ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՀԱՅԿ ՏԻԳՐԱՆԻ ԱՍԼԱՆՅԱՆ

ՈՐՈՇ ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆՈՐԵՆ ԱԶԱՏ ԽՄԲԵՐԻ ԷՆԴՈՄՈՐՖԻԶՄՆԵՐԻ ԿԻՍԱԽՈՒՄԲԸ ԵՎ ԱՎՏՈՄՈՐՖԻԶՄՆԵՐԸ

Ա.01.06 – “Հանրահաշիվ և թվերի տեսություն” մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2018

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АЙК ТИГРАНОВИЧ АСЛАНЯН

ПОЛУГРУППА ЭНДОМОРФИЗМОВ И АВТОМОРФИЗМЫ НЕКОТОРЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СВОБОДНЫХ ГРУПП

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
А.01.06 – “Алгебра и теория чисел”

ЕРЕВАН - 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի խորհրդի կողմից:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր Վ. Ս. Աթաբեկյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ–մաթ. գիտ. դոկտոր Վ. Հ . Միքայելյան ֆիզ–մաթ. գիտ. թեկնածու Վ. Ասլանյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Խ. Աբովյանի անվ. Հայկական պետական մանկավարժական համալսարան

Պաշտպանությունը կկայանա 2018թ. հունիսի 22–ին ժ. 15^{00}–ին Երևանի պետական համալսարանում գործող ԲՈՀ-ի Մաթեմատիկայի-050 մասնագիտական խորհրդի նիստում (0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքվել է 2018թ. մայիսի 22–ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена советом факультета математики и механики Ереванского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физ–мат. наук В. С. Атабекян
Официальные оппоненты:	доктор физ–мат. наук В. Г. Микаелян кандидат физ–мат. наук В.Асланян
Ведущая организация:	Армянский государственный педагогический университет им. Х.Абовяна

Защита диссертации состоится 22 июня 2018г. в 15^{00} на заседании специализированного совета ВАК-а Математика-050 при Ереванском государственном университете (0025, г. Ереван, ул. Ал. Манукяна 1).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕГУ.

Автореферат разослан 22–ого мая 2018г.

Ученый секретарь специализированного совета Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Группа F называется относительно свободной, если она обладает множеством порождающих S таких, что любое отображение из S в F можно продолжить до эндоморфизма F. Порождающее множество с этим свойством называется множеством свободных образующих для F. Мощность S, являющаяся инвариантом данной относительно свободной группы F, называется рангом F. Каждая относительно свободная группа является свободной группой соответствующего ранга в некотором многообразии групп. Напомним, что многообразие групп является классом всех тех групп, каждый из которых удовлетворяет некоторому фиксированному множеству тождеств (см. [1]).

Если в группе G выполнено тождество $x^n = 1$, то мы говорим, что G является периодической группой с показателем n или G является n-периодической группой. Всевозможные n-периодические группы для фиксированного n образуют многообразие, которое называется многообразием Бернсайда показателя n. Свободная группа ранга m в многообразии Бернсайда показателя n обозначается через $B(m, n)$. Известно, что для конечного ранга m группы $B(m, 2)$, $B(m, 3)$, $B(m, 4)$ и $B(m, 6)$ конечны (см. [2], [3]) и для всех нечетных чисел $n \geq 665$ (см. [4], [5]) и натуральных чисел $n = 16k \geq 8000$ см. [6], [7]), а также для их натуральных кратных группы $B(m, n)$ бесконечны. Для всех остальных экспонент вопрос конечности $B(m, n)$ является хорошо известной, но все еще не решенной задачей теории групп (проблема Бернсайда, 1902). Например, неизвестно, является ли $B(2.5)$ конечной или бесконечной.

Теория конечно порожденных свободных бернсайдовых групп достаточно больших нечетных показателей была построена в цикле совместных работ П.С.Новикова и С.И.Адяна [4]. Позднее эта теория была усовершенствована в монографии [5] С.И.Адяна.

В. Атабекян в [8] показал, что для всех нечетных $n \geq 655$ и ранга $m > 1$ группа автоморфизмов $Aut(End(B(m, n)))$ полугруппы эндоморфизмов $End(B(m, n)$ группы $B(m, n)$ изоморфна группе автоморфизмов $Aut(B(m, n))$. Аналогичное утверждение для конечно порожденных абсолютно свободных групп было доказано Е.Форманеком в 2002 году (см. [9]). Группа $Aut(End(F))$ изучалась для свободных моноидов F Машевицким и Шейном в [10]. Вышеупомянутые результаты работ [8], [9] обобщены и усилены в главе I (см. [11]). В этой главе изучаются полугруппы эндоморфизмов (относительно свободных) групп R, в которых нетривиальные элементы имеют только циклические централизаторы.

Еще одним из направлений нашего исследования является исследование групп автоморфизмов некоторых относительно свободных, в том числе, бернсайдовых групп. По классической теореме Нильсена [12] группа автоморфизмов абсолютно свободной группы конечного ранга порождается так называемыми элементарными автоморфизмами, которые в настоящее время называются автоморфизмами Нильсена. Возникает естественный вопрос для относительно свободных групп: верно ли, что для данной относительно свободной группы ее группа автоморфизмов порождается автоморфизмами Нильсена? Ответ на этот вопрос отрицательный в общем случае. Например, нетрудно видеть, что автоморфизм, переводящий каждый свободный порождающий на его квадрат, не может быть индуцирован никаким автоморфизмом абсолютно свободной группы (того же ранга) и, следовательно, он не является автоморфизмом Нильсена для свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ достаточно большого нечетного периода n. Существует много других относительно свободных групп с так называемыми «дикими» (т. е. не индуцированным нильсенскими автоморфизмами) автоморфизмами (см., например, [13]).

Р. Брайант и О. Мацедонска в [14] показали, что каждый автоморфизм относительно свободной нильпотентной группы бесконечного ранга индуцируется некоторым автоморфизмом абсолютно свободной группы F_m. Недавно А.Григоряном было показано, что каждый автоморфизм группы $B(m, 3)$ конечного ранга m индуцируется некоторым автоморфизмом абсолютно свободной группы F_m ранга m (см. [15] , Теорема 2).

Отметим, что ранее была установлена серия аналогов между свойствами автоморфизмов абсолютно свободных групп и автоморфизмов свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 1003$. Например, было доказано (см. [16]), что для любого нечетного числа $n \geq 1003$ каждый нормальный автоморфизм свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ранга $m > 1$ является внутренним автоморфизм (см. также [17]). Напомним, что автоморфизм ϕ группы G называется нормальным автоморфизмом, если $\phi(N) = N$ для любой нормальной подгруппы N группы G). Такой результат для свободных групп был доказан А. Любоцким в 1980 году [18]. Группа называется полной, если она имеет тривиальный центр, и если каждый из ее автоморфизмов является внутренним. Дж.Дайер и Е.Форманек [19] доказали, что группа автоморфизмов $Aut(F)$ конечно порожденной абсолютно свободной группы F полна. В. Толстых [20] доказал полноту группы $Aut(F)$ для абсолютно свободных групп бесконечного ранга. В работе [21] было установлено В. Атабекяном, что башня автоморфизмов групп $B(m, n)$ для любого нечетного периода $n \geq 1003$ и ранга $m > 1$ заканчивается на первом звене, как и для автоморфизмов абсолютно свободных групп. Более того, для всех нечетных $n \geq 1003$ и $m > 1$ группа внутренних автоморфизмов $Inn(B(m,n))$ является единственной нормальной подгруппой $Aut(B(m,n))$, которая изоморфна свободной группе Бернсайда $B(s,n)$ некоторого ранга s. Отсюда следует, что группа автоморфизмов $Aut(B(m,n))$ свободной бернсайдовой группы $B(m,n)$ полна для всех нечетных $n \geq 1003$ и $m > 1$, а также, что группы $Aut(B(m,n))$ и $Aut(B(k,n))$ изоморфны тогда и только тогда, когда $m = k$ (см. также [22] - [24]). В [16] также доказано, что подгруппа внутренних автоморфизмов $Inn(B(m,n))$ максимальна среди всех подгрупп группы $Aut(B(m,n))$, в которой порядки элементов ограничены числом n.

Заметим, что все упомянутые результаты касаются бесконечных свободных групп Бернсайда. Во второй главе мы изучаем аналогичные вопросы для автоморфизмов конечных свободных бернсайдовых групп $B(m,3)$.

Цель работы.

1. Исследование автоморфизмов полугруппы эндоморфизмов относительно свободных групп с циклическими централизаторами.

2. Исследование автоморфизмов группы атоморфизмов групп с циклическими централизаторами.

3. Исследование и описание нормалных автоморфизмов свободной бернсайдовой группы $B(m,3)$.

4. Исследование пары элементов групп $B(m,3)$ имеющие совпадающие нормальные замыкания (исследование справедливости аналога теоремы Магнуса для групп $B(m,3)$).

5. Исследование некоторых свойств нильсеновских автоморфизмов относительно свободных групп.

Методы исследования. В работе применяются методы комбинаторной теории групп и теории многообразий групп.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты работы имеют теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при изучении автоморфизмов и эндоморфизмов различных, в том числе относительно свободных групп, при исследовании периодических групп.

Апробация полученных результатов.

Основные результаты диссертации были представлены на международной конференции Мальцевские чтения (Новосибирск, 2017), в семинаре «Теория групп» в ЕГУ (Ереван, 2016-2018 гг.), На ежегодной заседании АМУ, посвященной 120-летию Артина (Ереван, 2018), докладывались на годичной научной конференции Российско-Армянского университета 2016 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти статьях и двух тезисах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 69 страницах и состоит из введения, двух глав, содержащих 12 параграфов и списка литературы, который содержит 83 наименований.

Содержание работы

Во введении приведен обзор результатов, связанных с темой диссертации а также краткое описание содержания диссертации.

Содержание главы 1.

Множество всех эндоморфизмов и автоморфизмов данной группы G обозначаются соответственно через $\mathrm{End}(G)$ и $\mathrm{Aut}(G)$. На этих множествах определяют умножение, считая произведением двух эндоморфизмов их последовательное выполнение. Легко проверить, что тогда $\mathrm{End}(G)$ становится полугруппой, а $\mathrm{Aut}(G)$ становится группой.

В первой главе доказывается, что каждый автоморфизм полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}(F)$ для широкого класса относительно свободных групп F произвольного (конечного или бесконечного) ранга однозначно определяется его действием на подгруппу внутренних автоморфизмов $\mathrm{Inn}(F)$. Вопрос об описании автоморфизмов $\mathrm{End}(A)$ для свободной алгебры A в некотором многообразии был поднят Б. И. Плоткиным (см. [26, стр. 1085] или [27]). Аналогичные задачи для $\mathrm{End}(F)$, где F - конечно порожденная свободная группа, свободная бернсайдовая группа нечетного периода $n \geq 1003$ или свободный моноид были решены Форманеком [9] , Атабекян [8], Машевицким и Шейном [10] соответственно. Форманеком в работе [9] была доказана, что если имеем свободную группу $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ конечного ранга $n \geq 2$ и $T : \mathrm{End}(F) \to \mathrm{End}(F)$ является автоморфизмом полугруппы $\mathrm{End}(F)$, тогда существует автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(F)$ такое, что $T(\beta) = \alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$ для всех $\beta \in \mathrm{End}(F)$.

Но, прежде всего нами будет рассмотрен класс так называемых CC-групп. По определению, группа G называется *CC-группой*, если централизатор каждого нетривиального элемента G является циклической группой. Хорошо известно, что абсолютно свободные группы и свободные периодические группы с достаточно большими нечетными периодами (см. [5]) являются CC-группами. Легко показать, что свободное произведение произвольного семейства CC -групп также является CC-группой. Из теоремы 5 статьи [28] (см. Также [30]) следует, что то же самое верно для n -периодических произведений CC-групп. Рассматриваемые в разделе 2 группы $\Gamma_m(\mathcal{P})$ также являются CC-группами $\Gamma_m(\mathcal{P})$.

Заметим, что, например, конечно порожденные свободные периодические группы периода 3 не являются CC-группами (их группы автоморфизмов описаны в [15]).

Наш первый основной результат настоящей главы является следующая теорема.

Теорема **1.** *Пусть Φ - произвольный автоморфизм полугруппы эндоморфизмов* $\mathrm{End}(G)$ *нециклической CC-группы G. Если $\Phi(i_a) = i_a$ для любого $i_a \in Inn(G)$, то $\Phi(\delta) = \delta$ для любого эндоморфизма $\delta \in \mathrm{End}(G)$ образ* $\mathrm{Im}\delta$ *которого не является циклическим.*

Из него непосредственно вытекает

Следствие **1.** *Для любого $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G))$нециклической CC-группы G такой, что $\Phi(i_a) = i_a$ для любого $i_a \in \mathrm{Inn}(G)$ имеет место равенство $\Phi(\delta) = \delta$ для всех $\delta \in \mathrm{Inn}(G)$.*

Сформулируем теперь наш следующий основной результат.

Теорема **2.** *Пусть Φ и Ψ – произвольные автоморфизмы полугруппы эндоморфизмов* $\mathrm{End}(F)$ *относительно свободной CC-группы F некоторого ранга > 1. Тогда $\Phi = \Psi$ тогда и только тогда, когда ограничения автоморфизмов Φ и Ψ на подгруппу $Inn(F)$ совпадают, т. е.*

$$\Phi\big|_{Inn(F)} = \Psi\big|_{Inn(F)}$$

.

В частности, мы получаем

Следствие **2.** *Для любых автоморфизмов Φ и Ψ полугруппы эндоморфизмов* $\mathrm{End}(F)$ *абсолютно свободной группы F ранга > 1 выполняется равенство $\Phi = \Psi$ тогда и только тогда, когда ограничения автоморфизмов Φ и Ψ на подгруппу* $\mathrm{Inn}(F)$ *совпадают.*

Другое следствие получаем для свободных бернсайдовых групп. По теореме С. И. Адяна (см. [5], глава VI, теорема 3.1) централизатор любого нетривиального элемента свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ ранга $m > 1$ и нечетного периода $n \geq 665$ является циклической группой (свободные группы многообразия групп, определяемые одинаковым соотношением $x^n = 1$, называются свободными группами Бернсайда).

Следствие **3.** *Для любых автоморфизмов* Φ *и* Ψ *полугруппы эндоморфизмов* $\mathrm{End}(B(m,n))$ *свободной бернсайдовой группы* $B(m,n)$ *(конечного или бесконечного) ранга* $m > 1$ *и нечетного периода* $n \geq 665$ *равенство* $\Phi = \Psi$ *выполняется тогда и только тогда, когда ограничения автоморфизмов* Φ *и* Ψ *на подгруппу* $\mathrm{Inn}(B(m,n))$ *совпадают.*

Согласно статье [29], оценка $n \geq 665$ в формулировке следствия 3 в будущем может быть сведена к $n \geq 101$. Другое обобщение следствия 3 можно получить для n-периодических произведений некоторого класса групп (см. [30]).

Укажем еще один широкий класс групп, к которым можно применить теорему 2. В [31] С. И. Адян построил примеры (первые примеры) бесконечных независимых систем групповых тождеств для решения задачи конечного базиса, поставленной Б. Нойманом в 1937 году и хорошо известной в теории групп. В монографии [5] доказано, что для любого нечетного $n \geq 1003$ следующее семейство тождеств с двумя переменными

$$\{[x^{pn}, y^{pn}]^n = 1\}, \tag{1.0}$$

где параметр p пробегает все простые числа, неприводим, т. е. ни одно из тождеств этого семейства не следует из других. Поэтому, если для заданного набора простых чисел $\mathcal{P}$ и для фиксированного натурального $m > 1$ через $\Gamma_m(\mathcal{P})$ обозначим относительно свободную группу ранга m многообразия $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$, определяемого всеми тождествами вида (1.0) для $p \in \mathcal{P}$, тогда существует континуум многообразий и континуум неизоморфных относительно свободных групп $\Gamma_m(\mathcal{P})$, соответствующих различным наборам простых чисел $\mathcal{P}$.

В статье [32] доказано, что для любого ранга $m > 1$ и для любого набора простых чисел $\mathcal{P}$ централизатор любого неединичного элемента относительно свободной группы $\Gamma_m(\mathcal{P})$ - циклическая группа.

Следствие **4.** *Для любых автоморфизмов* Φ *и* Ψ *полугруппы эндоморфизмов* $\mathrm{End}(\Gamma_m(\mathcal{P}))$ *относительно свободной группы* $\Gamma_m(\mathcal{P})$ *ранга* $m > 1$ *в многообразии* $\mathbb{A}_{\mathcal{P}}$ *равенство* $\Phi = \Psi$ *выполняется тогда и только тогда, когда ограничения автоморфизмов* Φ *и* Ψ *в подгруппу* $\mathrm{Inn}(\Gamma_m(\mathcal{P}))$ *совпадают.*

Для произвольной группы G рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\tau_G : \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(G)) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G))$$

взяв каждый автоморфизм из полугруппы эндоморфизмов группы G в его ограничение на подгруппу $\mathrm{Aut}(G)$ всех обратимых элементов этой полугруппы.

Следствие **5.** *Если F является относительно свободной группой некоторого ранга > 1, то гомоморфизм τ_G является мономорфизмом и, следовательно, группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(F))$ канонически вложено в группу $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(F))$.*

Очевидно, что любой внутренний автоморфизм из $\mathrm{Aut}(G)$ естественным образом распространяется на автоморфизм полугруппы $\mathrm{End}(G)$. Поэтому, если все автоморфизмы группы $\mathrm{Aut}(G)$ являются внутренними, то τ_G является сюръективным гомоморфизмом.

В частности, это верно для совершенных групп (напоминаем, что группа называется *совершенной*, если ее центр тривиален и все его автоморфизмы являются внутренними). Более того, если $\phi : \mathrm{Inn}(G) \to \mathrm{Inn}(G)$ является автоморфизмом группы внутренних автоморфизмов G и $\phi(i_g) = i_{\alpha(g)}$,, то нетрудно проверить, что $\alpha : G \to G$ является автоморфизмом G.

Предположим, что композиция эндоморфизмов действует на группу G по правилу $(\alpha\circ\beta)(x) = (\alpha(\beta(x))$ для $\alpha, \beta \in \mathrm{End}(G)$ и $x \in G$. Используя соотношение $\alpha\circ i_g\circ\alpha^{-1} = i_{\alpha(g)}$, получаем, что автоморфизм ϕ продолжается до автоморфизма i_α полугруппы $\mathrm{End}(G)$. По известному критерию Бернсайда для совершенных групп подгруппа $\mathrm{Inn}(G)$ характеристичная в группе $\mathrm{Aut}(G)$. Следовательно, для любой совершенной группы $\mathrm{Aut}(G)$ гомоморфизм

$$\iota_G : \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(G)) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Inn}(G)),$$

сопоставляющий каждому автоморфизму из $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(G))$ ее ограничение на подгруппу $\mathrm{Inn}(G)$, также является сюръективным гомоморфизмом.

Таким образом, получаем

Следствие **6.** *Если F является относительно свободной CC-группой и группа $\mathrm{Aut}(F)$ совершенна, то гомоморфизмы*

$$\tau_F : \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(F)) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(F))$$

и

$$\iota_F : \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(F)) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Inn}(F))$$

являются изоморфизмами.

Например, группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F)$ совершенны для абсолютно свободных групп F и для свободных бернсайдовых групп с нечетными показателями $n \geq 1003$ для любого ранга > 1 (см. [19], [20] и [21] соответственно). Итак, для этих групп получаем изоморфизмы

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(F)) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{Inn}(F)) \simeq \mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(F)) \simeq \mathrm{Aut}(F),$$

(по определению, для совершенной группы G имеет место изоморфизм $\mathrm{Aut}(G) \simeq G$).

Содержание главы 2.

Во второй главе мы доказываем некоторые теоремы о свободных бернсайдовых группах периода 3. Достоверность аналогичных утверждений для абсолютно свободных групп хорошо известны. Исходной точкой для наших исследований является очевидное замечание о том, что группы автоморфизмов абсолютно свободной группы ранга 1 и свободной бернсайдовой группы периода 3 и ранга 1 изоморфны (циклической группе порядка 2).

В 1930 г. В. Магнус [25] доказал так называемый Freiheitssatz и следующую теорему: если в свободной группе F нормальные замыкания $r \in F$ и $s \in F$ совпадают, то r сопряжен с s или s^{-1}. Будем говорить, что группа G обладает свойством *Магнуса*, если для любых двух элементов r, s из G с теми же нормальными замыканиями, мы имеем что r сопряжен с s или s^{-1}. В [33], [34] доказано, что фундаментальная группа любой компактной поверхности, за исключением неориентируемой поверхности рода 3, обладает свойством Магнуса (см. также [35]).

Теорема **3.** *Свободная группа Бернсайда $B(3)$ любого ранга обладает свойством Магнуса.*

Пусть R_n - относительно свободная группа с базисом $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Любой гомоморфизм из R_n в себя полностью определяется образами порождающих элементов. Для любого $x_i \in X$ пусть ϵ_i - автоморфизм, отправляющий x_i в x_i^{-1} и оставляющий остальные элементы X неизменными. Для любых разных $x_i, x_j \in X$ пусть λ_{ij} является автоморфизмом, отправляющим x_i в $x_i x_j$ и оставляющий остальные элементы X неизменными. Эти автоморфизмы ϵ_i, λ_{ij} называются автоморфизмами Нильсена. В 1924 году Нильсен (см., пример, [36]) показал, что автоморфизмы Нильсена порождают полную группу автоморфизмов $Aut(F_n)$ конечно порожденной абсолютно свободной группы F_n.

Очевидно, что любой автоморфизм свободной группы F некоторого (конечного или бесконечного) ранга индуцирует автоморфизм относительно свободной группы R того же ранга. Следовательно, существует очевидный гомоморфизм $\tau : Aut(F) \to Aut(R)$, и каждый $\alpha \in Aut(F)$ индуцирует $\tau(\alpha) \in Aut(R)$. Любой автоморфизм из $\tau(Aut(F))$ называется *ручным* автоморфизмом.

Если $\tau(\alpha) = \beta$, мы говорим, что $\beta \in Aut(R)$ может быть *поднято* до $\alpha \in Aut(F)$. В общем случае не каждый автоморфизм относительно свободной группы является ручным автоморфизмом. Как было доказано Андреадакисом [37] и Бахмутом [38], даже свободные нильпотентные группы конечного ранга и степени 3 имеют автоморфизм, не индуцированный автоморфизмом свободной группы. С другой стороны, все автоморфизмы относительно свободных нильпотентных групп бесконечного ранга являются ручными автоморфизмами.

Пусть $B(3)$ - свободная бернсайдовая группа периода 3 и некоторого ранга ≥ 1 и $Aut_N(B(3))$ - группа всех автоморфизмов, порожденных автоморфизмами Нильсена $B(3)$. Через $Aut_t(B(3))$ обозначается группа всех ручных автоморфизмов $B(3)$. Известно, что если ранг $B(3)$ больше 2, то эта группа является нильпотентной группой степени 3.

Другая классическая теорема Нильсена (см. [36, Proposition 4.5]) утверждает, что ядро отображения

$$Aut(F_m) \to GL_m(\mathbb{Z})$$

является группой внутренних автоморфизмов F_m. По аналогии образ подгруппы $Aut^+(F_m)$ при гомоморфизме

$$\tau_m : Aut(F_m) \to Aut(B(m, 3))$$

обозначим через $Aut^+(B(,3))$. Очевидно, что подгруппа $Aut^+(B(m, 3))$ также имеет индекс 2 в $Aut(B(m, 3))$. Эпиморфизм $\epsilon_m : Aut(B(m, 3)) \to GL_m(Z_3)$ (индуцированный эпиморфизмом $B(m, 3) \to \underbrace{\mathbb{Z}_3 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_3}_{m}$)) отображает подгруппу $Aut^+B(m, 3)$ на $SL_m(Z_3)$. Имеет место следующий аналог вышеупомянутой теоремы Нильсена.

Теорема **4.** *(Аналог теоремы Нильсена) Ядро естественного гомоморфизма $\epsilon_2 : Aut(B(2, 3)) \to GL_2(\mathbb{Z}_3)$ совпадает с группой внутренних автоморфизмов группы $B(2, 3)$.*

Брайдсон и Вогтман в [39] доказали, что группа $Aut(F_m)$ свободной группы ранга $m > 1$ является нормальным замыканием одной транспозиции (12) (которая переставляет порождающие x_1 и x_2, оставив другие порождающие на месте).

Автоморфизмы λ_{ij}, ρ_{ij} порождают подгруппу $Aut^+(R_m)$ индекса 2 в группе $Aut(F_m)$, где $Aut^+(R_m)$ является прообразом подгруппы $SL_m(\mathbb{Z})$ под гомоморфизмом

$$Aut(F_m) \to GL_m(\mathbb{Z}),$$

индуцированным эпиморфизм $R_m \to \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m}$.

Обозначим через A_m подгруппу группы $Aut(R_m)$ порожденную всеми нильсеновскими преобразованиями и автоморфизмами ϵ_i. Нетрудно проверить, что любые два нильсеновские преобразования сопряжены при фиксированном базисе. И так как A_m действует транзитивно на базисы R_m, значит нильсеновские преобразования, соответствующие различным базисам также сопряжены в A_m. Используя методы работы [39], мы доказали следующий результат для нильсеновских автоморфизмов относительно свободных групп.

Теорема **5.** *Пусть $m \geq 3$ и имеем гомоморфизм $\phi : A_m \to G$. Если ϕ не является инъективным гомоморфизмом на S_m, то либо ϕ тривиальный гомоморфизм, либо его образ состоит из двух элементов.*

Следствие **7.** *Пусть имеем группу G и гомоморфизм $\phi : A_m \to G$. Образ ϕ тривиален в том и только в том случае, если $\phi(\tau) = 1$, где $\tau = (1\ 2)$.*

Следствие **8.** *Группа A_m является нормальным замыканием транспозиции $(1\ 2)$.*

Список литературы

[1] Hanna Neumann, *Varieties of Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[2] I.N. Sanov, Solution of the Burnside problem for exponent 4, Uchenye zapiski LSU. Ser. Math., 10 (1940), 166-170.

[3] M. Hall Jr., Solution of the Burnside problem for exponent six, Illinois J. Math., 2:4 (1958), 764-786.

[4] P. S. Novikov, S. I. Adjan, Infinite periodic groups. I, Math. USSR Izv., 2:1, 2, 3 (1968).

[5] S. I. Adian, The Burnside problem and identities in groups, Ergeb. Math. Grenzgeb., 95, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[6] S. V. Ivanov, The free Burnside groups of sufficiently large exponents, Internat. J. Algebra Comput., 4:1-2 (1994), 1-308.

[7] I. G. Lysenok, Infinite Burnside groups of even exponent, Izv. Math., 60:3 (1996), 453-654.

[8] V.S.Atabekyan, The automorphisms of endomorphism semigroups of free Burnside groups. International Journal of Algebra and Computation, Volume 25, Issue 04, (2015). p. 669-674.

[9] E. Formanek, A question of B. Plotkin about the semigroup of endomorphisms of a free group, Proc. Amer. Math. Soc., 130:4 (2002), 935–937.

[10] G. Mashevitzky, B. M. Schein, Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup, Proc. Amer. Math. Soc., 131:6 (2003), 1655-1660.

[11] V. S. Atabekyan and H. T. Aslanyan, The automorphisms of endomorphism semigroups of relatively free groups, Int. J. Algebra Comput. 28, 207-215 (2018).

[12] J. Nielsen, Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen, Math. Ann., 91 (1924) 169-209.

[13] Ch.K.Gupta, Generating sets of certain automorphism groups, Resenhas IME-USP 1996, Vol. 3, No.2, 319 –332.

[14] R.Bryant, O.Macedonska. Automorphisms of relatively free nilpotent groups of infinite rank, Journal of algebra 121, 388-398 (1989).

[15] V.S.Atabekyan, H.T.Aslanyan, H.A.Grigoryan, A.E.Grigoryan, Analogues of Nielsen's and Magnus's theorems for free Burnside groups of period 3, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences, (2017), v. 51, #3, p. 217-223.

[16] V.S. Atabekyan, Normal automorphisms of free Burnside groups, Izvestiya: Mathematics, 75:2 (2011), 223-237.

[17] E. A. Cherepanov, Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponentsв, Internat. J. Algebra Comput, **16** (2006), no. 5, pp. 839-847.

[18] A. Lubotzky, Normal automorphisms of free groups, J. Algebra, 63:2 (1980), 494-498.

[19] J. Dyer and E. Formanek, The automorphism group of a free group is complete, J. London Math. Soc. (2) 11(2) (1975) 181-190.

[20] V. Tolstykh, The automorphism tower of a free group, J. London Math. Soc. 61(2) (2000) 423-440.

[21] V.S. Atabekyan, The groups of automorphisms are complete for free Burnside groups of odd exponents $n \geq 1003$, Int. J. Algebra Comput., 23:6 (2013), 1485-1496.

[22] V. S. Atabekyan, Monomorphisms of Free Burnside Groups, Mat. Zametki, 86:4 (2009), 483-490; Math. Notes, 86:4 (2009), 457-462.

[23] V.S.Atabekyan, A. L. Gevorgyan, On outer normal automorphisms of periodic products of groups, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, (2011), Vol. 46, N. 5, pp. 289-292.

[24] V.S.Atabekyan, Automorphism groups and endomorphism semigroups of groups B(m,n), Algebra and Logic, Vol. 54, No. 1, p. 58-62.

[25] W Magnus, Uber diskontinuerliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der ɪɢ Freiheitssatz), J. reine angew. Math. 163 (1930) 141-165.

[26] G. Mashevitzky, B. I. Plotkin, On automorphisms of the endomorphism semigroup of a free universal algebra. *Int. J. Algebra Comput.* **17**(5-6) (2007) 1085–1106.

[27] B. I. Plotkin, *Seven Lectures on the Universal Algebraic Geometry*, Preprint, Institute of Mathematics, Hebrew University, (2000).

[28] S. I. Adian, Periodic products of groups, Proc. Steklov Inst. Maюh., 142 (1979), 1–19.

[29] S. I. Adian, New estimates for odd periods of infinite Burnside groups, Proc. Steklov Inst. Math., 289 (2015), 33–71.

[30] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, Periodic product of groups. *Journal of contemporary mathematical analysis*, **52**:3, (2017) 111–117.

[31] S. I. Adian, Infinite irreducible systems of group identities, *Math. USSR-Izv.*, **4**:4 (1970), 721–739.

[32] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, On free groups of infinitely based varieties of S.I.Adian, *Izvestiya: Mathematics*, **81**:5, (2017) 889–900.

[33] J. Howie, Some results on one-relator surface groups, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 10 (2004) 255–262.

[34] O.Bogopolski, A Magnus theorem for some one-relator groups V, Geometry and Topology Monographs, 14 (2008) 63–73.

[35] O.Bogopolski, A surface groups analogue of a theorem of Magnus, Geometric methods in group theory, Contemp. Math. 372, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2005) 59–69.

[36] R.Lyndon, P.Schupp, Combinatorial theory of groups. Springer–Verlag, NY, 1977.

[37] S. Andreadakis, On the Automorphisms of Free Groups and Free Nilpotent Groups, Proceedings of the London Mathematical Society, Volume s3-15, Issue 1, 1 (1965), 239–268.

[38] S. Bachmuth, Induced Automorphisms of Free Groups and Free Metabelian Groups, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 122, No. 1 (Mar., 1966), pp. 1–17.

[39] M. R. Bridson, K Vogtmann, Automorphisms of automorphism groups of free groups, *J. Algebra* **229**(2000) 785–792.

Список работ опубликованных по теме диссертации

1. V. S. Atabekyan and H. T. Aslanyan, The automorphisms of endomorphism semigroups of relatively free groups, Int. J. Algebra Comput. 28, 207-215 (2018).

2. H.T.Aslanyan, On automorphisms and endomorphisms of CC groups, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences, 2018, v. 52, #1, p. 60-63.

3. Atabekyan, V., Aslanyan, H., & Grigoryan, A. E. Normal Automorphisms of Free Burnside Groups of Period 3. Armenian Journal of Mathematics, (2017), 9(2), 60-67.

4. V.S.Atabekyan, H.T.Aslanyan, H.A.Grigoryan, A.E.Grigoryan, Analogues of Nielsen's and Magnus's theorems for free Burnside groups of period 3, Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences, (2017), v. 51, #3, p. 217-223.

5. А.Т.Асланян, Об автоморфизмах относительно свободных групп, Сборник статей. 11 год. науч. конф. (2017), 56-59.

6. H.T.Aslanyan, V. S. Atabekyan, A. E. Grigoryan. On free Burnside groups of period 3, Мальцевские чтения, (2017), p. 96-97.

7. H.T.Aslanyan, On endomorphisms of CC-groups, EMS Conference Emil Artin International Conference Dedicated to the 120th Anniversary of Emil Artin (03.07.1898-20.12.1962) Yerevan, the Republic of Armenia, (May 27-June 2, 2018), p. 27.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հայկ Տիգրանի Ասլանյան

Որոշ հարաբերականորեն ազատ խմբերի էնդոմորֆիզմների կիսախումբը և ավտոմորֆիզմները

Ատենախոսությունը նվիրված է հարաբերականորեն ազատ խմբերի էնդոմորֆիզմների կիսախմբերի ավտոմորֆիզմների և 3 պարբերությամբ բեռնսայդյան ազատ խմբերի որոշ հատկությունների ուսումնասիրությանը: F խումբը կոչվում է հարաբերականորեն ազատ, եթե այն ունի S ծնորդների բազմություն, այնպիսին, որ S-ից F կամայական արտապատկերում կարելի է շարունակել մինչև F-ի էնդոմորֆիզմ: S բազմության հզորությունը կոչվում է F խմբի ռանգ: Կամայական հարաբերականորեն ազատ խումբ որևէ խմբերի բազմաձևության ազատ խումբ է: Խմբերի բազմաձևությունը խմբերի դաս է, որում կամայական խումբ բավարարում է որոշակի ֆիքսված առնչությունների բազմության:

$x^n = 1$ առնչությանը բավարարող խմբերի բազմաձևությունում m ռանգի հարաբերականորեն ազատ խումբը նշանակվում է $B(m,n)$-ով և կոչվում է m ռանգի և n պարբերությամբ ազատ պարբերական կամ ազատ բեռնսայդյան խումբ:

G խումբը կոչվում է CC-խումբ, եթե նրանում կամայական ոչ տրիվյալ տարրի ցենտրալիզատորը ցիկլիկ խումբ է:

Կասենք որ G խումբը օժտված է Մագնուսի հատկությամբ, եթե կամայական $r, s \in G$ տարրերի համար «r» = «s» հետևում է, որ r-ը համալուծ է կա՛մ s-ին, կա՛մ s^{-1}-ին:

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

- Ենթադրենք Φ-ն G ոչ ցիկլիկ CC-խմբի էնդոմորֆիզմների կիսախմբի որևէ ավտոմորֆիզմ է: Եթե $\Phi(i_a) = i_a$ կամայական i_a ներքին ավտոմորֆիզմի համար, ապա $\Phi(\delta) = \delta$ կամայական δ էնդոմորֆիզմի համար, որի պատկերը ցիկլիկ չէ:
- Ենթադրենք Φ-ն և Ψ-ն մեկից մեծ ռանգի հարաբերականորեն ազատ CC-խմբի էնդոմորֆիզմների կիսախմբի կամայական ավտոմորֆիզմներ են: Այդ դեպքում $\Phi = \Psi$ այն և միայն այն դեպքում, երբ Φ-ի և Ψ-ի սահմանափակումները ներքին ավտոմորֆիզմների ենթախմբի վրա համընկնում են, այսինքն $\Phi\big|_{Inn(F)} = \Psi\big|_{Inn(F)}$:
- $B(m,3)$ բերնսայդյան ազատ խումբն օժտված է Մագնուսի հատկությամբ:
- $\epsilon : Aut(B(2,3)) \to GL_2(\mathbb{Z}_3)$ բնական հոմոմորֆիզմի միջուկը իրենից ներկայացնում է $B(2,3)$ խմբի ներքին ավտոմորֆիզմների խումբը:
- $m \geq 3$ ռանգի $B(m,3)$ ազատ բեռնսայդյան խմբի կամայական նորմալ ավտոմորֆիզմ ներքին է:
- Նշանկենք R_m-ով m ռանգի հարաբերականորեն ազատ խումբը: A_m-ով

նշանակենք R_m խմբի ավտոմորֆիզմների խմբի ենթախումբը, որը ծնվում է բոլոր նիլսենյան ավտոմորֆիզմներով:

Ենթադրենք $n \geq 3$ և ունենք $\phi : A_m \to G$ հոմոմորֆիզմը: Եթե ϕ-ն ինյեկտիվ հոմոմորֆիզմ չէ S_n-ի վրա, ապա ϕ-ն կա́մ տրիվիալ հոմոմորֆիզմ է, կա́մ նրա պատկերը երկրորդ կարգի ցիկլիկ խումբ է:

SUMMARY

Hayk Tigran Aslanyan

The endomorphism semigroup and automorphisms of some relatively free groups

The thesis is devoted to the study of automorphisms of the endomorphism semigroup of relatively free groups and some properties of the Burnside free group of period 3. A group F is said to be relatively free if it has a set of generators S such that any map from S to F can be extended to an endomorphism of F. The cardinality of S is called the rank of F. Every relatively free group is a free group of the corresponding rank in a certain variety of groups. The variety of groups is the class of all groups, each of which satisfies some fixed set of identities.

A relatively free group of rank m of the variety of all groups satisfying the identity relation $x^n = 1$ is denoted by $B(m, n)$ and is called a free periodic or free Burnside group of period n and rank m.

A group G is called a CC-group if the centralizer of each non-trivial element of G is a cyclic group.

We say that a group G possesses the Magnus property if for any two elements $r, s \in G$ for which «r» = «s» , we have that r is conjugate to either s or s^{-1}.

The following results were obtained in the thesis:

• Let Φ be an arbitrary automorphism of the endomorphism semigroup $\mathrm{End}(G)$ of a non-cyclic CC group G. If $\Phi(i_a) = i_a$ for any $i_a \in Inn(G)$, then $\Phi(\delta) = \delta$ for any endomorphism $\delta \in \mathrm{End}(G)$ the image $\mathrm{Im}\delta$ of which is not cyclic.

• Let Φ and Ψ be arbitrary automorphisms of the endomorphism semigroup $\mathrm{End}(F)$ of a relatively free group F of some rank > 1. Suppose that the centralizer of each non-trivial element of F is a cyclic group. Then $\Phi = \Psi$ if and only if the restrictions of the automorphisms Φ and Ψ to the subgroup $\mathrm{Inn}(F)$ coincide, that is, $\Phi\big|_{\mathrm{Inn}(F)} = \Psi\big|_{\mathrm{Inn}(F)}$.

• The free Burnside group $B(m, 3)$ possesses the Magnus property.

• The kernel of the natural homomorphism $\epsilon : Aut(B(2, 3)) \to GL_2(\mathbb{Z}_3)$ is the group of inner automorphisms of $B(2, 3)$.

• Any normal automorphism of a free Burnside group $B(m, 3)$ of period 3 is inner for all finite ranks $m \geq 3$.

• We denote by R_m the relatively free group of rank m. Let us denote by A_m the subgroup of $Aut(R_m)$ generated by all Nielsen automorphisms.

Let $n \geq 3$ and we have a homomorphism $\phi : A \to G$. If ϕ is not an injective homomorphism on S_n, then either ϕ is a trivial homomorphism or its image is a cyclic group of order 2.