ՀՏԴ 512
Математика

Георгий САAКЯН
к.ф.м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики АрГУ
E-mail: ter_saak_george@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМАХ НА ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МАТРИЦ

В работе на линейном пространстве матриц определяются симметричные билинейные формы, выраженные через следы матриц, доказываются некоторые их свойства: Используя эти формы выводятся различные тождества, связывающие определители матриц, а также определяется вид характеристического многочлена для матрицы с помощью одной билинейной симметричной формы.
Ключевые слова: *билинейные формы, матрицы.*

Գ. Սահակյան

ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ՈՐՈՇՎԱԾ ՈՐՈՇ ԲԻԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Աշխատանքում մատրիցների գծային տարածության վրա սահմանվում են մատրիցների հետքերով արտահայտված սիմետրիկ բիգծային ձևեր, ապացուցվում են նրանց որոշ հատկությունները: Օգտագործելով այդ ձևերը, արտածվում են մատրիցների որոշիչներն կապող տարբեր նույնություններ, ինչպես նաև որոշվում է մատրիցի բնութագրիչ բազմանդամի տեսքը մի սիմետրիկ բիգծային ձևի միջոցով:
Բանալի բառեր` *բիգծային ձևեր, մատրիցներ:*

G. Sahakyan

ABOUT SOME BILINEAR FORMS ON THE LINEAR SPACES OF MATRICES

In this paper, symmetric bilinear forms expressed through traces of matrices are determined on the linear space of matrices, some of their properties are proved: Using these forms various identities linking the determinants of matrices are derived, and also the form of the characteristic polynomial for the matrix is determined with the help of one symmetric bilinear form..
Keywords. bilinear forms, matrices.

Пусть $M^{n,n}$ означает линейное пространство вещественных квадратных матриц порядка n.

Определение 1. ([1]). *Мы скажем, что на пространстве* $M^{n,n} \times M^{n,n}$ *задана билинейная форма* f *, если каждой паре матриц* $(A, B) \in M^{n,n} \times M^{n,n}$ *поставлено в соответствие число* $f(A, B)$*, так что при этом для любых матриц* $A, B, C \in M^{n,n}$ *и произвольного числа* λ*, выполнены условия:*

1. $f(A+B,\ C) = f(A, C) + f(B, C)$, (1a)
2. $f(C,\ A+B) = f(C, A) + f(C, B)$ (1b)
3. $f(\lambda A, B) = f(A, \lambda B) = \lambda f(A, B)$. (1c)

Определение 2. *Билинейная форма* f *называется симметричной, если для любых матриц* $(A, B) \in M^{n,n} \times M^{n,n}$

$$f(A, B) = f(B, A). \quad (1d)$$

Определение 3. ([2], [3]). *Матрица* $B \in M^{n,n}$ *называется подобной матрице* $A \in M^{n,n}$*, если существует обратимая матрица* $P \in M^{n,n}$ *так, что* $B = PAP^{-1}$.

Из билинейности и симметричности формы f следует, что для произвольных матриц $A, B \in M^{n,n}$ имеют место соотношения:

1. $f(A+B, A+B) = f(A, A) + 2f(A, B) + f(B, B)$. (2a)
2. $f(A-B, A-B) = f(A, A) - 2f(A, B) + f(B, B)$. (2b)
3. $f(A-B, A+B) = f(A, A) - f(B, B)$. (2c)

Известно ([1]), что всякую симметричную билинейную форму $f(A, B)$ можно выразить через соответствующую квадратичную форму $f(A, A)$ с помощью формулы

$$f(A, B) = \frac{f(A+B, A+B) - f(A, A) - f(B, B)}{2}. \quad (3a)$$

Заметим, что симметричную билинейную форму $f(A, B)$ можно представить и в виде

$$f(A, B) = \frac{f(A+B, A+B) - f(A-B, A-B)}{4}. \quad (3b)$$

Из соотношений (3a) и (3b) следует, что для получения симметричной билинейной формы $f(A, B)$ достаточно подходящим образом (обеспечивающим симметричность и линейность $f(A, B)$) определить $f(A, A)$.

Пусть trA - след матрицы A, A^{-1}-обратная по отношению к A матрица, A^* - транспонированная матрица, а f - некоторая билинейная симметричная форма, определенная на $M^{n,n}$. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся некоторые свойства следа матрицы. Непосредственными вычислениями нетрудно показать, что

1. $trAB = trBA$, $(A, B \in M^{n,n})$, (4a)
2. $trA^* = trA$, $(A, B \in M^{n,n})$, (4b)
3. $trA^{-1} \cdot trA = \det A$ $(\det A \neq 0,\ A, B \in M^{2,2})$, (4c)
4. $\det A = \frac{1}{2}\left(tr^2 A - trA^2\right)$, $\left(A, B \in M^{2,2}\right)$. (4d)

Утверждение 1. *Форма* f *, определенная формулой* (3a) (*или* (3b)), *при каждом из заданных ниже значениях*

1. $f(A,A)=trA^2, \qquad A\in M^{n,n}$,
2. $f(A,A)=tr^2A, \qquad A\in M^{n,n}$,
3. $f(A,A)=\det A, \qquad A\in M^{2,2}$,

является симметричной билинейной формой.

Доказательство. Пусть $f(A,A)=trA^2$, тогда с учетом свойств (4a)-(4d), форма $f(A,B)$ согласно (3a) примет вид

$$f(A,B)=\frac{tr(A+B)^2-trA^2-trB^2}{2}=\frac{trA^2-trB^2+2trAB-trA^2-trB^2}{2}=trAB.$$

Для $f(A,A)=tr^2A$ аналогично будем иметь

$$f(A,B)=\frac{tr^2(A+B)-tr^2A-tr^2B}{2}=\frac{tr^2A+tr^2B+2trA\cdot trB-tr^2A-tr^2B}{2}=trA\cdot trB.$$

Нетрудно проверить, что построенные формы удовлетворяют условиям (1a)-(1d).
И, наконец, случай 3 будет следовать из соотношения (4d), а также из уже доказанных утверждений.

Поскольку множество билинейных симметричных форм образует линейное многообразие, то в качестве f мы можем принять форму

$$f(A,B)=\frac{1}{2}(trA\cdot trB-trAB). \tag{5a}$$

При $A,B\in M^{2,2}$ и $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$, эта форма может быть представлена с помощью элементов матриц в виде

$$f(A,B)=\frac{1}{2}(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}-a_{12}b_{21}-a_{21}b_{12}), \tag{5b}$$

или

$$f(A,B)=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}a_{11} & b_{12}\\ a_{21} & b_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11} & a_{12}\\ b_{12} & a_{22}\end{vmatrix}\right). \tag{5c}$$

Билинейную форму (5a) при $A,B\in M^{2,2}$, с учетом (3a), (3b) и (4d), можно записать и в виде

$$f(A,B)=\frac{\det(A+B)-\det(A-B)}{4} \tag{5d}$$

или

$$f(A,B)=\frac{\det(A+B)-\det A-\det B}{2}. \tag{5e}$$

Предположим теперь, что в качестве билинейной формы на $M^{2,2}$ выбрана форма (5a) и E означает единичную матрицу порядка 2. Имеет место

Утверждение 2. *Для произвольных матриц* $A, B \in M^{2,2}$ *имеют место соотношения:*

1. $f(A,E)=\frac{1}{2}trA$. (6a)

2. $f(A,A)=\frac{1}{2}\left(tr^2A-trA^2\right)=\det A$. (6b)

3. $f(A,A)=f(A^*,A^*)$. (6c)

4. если $f(A,A)\neq 0$, то $f(A,A)\cdot f(A^{-1},A^{-1})=1$. (6d)

5. если $f(A,A)\cdot f(B,B)\neq 0$, то

$$f(A^{-1},B^{-1})=\frac{f(A,B)}{f(A,A)\cdot f(B,B)}. \qquad (6e)$$

6. если $f(A,A)\neq 0$, то

$$\frac{f(A,B)}{f(A,A)}=\frac{1}{2}tr(A^{-1}B). \qquad (6f)$$

Доказательство. Действительно, пусть матрица A имеет вид $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

1. Поскольку $trE=2$, то согласно (5a) будем иметь

$$f(A,E)=\frac{1}{2}\left(trA\cdot trE-tr(A\cdot E)\right)=\frac{1}{2}\left(2trA-trA\right)=\frac{1}{2}trA.$$

2. Соотношение (6b) следует непосредственно из соотношения (5a), если вместо B подставить A.

3. Равенство (6c) вытекает из соотношения (6b) и равенства $\det A=\det A^*$.

4. С учетом (6b) при $f(A,A)\neq 0$ имеем

$$f(A,A)\cdot f(A^{-1},A^{-1})=\det A\cdot\det A^{-1}=1.$$

5. Из соотношении (5a), а также (4b), будет следовать

$$f(A^{-1},B^{-1})=\frac{1}{2}\left(trA^{-1}\cdot trB^{-1}-tr\left(A^{-1}\cdot B^{-1}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{trA}{\det A}\cdot\frac{trB}{\det B}-tr(B\cdot A)^{-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{trA}{\det A}\cdot\frac{trB}{\det B}-\frac{trBA}{\det BA}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{trA}{\det A}\cdot\frac{trB}{\det B}-\frac{trAB}{\det A\cdot\det B}\right)=\frac{f(A,B)}{f(A,A)\cdot f(B,B)}.$$

6. Учитывая, что при $f(A,A)=\det A\neq 0$ существует обратная к A матрица, будем иметь

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11}\end{pmatrix}.$$

Тогда, используя формулу для следа $tr(A \cdot B)$ и соотношения (4b) и (5b), найдем

$$tr\left(A^{-1} \cdot B\right) = \frac{a_{22}}{\det A} \cdot b_{11} - \frac{a_{21}}{\det A} \cdot b_{21} - \frac{a_{12}}{\det A} \cdot b_{12} + \frac{a_{11}}{\det A} \cdot b_{22} =$$

$$= \frac{a_{22}b_{11} + a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}}{\det A} = \frac{2 f(A, B)}{f(A, A)}.$$

Утверждение доказано.

Заметим, что свойства (6c) будет выполняться и в случае $A \in M^{n,n}$.

Утверждение 3. *Для произвольных матриц* $A, B, C \in M^{2,2}$ *имеют место соотношения:*

1. $f(AB, AB) = f(A, A) \cdot f(B, B)$, (7a)
2. $f(AC, BC) = f(A, B) \cdot f(C, C)$. (7b)

Доказательство. 1. Имеем согласно (6b)

$$f(AB, AB) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = f(A, A) \cdot f(B, B).$$

2. Воспользовавшись соотношением (5d), а также учитывая,что $\det AB = \det A \cdot \det B$, найдем

$$f(AC, BC) = \frac{\det(A \cdot C + B \cdot C) - \det(A \cdot C - B \cdot C)}{2} = \frac{\det(A + B) \cdot C - \det(A - B) \cdot C}{2} =$$

$$= \frac{\left(\det(A + B) - \det(A - B)\right)}{2} \cdot \det C = f(A, B) \cdot f(C, C).$$

Следствие. *Для произвольной матрицы* $A \in M^{2,2}$ *и* $n \in N$ *имеет место соотношение:*

$$f(A^n, A^n) = f^n(A, A).$$

Теорема. *Билинейная форма* f *на* $M^{2,2}$ *инвариантна относительно подобного преобразования.*

Доказательство. Согласно определению 3 матрица, подобная матрице A, будет иметь вид PAP^{-1}, где P - некоторая обратимая матрица. Тогда, учитывая (7a) и (7b), получим

$$f(PAP^{-1}, PBP^{-1}) = f(P, P) \cdot f(A, B) \cdot f(P^{-1}, P^{-1}) = f(P, P) \cdot f(P^{-1}, P^{-1}) \cdot f(A, B) = f(A, B).$$

Теорема доказана.

В силу соотношений (6a) и (6b), из доказанной теоремы , в частности, будет следовать известная нам из курса линейной алгебры инвариантность детерминанта и следа матрицы.

Из формул (6a) и (6b) следует, что основные характеристики матрицы (след, определитель) выражаются через билинейную форму f, а именно:

$$trA = \frac{1}{2} f(A, E) = \frac{1}{2} f(E, A), \quad \det A = f(A, A).$$

Заметим, что вышенайденные соотношения позволяют получить достаточно интересные и полезные тождества, связывающие определители различных двумерных матриц. В частности, учитывая (5d) и (6b), получим, что верны следующие тождества:

1. $\det(\lambda A+B)-\det(\lambda A-B)=f(\lambda A+B,\lambda A+B)-f(\lambda A-B,\lambda A-B)=$
$$=4\lambda f(A,B)=\lambda\left(\det(A+B)-\det(A-B)\right).$$

2. $\det(\lambda A+B)-\det(A+\lambda B)=f(\lambda A+B,\lambda A+B)-f(A+\lambda B,A+\lambda B)=$
$$=f\left((\lambda+1)(A+B),(\lambda-1)(A-B)\right)=(\lambda^2-1)f(A+B,A-B)=$$
$$=(\lambda^2-1)\left(f(A,A)-f(B,B)\right)=.(\lambda^2-1)\left(\det A-\det B\right).$$

3.
$$\det(A+B+C)-\det(A+B-C)=\left[\det(A+C)-\det(A-C)\right]\cdot\left[\det(B+C)-\det(B-C)\right].$$

Учитывая (6d) и билинейность f, мы можем с помощью этой формы представить и характеристический многочлен матрицы, а именно:
$$\det(A-\lambda E)=f(A-\lambda E,A-\lambda E)=\lambda^2-2f(A,E)\lambda+f(A,A).$$

Утверждение 4. *Для* $A,B\in M^{2,2}$ *и произвольных действительных чисел* m *и* n *имеет место равенство:*
$$\det(mA+nB)=m^2\det A+n^2\det B+2mn\cdot f(A,B). \tag{8}$$

Доказательство. Используя билинейность формы f и (6b), найдем

$$f(mA+nB,mA+nB)=f(mA,mA)+2f(mA,nB)+f(nB,nB)=$$
$$=m^2f(A,A)+2mn\cdot f(A,B)+n^2f(B,B)=m^2\det A+2mn\cdot f(A,B)+n^2\det B.$$

С другой стороны, согласно (5d)
$$f(mA+nB,mA+nB)=\det(mA+nB).$$

Так как левые части двух последних равенств равны, то будут равны и правые части, а именно:
$$\det(mA+nB)=m^2\det A+n^2\det B+2mn\cdot f(A,B).$$

Заметим, что проведенные выше рассуждения можно применить и к матрицам, чей порядок больше двух. Например, предположим теперь, что форма (5a) рассматривается на $M^{3,3}$, E -единичная матрица порядка 3. Непосредственными вычислениями нетрудно показать, что в случае $A\in M^{3,3}$ будем иметь:
$$\det A=\frac{tr^3A-3trA\cdot trA^2+2trA^3}{3}=\frac{tr^3A-trA\cdot trA^2-2trA\cdot trA^2+2trA^3}{3}=$$
$$=\frac{trA\left(tr^2A-trA^2\right)-2\left(trA\cdot trA^2-trA^3\right)}{3}. \tag{9}$$

Далее, учитывая, что $f(A,B)=\frac{1}{2}\left(trA\cdot trB-trAB\right)$, найдем, что
$$f(A,E)=\frac{1}{2}\left(trA\cdot trE-trAE\right)=trA,$$
$$f(A,A)=\frac{1}{2}\left(tr^2A-trA^2\right),$$
$$f(A^2,A)=\frac{1}{2}\left(trA^2\cdot trA-trA^3\right).$$

Подставив эти значения в равенство (9), получим соотношение, выражающее определитель матрицы A с помощью симметричной билинейной формы (5a), а именно:

$$\det A = \frac{f(A,E)\,f(A,A) - 2f(A^2,A)}{3}.$$

В частности, если $A^2 = E$, то из последней формулы найдем, что

$$\det A = \frac{f(A,E)\,f(A,A) - 2f(E,A)}{3} = \frac{f(A,E)\big(f(A,A) - 2\big)}{3}.$$

И поскольку в этом случае $\det A = 1$, то мы.в частности, найдем, что для таких матриц

$$f(A,E)\big(f(A,A) - 2\big) = 3.$$

Для определения характеристического многочлена будем иметь

$$\det(A - \lambda E) = \frac{f(A-\lambda E, E)\,f(A-\lambda E, A-\lambda E) - 2f((A-\lambda E)^2, A-\lambda E)}{3},$$

которое после несложных упрощений примет вид

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + f(A,E)\lambda^2 - f(A,A)\lambda + \frac{f(A,E)\,f(A,A) - 2f(A^2,A)}{3}.$$

Из последнего соотношения, в частности, вытекает, что если λ_1, λ_2 и λ_3 являются корнями характеристического многочлена, то

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = f(A,E) \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -f(A,A),$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{f(A,E)\,f(A,A) - 2f(A^2,A)}{3} = \det A.$$

Литература

1. Беллман А. И. Введение в теорию матриц. —М.: Наука, 1975.
2. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1971.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. —М.: Физматлит, 2004.

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.м.н. А.М.Хачатряном.