac{}{r_1}$ կամ $m - \quad = \quad \Rightarrow \frac{}{m} = \frac{}{r_1 + }$

Ստացված հարաբերությունից $x$ մեծության գտնելը կոչվում է տրված 3 հատվածների 4-րդ համեմատականի կառուցում, որի կառուցումը հենված է Թալեսի թեորեմին (նկ. 4):

$E$ կետը կառուցելուց հետո շրջանագծերին տրված $E$ կետից շոշափողի կառուցումը շարադրված է 7-րդ դասարանի 179 խնդրում:

Դիտարկենք հաջորդ դեպքը: Երկու շրջանագծեր ունեն արտաքին շոշափող, որի կառուցումը հենված է նորից եռանկյունների նմանությանը:



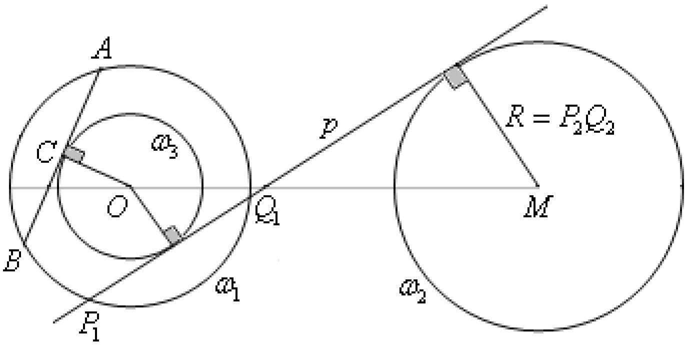
նկ. 6

Նշանակենք $O_1O_2 =$ $O_1E =$ $O_1T_1E$ և $O_2T_2E$ ուղղանկյուն եռանկյունները նման են, ուստի $EO_2 : O_1E =$ կամ0000000000

$m + \quad = \quad \Rightarrow \frac{}{m} = \frac{}{r_2 - }$ Այս առնչությունից որոշվում $O_1E =$ հատվածը և կառուցում շրջանագծերի կենտրոնները միացնող ուղղի վրա $E$ կետը, այնուհետև կառուցում շրջանագծերին շոշափող համաձայն 179 խնդրի (նկ. 6):

**497.** Տրված են $O$ կենտրոնով շրջանագիծը, $M$ կետը և $P_1Q_1$, $P_2Q_2$ հատվածները: Կառուցեք այնպիսի $p$ ուղիղ, որ շրջանագիծը նրանից անջատի $P_1Q_1$-ին հավասար լար, և $M$ կետի հեռավորությունը $p$ ուղղից հավասար լինի $P_2Q_2$-ին:

*Լուծում:* Թող $O$ կենտրոնով շրջանագիծը $\omega$ է: $M$ կետից $P_2Q_2$ հեռավորությամբ կետերի բազմությունը $\omega$ շրջանագիծն է: $p$ ուղիղը $\omega$ շրջանագծից կտրում է լար $P_1Q_1$

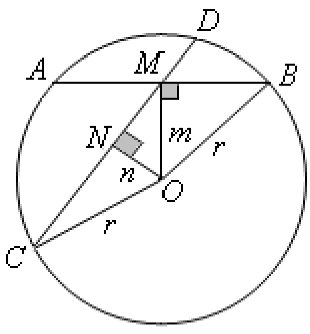


նկ. 7

երկարությամբ: Տրված շրջանագծի հավասար երկարությամբ լարերի միջնակետերի երկրաչափական տեղը այդ շրջանագծին համակենտրոն շրջանագիծ է, որը կառուցվում է հետևյալ կերպ: Կառուցենք կամայական $AB =$ լարը, նրա $C$ կետում միջնուղղահայաց, որը կանցնի $O$ կետով (նկ. 7): $\omega$ շրջանագիծը $AB$ երկարությամբ լարերի միջնակետերի երկրաչափական տեղն է: Այսպիսով պետք է կառուցել $\omega$ և $\omega$ շրջանագծերի ընդհանուր շոշափողը, իսկ դա խնդիր 496 –ն է:

**498.** Շրջանագծի ներսում տրված է մի կետ: Կառուցեք այդ կետով անցնող այն լարը, որն այդ կետով անցնող բոլոր լարերից փոքրագույնն է:

*Լուծում:* Այդ կետը նշանակենք $M$ -ով: Կառուցենք $M$ կետով անցնող երկու լար, մեկը ուղղահայաց շրջանագծի $OM$ տրամագծին՝ $AB$, մյուսը կամայական՝ $CD$: Ապացուցենք, որ $AB <$ 00000 Կառուցենք այդ լարերի միջնուղղահայացները՝ $m$ և $n$: $MNO$ ուղղանկյուն եռանկյան մեջ մի հատվածը էջ է, իսկ մյուսը ներքնաձիգ, ուստի $n <$ (նկ. 8): Այժմ համեմատենք $M$ կետով անցնող լարերի երկարությունները.



նկ. 8

$AB = \quad - \quad = \quad -$

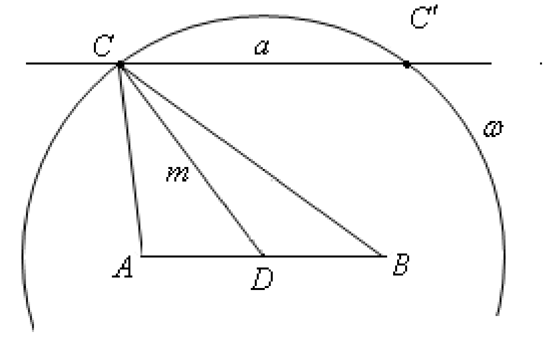
Համեմատելով արմատատակ արտահայտություն-ները համոզվում ենք որ $AB <$

Այսպիսով շրջանի յուրաքանչյուր կետով անցնում է շրջանագծի մեկ ամենակարճ երկարությամբ և մեկ ամենամեծ երկարությամբ լար:

Ամենաերկար լարը այդ կետով անցնող տրամագիծն է, իսկ ամենակարճը՝ այդ կետով անցնող տրամագծին ուղղահայաց լարը: Եթե ամենակարճ լարը նշանակենք $m$ -ով, իսկ շրջանագծի շառավիղը $r$ -ով, ապա կգրենք, որ $M$ կետով անցնող յուրաքանչյուր $CD$ լար բավարարում է $2\sqrt{r^2 - \quad} < \quad <$ անհավասարությանը (նկ. 8):

**232.** Կառուցեք եռանկյունը՝ նրա տրված մի կողմով և այդ կողմին տարված միջնագծով ու բարձրությունով:

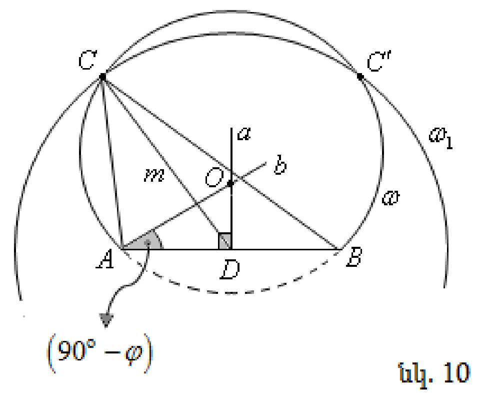
*Լուծում:* Թող $AB$-ն տրված հատվածն է: Կառուցենք $AB$-ին զուգահեռ $a$ ուղիղը, որը նրանից գտնվում է տրված $h$ հեռավորությամբ: Կառուցենք $\omega$ շրջանագիծը, որտեղ $D$-ն $AB$ հատվածի միջնակետն է, իսկ $m$-ը այդ կողմին տարված միջնագիծը, որը ևս տրված է: Կառուցենք $\omega$ շրջանագծի և $a$ ուղղի հատման կետերը՝ $C$ և $C'$: $ACB$ և $AC'$ եռանկյունները բավարարում են խնդրի պահանջներին: Հնարավոր են երեք դեպք, խնդիրը ունի երկու լուծում (նկ. 9), ունի մեկ լուծում, երբ $\omega$ շրջանագիծը շոշափում է $a$ ուղղին, և լուծում գոյություն չունի, երբ $\omega$ շրջանագիծը և $a$ ուղիղը չեն հատվում :



նկ. 9

**233.** Կառուցեք եռանկյունը՝ նրա տրված մի կողմով, նրա հանդիպակած անկյունով և այդ կողմին տարված միջնագծով:

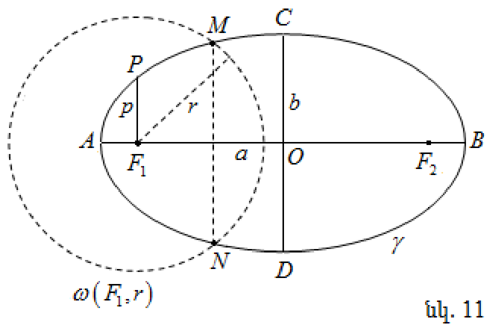
*Լուծում:* Թող $AB$-ն եռանկյան տրված կողմն է: Կետերի բազմությունը որից $AB$ հատվածը երևում է $\varphi$ անկյան տակ շրջանագծային սեգմենտ է, որը կառուցելու համար. կառուցում ենք $AB$ հատվածի միջնուղղահայաց $a$ ուղիղը: Շրջանագծի կենտրոնից՝ $O$ կետից $AB$ հատվածը երևում է $2\varphi$ անկյան տակ: Այսինքն $\angle \quad = \quad \Rightarrow \angle \quad = \quad - \quad$: Այսպիսով կառուցենք $\angle \quad = \quad -$ անկյունը, այնուհետև $O = \quad \cap$ Կառուցենք $\omega$ շրջանագիծը, այնուհետև $\omega$ շրջանագիծը: $\omega \cap \quad =$ $ACB$ և $AC'$ եռանկյունները բավարարում են խնդրի պահանջներին: Հնարավոր են երեք դեպք, խնդիրը ունի երկու լուծում (նկ. 10), ունի մեկ լուծում, երբ $\omega$-ն շոշափում է $\omega$-ին, և լուծում գոյություն չունի, երբ $\omega$-ն և $\omega$-ը չունեն ընդհանուր կետ:



նկ. 10

**234.** Տրված է էլիպսը և նրա կիզակետերից մեկը: Կարկինի և քանոնի օգնությամբ կառուցել մյուս կիզակետը:

*Լուծում:* $F_1$-ը էլիպսի կիզակետերից մեկն է: Կառուցենք $\omega(F_1, r)$ շրջանագիծը, թող այն հատում է էլիպսը $M$ և $N$ կետերում: Կառուցենք $MN$ հատվածի միջնուղղահայացը, ակընհայտ է, որ այն կհատի էլիպսը նրա գագաթներում՝ $A$ և $B$: Կառուցենք $AB$ հատվածի միջնուղղահայացը, որը էլիպսը կհատի փոքր առանցքի $C$ և $D$ գագաթներում (նկ. 11) : Կառուցենք $F_1$ կետի համաչափը $CD$ առանցքի նկատմամբ՝ կստանանք $F_2$-ը՝ մյուս կիզակետը:



նկ. 11

**235.** Տրված է էլիպսը և նրա համաչափությա երկու առանցքները: Կարկինի օգնությամբ կառուցեք նրա կիզակետերը:

*Լուծում:* Այս խնդիրը լուծելու օգտվենք էլիպսի սահմանումից: Թող նրա կիսաառանցքներն են $a, b$ :Հետևաբար էլիպսի $M$ կետերի բազմության համար՝ $MF_1 +$ _ =

Այդ ժամանակ $CF_1 +$ _ = = ⇒ _ = ⇒ _ = (նկ. 12):

$OF_1 =$ − ⇒ _ = − −

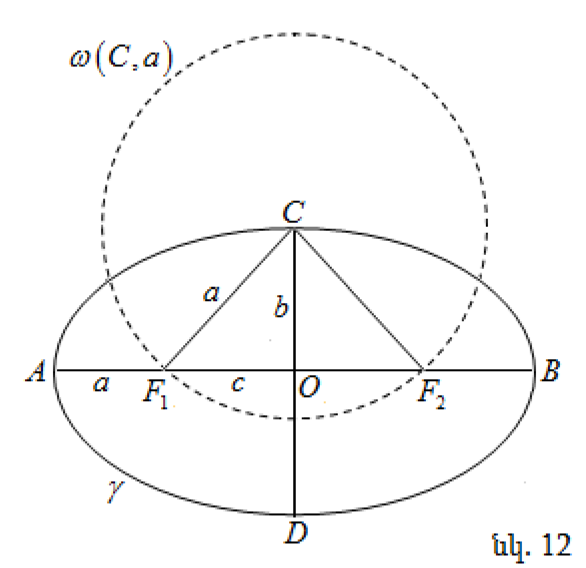
Բայց $AF_1 +$ _ = , կամ

$a -$ − + + − = ⇒

⇒ = ⇒ =

Այսպիսով էլիպսի սահմանումի մեջ նշվող հաստատուն մեծությունը հավասար է էլիպսի մեծ առանցքի երկարությանը, այսինքն $MF_1 +$ _ = $CF_1 =$ _ =

Ստացվածից հետևում է, որ էլիպսի կիզակետերը կառուցելու համար. կառուցում ենք $\omega$ շրջանագիծը, այնուհետև կառուցում $\omega$ ∩ = _ _ հատման կետերը:



նկ. 12

## *Օգտագործված գրականություն*


1. Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ.Կադոմցև, Է. Գ.Պոզնյակ, Ի. Ի. Յուդինա, Երկրաչափություն 7, Երևան, <<Աստղիկ>> հրատարակչություն, 2005 թ:

2. Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով, Ս. Բ.Կադոմցև, Է. Գ.Պոզնյակ, Ի. Ի. Յուդինա, Երկրաչափություն 7, Երևան, <<Աստղիկ-59>> հրատարակչություն, 2000 թ:

3. В. Г. Болтянский, И. М. Яглом, Геометрия для 9 класса, Учебно-педагогическое издательстжо, М. 1963 г.

4. И. М. Яглом, Геометрические преобразования, Издательство технико-теоретической литературы, М. 1955 г.



**Տեղեկություններ հեղինակի մասին**

Ռուդիկ Առաքելյան ԱրՊՀ, մաթեմատիկայի ամբիոն, մ.գ.թ., դոցենտ

E-mail: rud49@mail.ru


Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.թ., Գ.Հ.Սահակյանը: