ՀԱԴ 512.1 *Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա*

ՎԵՑ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԱՆԿՅԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ռոբերտ ՄՈՒՍԱՅԵԼՅԱՆ

Բանալի բառեր. *Վեց աստիճան, եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ, հավասարում, արժեքների հաշվում, լուծում, իռացիոնալ թիվ:*

Ключевые слова: *шесть градусов, тригонометрические функции, уравнение, определение значений, решение, иррациональное число:*

Keywords: *six degrees, trigonometrical funstions, equation,* calculation of the values, *solution, irrational.*

Р. Мусаелян

О РАСЧЕТЕ ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УГЛА РАВНОГО ШЕСТИ ГРАДУСАМ

Работа посвящена определению значения тригонометрических функции 6 градусов. Для этого используется два подхода. В первом случае, используя формулы суммы и разности, находим значения $\sin 6^0$ *и* $\cos 6^0$. *Далее, используя формулы двойного аргумента, определяются значения тригонометрических функции 12-градусного угла. Во втором случае, используя формулу тройного аргумента для функции синус, находим значение* $\sin 6^0$, *решая при этом уравнение третьей степени свободный член которого-иррациионaльное число.*

R. Musaelyan

ON THE CALCULATION OF THE VALUES OF THE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS OF THE SIX DEGREE ANGLE

The following work discusses the calculation of the values of the trigonometric functions of the six-degree angle. Two approaches are applied for this purpose. In case of the first approach, by using the trigonometric formulas of the sum and the difference we find the values for sin6° and cosine 6°. Afterwards, by identifying the formulas of the trigonometric functions of the double argument we calculate the values for the trigonometric functions for 12°. In the second case, by using the formula of the triple argument of the sine we identify the value for sin 6°, thus solving the third degree equation, whose free member is a functional expression.

Աշխատանքը նվիրված է 6 աստիճանի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքների հաշվմանը: Դրա համար ցուցաբերվում է երկու մոտեցում: Առաջին մոտեցման դեպքում օգտագործելով գումարի և տարբերության եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը՝ գտնում ենք $\sin 6^0$*-ի և* $\cos 6^0$*-ի արժեքները երկու իռացիոնալ արտահայտությունների գումարի տեսքով: Այնուհետև օգտագործելով կրկնակի արգումենտի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերը՝ հաշվում ենք 12 աստիճանի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները: Երկրորդ դեպքում օգտվելով սինուսի եռակի արգումենտի բանաձևից՝ գտնում ենք* $\sin 6^0$ *արժեքը, ընդ որում լուծելով 3-րդ աստիճանի հավասարում, որի ազատ անդամը իռացիոնալ արտահայտություն է:*

1. Օգտվելով երկու անկյունների գումարի և տարբերության եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հայտնի բանաձևերից [1]՝ կստանանք՝

$$\begin{cases} \sin 6^0 .\ \cos 30^0 + \sin 30^0 .\ \cos 6^0 = \sin 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\ \sin 6^0 .\ \sin 30^0 - \cos 30^0 .\ \cos 6^0 = -\cos 36^0 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} \end{cases} \quad (1)$$

համակարգը $\sin 6^0$-ի և $\cos 6^0$ անհայտների նկատմամբ: Նշենք, որ այստեղ 36^0 -ի անկյան սինուսի և կոսինուսի արժեքների գրանցման համար առաջնորդվել ենք [2] աշխատանքով: $m = \sin 6^0$ և $k = \cos 6^0$ նշանակումներից և հայտնի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքների տեղադրումից հետո համակարգը կընդունի

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}m+\frac{1}{2}k=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\ \frac{1}{2}m-\frac{\sqrt{3}}{2}k=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\end{cases} \qquad (1')$$

տեսքը: Լուծենք (1′) համակարգը Կրամերի կանոնով [3], որը երկու և երեք անհայտների դեպքերում կիրառելի է նաև դպրոցում: Համակարգի հիմնական որոշիչը կլինի՝

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{1}}{2}\\ \frac{\sqrt{1}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=-1:$$

Լրացուցիչ որոշիչները հաշվենք հաջորդաբար.

$$\Delta_m=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} & \frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{5}+1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=-\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}+\frac{\sqrt{5}+1}{8} \qquad (2)$$

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}+1}{-4}\end{vmatrix}=-\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \qquad (3)$$

Համաձայն Կրամերի կանոնի՝

$m=\frac{\Delta_m}{\Delta}$ ⍰ $k=\frac{\Delta_k}{\Delta}$:

Հաշվի առնելով նշանակումները՝ կստանանք

$$\sin 6^0=\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}-\frac{\sqrt{5}+1}{8} \qquad (4)$$

$$\cos 6^0=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}+\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8} \qquad (5)$$

Այժմ հաշվենք նախ $tg6^0$ –ը, իսկ այնուհետև $ctg6^0$-ը: Նշենք, որ հաշվարկների հարմարության համար օգտվելու ենք հետևյալ նույնությունից.

$$\sqrt{5}+1=\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}:$$

$$tg6^0=\frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\sqrt{6+2\sqrt{5}}}=\cdots=\frac{1}{2}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{18-6\sqrt{5}}\right): \qquad (6)$$

$$ctg6^0=\frac{1}{tg6^0}=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{18-6\sqrt{5}}}=\cdots=\frac{1}{2}\left(\sqrt{50+22\sqrt{5}}+\sqrt{42+18\sqrt{5}}\right): \qquad (7)$$

Այժմ դուրս բերենք 12^0-ի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները: Դրա համար օգտվենք նախ կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հետևյալ բանաձևից.

$$\cos 12^0=2\cos^2 6^0-1=2\left(\frac{1}{8}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{18+6\sqrt{5}}\right)\right)^2-1=$$

$$=\cdots=\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right) \qquad (8)$$

Այստեղ մենք հարմարության համար (5) բանաձևի երկրորդ գումարելու համարիչը ձևափոխեցինք այսպես՝

$$\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)=\sqrt{3}\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}=\sqrt{18+6\sqrt{5}}:$$

Հաշվենք $\sin 12^0$-ը:

$$\sin 12^0=2\sin 6^0\cdot\cos 6^0=2\cdot\frac{1}{64}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{18+6\sqrt{5}}\right)=\cdots=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\right) \qquad (9)$$

Հաշվենք $tg12^0$-ը և $ctg12^0$-ը հաջորդաբար

$$tg12^0=\frac{\sin 12^0}{\cos 12^0}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\cdots=\frac{1}{2}\left(\sqrt{42-18\sqrt{5}}-\sqrt{50-22\sqrt{5}}\right) \qquad (10)$$

$$ctg12^0=\frac{1}{tg12^0}=\frac{2}{\sqrt{42-18\sqrt{5}}-\sqrt{50-22\sqrt{5}}}=\cdots=\frac{1}{2}\left(\sqrt{18+6\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right): \qquad (11)$$

2. Վեց աստիճանի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները կարելի է փնտրել նաև այլ ճանապարհով, թեպետ դրանք բերվում են խորանարդ աստիճանի հավասարումների: Դիտարկենք այդ հավասարումներից, օրինակ, $\sin 6^0$-ին համապատասխանողը: Հայտնի է, որ [1]

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha:$$

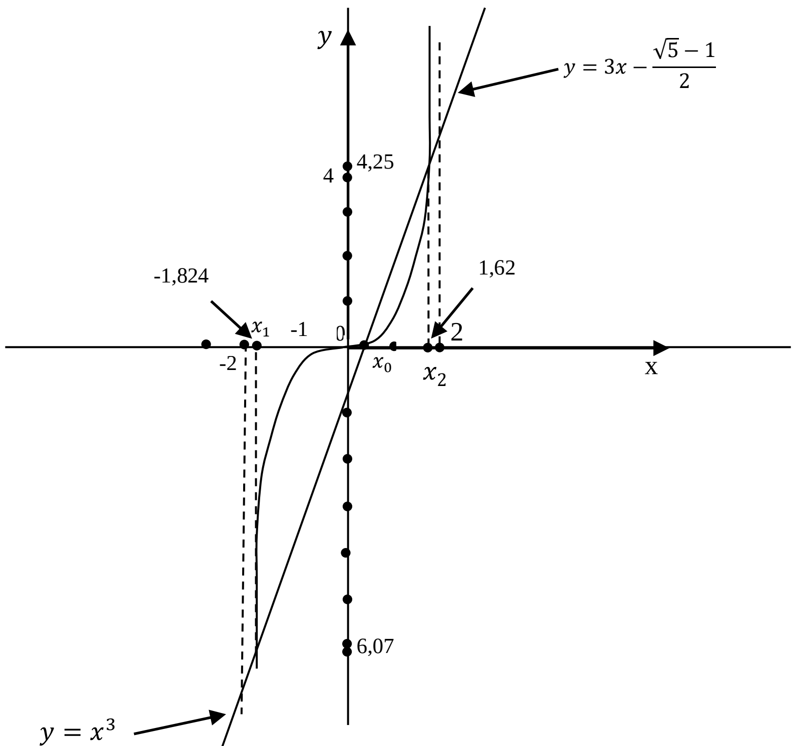
Ուրեմն, եթե $\alpha=6^0$ (կամ $\alpha=\frac{\pi}{30}$ □□□.), ապա կունենաք՝

$$4\sin^3 6^0-3\sin 6^0+\frac{\sqrt{5}-1}{4}=0 \qquad (12)$$

$x=2\sin 6^0$ նշանակումով (12) հավասարումը կգրվի այսպես՝

$$x^3-3x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0 \qquad (12')$$

Այս հավասարման համար կիրառելի չէ Կարդանոյի բանաձևը [3], թեկուզ այն դուրս է դպրոցական ծրագրից: Ցույց տանք, որ այս հավասարումն ունի երեք իրական լուծում: Դրա համար դիտարկենք $y=x^3$ և $y=3x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ֆունկցիաները: Այդ ֆունկցիաները մոնոտոն աճող են և հատվում են երեք կետում, որոնց աբսցիսների մոտավոր արժեքները նշված են նկարում x_1, x_0, x_2 կետերով:



Փորձենք նախքան (12′) հավասարման հանրահաշվական լուծման շարադրանքին անցնելը, դիտարկումները դատողություններով հիմնավորել: Այդպիսի հավասարման լուծման լավագույն եղանակն, արտադրիչների վերլուծելու եղանակն է, որն ընդունված է նաև դպրոցական դասընթացում: Նշենք, որ արտադրիչներից մեկի միջոցով էլ ծնվում է հավասարման լուծումներից մեկը: Ստացվում է, որ արտադրիչների վերլուծման հիմքում ընկած է հավասարման արմատներից մեկը: Եթե մենք փորձենք (12′) հավասարումը վերլուծել արտադրիչների՝ հենվելով (12) հավասարման (4) լուծման վրա, ապա կհանդիպենք լուրջ դժվարությունների՝ որպես իռացիոնալ արտահայտությունների հետ գործողությունների: Դրա համար (12′) հավասարման ձախ մասը վերլուծենք արտադրիչների՝ հենվելով նկարի վրա պատկերված x_2 արմատի մոտավոր արժեքին:

Կունենանք՝

$$x^3-(\sqrt{5}+2)-3x+\sqrt{5}+2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=x^3-(\sqrt{5}+2)-3\left(x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=0: \quad (13)$$

Բայց պարզագույն հաշվարկով համոզվում ենք, որ

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3=\sqrt{5}+2:$$

Ուրեմն՝ (13) հավասարումը կգրվի այսպես՝

$$\left(x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+\frac{2\sqrt{5}-6}{4}\right)=0:$$

Այս հավասարումից կստանանք՝

$$x_2=\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad ▯▯▯ \quad x^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+\frac{2\sqrt{5}-6}{4}=0:$$

x_2–ը՝ գրաֆիկական լուծմանը համապատասխանողն է և չի բավարարում (12) հավասարմանը, որովհետև $\sin 6^0<\sin 30^0=1/2$: Մնում է (12) հավասարման լուծումը փնտրել վերը նշված քառակուսային հավասարման լուծումների մեջ: Դրանք հետևյալն են՝

$$x_1=\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$
$$x_0=\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{4}-\frac{\sqrt{5}+1}{4}:$$

x_1-ը բացասական թիվ է, իսկ $\sin 6^0={}^1\!/_2\,x_1$: Բայց $\sin 6^0$-ը չի կարող բացասական թիվ լինել: Ստացվեց, որ (12) հավասարման միակ լուծումը կորոշվի x_0 –ի միջոցով և կլինի (4) բանաձևով տրվածը: Նշենք, որ $x_0=2\sin 6^0$ թիվը, լինելով (12′) հավասրաման լուծում, ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն: Եթե դիտարկենք միավոր շառավղով շրջանագծի 12^0 –ի հավասար կենտրոնական անկյունը ապա նրան ձգող լարի երկարությունը կլինի կանոնավոր ներգծյալ 30- անկյուն բազմանկյան կողմի՝ a_{30}-ի արժեքը, և այն էլ հավասար է $x_0=2\sin 6^0$ թվին:

Նախորդ կետի նման ձևով ունենալով $\sin 6^0$-ի թվային արժեքը՝ կարող ենք առանց դժվարությունների հաշվել այդ անկյան $\left(\alpha=6^0\right)$ և $2\alpha=12^0$-ի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

3. Օգտագործելով ստացված արդյունքները և կիրառելով եռանկյունաչափական ֆունկցիաների անհրաժեշտ բանաձևերը՝ ստանանք 24^0-ի (կամ $\frac{2\pi}{15}$ռադ.) եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները: Նախ օգտվելով կես անկյան

կոսինուսի բանաձևից և արդեն ստացված $\cos 12^0$-ի արժեքից՝ հաշվենք $\cos 24^0$-ը: Կստանանք՝

$$\cos 24^0 = 2\cdot\cos^2 12^0 - 1 = 2\cdot\frac{1}{64}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)^2 - 1 =$$

$$= \dots = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right): \qquad (14)$$

Այժմ հաշվենք $\sin 24^0$-ը՝ օգտագործելով $\sin 12^0$ և $\cos 12^0$ արդեն հայտնի արժեքները՝ (8) և (9) բանաձևերով տրված:

$$\sin 24^0 = 2\sin 12^0\cdot\cos 12^0 = 2\cdot\tfrac{1}{64}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right)\cdot\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right) =$$

$$= \dots = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right): \qquad (15)$$

Նման ձևով հաշվենք նաև $tg24^0$ և $ctg24^0$ թվային արժեքները՝

$$tg24^0 = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1} = \dots = \quad = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{50+22\sqrt{5}}-\sqrt{42+18\sqrt{5}}\right) \qquad (16)$$

$$ctg24^0 = \frac{2}{\sqrt{50+22\sqrt{5}}-\sqrt{42+18\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{50+22\sqrt{5}}-\sqrt{42+18\sqrt{5}}\right)}{8+4\sqrt{5}} = \dots = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{18-6\sqrt{5}}\right):$$

Այսպիսով, երկու եղանակով հաշվված են 6^0 -ի անկյան, իսկ մեկ եղանակով՝ 12^0-ի և 24^0-ի անկյունների եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները: Նշենք, որ նույն հաջողությամբ կարելի է նշված ֆունկցիաների արժեքները հաշվել, օրինակ, 3^0-ի և 48^0-ի դեպքերում:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզ: Ավագ դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտական հոսքի համար): -Եր. “Տիգրան Մեծ”, 2009, 208 էջ:
2. Խաչատրյան Ա.Մ., Մարության Կ.Լ. Երեսունվեց աստիճանին հավասար անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հաշվման մասին: ԱրՊՀ Գիտական տեղեկագիր, 1/2016, էջ 20-25:
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. изд. <<Наука>> М. 1971. 432с.

Տեղեկություններ հեղինակի մասին.
Մուսայելյան Ռոբերտ Ծատուրի- Ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ
Գորիսի պետական համալսարան:
Հեռ. (+37494) 333 994
E-mail: rubmus49@gmail.com

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.դ. Ա.Մ. Խաչատրյանը: