ՀԱԴ 513 *Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա*

ՄԻ ՔԱՆԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԱՊԱՑՈՒՅՑՆԵՐԸ

Ռոբերտ ՄՈՒՍԱՅԵԼՅԱՆ

Բանալի բառեր. *եռանկյուն, քառանկյուն, կետեր, ուղիղ գիծ, ապացույց, հարաբերություն:*
Ключевые слова*: треугольник, четырехугольник, точки, прямая линия, доказательство, отношение:*
Key words*: triangle, quadrangle, points, line, prof, ratio.*

Դիտարկում են երեք նշանավոր թեորեմ, որոնց ապացույցները առավել հայտնի են եռանկյունաչափության կիրառությամբ, բարդ հանրահաշվական ձևափոխությունների կատարմամբ: Աշխատանքում բերվում են այդ թեորեմների ապացույցները, որոնցում չեն կիրառվում ո՛չ եռանկյունաչափության, ո՛չ էլ հանրահաշվական բարդ ձևափոխություններ: Ապացույցները, որոնցում հենվում են զուտ երկրաչափության վրա, անվանում ենք երկրաչափական:

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ

Р. Мусаелян

Рассматриваются три знаменитые теоремы, доказательства которых известны с применением тригонометри или сложных алгебраических преобразований. В работе приводятся доказательства этих теорем, без применения тригонометрию. Доказательства с опорой только на геометрию, назовем геометрическими доказательствами.

GEOMETRIC PROOFS OF SOME THEOREMS

R. Musayelyan

We observe three outstanding theorems, the proofs of which are mostly known by the application of trigonometry and making complicated algebraic changes. The work presents the proofs of these theorems without the application of either trigonometry or complicated algebraic changes. The proofs are completely based upon geometry and are called geometric proofs.

Դպրոցական դասընթացում հայտնի է եռանկյան մակերեսի հաշվման *Հերոնի բանաձևը* ([1], էջ 50), որի ապացույցը բերվում է եռանկյունաչափության կիրառմամբ, մասնավորաբար, օգտագործվում է կոսինուսների թեորեմը, կատարվում են հանրահաշվական ձևափոխություններ: Այստեղ ապացուցվում է այդ բանաձևը՝ չհենվելով եռանկյունաչափության վրա, չկիրառելով բարդ հանրահաշվական ձևափոխություններ: Ապացույցները, որոնք զերծ են դրանցից, որոնցում օգտագործվում են միայն երկրաչափական փաստեր կանվանենք երկրաչափական:

Թեորմա (Հերոն): Եթե a, b, c թվերն արտահայտում են եռանկյան կողմերի երկարությունները, P –ն՝ եռանկյան կիսապարագիծը, S-ը՝ եռանկյան մակերեսը, ապա

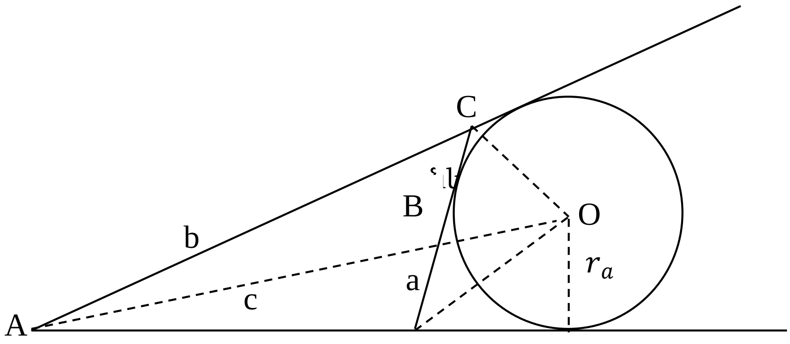
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}:$$

Նախքան թեորեմի ապացույցին անցնելը, ապացուցենք երկու միջանկյալ պնդում:

Թեորմա 1: Եթե a, b, c թվերն արտահայտում են եռանկյան կողմերի երկարությունները, r–ը՝ նրան ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը, r_a, r_b, r_c թվերն՝ եռանկյան առգծյալ շրջանագծերի շառավիղների երկարությունները, P –ն՝ եռանկյան կիսապարագիծը, S-ը՝ եռանկյան մակերեսը, ապա

$$r = \frac{S}{P}\,,\ r_a = \frac{S}{P-a}\,,\ r_b = \frac{S}{P-b}\,,\quad r_c = \frac{S}{P-c} \qquad (1)$$

Ապացուցում: (1) բանաձևերի շարքից առաջինը հաջողությամբ ապացուցվում է դպրոցական դասընթացում [1], շրջանցենք: Հիշեցնենք, որ շրջանագիծը կոչվում է առգծյալ եռանկյան համար, եթե այն արտաքնապես շոշափում է եռանկյան մեկ կողմը, իսկ մյուս երկու կողմերին շոշափում է շարունակությունների վրա:



Նկ. 1

r_x ասելով կհասկանանք այն արտգծյալ շրջանագծի շառավիղը, որը շոշափում է եռանկյան x երկարությամբ կողմին: Նկ. 1-ից կստանանք

$$S = S_{\Delta ABC} = S_{ABOC} - S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} b \cdot r_a + \frac{1}{2} c \cdot r_a - \frac{1}{2} a \cdot r_a =$$
$$= \frac{1}{2} r_a (b + c - a) = \frac{1}{2} (b + c + a - 2a) r_a = r_a (P - a):$$

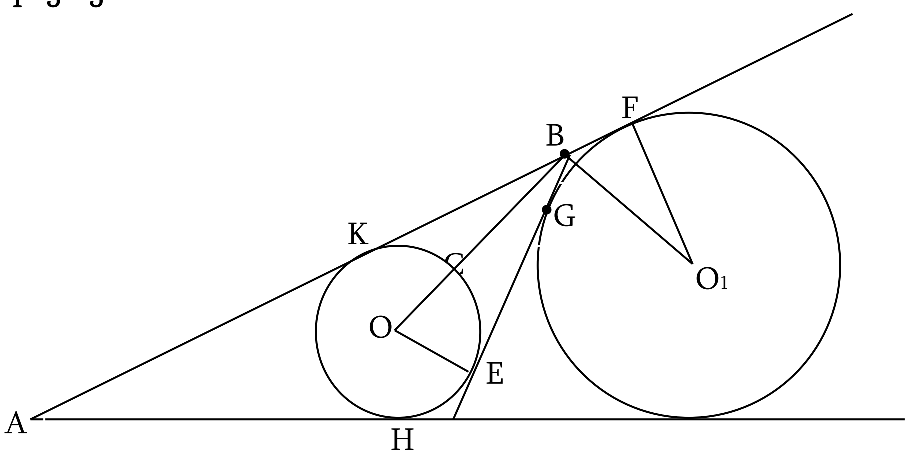
Այստեղից կստանանք $r_a = \frac{S}{P-a}$:

Դժվար չէ նման ձևով դուրս բերել (1) բանաձևերից մնացած երկուսը: Դրա համար բավական է պատկերացնել արտգծյալ շրջանագծերը b և c կողմերին և նախորդի նման ձևով հաշվարկել:

Թեորմա 2: Եթե a, b, c, P, r, r_a մեծությունները նույն իմաստն են արտահայտում ինչ որ թեորեմ 1-ում, ապա

$$r \cdot r_a = (P - b)(P - c):$$

Ապացուցում:



Նկ. 2

Նախ նշենք, որ -ում պատկերված հատվածներն են՝ $BC = a$, $AC = b, AB = c$, $EO = r$ և $O_1 F = r_a$: OBE և BO_1F ուղղանկյուն եռանկյունների մեջ $\angle OBE + \angle O_1BF = 90^0$, որովհետև OB և O_1B հատվածները պատկանում են կից անկյունների կիսորդներին: Հետևաբար $\angle OBE = \angle BO_1F$: Ուղղանկյուն եռանկյունները մեկական հավասար սուր անկյուններով կլինեն նման: Այսինքն՝ $\Delta OBE \sim \Delta BO_1F$ և ուրեմն՝

$$\frac{OE}{BE} = \frac{BF}{O_1F} \qquad (2)$$

Հարմարության համար կատարենք նշանակում $HC = CE = x$: Կունենանք՝ $AH = AK = b - x$ և $BE = BK = a - x$: Ուրեմն՝ $AK + KB = b - x + a - x = c$: Այս հավասարումից կստանանք՝ $x = \frac{1}{2}(b + a - c)$: Հաշվենք BE հատվածը:

$$BE = a - x = a - \frac{1}{2}(b + a - c) = \frac{1}{2}(a + b + c) - b = P - b: \quad (3)$$

Այժմ հաշվենք BF հատվածը: Պարզ է, որ $AD = AF$

$$AF = c + BF = b + a - BF:$$

Այստեղից կստանանք՝

$$BF = \frac{1}{2}(b + a - c) = \frac{1}{2}(a + b + c) - c = (P - c) \quad (4)$$

Հաշվի առնելով (3) և (4) բանաձևերը՝ (2) հավասարությունից կստանանք

$$r \cdot r_a = (P - b)(P - c): \quad (5)$$

Թեորեմի (Հերոնի) ապացույցը:

Ըստ թեորեմի 1-ի և (1) բանաձևերից առաջինի ունենք

$$r_a = \frac{S}{P - a} \quad ⍰ \quad r = \frac{S}{P}:$$

Բազմապատկելով այս հավասարությունների համապատասխան մասերը՝ կստանանք՝

$$r \cdot r_a = \frac{S^2}{P \cdot (P - a)}: \quad (6)$$

Համադրելով (5) և (6) բանաձևերը՝ կունենանք՝

$$\frac{S^2}{P \cdot (P - a)} = (P - b)(P - c)$$

Այս հավասարությունից ստանում ենք ցանկալի բանաձևը:

$$S = \sqrt{P(P - a)(P - b)(P - c)}:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Նյուտոնի թեորեմը ([2], էջ 201): Արտագծյալ քառանյան անկյունագծերի միջնակետերը միացնող ուղիղը անցնում է շրջանագծի կենտրոնով:

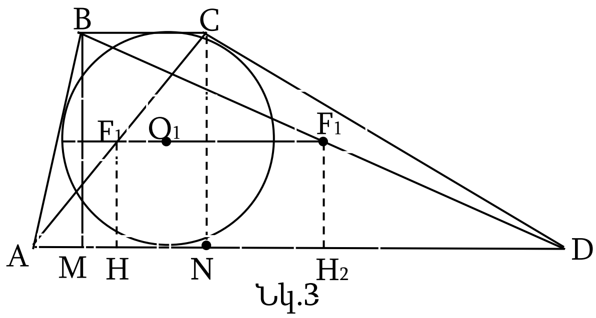
Նախքան թեորեմի ապացույցին անցնելը, ապացուցենք մեկ օժանդակ պնդում:

Սահմանում: Շրջանագծին արտագծված քառանկյունը կանվանենք սեղանատիպ, եթե նրա անկյունագծերի միջնակետերի հեռավորությունները միևնույն կողմից հավասար են:

Թեորեմա: Սեղանատիպ քառանկյունը սեղան է կամ շեղանկյուն:

Ապացույց: Դիցուք ունենք $ABCD$ արտագծյալ քառանկյունը և նրա AC և BD անկյունագծերի միջնակետերը՝ F_1 –ը և F_2-ը համապատասխանաբար:

Պայմանի համաձայն F_1H_1 և F_2H_2 հատվածները հավասար են՝ որպես F_1 և F_2 կետերի հեռավորություններ AD կողմից (նկ. 3): Ցույց տանք, որ այս դեպքում առնվազն BC հատվածը զուգահեռ է AD հատվածին: Տանենք $BM \perp AD$ և $CN \perp AD$ հատվածները: Որպես միևնույն AD ուղղին ուղղահայացներ $CN \parallel F_1H_1$ և $BM \parallel F_2H_2$:



Նկ.3

Մյուս կողմից, պայմանի համաձայն, $AF_1 = F_1C$ և $BF_2 = F_2D$: Հետևաբար $CN = 2F_1H_1$ և $BM = 2F_2H_2$: Բայց $F_1H_1 = F_2H_2$: Ստացվեց, որ $BM = CN$: Հայտնի է, որ միևնույն ուղղից հավասարահեռ կետերի բազմությունն ուղիղ գիծ է՝ զուգահեռ տված ուղղին: Ստացվեց, որ $BC \parallel AD$ և հետևաբար՝ $ABCD$ քառանկյունը սեղան է:

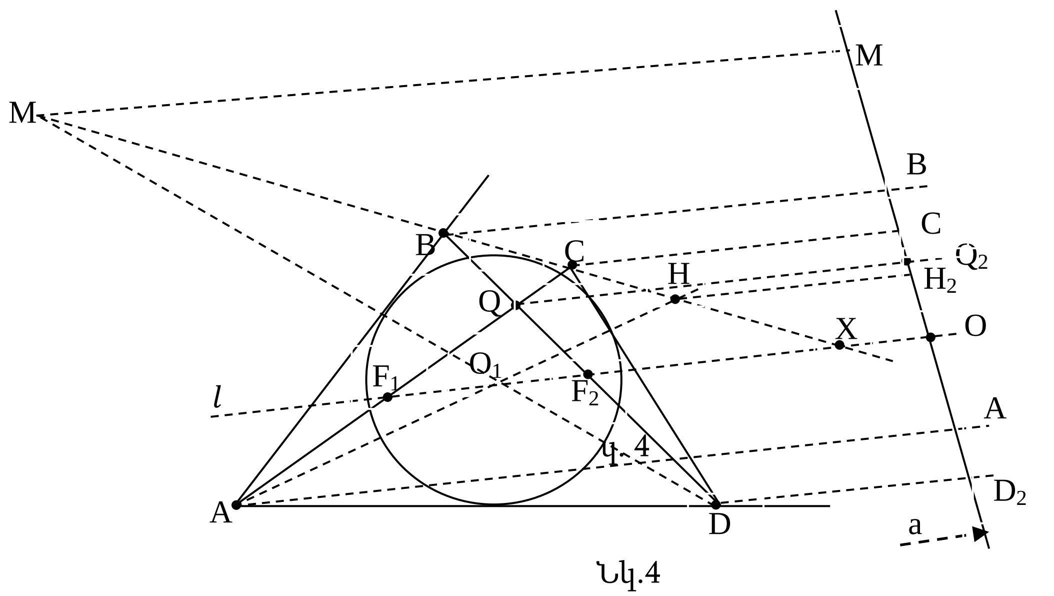
Եթե նկար 3-ում պատկերված F_1 և F_2 կետերը համընկնեն, ապա կստացվեր, որ անկյունագծերի միջնակետերը համընկնում են: Այդպիսի քառանկյունը պետք է լիներ զուգահեռագիծ: Այդ զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերի գումարները պետք է լինեն իրար հավասար, որովհետև քառանկյունն արտագծյալ է: Այստեղից էլ հետևում է, որ քառանկյունը կլինի շեղանկյուն:

Թեորեմի (Նյուտոնի) ապացուցումը:

1-ին դեպք: Արտագծյալ քառանկյունը սեղանատիպ է: Ինչպես հետևում է վերը ապացուցված թեորեմից, BC և AD զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը հավասար է $2F_1H_1 = 2F_2H_2 = 2r$, որտեղ r-ը O_1 կենտրոնով ներգծյալ շրջանագծի շառավիղն է: Հետևաբար O_1 կետը պատկանում է F_1F_2 ուղղին:

Եթե $ABCD$ արտագծյալ քառանկյունը շեղանկյուն է, ապա O_1, F_1, F_2 կետերը կհամընկնեն և նորից ճիշտ կմնա թեորեմը:

2-րդ դեպք: Արտագծյալ քառանկյունը ընդհանուր տիպի է (նկ. 4)



Նկ.4

Դիցուք տված է $ABCD$ արտագծյալ քառանկյունը և նրա AC ու BD անկյունագծերի F_1 □ F_2 միջնակետերը համապատասխանաբար: Քառանկյան A □ D անկյունների կիսորդների հատման կետը, որը կլինի ներգծյալ շրջանագծի կենտրոնը, նշանակենք O_1: Նշանակենք նաև $DO_1 \cap BC = M, AC \cap BD = Q$, $AO_1 \cap BC = H$: Դրանք պատկերված են նկար 4-ում: Պետք է ապացուցել, որ O_1 կետը գտնվում է F_1F_2 ուղղի վրա: Տանենք F_1F_2 ուղիղը և նշանակենք $F_1F_2 \cap BC = X$: Քանի որ X, F_1, F_2 կետերը գտնվում են համապատասխանաբար BC, CQ □ BQ ուղիղների վրա, ուստի, ըստ Մենելայի թեորեմի ([3], էջ 322), կունենանք՝

$$\frac{XC}{XB} \cdot \frac{BF_2}{QF_2} \cdot \frac{F_1Q}{F_1C} = 1: \qquad (7)$$

Համոզվենք, որ ճիշտ է (7) բանաձևը: Դրա համար F_1F_2 ուղղի որևէ O կետով տանենք կամայական a ուղիղ, տարբեր F_1F_2 ուղղից: A, B, C, D, Q, M, H կետերից տանենք F_1F_2 ուղղին զուգահեռ ուղիղներ և նրանց հատման կետերը a ուղղի հետ նշանակենք համապատասխանաբար $A_2, B_2, C_2, D_2, Q_2, M_2, H_2$: Կիրառելով Թալեսի ընդհանրացված թեորեմը և նրանից բխող որոշ փաստեր՝ կստանանք՝

$$\frac{XC}{XB}=\frac{OC_2}{OB_2},\qquad \frac{BF_2}{QF_2}=\frac{B_2O}{Q_2O},\qquad \frac{F_1Q}{F_1C}=\frac{OQ_2}{OC_2}:$$

Բազմապատկելով այս հավասարությունների համապատասխան մասերը՝ կստանանք՝

$$\frac{XC}{XB}\cdot\frac{BF_2}{QF_2}\cdot\frac{F_1Q}{F_1C}=\frac{OC_2}{OB_2}\cdot\frac{OB_2}{OQ_2}\cdot\frac{OQ_2}{OC_2}=1:$$

Նշենք, որ ճիշտ է նաև հակառակը. եթե տեղի ունի (7) պայմանը, ապա X, F_1, F_2 կետերը կգտնվեն մի ուղղի վրա: Այսպիսով, (7) պայմանը անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի X, F_1, F_2 կետերը գտնվեն մի ուղղի վրա: Նշանակենք այդ ուղիղը l տառով:

Այժմ ցույց տանք, որ $O_1 \in l$: Դիտարկենք AHC եռանկյունը և նրա նկատմամբ կիրառենք Մենելայի թեորեմը: Ցույց տանք, որ

$$\frac{XH}{XC}\cdot\frac{CF_1}{F_1A}\cdot\frac{AO_1}{O_1H}=1: \tag{8}$$

Համաձայն Թալեսի ընդհանրացված թեորեմի, կստանանք՝

$$\frac{XH}{XC}=\frac{OH_2}{OC_2}\quad □\quad \frac{AO_1}{O_1H}=\frac{A_2O}{OH_2}:$$

Հետևաբար

$$\frac{XH}{XC}\cdot\frac{CF_1}{F_1A}\cdot\frac{AO_1}{O_1H}=\frac{OH_2}{OC_2}\cdot\frac{A_2O}{OH_2}=\frac{A_2O}{OC_2}=1,$$

որովհետև $AF_1=F_1C$: Այժմ ցույց տանք, որ

$$\frac{DO_1}{O_1M}\cdot\frac{MX}{BX}\cdot\frac{BF_2}{F_2D}=1 \tag{9}$$

Նորից անդրադառնալով Թալեսի ընդհանրացված թեորեմին, կստանանք՝

$$\frac{DO_1}{O_1M}=\frac{D_2O}{OM_2}\quad □\quad \frac{MX}{BX}=\frac{M_2O}{B_2O} \tag{10}$$

Տեղադրելով (10) հավասարությունները (9) բանաձևում, կստանանք՝

$$\frac{DO_1}{O_1M}\cdot\frac{MX}{BX}\cdot\frac{BF_2}{F_2D}=\frac{D_2O}{OM_2}\cdot\frac{M_2O}{B_2O}=\frac{D_2O}{B_2O}=1,$$

Որովհետև $DF_2=F_2B$: Թեորեմն ապացուցված է:

Գաուսի թեորեմը ([3], էջ 323): Քառանկյան հանդիպակաց կողմերի շարունակությունների հատման կետերը միացնող հատվածի միջնակետը գտնվում է անկյունագծերի միջնակետով անցնող ուղղի վրա:

Ապացուցում: *1-ին դեպք.* քառանկյունը ուռուցիկ է:

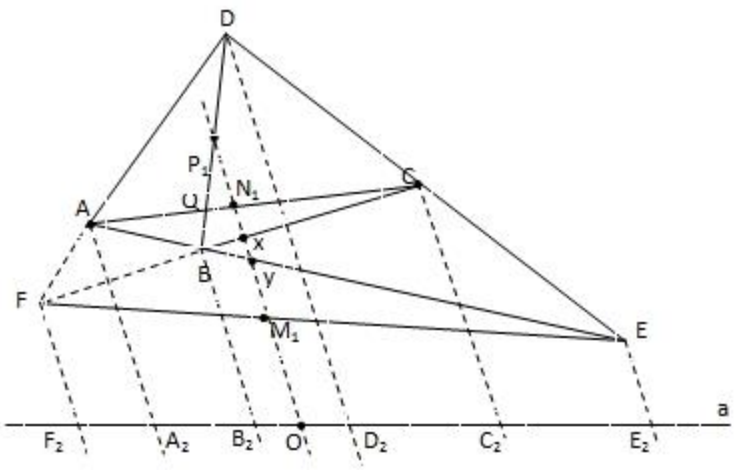
Դիցուք տված է $ABCD$ ուռուցիկ քառանկյունը: Նշանակենք $AC\cap BD=Q$, $AD\cap BC=F$, $AB\cap CD=E$: Նշանակենք նաև FE, AC □ BD հատվածների միջնակետերը M_1, N_1, □ P_1 տառերով համապատասխանաբար: Պետք է ապացուցել, որ M_1, N_1, □ P_1 կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա (նկ. 5):

Տանենք P_1N_1 ուղիղը և ցույց տանք, որ այդ $l=(P_1N_1)$ ուղղի վրա է գտնվում նաև FE հատվածի M_1 միջնակետը: Նկ. 5-ում l ուղիղը հատում է BC հատվածը X կետում:

Ուրեմն այն կհատի AB հատվածը նրա շարունակության վրա որևէ Y կետում: Ցույց տանք, որ համաձայն Մենելայի թեորեմի պետք է տեղի ունենա

$$\frac{AN_1}{N_1C}\cdot\frac{CX}{XB}\cdot\frac{YB}{YA}=1 \qquad (11)$$

հավասարությունը: Տանենք $O\in l$ կետով որևէ a ուղիղ, տարբեր l ուղղից, և F, A, B, D, C, E կետերից տանենք զուգահեռ ուղիղներ l ուղղին: Այդ ուղիղների և a ուղղի հատման կետերը նշանակենք համապատասխանաբար $F_2, A_2, B_2, D_2, C_2, E_2$ տառերով: Այժմ անդրադառնանք Թալեսի ընդհանրացված թեորեմին և նրա հետևանքներին:



Նկ. 5

Կունենանք՝

$$\frac{CX}{XB}=\frac{C_2O}{OB_2},\qquad \frac{YB}{YA}=\frac{OB_2}{OA_2}:$$

Բազմապատկելով այս հավասարությունների համապատասխան մասերը իրարով՝ կստանանք՝

$$\frac{AN_1}{N_1C}\cdot\frac{CX}{XB}\cdot\frac{YB}{YA}=\frac{C_2O}{OB_2}\cdot\frac{OB_2}{OA_2}=\frac{C_2O}{OA_2}=1,$$

որովհետև համաձայն Թալեսի թեորեմի $C_2O=OA_2$: Նշենք, որ (11) պայմանն անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի X, Y կետերը գտնվեն l ուղղի վրա:

Այժմ դիտարկենք եռանկյուն FBE –ն, որի կողմերի Y, M_1 կետերը և X կետը FB կողմի շարունակության վրա, գտնվում են նույն l ուղղի վրա, ընդ որում M_1 կետը FE հատվածի միջնակետն է: Ցույց տանք, որ տեղի ունի

$$\frac{FM_1}{M_1E}\cdot\frac{EY}{YB}\cdot\frac{XB}{XF}=1 \qquad (12)$$

հավասարությունը: Իրոք՝ նկար 5-ից հետևում է, որ

$$\frac{EY}{YB}=\frac{E_2O}{OB_2} \quad ⍰ \quad \frac{XB}{XF}=\frac{OB_2}{OF_2}:$$

Տեղադրելով այս արժեքները (12) հավասարության մեջ կստանանք՝

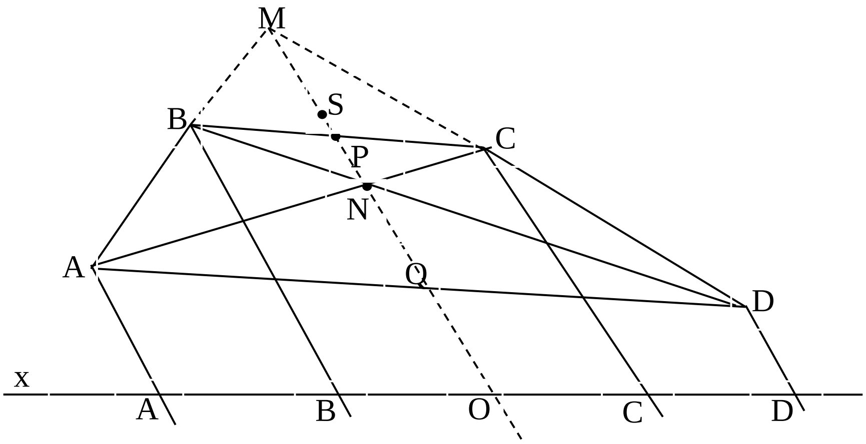
$$\frac{FM_1}{M_1E}\cdot\frac{EY}{YB}\cdot\frac{XB}{XF}=\frac{E_2O}{OB_2}\cdot\frac{OB_2}{OF_2}=\frac{E_2O}{OF_2}$$

Բայց, $FM_1 = M_1E$ հավասարությունից հետևում է, որ $E_2O = OF_2$: Ուրեմն, ճիշտ է (12) հավասարությունը:

2-րդ դեպք. քառանկյունը ոչ ուռուցիկ է: Նկար 5-ում որպես դիտարկվող ոչ ուռուցիկ քառանկյուն վերցնենք $FBED$ –ն, որի համար FE-ն և BD-ն անկյունագծերն են, իսկ M_1-ը և P_1-ը համապատասխանաբար նրանց միջնակետերը: Հանդիպակաց կողմերն են՝ BE-ն ու FD-ն և FB-ն ու DE-ն, իսկ նրանց հատման կետերն են՝ A-ն և C-ն համապատասխանաբար, և AC հատվածի միջնակետն է N_1 կետը: պետք է ապացուցել, որ P_1, N_1, M_1 կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա: Կրկնելով նույն քայլերը, ինչ որ 1-ին դեպքում, համոզվում ենք, որ P_1, N_1, M_1 կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

Խնդիր 1. Ապացուցել, որ սեղանի հիմքերի միջնակետերը միացնող ուղիղը անցնում է անկյունագծերի հատման կետով:

Լուծում:



Նկ. 6

Նկ. 6-ում պատկերված է $ABCD$ սեղանը և հայտնի է, որ $BP = PC, AQ = QD$: Պետք է ապացուցել, որ P, N, Q կետերը, որտեղ $N = AC \cap BD$, գտնվում են մի ուղղի վրա: N և P կետերով որոշող ուղիղը նշանակենք l տառով: Քանի որ $AN \neq NC$, ուստի l ուղիղը կհատի AB ուղիղը որևէ M կետում: Դիտարկենք BCD եռանկյունը: Նրա կողմերի վրա են գտնվում նույն P, N կետերը: Ցույց տանք, որ $M = CD \cap PN$: Դրա համար տանենք $O \in l$ կետով l-ից տարբեր որևէ x ուղիղ և A, B, C, D կետերից l-ին զուգահեռ ուղիղներ, որոնց հատման կետերը x ուղղի հետ նշանակենք համապատասխանաբար A_1, B_1, C_1, D_1 տառերով: Համոզվենք, որ

$$\frac{DN}{NB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{MC}{MD} = 1 \qquad (13)$$

Նկ. 6-ից հետևում է, որ

$$\frac{DN}{NB} = \frac{D_1O}{OB_1} \quad և \quad \frac{MC}{MD} = \frac{OC_1}{OD_1}:$$

Տեղադրելով այդ արժեքները (13) հավասարության մեջ և հաշվի առնելով, որ $BP = PC$, Թալեսի թեորեմից կստանանք՝

$$\frac{DN}{NB} \cdot \frac{MC}{MD} = \frac{D_1O}{OB_1} \cdot \frac{OC_1}{OD_1} = \frac{OC_1}{OD_1} = 1:$$

Ուրեմն, M կետը սեղանի կողմնային կողերի հատման կետն է: MN հատվածի միջնակետը նշանակենք S տառով: Ստացվում է, որ $S \in l$: Դիտարկենք $BMCN$ քառանկյունը: Նրա համար անկյունագծերի միջնակետերը միացնող ուղիղը ընդգրկում է MN անկյունագիծը: Այդ քառանկյան նկատմամբ կիրառելով Գաուսի թեորեմը՝ կստանանք, որ P, N, Q կետերը գտնվում են մի ուղղի վրա:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Աթանասյան Լ.Ս., Բուտուզով Վ. Ֆ., Կադոմցև Ս.Բ., Պոզնյակ Է.Գ., Յուդինա Ի.Ի. Երկրաչափություն 8: Եր. <<Աստղիկ-59>>, 2000, 144 էջ:
2. Модонов П.С. Сборник задач по специальному курс элементарной математике. М. <<Советская наука>>, 1957, 667 с.
3. Աթանասյան Լ.Ս., Բուտուզով Վ. Ֆ., Կադոմցև Ս.Բ., Պոզնյակ Է.Գ., Յուդինա Ի.Ի. Երկրաչափություն 6-8, Եր. <<Լույս>> 1998. 352 էջ:

Տեղեկություններ հեղինակի մասին.
Մուսայելյան Ռոբերտ Ծատուրի- Գորիսի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոնի դոցենտ, ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու:
Հեռ. (+37494) 333 994,
E-mail: rubmus49@gmail.com

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.դ. Ա.Մ. Խաչատրյանը: