*УДК 514.7* *Математика*

# НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ФУНКЦИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

***Роберт МУСАЕЛЯН***

***Ключевые слова*** *– Угол, геодезический, функция Лобачевского, параллельный, последовательность.*

***Բանալի բառեր՝*** *Անկյուն, գեոդեզիական, Լոբաչևսկու ֆունկցիա, զուգահեռ, հաջորդականություն*
***Key words*** *– angle, geodesic, Lobachevski's function, parallel, sequence.*

***Ռ.Մուսայելյան***
***Որոշ գնահատական արդյունքներ Լոբաչևսկու ֆունկցիայի նկատմամբ***

*Դիտարկվում են բացասական կորության $ds^2 = dx^2 + B^2(x,y)dy^2$ մետրիկայում գեոդեզիական գծեր, նրանցով կազմված անկյուններ: Գնահատվում են այդ անկյունների մեծությունները, համապատասխան հաստատուն բացասական կորության հարթությունում Լոբաչևսկու ֆունկցիայի նկատմամբ: Ապացուցվում են այդ անկյուն-ֆունկցիաների մի շարք հատկություններ:*

***R. Musaelyan***
***Some Evaluation Results concerning Lobachevski's Function***

*Some geodesic lines as well as angles, made of these geodesic lines in the metric $ds^2 = dx^2 + B^2(x,y)dy^2$ of a negative curvature have been observed. The size of these angles in the plane of an adequate constant negative curvature concerning Lobachevski's function has been estimated. Some features of the angle-functions have been proved.*

*В работе рассматриваются геодезические линии в метрике $ds^2 = dx^2 + +B^2(x,y)dy^2$ отрицательной кривизны и углы, составленные этими геодезическими линиями. Оцениваются величины этих углов относительно функции Лобачевского в плоскостях определенной постоянной отрицательной кривизны. Доказываются некоторые признаки этих угол - функцийй.*

В работе будем рассматривать метрику

$$ds^2 = dx^2 + B^2(x,y)dy^2 \tag{1}$$

заданную на всей плоскости переменных $(xoy)$, кривизна которой $K(x,y) < 0$.

Пусть $l_1$ и $l_2$ - две ортогональные геодезические в метрике (1) и $l_1 \cap l_2 = A_2$ (см. рисунок 1). Ориентируем прямые $l_1$ и $l_2$ так, чтобы при повороте $l_1^+$ против часовой стрелки на $90^0$ совпала с $l_2^+$, где началом лучей $l_1^+$ и $l_2^+$ берется точка A. Предположим, что геодезическая $\gamma_1$ параллельная $l_1^+$ и $\gamma_1 \cap l_2^+ = R$. Обозначим длину отрезка $AR = z$, угол[1] $\measuredangle AR\gamma_1^+ = \alpha(z)$. Пусть в замкнутой области $D_z = \{l_1^+ AR\gamma_1^+\}$ , где $\gamma_1^+$ луч геодезической $\gamma_1$ с началом в точке $R \in l_2^+$ и такой, что $\gamma_1^+$ паралелльна $l_1^+$ , с границей $\partial D_z = l_1^+ \cup AR \cup \gamma_1^+$, кривизна метрики (1) ограничена сверху константой $\tau_0$ , где $\tau_0 \leq 0$. Пусть $\Pi_{\tau_0}(z)$- функция Лобачевского для плоскости, кривизна которой равна $\tau_0$.

**Теорема 1.** При сформулированных выше условиях в области $D_z$ справедливо неравенство.

$$\alpha(z) \leq \Pi_{\tau_0}(z). \tag{2}$$

**Доказательство.** Возьмем произвольную, отличную от A точку $Q^n \in l_1^+$ и обозначим область треугольника $ARQ^n$ через $\Delta^n$. Если точка $Q^{n+1} \in l_1^+$ такая, что длина дуги $AQ^n$ меньше, чем длина дуги $AQ^{n+1}$, то, очевидно $\Delta^n \subset \Delta^{n+1}$. Обозначим угол $\measuredangle ARQ^n = \alpha^n(z)$. Пусть далее кривизна метрики (1) в каждой области $\Delta^n$ ограничена сверху константой $\tau_0^n < 0$. Очевидно, для каждого $n = 1,2,\dots,\tau_0^n < \tau_0$. Построим в плоскости Лобачевского с кривизной $\tau_0$ треугольники $\Delta_0^n = A_0R_0Q_0^n$, стороны которых связаны со сторонами треугольников $\Delta^n = ARQ^n$соотношениями: $AR = A_0R_0, RQ^n = R_0Q_0^n$ и $AQ^n = A_0Q_0^n$. Треугольники $\Delta^n$ и $\Delta_0^n$ будем как в лемме,[2] называть соответствующими. Таким образом, мы получим для треугольников $\Delta^n$ соответствующие треугольники $\Delta_0^n \in \Lambda_{\tau_0}$ , где $\Lambda_{\tau_0}$плоскость Лобачевского кривизны $\tau_0$.

---

[1] О понятии угла см [1]

[2] Лемма (А.Д. Александров). Если в треугольнике $T$ кривизна не превосходит $k \leq 0$, то углы этого треугольника не больше, чем соответствующие углы треугольника $T_0$ со сторонами той же длины на плоскости Лобачевского кривизны k. И если хотя бы один угол треугольника $T$ равен соответствующему углу треугольника $T_0$, то треугольники $T$ и $T_0$ изометричны (далее треугольник $T_0$ будет называтся “соответствующим” $T$). (см. [2]).

Для каждых пар треугольников $(\Delta^n, \Delta_0^n)$ применим лемму А.Д.Александрова. Получим, что угол $\measuredangle ARQ^n = \alpha^n(z)$ не превосходит угла $\measuredangle A_0R_0Q_0^n = \Pi_0^n(z)$. То есть $\alpha^n(z) \le \Pi_0^n(z)$, для любого $n = 1,2 \ldots$

Как известно (см [3]), если существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n(z) = \alpha(z) \text{ и } \lim_{n\to\infty} \Pi_0^n(z) = \Pi_{\tau_0}(z), \tag{3}$$

то

$$\alpha(z) \le \Pi_{\tau_0}(z).$$

Покажем, что эти пределы существуют. Для этого достаточно доказать, что последовательность отрезков $RQ^n(R_0Q_0^n)$ стремится к параллельному $l_1^+(l_{10}^+)$ лучу $\gamma_1^+(\gamma_{10}^+)$, где $l_{10}^+$ и $\gamma_{10}^+$ - лучи в плоскости Лобачевского кривизны $\tau_0$, „соответствующие" лучам $l_1^+$ и $\gamma_1^+$. Известно, что точка и луч в данной метрике определяют орицикл (см[4]) притом единственный. Обозначим орицикл, определяемый точкой $R$ и лучом $l_1^+$, через $\Omega_R^*$. Пусть $\{R^n\}$ - последовательность точек, принадлежащих орикругу $\Omega_R$ (см [4]), граница которого $\Omega_R^*$, и такой, что сходится в точке $R \in l_2^+$. Такой выбор гарантирует полнота рассматриваемой метрики. Очевидно, через каждую точку последовательности $\{R^n\}$ проходит некоторая геодезическая окружность, центр которой $Q^n \in l_1^+$. Построенная таким образом последовательность $Q^n \to \infty$, когда $R^n \to R$. Буземан доказал (см [1]), что радиусы геодезических окружностей сходятся к параллельному лучу, который ортогонален орициклу, и не зависит от выбора последовательности $\{R^n\}$ и $\{Q^n\}$.

Применяя неравенство треугольника для метрического пространства, находим связь между радиусами геодезических окружностей сходящиеся к параллельному $l_1^+$ лучу $\gamma_1^+$ и отрезками $RQ^n$. Именно

$$RQ^n \le R^nQ^n + RR^n.$$

Отсюда следует, что $RQ^n$ сходится к $\gamma_1^+$. То есть $\lim_{n\to\infty} \alpha^n(z) = \alpha(z)$. Что касается другого предела, то все рассуждения, приведенные выше, верны и для него, так как плоскость Лобачевского, как двумерное многообразие отрицательной кривизны, удовлетворяет всем требованиям рассматриваемого в работе [1]. Следовательно, аналогичным образом, заключаем, что отрезки $R_0Q_0^n$ сходится к параллельному $l_{10}^+$ лучу $\gamma_{10}^+$. То есть $\lim_{n\to\infty} \Pi_0^n(z) = \Pi_{\tau_0}(z)$. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Функция $\alpha(z)$, определенная в теореме 1 монотонно убывает.

**Доказательство.** Пусть $z_1 > z$ (см. рисунок 2). Это значит, что длина дуги $AR_1$ больше длины дуги $AR$, где $R$ и $R_1 \in l_2^+$. Рассмотрим треугольники $AR_1Q^n = T_1^n$ и $ARQ^n = T^n$, для которых основание $AQ^n$ одно и тоже. Очевидно для каждых таких пар треугольников справедливо соотношение углов

$$\alpha^n(z_1) < \alpha^n(z), \tag{4}$$

где $\alpha^n(z_1) = \measuredangle AR_1Q^n$ , а $\alpha^n(z) = \measuredangle ARQ^n$.

Действительно, так как $< AQ^nR < \measuredangle AQ^nR_1$ (см [1]) и

$$\measuredangle AR_1Q^n + \measuredangle AQ^nR_1 < \frac{\pi}{2}$$

$$\measuredangle ARQ^n + \measuredangle AQ^nR < \frac{\pi}{2},$$

то из этих неравенств следует (4).

Известно (см [3]), что если существуют пределы последовательности, которые удовлетворяют неравенству (4), то, вообще говоря, они должны удовлетворять неравенству

$$\alpha(z_1) \le \alpha(z), \tag{5}$$

где $\alpha(z_1) = \lim_{n\to\infty} \alpha^n(z_1), \alpha(z) = \lim_{n\to\infty} \alpha^n(z)$.

Как показано в теореме 1, последние пределы существуют и аналогично отрезки $R_1Q^n$ сходятся к параллельному $l_1^+$ лучу $\gamma_{11}^+$. Так как параллельность для многообразия отрицательной кривизны удовлетворяет условию транзитивности (т.е. из $\tilde{p} \parallel \tilde{q}, \tilde{q} \parallel \tilde{\lambda}$ следует $\tilde{p} \parallel \tilde{\lambda}.см$ [1]), то луч $\gamma_{11}^+$ параллелен лучу $\gamma_1^+$.

Выражение (5) не может обращаться в равенство. Это означало бы, что на многообразиях отрицательной кривизны две параллельные прямые, пересеченные третьей прямой, образуют с ней равные внутренние односторонние углы, что невозможно. Следовательно $\alpha(z)$- строго монотонно убывающая функция. Теорема доказана.

Пусть $h_1$ и $h_2$- произвольные геодезические в метрике (1). Так как кривизна метрики отрицательна, то эти геодезические по крайней мере, в одну сторону расходятся. Ориентируем прямые так, как это было сделано в начале этого пункта. Теперь докажем следующее утверждение.

**Теорема 3.** Для произвольных геодезических $h_1$ и $h_2$ существует такая точка $O_1 \in h_1$, что луч $h_{12}^+$, проходящий через эту точку параллельно $h_2^+$, составляет с лучом $h_1^+$ неострый угол. То есть $\measuredangle h_1^+ O_1 h_{12}^+ \geq \frac{\pi}{2}$.

**Доказательство.** Возможны следующие случим расположения прямых $h_1$ и $h_2$:

1) $h_1$ и $h_2$ не пересекаются,
2) лучи $h_1^+$ и $h_2^+$ составляют острый угол.

Рассмотрим первый случай.

Пусть $h_{D_1}^+$-луч, проходящий через точку $D_1 \in h_1^+$ параллельно лучу $h_2^+$, где $D_1 = h_{D_1}^+ \cap h_1^+$. Предположим, что угол $\measuredangle h_1^+ D_1 h_2^+$- острый, ибо если не острый, то точка $D_1$ была бы искомой точкой. По теореме 2 этому углу, как углу параллельности, отвечает некоторый отрезок $D_1D_2$, где $D_2 \in h_1^+$. Очевидно, любая точка $D_3 \in h_1^+$, для которой длина дуги $D_1D_2$ меньше или равна длине дуги $D_1D_3$, удовлетворяет теореме. Случай 2), очевидно, следует из уже приведенных рассуждений.

Если же, пересекаясь, лучи $h_1^+$ и $h_2^+$ составляют тупой угол, то, например, общая точка лучей $h_1^+$ и $h_2^+$ будет требуемой теоремой точкой.

**Теорема 4.** Пусть $h_1$ и $h_2$- произвольные геодезические в метрике (1), $O_1 \in h_1^+$- отвечающая теореме 3 точка, $\Omega_1^*$- орицикл с центральным лучом $h_1^+$, проходящим через точку $O_1$. Пусть точка $O_2$ принадлежит “верхней”[1)] части орицикла $\Omega_1^*$ (см. рисунок 3). Тогда, если из точек $O_1$ и $O_2$ проведены лучи$h_{12}^+, h_{21}^+$ и $h_{22}^+$ параллельны соответственно $h_2^+, h_1^+$ и $h_2^+$, то $\measuredangle h_1^+ o_1 h_{12}^+ < \measuredangle h_{21}^+ o_2 h_{22}^+$.

**Доказательство.** Обозначим

$$\measuredangle h_1^+ O_1 h_{12}^+ = \theta_1, \qquad \measuredangle h_{21}^+ O_2 h_{22}^+ = \theta_2,$$
$$\measuredangle H_2 O_2 H_1 = \theta_3, \qquad \measuredangle H_1 O_2 h_{21}^+ = \beta_1,$$
$$\measuredangle H_2 O_2 h_{22}^+ = \beta_2,$$

где $H_1, H_2$- основания опущенных из точки $O_2$ перпендикуляров соответственно на $h_1^+$ и $h_2^+$.

Из криволинейного четырехугольника $O_1H_1O_2H_2$ с учетом отрицательности кривизны получим

$$\theta_1 + \theta_3 < \pi\,. \tag{6}$$

Далее, очевидно:

$$\theta_2 + \theta_3 + \beta_1 + \beta_2 = 2\pi \tag{7}$$

Учитывая (6) и (7) получим

$$\theta_2 - \theta_1 > \pi - (\beta_1 + \beta_2). \tag{8}$$

По теореме 1 имеем:

$$\beta_1 \leq \Pi_{\tau_1}(z_1) \leq \frac{\pi}{2}, \qquad \beta_2 \leq \Pi_{\tau_2}(z_2) \leq \frac{\pi}{2},$$

где $z_1 = H_1O_2,\ z_2 = H_2O_2$.

Согласно лемме, знак равенства в последних неравенствах означал бы изометрию “в целом” в некоторой области между метриками (1) и плоскостью Лобачевского $\Lambda_{\tau_1}$ и $\Lambda_{\tau_2}$. Однако, как известно, это невозможно. Следовательно, $\pi - (\beta_1 + \beta_2) > 0$. То есть $\theta_2 > \theta_1$. Теорема доказан.

**Замечание.** Если точка $O \in (O_1, O_2) \subset \Omega_1^*$ и $\theta$- угол аналогично углам $\theta_1$ и $\theta_2$, то $\theta_1 < \theta < \theta_2$.

**Следствие.** Пусть $\Omega^*$- орицикл с центральным лучом $l^+$ и $l^+ \cap \Omega^* = P$ (см. рисунок 4). Пусть точки $P_1, P_2 \in \Omega^*$ находятся в одной полуплоскости определенными $l$, длина дуги $PP_1$ орицикла $\Omega^*$ меньше длины дуги $PP_2, q_1^+, q_2^+$- центральные лучи орицикла, проходящие через $P_1$ и $P_2$соответсвено. Тогда $\measuredangle C_2P_2q_2^+ < \measuredangle C_1P_1q_2^+$, где $P_iC_i, i = 1{,}2, -$ отрезки геодезических проходящих через точки $P_i, i = 1{,}2$ и ортогональны $l^+$.

**Доказательство.** Очевидно $P_1C_1 < P_2C_2$. Пусть точка $D \in C_2P_2$ такая, что длина дуги $P_1C_1$ равна длине дуги $DC_2$. Пусть $d^+$ - центральный луч орицикла $\Omega^*$, проходящий через точку $D$. Правее точки $C_2 \in l^+$ возьмем произвольную точку $P^n \in l^+$. Рассмотрим треугольники $C_1P_1P^n$ и $C_2DP^n$, обозначив при этом $\measuredangle C_2DP^n = \Psi_2^n$, $\measuredangle C_1P_1P^n = \Psi_1^n$. Нетрудно убедится в том, что для этих углов при любом положении точки $P^n$ справедливо соотношение $\Psi_2^n < \Psi_1^n$. Согласно рассуждениям, приведенным в ходе доказательства теоремы 1, получим

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_2^n = \Psi_2 \ \text{ и } \ \lim_{n\to\infty} \Psi_1^n = \Psi_1,$$

причем

$$\Psi_2 = \measuredangle C_2Dd^+,\ \Psi_1 = \measuredangle C_1P_1q_1^+.$$

Из этих рассуждений, вообще говоря, следует, что $\Psi_2 \leq \Psi_1$. Применяя теорему 2, получим, что $\Psi_2 \geq \measuredangle C_2P_2q_2^+$. Следовательно, $\measuredangle C_2P_2q_2^+ < \measuredangle C_1P_1q_1^+$. Теорема доказана.

---

[1.] Часть орицикла $\Omega_1^*$, которая расположена в одну сторону от $h_1$, что и $h_2^+$, назовем “верхней” частью.

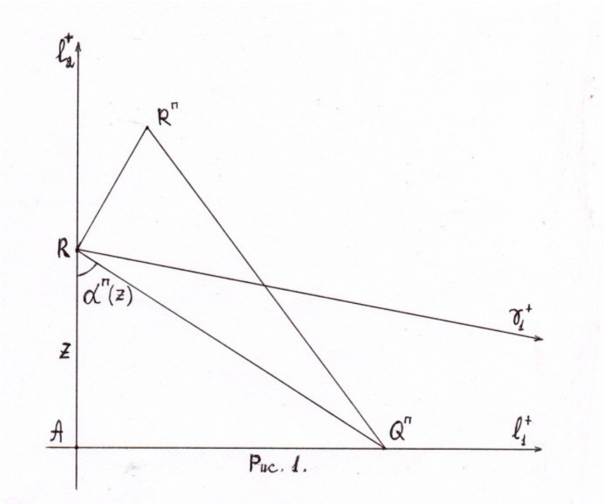

Рис. 1.

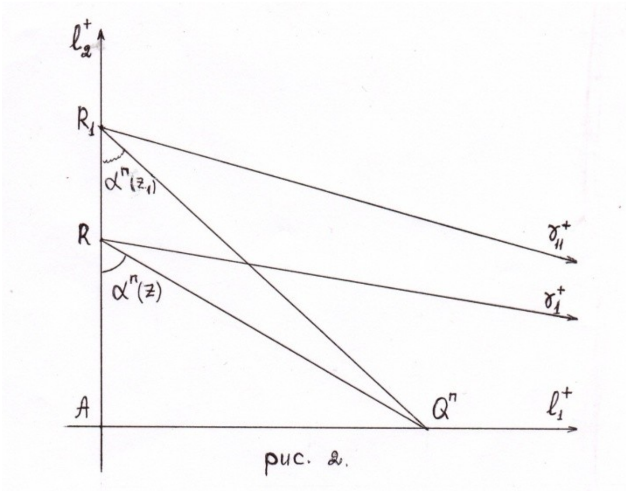

рис. 2.

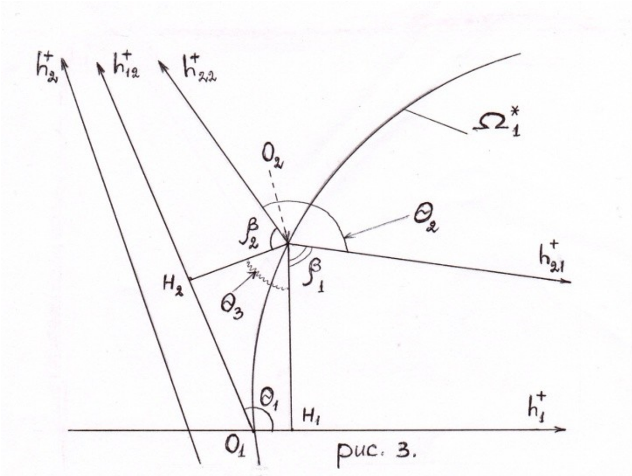

рис. 3.

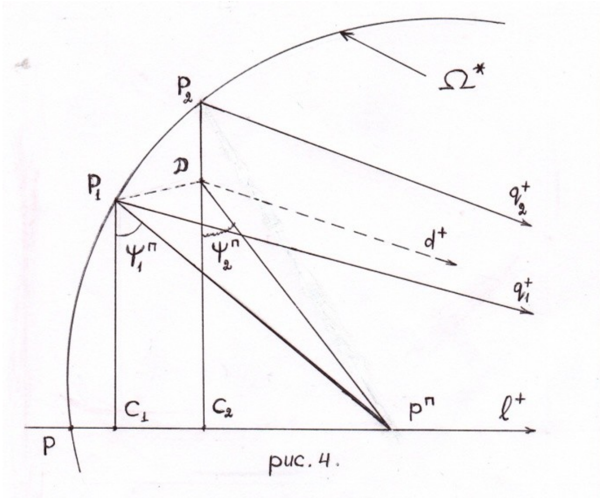

рис. 4.

**Литература**


1. Буземан Г. Геометрия геодезических. –М. 1962.
2. Александров А.Д. Изопериметрические неравенства на кривых поверхностях //ДАН СССР. – 1945. –N4. –Ц 239-242.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. –М: Наука Т. I, 1982.
4. Шикин Е.В. Изометрические погружения в $E^3$ некампактных областей неположительной кривизны: Дисс…д-ра физ-мат. наук. –М., 1976.


## Сведения об авторе:


**Роберт Мусаелян** - к.ф.м.н., доцент кафедры математики и информатики Горисского государственного унивестритета

**E-mail:** rubmus49@gmail.com


Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.м.н., А.М. Хачатряном.