ՀՏԴ 518:517. 944/.947   Կիրառական մաթեմատիկա

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐՐԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ԲԱԶԻՍԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ԸՆՏՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Յուրի ԴԱԴԱՅԱՆ

Բանալի բառեր. վերջավոր տարրերի մեթոդ, ցանց, բազիսային ֆունկցիաներ, կտոր առ կտոր բազմանդային լրացումներ, Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիր, թվային հաշվարկ:
Ключевые слова: метод конечных элементов, базисные функции кусочно-полиномальные восполнения, задача Штурма-Лиувиля, численные расчеты.
Keywords: finite element method, basis functions, Sturm-Liouville problem, numerical calculations

Ю. Дадаян
Об одном способе выбора базисных функций в методе конечных элементов

Были построены координатные функции кусочно-квадратичного восполнения для решения задачи Штурм-Лиувила методом конечных элементов. Полученные результаты подтверждены численными расчетами.

Yu.Dadayan
On a basis functions selection of the finite element method

We construct piecewise quadratic basis functions to solve the Sturm-Liouville problem by the finite element method. The obtained results are confirmed by numerical calculations.

Շտուրմ-Լիուվիլի խնդրի վերջավոր տարրերի մեթոդով լուծելու համար կառուցված են կտոր առ կտոր քառակուսային լրացումների կոորդինատական ֆունկցիաներ: Ստացված արդյունքները հաստատված են թվային հաշվարկներով:

Սովորաբար վերջավոր տարրերի մեթոդում (ՎՏՄ) որպես կոորդինատային ֆունկցիաներ վերցնում են կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիաներ: Այս աշխատանքում կկառուցենք կտոր առ կտոր քառակուսային բազիսային ֆունկցիաներ և ցույց կտանք, որ մոտավոր լուծումը նույն թվով անհայտների դեպքում կլինի ոչ միայն ավելի ճշգրիտ, այլ նաև ավելի ողորկ:

Դիտարկենք

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u(x)=f(x),\quad 0<x<1 \tag{1}$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը

$$u(x)=u(1)=0 \tag{2}$$

եզրային պայմաններով, որտեղ

$$p(x)\ge p_0>0,\quad q(x)\ge 0,\qquad f(x)\in L_2(0,1): \tag{3}$$

Այս եզրային խնդիրը պարզ, բայց բավականաչափ բովանդակալից մոդել է ավելի դժվար կիրառական խնդիրների համար. օրինակ, այն նկարագրում է անհամասեռ ձողում ջերմաստիճանի բաշխումը:

Բազմապատկենք (1) հավասարման երկու կողմը կամայական $g(x)\in \overset{0}{w}{}_2^1(0,1)$ ֆունկցիայով և ինտեգրենք

$$-\int_0^1\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)g(x)\,dx+\int_0^1 q(x)\,u(x)\,g(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx:$$

Առաջին ինտեգրալում կատարելով մասերով ինտեգրում և օգտվելով (2) պայմաններից կստանանք

$$\int_0^1\left(p(x)u'(x)g'(x)+q(x)u(x)g(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx \tag{4}$$

ինտեգրալ նույնությունը:

Սակայն ի տարբերություն (1) հավասարման, որի լուծումը $C_2^0(0,1)$ տարածությունից է, (4) նույնությունն իմաստ ունի $\overset{0}{w}{}_2^1(0,1)$ տարածության ֆունկցիաների համար: Ուստի կարելի է տալ լուծման այլ սահմանում, ավելի թույլ ձևակերպմամբ:

Սահմանում1: $u(x) \in \overset{0}{w}{}_2^1(0,1)$ ֆունկցիան կոչվում է (1)-(2) եզրային խնդրի ընդհանրացված լուծում, եթե այն բավարարում է (4) ինտեգրալ նույնությանը, կամայական $g(x) \in \overset{0}{w}{}_2^1(0,1)$ ֆունկցիայի համար:

Որպեսզի գտնենք (1)-(2) խնդրի մոտավոր լուծումը վերջավոր տարրերի մեթոդով [0,1] հատվածը տրոհենք զույգ թվով հավասար մասերի *h=1/2N* քայլով, բաժանման կետերը նշանակենք $x_n=nh$, $n=0,1,2,\ldots,2N$: Նշված կետերից x_0-ն և x_{2n}-ը կանվանենք սահմանային հանգույցներ, իսկ մնացածները՝ ներքին հանգույցներ:

Ամեն մի ներքին հանգույցին համապատասխանության մեջ դնենք մի ֆունկցիա, որը կտոր առ կտոր քառակուսային է, ընդ որում այդ ֆունկցիաները համապատասխան հանգույցում ընդունում են 1 արժեք, իսկ մնացածներում՝ 0 արժեք: Այդ ֆունկցիաները կանվանենք բազիսային ֆունկցիաներ:

Կենտ համարով ներքին հանգույցներում բազիսային ֆունկցիաները կսահմանենք հետևյալ կերպ

$$\varphi_{2n+1}(x)=\begin{cases}0, & x<x_{2n},\\ 1-\dfrac{(x-x_{2n+1})^2}{h^2} & x_{2n}\le x\le x_{2n+2}\\ 0, & x>x_{2n+2}\end{cases}$$

որտեղ n=0,1,2,…,N-1, իսկ զույգ համարով ներքին հանգույցներում բազիսային ֆունկցիաներն ունեն հետևյալ տեսքը

$$\varphi_{2n}(x)=\begin{cases}0, & x<x_{2n-2},\\ 1+\dfrac{3(x-x_{2n})}{2h}+\dfrac{(x-x_{2n})^2}{2h^2}, & x_{2n-2}\le x\le x_{2n},\\ 1-\dfrac{3(x-x_{2n})}{2h}+\dfrac{(x-x_{2n})^2}{2h^2} & x_{2n}\le x\le x_{2n+2},\\ 0, & x>x_{2n+2},\end{cases}$$

որտեղ n=1,2,…,N-1:

Ածանցելով $\varphi_{2n+1}(x)$ և $\varphi_{2n}(x)$ ֆունկցիաները համապատասխանաբար կստանանք

$$\varphi'_{2n+1}(x)=\begin{cases}0, & x<x_{2n},\\ -\dfrac{2(x-x_{2n+1})}{h^2}, & x_{2n}\le x\le x_{2n+2},\\ 0, & x>x_{2n+2},\end{cases}$$

և

$$\varphi'_{2n}(x)=\begin{cases}0, & x<x_{2n-2},\\ \dfrac{3}{2h}+\dfrac{(x-x_{2n})}{h^2}, & x_{2n-2}\le x\le x_{2n},\\ -\dfrac{3}{2h}+\dfrac{(x-x_{2n})}{h^2}, & x_{2n}\le x\le x_{2n+2},\\ 0, & x>x_{2n+2}:\end{cases}$$

Այն բոլոր ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք անընդհատ են [0,1] հատվածում, բավարարում են (2) պայմանին և որոնց ածանցյալները կտոր առ կտոր գծային են, հանդիսանում են $\overset{0}{w}{}_2^2(0,1)$ տարածության ենթատարածություն $\varphi_k(x)$, k=1,2,3, …,2N-1 բազիսով: Նշանակենք այդ ենթատարածությունը $\overset{0}{H}_h$ -ով: Ամեն մի $v(x)\in \overset{0}{H}_h$ ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել

$$v(x)=\sum_{k=1}^{2N-1} v_k\varphi_k(x)$$

տեսքով:

Ակնհայտ է, որ $v(0)=v(1)=0$:

Սահմանում 2: $\tilde v(x)$ ֆունկցիան կանվանենք (1)-(2) եզրային խնդրի մոտավոր լուծում, եթե կամայական $\varphi_\ell(x), \ell=1,2,\ldots,2N-1$ բազիսային ֆունկցիայի համար

$$\sum_{k=1}^{2N-1}\tilde v_k\int_0^1\left[p(x)\varphi'_k(x)\varphi'_\ell(x)+q(x)\varphi_k(x)\varphi_\ell(x)\right]dx=\int_0^1 f(x)\varphi_\ell(x)\,dx: \tag{5}$$

Քանի որ $v(x_n) = v_n$, n=1,2,…,2N-1, ապա անհայտները հանդիսանում են (1)-(2) խնդրի ճշգրիտ լուծման մոտավոր արժեքները ցանցի հանգույցներում:
Կատարենք

$$(\varphi_k', \varphi_\ell') = \int_0^1 \left(p(x)\varphi_k'(x)\varphi_\ell'(x) + q(x)\varphi_k(x)\varphi_\ell(x)\right)dx,\ k,\ell=1,2,\dots,2N-1,$$

$\overline{V} = (v_1, v_2, \dots, v_{2N-1})^T$ և $\overline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{2N-1})^T$ նշանակումները, որտեղ

$$f_\ell = \int_0^1 f(x)\varphi_\ell(x)dx,\ \ell=1,2,\dots,2N-1:$$

(5) համակարգը կարող ենք գրել

$$A\overline{V} = \overline{f}$$

տեսքով:
Սահմանում 3: Եթե $(\varphi_k, \varphi_\ell) = 0$, ապա $\varphi_k(x)$ և $\varphi_\ell(x)$ բազիսային ֆունկցիաները կանվանենք օրթոգոնալ:
Ամեն մի $\varphi_{2n+1}(x)$ բազիսային ֆունկցիա օրթոգոնալ է բոլոր մնացածներին բացառությամբ $\varphi_{2n}(x)$, $\varphi_{2n+2}(x)$ և $\varphi_{2n+1}(x)$-ի, իսկ $\varphi_{2n}(x)$-ը՝ բացառությամբ $\varphi_{2n-2}(x)$, $\varphi_{2n-1}(x)$, $\varphi_{2n}(x)$, $\varphi_{2n+1}(x)$ և $\varphi_{2n+2}(x)$-ի, անկախ ցանցի հանգույցների քանակից: Սա ՎՏՄ-ի կոորդինատային ֆունկցիաների ընդհանուր և բավականին կարևոր հատկություն է: Այսպիսով ստացանք, որ A մատրիցը սիմետրիկ է և հինգ անկյունագծային, ընդ որում մատրիցի միայն հետևյալ տարրերն են զրոյից տարբեր:

$$(\varphi_{2n+1}, \varphi_{2n+1})\ n=0,1,\dots,N-1,$$
$$(\varphi_{2n}', \varphi_{2n}')\quad n=1,2,\dots,N-1,$$
$$(\varphi_{2n-1}, \varphi_{2n}) = (\varphi_{2n}, \varphi_{2n-1})\ n=1,2,\dots,N-1,$$
$$(\varphi_{2n}, \varphi_{2n+1}) = (\varphi_{2n+1}', \varphi_{2n}')\ n=1,2,\dots,N-1,$$
$$(\varphi_{2n}, \varphi_{2n+2}) = (\varphi_{2n+2}', \varphi_{2n}')\ n=1,2,\dots,N-2:$$

Հաշվարկները կատարվել են (1), (2) մոդելային խնդրի համար, երբ $p(x) = e^x$, $q(x)=0$,

$f(x) = 3 - 2x$, որի ճշգրիտ լուծումը $u(x) = (x - x^2)e^{-x}$ ֆունկցիան է: Վերցնելով N=10 A մատրիցի ոչ զրոյական տարրերի հաշվման համար ստացվել են հետևյալ բանաձևերը

$$(\varphi_{2n-1}, \varphi_{2n-1}) = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} (\varphi_{2n-1}'(x))^2 e^x dx = 19{,}5597 \cdot e^{2nh},\ n=0,1,2,3,4,$$

$$(\varphi_{2n}, \varphi_{2n}) = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n+2}} (\varphi_{2n}'(x))^2 e^x dx = 18{,}5483 \cdot e^{2(n-1)h},\ n=1,2,3,4,$$

$$(\varphi_{2n-1}, \varphi_{2n}) = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} (\varphi_{2n-1}'(x)\varphi_{2n}'(x))^2 e^x dx = -5{,}5174 \cdot e^{2(n-1)h},\ n=1,2,3,4,$$

$$(\varphi_{2n}, \varphi_{2n+1}) = \int_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} \varphi_{2n}'(x)\varphi_{2n+1}'(x)\, e^x dx = -7{,}1513 \cdot e^{2(n-1)h},\ n=1,2,3,4,$$

$$(\varphi_{2n}, \varphi_{2n+2}) = \int_{x_{2n}}^{x_{2n+2}} \varphi_{2n}'(x)\varphi_{2n+2}'(x)\, e^x dx = 1{,}2655 \cdot e^{2(n-1)h},\ n=1,2,3,$$

որտեղ h=0,1, իսկ աջ մասի համար ստացվել են՝

$$f_{2n-1} = \frac{29 - 2n}{75},\quad n=0,1,2,3,4,$$

$$f_{2n} = \frac{15 - n}{75},\ n=1,2,3,4$$

բանաձևերը:
Հաշվարկները կատարվել են MATLAB փաթեթի միջոցով N=10 դեպքում, արդյունքում ստացել ենք

$$\max_{1\le n\le}\left|u(x_n)-\nu_{..}\right| =),00038$$

Հաշվարկները ցույց են տալիս առաջարկվող բազիսային ֆունկցիաների դեպքում ՎՏՄ-ը տալիս է բավականաչափ բարձր կարգի ճշտություն:

Գրականություն

1. Դադայան Յու.Գ., Ստեփանյան Ս.Պ. Վերջավոր տարրերի մեթոդը և կիրառությունները: Երևան, ԵՊՀ հրատարակչություն, 2013, 134 էջ:
2. Оганисян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван, 1979, 236 с.

Տեղեկություններ հեղինակի մասին.

Յուրի Դադայան – ֆ.մ.գ.թ., ԵՊՀ թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի վարիչ
e-mail Yudadayan@yandex.ru

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.թ., Գ.Հ.Սահակյանը: