ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Թումանյան Անի Գագիկի

Կիսաէլիպտիկ օպերատորների ինդեքսի և նյոտերյանության հետազոտում

Ա.01.02 «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, Մաթեմատիկական ֆիզիկա»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան - 2018

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Туманян Ани Гагиковна

Исследование нётеровости и индекса полуэллиптических операторов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.02 “Дифференциальные уравнения и Математическая физика”

Ереван - 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայ-Ռուսական (Սլավոնական) համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Գ. Ա. Կարապետյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Հ. Մ. Հայրապետյան
	ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Վ. Ն. Մարգարյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Հարավային դաշնային համալսարան (ք. Դոնի Ռոստով, ՌԴ)

Պաշտպանությունը կայանալու է 2018թ. հունիսի 5-ին ժ.15:00-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2018թ. մայիսի 5-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր՝ Տ.Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена в Российско-Армянском (Славянском) университете.

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук, профессор Г.А. Карапетян
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук, профессор Г.М. Айрапетян
	доктор физ.-мат. наук, профессор В.Н. Маргарян
Ведущая организация:	Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону, РФ)

Защита состоится 5-го июня 2018г. в 15:00 часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 050, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 5-го мая 2018г.

Учёный секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Т. Н. Арутюнян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В 1921 г. Ф. Нётером (см. [1]) было обнаружено, что число линейно независимых решений однородного и сопряженного однородного уравнений могут быть различными для определённого класса сингулярных интегральных (СИ) уравнений, при этом остаются в силе условия Фредгольма о разрешимости соответствующих неоднородных уравнений. Им же были найдены алгебраические условия, при которых одномерное СИ уравнение является в современной терминологии нётеровым[1], и была получена явная формула для вычисления его индекса – разности числа линейно независимых решений однородного и сопряженного однородного уравнений. Далее многими математиками исследованы условия конечности индекса общих линейных операторов, действующих в произвольных банаховых пространствах (см. например работы Ф. В. Аткинсона [2], И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна [3] и приведенную там литературу), усилиями которых теория нётеровых операторов развилась в важную главу функционального анализа. Исследование нётеровости и индекса операторов имеет важное значение для таких вопросов, как существование и единственность решений, условия разрешимости соответствующих уравнений, спектральные свойства операторов и т. д. (см. [3]).

Для эллиптических уравнений важное место занимает исследование нётеровости соответствующих операторов. Вопросам нётеровости и индекса эллиптических операторов посвящено множество работ. Отметим некоторые из них.

В конце 1930-х гг. в работах С. Л. Соболева были исследованы специальные функциональные пространства W_p^l (см. [4]). Теория этих пространств и ее дальнейшие обобщения способствовали применению методов функционального анализа к эллиптическим уравнениям.

В работах М. И. Вишика, Л. Гординга и других математиков доказана фредгольмовость задачи Дирихле и некоторых других задач для сильно эллиптических систем (см. [5]). Сведение некоторых эллиптических уравнений и систем второго порядка к СИ уравнениям описано в работе И. Н. Векуа (см. [6]). А. И. Вольпертом получены нормальная разрешимость и формулы для индекса общих эллиптических краевых задач в ограниченных двумерных областях (см. [7]), тем самым в значительной степени двумерная теория была завершена к 1961 году.

В многомерном случае в работе А. С. Дынина и М. С. Аграновича (см. [8]) доказательство нётеровости эллиптического оператора на компактном многообразии проводится с помощью построения регуляризатора. Для общих сингулярных интегро-дифференциальных эллиптических систем в работе [9] М. С. Аграновича доказана нётеровость в определённых соболевских пространствах для компактных многообразий с краем и без края.

Выражения индекса эллиптических псевдодифференциальных операторов (ПДО) через топологические инварианты символа оператора и многообразия, на котором он задан, получены в работах М. Ф. Атьи и И. М. Зингера в случае замкнутых многообразий (см. [10]) и в работе [11] М. Ф. Атьи и Р. Ботта для компактных многообразий с краем. Дальнейшее развитие теория индекса эллиптических ПДО получила в работах Б.-В. Шульце, С. Ремпеля и других авторов (см. [12, 13]).

[1]В литературе также встречается термин фредгольмовость в аналогичном смысле. Здесь же фредгольмовым оператором назовём нётеровый оператор с индексом равным нулю.

Исследованию индекса специальных краевых задач посвящены работы А. О. Бабаяна (см. [14]).

В случае дифференциальных операторов, действующих в соболевских пространствах в неограниченных областях, условие эллиптичности не является достаточным для его нётеровости. Исследованию нётеровости эллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$ и в неограниченных областях посвящены работы Э. М. Мухамадиева (см. [15, 16]) и В. И. Вольперта (см. [17]), в которых условия нётеровости сформулированы в терминах предельных операторов. Вопросам нётеровости и индекса эллиптических операторов в специальных весовых пространствах соболевского типа посвящены работы Л. А. Багирова (см. [18]), Л. Ниренберга, А. Уалкера (см. [19]), Р. Б. Локкарда, Р. К. МакОуена (см. [20]). В работах Э. Шроэ (см. [21, 22]) и А. А. Арутюнова, А. С. Мищенко (см. [23]) исследованы нётеровость и формулы для индекса эллиптических ПДО в неограниченных областях.

Полуэллиптические операторы, как подкласс гипоэллиптических операторов, были введены Л. Хермандером (см. [24]) при изучении соответствующей теории активно развивающейся по сей день. Одними из первых работ, посвящённых полуэллиптическим уравнениям, являются работы Л. Р. Волеча [25], где рассматриваются вопросы гладкости решений и принадлежности решений к классам Жевре. В дальнейшем С. М. Никольский (см. [26]) и В. П. Михайлов (см. [27]) ввели класс регулярных гипоэллиптических операторов. В работах Г. Г. Казаряна (см. например [28]) исследован класс нерегулярных гипоэллиптических операторов. Большую роль при изучении теории таких операторов играют соответствующие анизотропные пространства (см. [29]).

Далее отметим известные результаты в теории нётеровых операторов, действующих в анизотропных соболевских пространствах. В работе [30] Г. А. Карапетяна и А. А. Дарбиняна доказана нётеровость полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах Соболева в ограниченной области, а в работе [31] тех же авторов аналогичный результат установлен для регулярных гипоэллиптических операторов, действующих в мультианизотропных соболевских пространствах в ограниченной области. Вопросам нётеровости полуэллиптических операторов в специальных весовых пространствах посвящены работы Л. А. Багирова (см. [32]), Г. А. Карапетяна и А. А. Дарбиняна (см. [33, 34]). Для полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в работах Г. В. Демиденко [35, 36] установлены изоморфные свойства на специальной шкале весовых пространств в $\mathbb{R}^n$. Применению методов ПДО для исследования полуэллиптических, а также регулярных гипоэллиптических (мульти-квазиэллиптических) уравнений с полиномиальными коэффициентами посвящён ряд работ (см. например [37]).

Однако теория нётеровости и индекса таких операторов, состоящая из исследования условий, при которых индекс рассматриваемых операторов конечен и, в случае конечности индекса, получения выражающих его формул, изучена не полностью. Особый интерес и трудность представляет исследование полуэллиптических операторов в соболевских пространствах в неограниченных областях, что обусловлено отсутствием компактности вложения соответствующих пространств. В данной диссертационной работе исследованы нётеровость и индекс общих полуэллиптических операторов в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$. Актуальность настоящей работы связана с важностью рассматриваемого класса операторов и свойства нётеровости для них.

Цель работы.

1. Исследование нётеровости и индекса полуэллиптических операторов с постоянными и специальными переменными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$.

2. Исследование устойчивости индекса полуэллиптических операторов на шкале анизотропных соболевских пространств и относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения.

3. Исследование выполнения специальных априорных оценок для дифференциальных операторов в анизотропных весовых пространствах и в пространствах Соболева без веса.

Научная новизна. В работе получены следующие основные результаты:

1. Установлены условия на символ оператора, необходимые для выполнения априорных оценок специального вида в анизотропных весовых пространствах, а также в пространствах без веса. Получены достаточные условия для выполнения априорных оценок для полуэллиптических операторов в специальных весовых соболевских пространствах. В терминах выполнения специальных априорных оценок установлены условия для нётеровости полуэллиптических операторов.

2. Получены достаточные условия для стабильности индекса полуэллиптического оператора на шкале анизотропных пространств и относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения.

3. В терминах определённых условий на символ оператора описан класс нётеровых дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, действующих в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$.

4. Получены необходимые и достаточные условия для нётеровости полуэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами, имеющими определённое поведение на бесконечности, действующих в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$, установлено равенство нулю индекса таких операторов.

5. Получены необходимые и достаточные условия для нётеровости полуэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами, действующих в анизотропных весовых соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$.

Все основные результаты диссертационной работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории гипоэллиптических уравнений, в частности, для исследования задач в неограниченных областях и регулярных гипоэллиптических операторов.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация полученных результатов. По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах и конференциях:

- Международная конференция-семинар "Workshop on Analysis and PDE. Leibniz Universität Hannover" (октябрь 4-6 2017, Ганновер, Германия). Тема доклада: "On the Fredholm property of differential operators in anisotropic spaces".

- Семинар "Динамические системы и дифференциальные уравнения" механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова в рамках международной научной конференции "Ломоносов-2016" (апрель 2016, Москва, Россия). Тема доклада: "О стабильности индекса дифференциальных операторов в анизотропных пространствах".

- Международная конференция "Young Women in Harmonic Analysis and PDE" Математический центр Хаусдорффа и Институт Математики Боннского Университета (декабрь 2016, Бонн, Германия). Тема доклада: "On index stability of differential operators in anisotropic spaces".

- Международная конференция "International Conference Harmonic Analysis and Approximations, VI" (сентябрь 2015, Цахкадзор, Армения). Тема доклада: "Interpolation of Noethericity and index invariance on the scale of anisotropic spaces".

- Годичные конференции армянского математического общества (2015, 2017).

- Годичные научные конференции РАУ. Секция: Математика и механика (2014-2017).

- Семинары кафедры математики и математического моделирования РАУ (2015-2017).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 статьях, которые изданы в журналах, рекомендованных ВАК, из которых 2 статьи - в издании, индексированном в Scopus, 10 публикаций - в тезисах докладов. Их перечень приведён в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, включающего 64 наименования. В конце автореферата приведён список статей и тезисов конференций. Общий объем диссертации составляет 94 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится обзор исследований, посвящённых изучению нётеровости дифференциальных операторов, обосновывается актуальность и научная новизна. Там же представлен краткий обзор содержания диссертации. Нумерация результатов во введении совпадает с нумерацией в соответствующих главах диссертации.

Первая глава посвящена априорным оценкам специального вида для дифференциальных операторов, действующих в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$. В силу взаимосвязи выполнения специальных априорных оценок и n–нормальности оператора, результаты данной главы использованы далее при исследовании условий нётеровости полуэллиптических операторов.

В **первом параграфе первой главы** исследуется выполнение специальных априорных оценок в анизотропных соболевских пространствах и устанавливаются необходимые для их выполнения условия на символ оператора.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $r \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ обозначим

$$C^{r,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right) := \left\{a(x) : D^\beta a(x) \in C(\mathbb{R}^n), \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta a(x)| < \infty, \forall\beta \in \mathbb{Z}_+^n, \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\nu_i} \leq r\right\}.$$

Пусть $s, k \in \mathbb{N}, k \geq s$. Рассмотрим дифференциальную форму

$$P\left(x, \mathbb{D}\right) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1}$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \nu \in \mathbb{N}^n, (\alpha : \nu) = \frac{\alpha_1}{\nu_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\nu_n}, D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, D_j = i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Обозначим

$$P_s(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)=s} a_\alpha(x) D^\alpha, P_s(x, \xi) = \sum_{(\alpha:\nu)=s} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Дифференциальная форма $P(x, \mathbb{D})$ называется полуэллиптической в $\mathbb{R}^n$, если

$$P_s\left(x, \xi\right) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \neq 0.$$

Дифференциальная форма $P\left(x, \mathbb{D}\right)$ называется равномерно полуэллиптической в $\mathbb{R}^n$, если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\left|P_s\left(x, \xi\right)\right| \geq \delta \left|\xi\right|_\nu^s, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $|\xi|_\nu = \left(\sum\limits_{i=1}^n \xi_i^{2\nu_i}\right)^{1/2}$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ и положительной функции $q(x)$ обозначим через $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ и $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ множества измеримых функций $\{u\}$ со соответствующими нормами

$$\|u\|_{k,\nu} = \sum_{(\alpha:\nu)\leq k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

$$\|u\|_{k,\nu,q} = \sum_{(\alpha:\nu)\leq k} \|D^\alpha u \cdot q^{k-(\alpha:\nu)}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Теорема 1.1.1. *Пусть для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ вида (1) с некоторой постоянной $C>0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu} \le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\ ,\forall u \in H^{k,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Тогда $P\left(x,\mathbb{D}\right)$ полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем результат теоремы 1.1.1 был усилен.

Теорема 1.1.1′. *Пусть для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ вида (1) с некоторой постоянной $C>0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu} \le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\ ,\forall u \in H^{k,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Тогда $P\left(x,\mathbb{D}\right)$ равномерно полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Для $\lambda \in \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ обозначим

$$\|u\|_{k,\nu,\lambda} = \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \lambda^{k-(\alpha:\nu)} \|D^\alpha u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x,\lambda,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha(x)\lambda^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha, \tag{2}$$

где $a_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.1.4. *Пусть для дифференциальной формы $P(x,\lambda,\mathbb{D})$ вида (2) с некоторой постоянной $C>0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,\lambda} \le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,\lambda} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n), \lambda\ > 0.$$

Тогда $P(x,\lambda,\mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен относительно параметра λ: существует постоянная $\delta>0$ такая, что

$$|P(x,\lambda,\xi)| \ge \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi, x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Во **втором параграфе первой главы** исследуются априорные оценки в соответствующих весовых пространствах.

Пусть $q(x)$ положительная функция и коэффициенты дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ удовлетворяют следующим условиям:

$$|D^\beta a_\alpha(x)| \le C_{\alpha,\beta}\ q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)}, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^n\ (\alpha:\nu) \le s, (\beta:\nu) \le k-s. \tag{3}$$

Теорема 1.2.1. *Пусть для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$, коэффициенты которой удовлетворяют условиям (3), с некоторой постоянной $C>0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\ ,\forall u \in H_q^{k,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Тогда $P\left(x,\mathbb{D}\right)$ равномерно полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

В данном параграфе при дополнительных условиях на весовую функцию и коэффициенты дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ установлено, что из выполнения специальной априорной оценки следует более сильное условие, чем равномерная полуэллиптичность в $\mathbb{R}^n$.

Для $r \in \mathbb{Z}_+$ и $\nu \in \mathbb{N}^n$ обозначим

$$Q^{r,\nu} := \Bigg\{ g(x) \in C(\mathbb{R}^n) : g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n; D^\beta g(x) \in C(\mathbb{R}^n) \text{ и } \frac{1}{g(x)} \rightrightarrows 0,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \max_{|x-y|\le 1} \frac{|g(x)-g(y)|}{g(y)} = 0, \frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)^{1+(\beta:\nu)}} \rightrightarrows 0 \text{ при } |x| \to \infty, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n, 0 < (\beta:\nu) \le r \Bigg\}.$$

Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha q(x)^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha, \tag{4}$$

где a_α – постоянные числа, $q \in Q^{k-s,\nu}$.

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ и $\lambda \in \mathbb{R}_+$ обозначим

$$P(\lambda,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha.$$

Теорема 1.2.2. *Пусть $q \in Q^{k-s,\nu}$ и для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ вида (4) с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \right), \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда $P(\lambda,\mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен относительно параметра λ: существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)} \xi^\alpha \right| \ge \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha(x) D^\alpha = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} \left(a_\alpha^0(x) q(x)^{s-(\alpha:\nu)} + b_\alpha(x) \right) D^\alpha, \tag{5}$$

где $a_\alpha^0(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n), q \in Q^{k-s,\nu}$ и $D^\beta(b_\alpha(x)) = o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha:\nu) \le s, (\beta:\nu) \le k-s$.

Теорема 1.2.3. *Пусть $q \in Q^{k-s,\nu}$ и $P(x,\mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (5) с коэффициентами удовлетворяющими $\lim\limits_{|x|\to\infty} \max\limits_{|x-y|\le 1} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ при $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, (\alpha:\nu) \le s$. Пусть с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \right), \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда $P(x,\lambda,\mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен относительно параметра λ: существует постоянная $\delta>0$ такая, что

$$\left|\sum_{(\alpha:\nu)\le s} a^0_\alpha(x)\lambda^{s-(\alpha:\nu)}\xi^\alpha\right| \ge \delta(\lambda+|\xi|_\nu)^s, \forall\xi\in\mathbb{R}^n, \lambda>0, |x|\ge M,$$

где $M\in\mathbb{R}_+$ некоторое число.

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ вида (5) и $x_0\in\mathbb{R}^n$ обозначим

$$\Delta(P,q):=\max_{\substack{(\alpha:\nu)\le s,\\ (\beta:\nu)\le k-s}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta\left(a^0_\alpha(x)-a^0_\alpha(x_0)\right)q(x)^{-(\beta:\nu)}|.$$

Условие 1.2.1. *Пусть*

$$\sum_{(\alpha:\nu)\le s} a^0_\alpha(x_0)\lambda^{s-(\alpha:\nu)}\xi^\alpha\ne 0, \forall\xi\in\mathbb{R}^n, \lambda>0.$$

Теорема 1.2.4. *Пусть $q\in Q^{k-s,\nu}$ и $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма вида (5), удовлетворяющая условию 1.2.1. Тогда существует $\eta_0=\eta_0(k)>0$, такое, что при $\Delta(P,q)<\eta_0$ для оператора $P(x,\mathbb{D}) : H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n)\to H^{k-s,\nu}_q(\mathbb{R}^n)$ с некоторой постоянной $C>0$ и числом $M>0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q}\le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q}+\|u\|_{L_2(K_M)}\right), \forall u\in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n).$$

В **третьем параграфе первой главы** исследуется применение априорной оценки для установления нётеровости рассматриваемых операторов.

Теорема 1.3.1. *Пусть $P(x,\mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (1) такая, что коэффициенты $a_\alpha(x)$ при $(\alpha:\nu)=s$ постоянные действительные числа, а при $(\alpha:\nu)<s$ $a_\alpha(x)\in C^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ вещественнозначные функции такие, что $D^\beta a_\alpha(x)\rightrightarrows 0$ при $|x|\to\infty$ для всех $\beta\in\mathbb{Z}^n_+, 0<(\beta:\nu)\le k, (\alpha:\nu)<s$.*

Тогда оператор $P(x,\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ является нётеровым тогда и только тогда, когда существуют постоянная $C>0$ и число $M>0$ такие, что выполняется оценка:

$$\|u\|_{k,\nu}\le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(K_M)}\right), \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Во **второй главе** исследуются вопросы стабильности индекса на шкале анизотропных пространств и относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения.

Первый параграф второй главы посвящён инвариантности индекса линейного оператора, действующего во вложенных гильбертовых пространствах. Этот параграф вспомогательный для дальнейшего исследования индекса полуэллиптических операторов на шкале пространств соболевского типа.

Пусть $H_i, H_i^{'} (i=1,2)$ – гильбертовы пространства такие, что $H_2\subset H_1, H_2^{'}\subset H_1^{'}$, H_2 всюду плотно в H_1, а $H_2^{'}$ в $H_1^{'}$, и H_2 вложено в H_1, а $H_2^{'}$ в $H_1^{'}$.

Пусть $A : H_i\to H_i^{'}$ линейный ограниченный оператор с *Dom*$(A)|_{H_i}=H_i$. Обозначим также через $(A;H_i),(i=1,2)$.

Теорема 2.1.1. *Пусть $A : H_i \to H_i^{'}$ нётеровый оператор $(i = 1, 2)$. Для того, чтобы* $\operatorname{ind}(A; H_1) = \operatorname{ind}(A; H_2)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный ограниченный оператор $R : H_i^{'} \to H_i$ $(i = 1, 2)$ такой, что $(RA - I)$ конечномерный оператор в H_1.*

Следствие 2.1.2. *Пусть $A : H_i \to H_i^{'}$ нётеровый оператор $(i = 1, 2)$. Для того, чтобы* $\operatorname{ind}(A; H_1) = \operatorname{ind}(A; H_2)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный ограниченный оператор $\widetilde{R} : H_i^{'} \to H_i$ $(i = 1, 2)$ такой, что $(\widetilde{R}A - I)$ является линейным ограниченным оператором из H_1 в H_2.*

Исследованию нётеровости и индекса эллиптических операторов на специальных шкалах соболевских пространств посвящены работы М. С. Аграновича, А. С. Дынина [8], Э. Шроэ [22] и Р. Б. Локкарда, Р. К. МакОуена [20] и множество других работ, где в основном зависимость индекса эллиптического оператора от параметров шкалы можно наблюдать при помощи полученных явных формул для индекса оператора.

В **параграфе два главы два** устанавливаются достаточные условия для инвариантности индекса полуэллиптического оператора на шкале анизотропных пространств.

Для дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ вида (1) и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\Delta(P) := \max_{(\alpha:\nu)=s} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)|, \delta := \min_{|\xi|_\nu=1} |P_s(x_0, \xi)|.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма вида (1) и $k_0 \in \mathbb{R}_+$. Тогда существует $\eta_0 = \eta_0(k_0, \delta) > 0$ такое, что при $\Delta(P) < \eta_0$ для произвольных k_1 и $k_2 \in [-k_0, k_0]$ имеет место следующее соотношение:*

если $P(x, \mathbb{D}) : H^{k_1+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k_1,\nu}(\mathbb{R}^n)$ нётеровый, то $P(x, \mathbb{D}) : H^{k_2+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k_2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ также нётеровый, при этом

$$\dim\operatorname{Ker}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \dim\operatorname{Ker}\left(P; H^{k_2,\nu}\right),$$
$$\dim\operatorname{coker}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \dim\operatorname{coker}\left(P; H^{k_2,\nu}\right),$$
$$\operatorname{ind}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H^{k_2,\nu}\right).$$

Параграф три главы два посвящён изучению условий для стабильности индекса относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения.

Обозначим

$$T(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)<s} b_\alpha(x) D^\alpha,$$

где $b_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, младшие члены дифференциального выражения, а через

$$\widetilde{P}(x, \mathbb{D}) = P(x, \mathbb{D}) + T(x, \mathbb{D})$$

возмущённый младшими членами оператор.

Пусть $(P; H^{k,\nu})$ и $(P; H_q^{k,\nu})$ ограниченные линейные операторы, действующие из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, и соответственно, из $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, порождённые дифференциальной формой $P(x, \mathbb{D})$.

Обозначим

$$\widetilde{Q} := \left\{ g(x) \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right) : g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n;\ \frac{|D^{\beta} g(x)|}{g(x)} \rightrightarrows 0 \text{ при } |x| \to \infty, \right.$$
$$\left. \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \neq 0 \right\}.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть функция $q \in \widetilde{Q}$ такая, что $\frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$, операторы $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ и $\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right)$ являются нётеровыми, и оператор $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ нормально разрешимый. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$\operatorname{ind}\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H^{k,\nu}\right).$$

В **третьей главе** исследована нётеровость полуэллиптического оператора с постоянными и переменными коэффициентами, имеющими определённое поведение на бесконечности. Получены условия для нётеровости полуэллиптических операторов со специальными коэффициентами в анизотропных пространствах Соболева.

В **первом параграфе третьей главы** исследуется нётеровость полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Для такого оператора были получены результаты в специальных весовых пространствах в работе А. А. Дарбиняна (см. [34]), а изоморфные свойства полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами получены в работе Г. В. Демиденко (см. [35]).

В **первом параграфе третьей главы** доказывается следующая теорема, устанавливающая необходимые и достаточные условия для нётеровости оператора с постоянными коэффициентами.

Теорема 3.1.2. *Для оператора $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентны следующие условия:*

1. *оператор $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ нётеровый;*
2. *оператор $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ обратимый;*
3. *существует постоянная $\delta > 0$ такая, что*

$$|P(\xi)| \geq \delta\left(1 + |\xi|_{\nu}\right)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Во **втором параграфе главы три** устанавливаются условия для нётеровости полуэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами.

Условие 3.2.1. *Пусть для коэффициентов $a_{\alpha}(x)$ дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ вида (1) существуют постоянные $\widetilde{a}_{\alpha}$ такие, что $D^{\beta}(a_{\alpha}(x) - \widetilde{a}_{\alpha}) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$ для всех $\beta, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, (\beta : \nu) \leq k - s,\ (\alpha : \nu) \leq s$.*

Теорема 3.2.4. *Пусть дифференциальная форма $P(x, \mathbb{D})$, коэффициенты которой удовлетворяют условию 3.2.1 полуэллиптична в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ нётеров тогда и только тогда, когда существует постоянная $\delta > 0$ такая, что*

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu) \leq s} \widetilde{a}_{\alpha} \xi^{\alpha} \right| \geq \delta(1 + |\xi|_{\nu})^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

при этом $\operatorname{ind}(P; H^{k,\nu}) = 0$.

Для полуэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами в работе получены условия для их нётеровости в определённых весовых пространствах в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.2.5. *Пусть $q \in Q^{k-s,\nu}$ и $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма коэффициенты которой представляются в виде $a_\alpha(x) = a^0_\alpha(x)q(x)^{s-(\alpha:\nu)} + a^1_\alpha(x)$ и удовлетворяют условиям:*

1. $D^\beta(a^1_\alpha(x)) = o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ *при* $|x| \to \infty$ *для всех* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+, (\alpha : \nu) \le s$, $(\beta : \nu) \le k - s$;
2. $a^0_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *и существуют* $\widetilde{a}_\alpha$ *такие, что* $a^0_\alpha(x) \rightrightarrows \widetilde{a}_\alpha$ *для всех* $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $(\alpha : \nu) \le s$.

Тогда $\left(P; H^{k,\nu}_q\right)$ нётеров тогда и только тогда, когда существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\left|\sum_{(\alpha:\nu)\le s} \widetilde{a}_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)}\xi^\alpha\right| \ge \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

В работе получено обобщение теоремы 3.2.5.

Теорема 3.2.6. *Пусть $q \in Q^{k-s,\nu}$ и $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма коэффициенты которой представляются в виде $a_\alpha(x) = a^0_\alpha(x)q(x)^{s-(\alpha:\nu)} + a^1_\alpha(x)$ и удовлетворяют условиям:*

1. $D^\beta(a^1_\alpha(x)) = o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ *при* $|x| \to \infty$ *для всех* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+, (\alpha : \nu) \le s, (\beta : \nu) \le k - s$;
2. $a^0_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\lim\limits_{|x|\to\infty} \max\limits_{|x-y|\le 1} |a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)| = 0$ *при* $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+, (\alpha : \nu) \le s$.

Тогда $\left(P; H^{k,\nu}_q\right)$ нётеров тогда и только тогда, когда существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\left|\sum_{(\alpha:\nu)\le s} a^0_\alpha(x) \lambda^{s-(\alpha:\nu)}\xi^\alpha\right| \ge \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0, |x| \ge M,$$

где $M \in \mathbb{R}_+$ некоторое число.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Noether F. Ueber eine Klasse singularer Integralgleichungen, Math. Ann., no. 82 (1921), p. 42–63.

[2] Аткинсон Ф. В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб. 28 (70): 1 (1951), p. 3–14.

[3] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, т. 12, вып. 2(74) (1957) с. 43–118.

[4] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., изд. ЛГУ, 1950.

[5] Вишик М. И., Ладыженская О. А. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, УМН, т. 11, вып. 6 (1956), с. 41–97.

[6] Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

[7] Вольперт А. И. Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, Труды Моск. матем. о-ва 10 (1961), с. 41–84.

[8] Агранович М. С., Дынин А. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области, ДАН 146, № 3 (1962), с. 511–514.

[9] Агранович М. С. Эллиптические сингулярные интегродифференциальные операторы. Успехи Мат. Наук, т. 20, вып. 5(125) (1965), с. 3–120.

[10] Atiyah M. F., Singer I. M., The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. A.M.S. 69 (1963), p. 422 – 433.

[11] Atiyah M. F., Bott R. The index problem for manifolds with boundary, Differential Analysis (Bombay Colloquium, 1964), p. 175–186.

[12] Rempel S., Schulze B.-W. Index Theory of Elliptic Boundary Problems. Monograph , Akademie-Verlag Berlin, 1982; North Oxford Acad. Publ. Comp., Oxford, 1985.

[13] Schulze B.-W. Pseudo-differential Boundary Value Problems, Conical Singularities, and Asymptotics. Monograph, Akademie Verlag, Berlin, 1994.

[14] Бабаян А. О. Об одной краевой задаче для уравнения Бицадзе в единичном круге. Известия НАН Армении: Математика. 42 (4). (2007) с. 3–10.

[15] Мухамадиев Э. М. О нормальной разрешимости и нётеровости эллиптических операторов в пространствах функций на $\mathbb{R}^n$, часть I. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 13, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 110, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1981, с. 120–140.

[16] Мухамадиев Э. М. О нормальной разрешимости и нётеровости эллиптических операторов в пространствах функций на $\mathbb{R}^n$, часть II. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 13, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 110, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1984, с. 108–126.

[17] Volpert V. Elliptic Partial Differential Equations, Volume 1: Fredholm Theory of Elliptic Problems in Unbounded Domains. Springer 2011.

[18] Багиров Л. А. Эллиптические уравнения в неограниченной области, Матем. сб., 86(128):1(9) (1971), с. 121–139.

[19] Nirenberg L., Walker H. F. The null spaces of elliptic partial differential operators in $\mathbb{R}^n$. J. Math. Anal. Appl. 1973. vol. 42, no. 2, p. 271–301.

[20] Lockhart R. B., McOwen R. C. On elliptic systems in $\mathbb{R}^n$. Acta Math. 150 (1983), p. 125–135.

[21] Schrohe E. Fréchet algebra techniques for boundary value problems on noncompact manifolds: Fredholm criteria and functional calculus via spectral invariance. Mathematische Nachrichten. 199 (1) (1999), p. 145–185.

[22] Schrohe E. Spectral Invariance, Ellipticity, and the Fredholm Property for Pseudodifferential Operators on Weighted Sobolev Spaces. Annals of Global Analysis and Geometry. 10:3 (1992), p. 237–254.

[23] Арутюнов А. А., Мищенко А. С. Редукция исчисления псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к исчислению на компактном многообразии удвоенной размерности, Матем. заметки, 94:4 (2013), с. 488–505.

[24] Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., Мир, 1965.

[25] Волевич Л. Р. Локальные свойства решений квазиэллиптических систем. Мат. сб. т. 59, № 3, (1962), с. 3–52.

[26] Никольский С. М. Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения, ДАН СССР, т. 144 (1962), с. 767–769.

[27] Михайлов В. П. О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Тр. МИАН, т. 91 (1967), с. 59–81.

[28] Казарян Г.Г. Об одном семействе гипоэллиптических полиномов. Изв. АН Арм. ССР, Мат. т.9, но. 3 (1974), с. 189–211.

[29] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М., Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

[30] Карапетян Г. А., Дарбинян А. А. Нётеровость полуэллиптеского оператора с постоянными коэффициентами в области, Уч. Записи ЕГУ, no. 3 (2008), с. 16–24.

[31] Карапетян Г. А., Дарбинян А. А. Нётеровость регулярного оператора с постоянными коэффициентами в области, Труды инст. мат. им. Размадзе, Тбилиси, Т. 146 (2008), с. 57–66.

[32] Багиров Л. А. Априорные оценки, теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$. Матем. сб., 110(152):4(12) (1979), с. 475–492.

[33] Karapetyan G. A., Darbinyan A. A. Index of semi-elliptic operator in $\mathbb{R}^n$. Proceedings of the NAS Armenia: Mathematics, v. 42, no. 5 (2007), p. 33–50.

[34] Дарбинян А. А. Индекс полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Вестник РАУ N2 (2008), с. 100–105.

[35] Демиденко Г. В. О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}^n$. Сиб. матем. журн., 39:5 (1998), с. 1028–1037.

[36] Демиденко Г. В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа, Сиб. матем. журн., 49:5 (2008), с. 1064–1076.

[37] Rodino, L., Boggiatto P. Partial differential equations of multi-quasi-elliptic type, Ann. Univ. Ferrara, 45: 275 (1999), p. 275–291.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

Статьи по теме диссертации

1. Tumanyan A. G. On the Invariance of Index of Semielliptical Operator on the Scale of Anisotropic Spaces. Journal of Contemporary Mathematical Analysis. vol. 51, no. 4 (2016), p. 167–178.
2. Tumanyan A. G. On Noethericity and Index of Differential Operators in Anisotropic Weighted Sobolev Spaces. Proceedings of the Yerevan State University, series Physical and Mathematical sciences, no. 3 (2016), p. 63–69.
3. Darbinyan A. A., Tumanyan A. G. On a priori estimates and Fredholm property of differential operators in anisotropic spaces. Journal of Contemporary Mathematical Analysis. vol. 53, no. 2 (2018), p. 61–70.
4. Дарбинян А. А, Туманян А.Г. Необходимое и достаточное условие нетеровости оператора с постоянными коэффициентами. Вестник РАУ (2014) N2, с. 4–14.
5. Дарбинян А. А, Туманян А. Г. О необходимых и достаточных условиях для полуэллиптического оператора со специальными коэффициентами. Вестник РАУ (2017) N2, с. 5–13.

Тезисы по теме диссертации

1. Tumanyan A. G. On the Fredholm property of differential operators in anisotropic spaces. Book of Abstracts of Workshop "Analysis and PDE. Leibniz Universität Hannover" (2017), p. 14.
2. Tumanyan A. G. On Index Stability of Differential Operators in Anisotropic Spaces. Abstracts of the conference "YW in Harmonic Analysis and PDE". Mathematical Institute of the University of Bonn (2016), p. 14–15.
3. Туманян А. Г. О стабильности индекса дифференциальных операторов в анизотропных пространствах. Сборник тезисов международной научной конференции "Ломоносов-2016" МГУ М. В. Ломоносова, Секция: Математика и Механика, Подсекция: Дифф. уравнения, динам. системы и оптимальное управление, М.: МАКС Пресс, 2016.
4. Darbinyan A. A., Tumanyan A. G. On Noethericity of differential operators. Abstracts of the 9th Annual Session of Armenian Mathematical Union, Yerevan (2017) p. 20–22.
5. Darbinyan A., Tumanyan A., Interpolation of Noethericity and index invariance on the scale of anisotropic spaces. Proceedings of International Conference "Harmonic analysis and approximations, VI", Tsaghkadzor, Armenia (2015) p. 28.
6. Darbinyan A. A., Tumanyan A. G. On index invariance of semi-elliptic operator, Abstracts of the 7th Annual Session of Armenian Mathematical Union, Yerevan (2015) p. 17–19.
7. Туманян А. Г. Исследование индекса полуэллиптического оператора. Сборник тезисов форума "Наука будущего – наука молодых" (2015) т. 1, с. 352–354.

8. Дарбинян А. А., Туманян А. Г. Инвариантность индекса и интерполяция нетеровости. Сборник научных статей. Девятая Годичная Научная конференция РАУ (2015), с. 25-30.

9. Туманян А. Г. Об устойчивости индекса в анизотропных пространствах. Сборник научных статей. Десятая Годичная Научная конференция РАУ (2016), с. 24–29.

10. Дарбинян А. А. Туманян А. Г. Об априорных оценках для полуэллиптических операторов в анизотропных соболевских пространствах. Сборник научных статей. Одиннадцатая Годичная конференция РАУ (2017) с. 27–32.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. **Априорные оценки в анизотропных пространствах**

   (a) Установлены условия на символ оператора, необходимые для выполнения априорных оценок специального вида для дифференциальных операторов в анизотропных весовых соболевских пространствах, а также в пространствах без веса.

   (b) Получены достаточные условия для выполнения априорных оценок для полуэллиптических операторов, действующих в специальных анизотропных весовых пространствах.

   (c) Получены достаточные условия для нётеровости полуэллиптических операторов в терминах выполнения специальных априорных оценок.

2. **Исследование стабильности индекса**

   (a) Доказана инвариантность индекса для полуэллиптического оператора на шкале анизотропных пространств при определённых условиях на коэффициенты главной части оператора.

   (b) Получены достаточные условия для стабильности индекса относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения.

3. **Условия нётеровости для полуэллиптических операторов**

   (a) Описан класс нётеровых дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, действующих в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$.

   (b) Получены необходимые и достаточные условия для нётеровости полуэллиптического оператора с переменными коэффициентами, имеющими определённое поведение на бесконечности, действующего в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$, установлено равенство нулю индекса таких операторов.

   (c) Получены необходимые и достаточные условия для нётеровости полуэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами, действующих в анизотропных весовых соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$.

ABSTRACT

Ani G. Tumanyan

Research on Noethericity and index of semielliptic operators

The aim of the present thesis is to study Noethericity and index of semielliptic operators in anisotropic Sobolev spaces in $\mathbb{R}^n$.

The following results are obtained:

1. Necessary conditions are obtained for the special a priori estimates for differential operators, acting in anisotropic weighted and non-weighted Sobolev spaces. Sufficient conditions are obtained for semielliptic operators to satisfy the special a priori estimates in weighted Sobolev spaces. The conditions for Noethericity of semielliptic operator are obtained in the terms of the fullfilment of the special a priori estimates.

2. The invariance of the index of semielliptic operators on the scale of anisotropic Sobolev spaces is proved under the special conditions on the coefficients of the principal part of the operator. Sufficient conditions are obtained for index stability of semielliptic operator under perturbations by lower order terms of differential operator.

3. Noetherian differential operators with constant coefficients, acting in anisotropic Sobolev spaces in $\mathbb{R}^n$, are described in the terms of the special conditions on the symbol of the operator.

4. The necessary and sufficient conditions are obtained for Noethericity of semielliptic operator, acting in anisotropic Sobolev spaces in $\mathbb{R}^n$, with the coefficients that have certain behavior at infinity, it is proved that the index of the considered class of the operators is equal to zero.

5. The necessary and sufficient conditions are obtained for Noethericity of semielliptic operator with the special coefficients, acting in certain anisotropic weighted Sobolev spaces in $\mathbb{R}^n$.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Թումանյան Անի Գագիկի

Կիսաէլիպտիկ օպերատորների նյոտերյանության և ինդեքսի հետազոտում

Սույն ատենախոսությունը նվիրված է կիսաէլիպտիկ օպերատորների նյոտերյանության և ինդեքսի հետազոտմանը սոբոլյան անիզոտրոպ տարածություններում:

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները նոր են և կայանում են հետևյալում՝

1. Ստացված են անհրաժեշտ պայմաններ դիֆերենցիալ օպերատորների համար կշռային և ոչ կշռային անիզոտրոպ սոբոլյան տարածություններում հատուկ ապրիորի գնահատականների կատարման համար: Ստացված են բավարար պայմաններ կիսաէլիպտիկ օպերատորի համար ապրիորի գնահատականների կատարման համար հատուկ կշռային անիզոտրոպ տարածություններում: Ապրիորի գնահատականների կատարման տերմիններով որոշակի գործակիցներով կիսաէլիպտիկ օպերատորների համար ստացված են նյոտերյանության պայմաններ:

2. Ստացված են բավարար պայմաններ կիսաէլիպտիկ օպերատորի ինդեքսի ստաբիլության համար անիզոտրոպ սոբոլյան տարածությունների սանդղակում և դիֆերենցիալ օպերատորի կրտսեր անդամներով խոտորման նկատմամբ:

3. Օպերատորի սիմվոլի վրա հատուկ պայմանների միջոցով նկարագրված է հաստատուն գործակիցներով $\mathbb{R}^n$-ում սոբոլյան անիզոտրոպ տարածություններում գործող նյոտերյան դիֆերենցիալ օպերատորների դասը:

4. Ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ անվերջությունում որոշակի վարք ունեցող փոփոխական գործակիցներով կիսաէլիպտիկ օպերատորների նյոտերյանության համար սոբոլյան անիզոտրոպ տարածություններում, ստացված է այդ դասի օպերատորների ինդեքսի հավասարությունը զրոյի:

5. Ստացված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ որոշակի գործակիցներով կիսաէլիպտիկ օպերատորների նյոտերյանության համար անիզոտրոպ սոբոլյան հատուկ կշռային դասերում: