РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ

Туманян Ани Гагиковна

Исследование нётеровости и индекса полуэллиптических операторов

Диссертация

На соискание ученной степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, профессор

Карапетян Гарник Альбертович

Ереван - 2018

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

В 1921 г. Ф. Нётером (см. [1]) было обнаружено, что число линейно независимых решений однородного и сопряженного однородного уравнений могут быть различными для определённого класса сингулярных интегральных (СИ) уравнений, однако при этом условия Фредгольма о разрешимости соответствующих неоднородных уравнений остаются в силе. Им же были найдены алгебраические условия, при которых одномерное СИ уравнение является в современной терминологии нётеровым[1], и была получена явная формула для вычисления его индекса – разности числа линейно независимых решений однородного и сопряженного однородного уравнения. Обобщения для систем СИ уравнений были получены в 40-х гг. в работах Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа (см. книгу [2]). Далее многими авторами исследованы условия конечности индекса для общих линейных операторов в банаховых пространствах, в частности, в работах Ф. В. Аткинсона (см. [3]), И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна (см. [4]) исследованы вопросы об устойчивости индекса ограниченного оператора, действующего в произвольных банаховых пространствах и индексе произведения операторов. Теория нётеровых операторов, как важная глава функционального анализа, развилась усилиями многих математиков (см. [4] и приведённую там литературу). Исследование нётеровости и индекса операторов имеет важное значение для таких вопросов как существование и единственность решений, условия разрешимости соответствующих уравнений, спектральные свойства операторов и т. д. (см. [4]).

Для эллиптических уравнений важное место занимает исследование нётеровости соответствующих операторов. Вопросам нётеровости и индекса эллиптических операторов посвящено множество работ. Отметим некоторые из них.

В конце 1930-х гг. в работах С. Л. Соболева были исследованы специальные функциональные пространства W_p^l (см. книгу [5]). Теория этих пространств и ее дальнейшие обобщения способствовали применению методов функционального анализа к эллиптиче-

[1] В литературе также встречается термин фредгольмовость в аналогичном смысле. Здесь же фредгольмовым оператором назовём нётеровый оператор с индексом равным нулю.

ским уравнениям.

В 1948 г. А. В. Бицадзе (см. [6]) привёл пример эллиптической задачи, для которой задача Дирихле не является нётеровой. М. И. Вишиком в 1950г. было дано определение сильно эллиптических систем, для которых в работах М. И. Вишика, Л. Гординга и других математиков была доказана нётеровость и равенство нулю индекса задачи Дирихле и некоторых других задач (см. работу[7] М. И. Вишика и О. А. Ладыженской).

Сведение некоторых эллиптических уравнений и систем второго порядка к СИ уравнениям описано в работе И. Н. Векуа (см. [8]). Такой подход позволил получить алгебраические условия, при которых рассматриваемые задачи являются нётеровыми, и явную формулу для вычисления индекса.

Теория двумерных эллиптических задач своё дальнейшее развитие получила в работах И. Н. Векуа, А. И. Вольперта и других авторов (см. [9, 10, 11] и приведённую там литературу). Путём сведения к системам СИ уравнений А. И. Вольпертом были получены нормальная разрешимость и формулы для индекса общих эллиптических краевых задач в ограниченных двумерных областях (см. работу [11]), тем самым в значительной степени двумерная теория была завершена к 1961 году.

Продвижения в многомерной теории имели место в установлении априорных оценок для решений эллиптических задач. Установление специальных априорных оценок позволяет исследовать гладкость решений, а также из их выполнения выводится нормальная разрешимость и конечномерность ядра рассматриваемого оператора. Отметим здесь работы М. Шехтера [12], Л. Н. Слободецкого (см. [13, 14]), Ф. Браудера (см. [15, 16]) Ш. Агмона, А. Дуглиса, Л. Ниренберга (см. [17, 18] и приведённые там ссылки). М. Шехтер в работе [12] доказывает нётеровость определённых эллиптических задач путём установления априорных оценок в специальных пространствах также и для сопряжённой задачи.

В работе [19] А. С. Дынина доказательство нётеровости эллиптического оператора на компактном многообразии проводится с помощью построения регуляризатора. В случае общих эллиптических систем аналогичная конструкция регуляризатора использована в работах [20] М. С. Аграновича и А. С. Дынина (случай систем с одинаковым старшим порядком во всех элементах характеристической матрицы) и [21] Л. Р. Волевича (случай систем, эллиптических по А. Дуглису и Л. Ниренбергу).

Для общих сингулярных интегро-дифференциальных эллиптических систем в работе [22] М. С. Аграновича приводится доказательство нётеровости в определённых соболевских пространствах для компактных многообразий с краем и без края.

В многомерном случае М. С. Аграновичем и А. С. Дыниным (см. работу [20]) была доказана нётеровость эллиптических задач в ограниченной области, где вычисление их индекса сводилось к вычислению индекса некоторой системы СИ уравнений.

Выражения индекса эллиптических псевдодифференциальных операторов (ПДО) через топологические инварианты символа оператора и многообразия, на котором он задан, получены в работах М. Ф. Атьи и И. М. Зингера в случае замкнутых многообразий (см. [23]) и в работе [24] М. Ф. Атьи и Р. Ботта для компактных многообразий с краем. Установление формулы индекса способствовало развитию современных методов анализа и топологи, а также их взаимодействию. Дальнейшее развитие теория индекса эллиптических ПДО получила в работах Б.-В. Шульце, С. Ремпеля и других авторов (см. работы [25, 26, 27]).

Исследованию индекса специальных краевых задач посвящены работы А. О. Бабаяна (см. [28]).

В случае дифференциальных операторов, действующих в соболевских пространствах в неограниченных областях, условие эллиптичности не является достаточным для его нётеровости. Исследованию нётеровости эллиптических операторов в $\mathbb{R}^n$ и в неограниченных областях посвящены работы Э. М. Мухамадиева (см. [29, 30]) и В. И. Вольперта (см. [31]), в которых условия нётеровости сформулированы в терминах предельных операторов. Вопросам нётеровости и индекса эллиптических операторов в специальных весовых пространствах соболевского типа посвящены работы Л. А. Багирова (см. [32]), Л. Ниренберга, А. Уалкера (см. [33]), Р. Б. Локкарда, Р. К. МакОуена (см. [35, 36]). В работах Э. Шроэ (см. [37, 38]) и А. А. Арутюнова, А. С. Мищенко [39] исследованы нётеровость и формулы для индекса эллиптических ПДО в неограниченных областях.

Полуэллиптические операторы, как подкласс гипоэллиптических операторов, были введены Л. Хермандером (см. [40]) при изучении соответствующей теории. Одними из первых работ, посвящённых полуэллиптическим уравнениям, являются работы Л. Р. Волеча [41], где рассматриваются вопросы гладкости решений и принадлежности решений к классам Жевре. В дальнейшем С. М. Никольский (см. [42]) и В. П. Михайлов (см. [43]) ввели класс регулярных гипоэллиптических операторов. В работах Г. Г. Казаряна (см. например [44]) исследован класс нерегулярных гипоэллиптических операторов.

Большую роль при изучении теории таких операторов играют соответствующие анизотропные пространства. История вопроса и свойства анизотропных пространств подробно изложены в монографии О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [45]; различным обобщениям посвящены работы [46, 47].

Далее отметим известные результаты в теории нётеровых операторов, действующих в анизотропных соболевских пространствах. В работе [48] Г. А. Карапетяна и А. А. Дарбиняна доказана нётеровость полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах Соболева в ограниченной области, а в работе [49] тех же авторов аналогичный результат установлен для регулярных гипоэллиптических операторов, действующих в мультианизотропных пространствах. Вопросам нётеровости полуэллиптических операторов в специальных весовых пространствах посвящены работы Л. А. Багирова (см. [50]), Г. А. Карапетяна и А. А. Дарбиняна (см. [51, 52]). Для полуэллиптического однородного уравнения и систем уравнений с постоянными коэффициентами в работах Г. В. Демиденко [53, 54] установлены изоморфные свойства на специальной шкале весовых пространств в $\mathbb{R}^n$. Применению методов ПДО для исследования полуэллиптических, а также регулярных гипоэллиптических (мульти-квазиэллиптических) уравнений с полиномиальными коэффициентами посвящён ряд работ [55, 56].

Однако теория нётеровости и индекса таких операторов, состоящая из исследования условий, при которых индекс рассматриваемых операторов конечен и, в случае конечности индекса, получения выражающих его формул, изучена не полностью. Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровости и индекса общих полуэллиптических операторов в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$. Актуальность настоящей работы связана с важностью рассматриваемого класса операторов и свойства нётеровости для них.

Цель работы.

1. Исследование нётеровости и индекса полуэллиптических операторов с постоянными и специальными переменными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$.

2. Исследование устойчивости индекса полуэллиптических операторов на шкале анизотропных пространств Соболева и относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения.

3. Исследование выполнения специальных априорных оценок для дифференциальных операторов в анизотропных весовых пространствах и в пространствах Соболева без веса.

Научная новизна.

В работе получены следующие основные результаты:

1. Установлены условия на символ оператора, необходимые для выполнения априорных оценок специального вида в анизотропных весовых пространствах, а также в пространствах без веса. Получены достаточные условия для выполнения априорных оценок для полуэллиптических операторов в специальных весовых соболевских пространствах. В терминах выполнения специальных априорных оценок установлены условия для нётеровости полуэллиптического оператора.

2. Получены достаточные условия для стабильности индекса полуэллиптического оператора на шкале анизотропных пространств и относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения.

3. В терминах определённых условий на символ оператора описан класс нётеровых дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, действующих в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$.

4. Получены необходимые и достаточные условия для нётеровости полуэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами, имеющими определённое поведение на бесконечности, действующих в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$, установлено равенства нулю индекса таких операторов.

5. Получены необходимые и достаточные условия для нётеровости полуэллиптического оператора со специальными переменными коэффициентами, действующих в анизотропных весовых соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$.

Все основные результаты диссертационной работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории гипоэллиптических уравнений, в частности, для исследования задач в неограниченных областях и регулярных гипоэллиптических операторов.

Методы исследования.

В диссертационной работе использованы методы функционального анализа и теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Апробация полученных результатов.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах и конференциях:

- Международная конференция-семинар "Workshop on Analysis and PDE. Leibniz Universität Hannover"(октябрь 4-6 2017, Ганновер, Германия). Тема доклада: "On the Fredholm property of differential operators in anisotropic spaces".
- Семинар "Динамические системы и дифференциальные уравнения"механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова в рамках международной научной конференции "Ломоносов-2016"(апрель 2016, Москва, Россия). Руководители семинара: А. А.Давыдов, А. М. Степин. Тема доклада: "О стабильности индекса дифференциальных операторов в анизотропных пространствах".
- Международная конференция "Young Women in Harmonic Analysis and PDE" Математический центр Хаусдорффа и Институт Математики Боннского Университета (декабрь 2016, Бонн, Германия). Тема доклада: "On index stability of differential operators in anisotropic spaces".
- Международная конференция "International Conference Harmonic Analysis and Approximations, VI"(сентябрь 2015, Цахкадзор, Армения). Тема доклада: "Interpolation of noethericity and index invariance on the scale of anisotropic spaces".
- Годичные конференции армянского математического общества (2015, 2017).
- Годичные научные конференции РАУ. Секция: Математика и механика (2014-2017).
- Семинары кафедры математики и математического моделирования РАУ (2015-2017).

Публикации.

Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 статьях, которые изданы в журналах, рекомендованных ВАК, из которых 2 статьи - в издании, индексированном в Scopus, 10 публикаций - в тезисах докладов. Их перечень приведён в конце диссертации.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, включающего 64 наименования. В конце диссертации приведён список статей и тезисов конференций. Общий объем диссертации составляет 94 страницы.

Краткое содержание работы.

Во **введении** приводится обзор исследований, посвящённых изучению нётеровости дифференциальных операторов, обосновывается актуальность и научная новизна. Также, во введении представлен краткий обзор содержания диссертации. Нумерация результатов во введении совпадает с нумерацией в соответствующих главах.

Первая глава посвящена априорным оценкам специального вида для дифференциальных операторов, действующих в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$. В силу взаимосвязи выполнения специальных априорных оценок и n–нормальности оператора, результаты данной главы использованы далее при исследовании условий нётеровости полуэллиптических операторов.

В **первом параграфе первой главы** исследуется выполнение специальных априорных оценок в анизотропных соболевских пространствах и устанавливаются необходимые для их выполнения условия на символ оператора.

Пусь $n \in \mathbb{N}$. Для $r \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ обозначим

$$C^{r,\nu}(\mathbb{R}^n) := \left\{ a(x) : D^\beta a(x) \in C(\mathbb{R}^n), \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta a(x)| < \infty, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\nu_i} \le r \right\}.$$

Пусть $s, k \in \mathbb{N}, k \ge s$. Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1}$$

где $s \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \nu \in \mathbb{N}^n, (\alpha : \nu) = \frac{\alpha_1}{\nu_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\nu_n}, D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, D_j = i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ и положительной функции $q(x)$ обозначим через $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ и

$H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ множества измеримых функций $\{u\}$ со соответствующими нормами

$$\|u\|_{k,\nu} = \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

$$\|u\|_{k,\nu,q} = \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \|D^\alpha u \cdot q^{k-(\alpha:\nu)}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Теорема 1.1.1. *Пусть для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ с некоторой постоянной $C>0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu} \le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\ ,\forall u \in H^{k,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Тогда $P\left(x,\mathbb{D}\right)$ полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем результат теоремы 1.1.1 был усилен.

Теорема 1.1.1′. *Пусть для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ с некоторой постоянной $C>0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu} \le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\ ,\forall u \in H^{k,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Тогда $P\left(x,\mathbb{D}\right)$ равномерно полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Для $\lambda \in \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ обозначим

$$\|u\|_{k,\nu,\lambda} = \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \lambda^{k-(\alpha:\nu)} \|D^\alpha u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x,\lambda,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha(x)\lambda^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha, \tag{2}$$

где $a_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.1.4. *Пусть для дифференциальной формы $P(x,\lambda,\mathbb{D})$ вида (2) с некоторой постоянной $C>0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,\lambda} \le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,\lambda} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n), \lambda\ > 0.$$

Тогда $P(x,\lambda,\mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен относительно параметра λ: существует постоянная $\delta>0$ такая, что

$$|P(x,\lambda,\xi)| \ge \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi, x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Во **втором параграфе первой главы** исследуются априорные оценки в соответствующих весовых пространствах.

Теорема 1.2.1. *Пусть для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ с некоторой постоянной $C>0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\ ,\forall u \in H_q^{k,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Тогда $P\left(x,\mathbb{D}\right)$ равномерно полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

В данном параграфе при дополнительных условиях на весовую функцию и коэффициенты дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ установлено, что из выполнения специальной априорной оценки следует более сильное условие, чем равномерная полуэллиптичность в $\mathbb{R}^n$.

Для $r\in\mathbb{Z}_+$ и $\nu\in\mathbb{N}^n$ обозначим

$$Q^{r,\nu} := \left\{ g(x)\in C(\mathbb{R}^n) : g(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}^n; D^\beta g(x)\in C(\mathbb{R}^n) \text{ и } \frac{1}{g(x)} \rightrightarrows 0, \right.$$
$$\left. \lim_{|x|\to\infty}\max_{|x-y|\leq 1}\frac{|g(x)-g(y)|}{g(y)} = 0, \frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)^{1+(\beta:\nu)}} \rightrightarrows 0 \text{ при } |x|\to\infty, \forall\beta\in\mathbb{Z}_+^n, 0<(\beta:\nu)\leq r \right\}.$$

Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha q(x)^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha, \tag{3}$$

где a_α – постоянные числа, $q\in Q^{k-s,\nu}$.

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ и $\lambda\in\mathbb{R}_+$ вида (3) обозначим

$$P(\lambda,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha.$$

Теорема 1.2.2. *Пусть $q\in Q^{k-s,\nu}$ и для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ вида (3) с некоторой постоянной $C>0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u\in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда $P(\lambda,\mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен относительно параметра λ: существует постоянная $\delta>0$ такая, что

$$\left|\sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha\lambda^{s-(\alpha:\nu)}\xi^\alpha\right| \geq \delta(\lambda+|\xi|_\nu)^s, \forall\xi\in\mathbb{R}^n, \lambda>0.$$

Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha(x) D^\alpha = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} \left(a^0_\alpha(x) q(x)^{(s-(\alpha:\nu))} + b_\alpha(x)\right) D^\alpha, \tag{4}$$

где $a^0_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n), q \in Q^{k-s,\nu}$ и $D^\beta(b_\alpha(x)) = o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha : \nu) \le s, (\beta : \nu) \le k - s$.

Теорема 1.2.3. *Пусть $q \in Q^{k-s,\nu}$ и $P(x,\mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (4) с коэффициентами удовлетворяющими $\lim\limits_{|x|\to\infty} \max\limits_{|x-y|\le 1} |a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)| = 0$ при $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+, (\alpha : \nu) \le s$. Пусть с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n).$$

Тогда $P(x,\lambda,\mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен относительно параметра λ: существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\left|\sum_{(\alpha:\nu)\le s} a^0_\alpha(x) \lambda^{s-(\alpha:\nu)} \xi^\alpha\right| \ge \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0, |x| \ge M,$$

где $M \in \mathbb{R}_+$ некоторое число.

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ вида (4) и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\Delta(P,q) := \max_{\substack{(\alpha:\nu)\le s,\\ (\beta:\nu)\le k-s}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta \left(a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(x_0)\right) q(x)^{-(\beta:\nu)}|.$$

Условие 1.2.1. *Пусть*

$$\sum_{(\alpha:\nu)\le s} a^0_\alpha(x_0) \lambda^{s-(\alpha:\nu)} \xi^\alpha \ne 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Теорема 1.2.4. *Пусть $q \in Q^{k-s,\nu}$ и $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма вида (4), удовлетворяющая условию 1.2.1. Тогда существует $\eta_0 = \eta_0(k) > 0$, такое, что при $\Delta(P,q) < \eta_0$ для оператора $P(x,\mathbb{D}) : H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}_q(\mathbb{R}^n)$ с некоторой постоянной $C > 0$ и числом $M > 0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n).$$

В **третьем параграфе первой главы** исследуется применение априорной оценки для установления нётеровости рассматриваемых операторов.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $P(x, \mathbb{D})$ *дифференциальная форма вида* (1) *такая, что коэффициенты* $a_\alpha(x)$ *при* $(\alpha : \nu) = s$ *постоянные действительные числа, а при* $(\alpha : \nu) < s$ $a_\alpha(x) \in C^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *вещественнозначные функции такие, что* $D^\beta a_\alpha(x) \rightrightarrows 0$ *при* $|x| \to \infty$ *для всех* $\beta \in \mathbb{Z}_+^n, 0 < (\beta : \nu) \leq k, (\alpha : \nu) < s$.

Тогда оператор $P(x, \mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *является нётеровым тогда и только тогда, когда существуют постоянная* $C > 0$ *и число* $M > 0$ *такие, что выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_M)} \right) \ , \forall u \in H^{k,\nu} \left(\mathbb{R}^n \right).$$

Во **второй главе** исследуются вопросы стабильности индекса на шкале анизотропных пространств и относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения.

Первый параграф второй главы посвящён инвариантности индекса линейного оператора, действующего во вложенных гильбертовых пространствах. Этот параграф вспомогательный для дальнейшего исследования индекса полуэллиптических операторов на шкале пространств соболевского типа.

Пусть $H_i, H_i^{'}(i = 1, 2)$ – гильбертовы пространства такие, что $H_2 \subset H_1, H_2^{'} \subset H_1^{'}$, H_2 всюду плотно в H_1, а $H_2^{'}$ в $H_1^{'}$, и H_2 вложено в H_1, а $H_2^{'}$ в $H_1^{'}$.

Пусть $A : H_i \to H_i^{'}$ линейный ограниченный оператор с $Dom(A)|_{H_i} = H_i$. Обозначим также через $(A; H_i), (i = 1, 2)$.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $A : H_i \to H_i^{'}$ *нётеровый оператор* $(i = 1, 2)$. *Для того, чтобы* $\mathrm{ind}(A; H_1) = \mathrm{ind}(A; H_2)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный ограниченный оператор* $R : H_i^{'} \to H_i$ $(i = 1, 2)$ *такой, что* $(RA - I)$ *конечномерный оператор в* H_1.

Следствие 2.1.2. *Пусть* $A : H_i \to H_i^{'}$ *нётеровый оператор* $(i = 1, 2)$. *Для того, чтобы* $\mathrm{ind}(A; H_1) = \mathrm{ind}(A; H_2)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный ограниченный оператор* $\widetilde{R} : H_i^{'} \to H_i$ $(i = 1, 2)$ *такой, что* $(\widetilde{R}A - I)$ *является линейным ограниченным оператором из* H_1 *в* H_2.

Исследованию нётеровости и индекса эллиптических операторов на специальных шкалах соболевских пространств посвящены работы М. С. Аграновича, А. С. Дынина (см. [20]), Э. Шроэ [38] и Р. Б. Локкарда, Р. К. МакОуена [35] и множество других работ, где в основном зависимость индекса эллиптического оператора от параметров шкалы можно наблюдать при помощи полученных явных формул для индекса оператора.

В **параграфе два главы два** устанавливаются достаточные условия для инвариантности индекса полуэллиптического оператора на шкале анизотропных пространств.

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ вида (1) и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\Delta(P) := \max_{(\alpha:\nu)=s} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)|, \delta := \min_{|\xi|_\nu=1} |P_s(x_0,\xi)|.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптеческая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма вида (1) и $k_0 \in \mathbb{R}_+$. Тогда существует $\eta_0 = \eta_0(k_0,\delta) > 0$ такое, что при $\Delta(P) < \eta_0$ для произвольных k_1 и $k_2 \in [-k_0,k_0]$ имеет место следующее соотношение:*

если $P(x,\mathbb{D}) : H^{k_1+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k_1,\nu}(\mathbb{R}^n)$ нётеровый, то $P(x,\mathbb{D}) : H^{k_2+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k_2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ также нётеровый, при этом

$$\dim\operatorname{Ker}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \dim\operatorname{Ker}\left(P; H^{k_2,\nu}\right),$$

$$\dim\operatorname{coker}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \dim\operatorname{coker}\left(P; H^{k_2,\nu}\right),$$

$$\operatorname{ind}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H^{k_2,\nu}\right).$$

Параграф три главы два посвящён изучению условий для стабильности индекса относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения.

Обозначим

$$T(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)<s} b_\alpha(x) D^\alpha,$$

где $b_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, младшие члены дифференциального выражения, а через

$$\widetilde{P}(x,\mathbb{D}) = P(x,\mathbb{D}) + T(x,\mathbb{D})$$

возмущённый младшими членами оператор.

Пусть $(P; H^{k,\nu})$ и $(P; H_q^{k,\nu})$ ограниченные линейные операторы, действующие из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, и соответственно, из $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, порождённые дифференциальной формой $P(x,\mathbb{D})$.

Обозначим

$$\widetilde{Q} := \left\{ g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n; \ \frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)} \rightrightarrows 0 \text{ при } |x| \to \infty, \right.$$
$$\left. \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \neq 0 \right\}.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть функция $q \in \widetilde{Q}$ такая, что $\frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$, операторы $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ и $\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right)$ являются нётеровыми, и оператор $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ нормально разрешимый. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$\operatorname{ind}\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H^{k,\nu}\right).$$

В **третьей главе** исследована нётеровость полуэллиптического оператора с постоянными и переменными коэффициентами, имеющими определённое поведение на бесконечности. Получены условия для нётеровости полуэллиптических операторов со специальными коэффициентами в анизотропных пространствах Соболева.

В **первом параграфе третьей главы** исследуется нётеровость полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Для такого оператора раннее известные результаты были получены в специальных весовых пространствах в работе А. А. Дарбиняна (см. [52]), а изоморфные свойства для однородного полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами получены в работе Г. В. Демиденко (см. [53]).

В **первом параграфа третьей главы** доказывается следующая теорема, устанавливающая необходимые и достаточные условия для нётеровости оператора с постоянными коэффициентами.

Теорема 3.1.2. *Для оператора* $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *следующие условия эквивалентны:*

1. *оператор* $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *нётеровый;*

2. *оператор* $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *обратимый;*

3. *существует постоянная* $\delta > 0$ *такая, что*

$$|P(\xi)| \geq \delta \left(1 + |\xi|_\nu\right)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Во **втором параграфе главы три** устанавливаются условия для нётеровости полуэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами.

Условие 3.2.1. *Пусть для коэффициентов* $a_\alpha(x)$ *дифференциальной формы* $P(x, \mathbb{D})$ *вида* (1) *существуют постоянные* $\widetilde{a}_\alpha$ *такие, что* $D^\beta(a_\alpha(x) - \widetilde{a}_\alpha) \rightrightarrows 0$ *при* $|x| \to \infty$ *для всех* $\beta, \alpha \in \mathbb{Z}^n_+, (\beta : \nu) \leq k - s,\ (\alpha : \nu) \leq s$.

Теорема 3.2.4. *Пусть дифференциальная форма* $P(x, \mathbb{D})$, *коэффициенты которой удовлетворяют условию* 3.2.1 *полуэллиптична в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда* $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ *нётеров тогда и только тогда, когда существует постоянная* $\delta > 0$ *такая, что*

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} \widetilde{a}_\alpha \xi^\alpha \right| \geq \delta(1 + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

при этом $\operatorname{ind}(P; H^{k,\nu}) = 0$.

Для полуэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами в работе получены условия нётеровости в определенных весовых пространствах в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.2.5. *Пусть $q \in Q^{k-s,\nu}$ и $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма коэффициенты которой представляются в виде $a_\alpha(x) = a^0_\alpha(x) q(x)^{s-(\alpha:\nu)} + a^1_\alpha(x)$ и удовлетворяют условиям:*

1. $D^\beta(a^1_\alpha(x)) = o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ *при* $|x| \to \infty$ *для всех* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+, (\alpha:\nu) \le s, (\beta:\nu) \le k-s$;

2. $a^0_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *и существуют* $\widetilde{a}_\alpha$ *такие, что* $a^0_\alpha(x) \rightrightarrows \widetilde{a}_\alpha$ *для всех* $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $(\alpha:\nu) \le s$.

Тогда $\left(P; H^{k,\nu}_q\right)$ *нётеров тогда и только тогда, когда существует постоянная* $\delta > 0$ *такая, что*

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu) \le s} \widetilde{a}_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)} \xi^\alpha \right| \ge \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

В работе получено обобщение теоремы 3.2.5.

Теорема 3.2.6. *Пусть $q \in Q^{k-s,\nu}$ и $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма коэффициенты которой представляются в виде $a_\alpha(x) = a^0_\alpha(x) q(x)^{s-(\alpha:\nu)} + a^1_\alpha(x)$ и удовлетворяют условиям:*

1. $D^\beta(a^1_\alpha(x)) = o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ *при* $|x| \to \infty$ *для всех* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+, (\alpha:\nu) \le s, (\beta:\nu) \le k-s$;

2. $a^0_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\lim\limits_{|x|\to\infty} \max\limits_{|x-y|\le 1} |a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)| = 0$ *при* $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+, (\alpha:\nu) \le s$.

Тогда $\left(P; H^{k,\nu}_q\right)$ *нётеров тогда и только тогда, когда существует постоянная* $\delta > 0$ *такая, что*

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu) \le s} a^0_\alpha(x) \lambda^{s-(\alpha:\nu)} \xi^\alpha \right| \ge \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0, |x| \ge M,$$

где $M \in \mathbb{R}_+$ *некоторое число.*

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 0.0.1. *Ограниченный линейный оператор A, определённый на всем банаховом пространстве X и действующий в банахово пространство Y, называется n-нормальным, если выполняются следующие условия:*

1. *ядро оператора A является конечномерным* $(\dim \operatorname{Ker}(A) < \infty)$*;*
2. *область значений оператора A замкнуто* $\left(\operatorname{Im}(A) = \overline{\operatorname{Im}(A)}\right)$.

Определение 0.0.2. *Ограниченный линейный оператор A, определённый на всем банаховом пространстве X и действующий в банахово пространство Y, называется d-нормальным, если выполняются следующие условия:*

1. *ядро сопряжённого оператора A^* конечномерно* $(\dim \operatorname{Ker}(A^*) < \infty)$ *;*
2. *область значений оператора A замкнуто* $\left(\operatorname{Im}(A) = \overline{\operatorname{Im}(A)}\right)$.

Определение 0.0.3. *Ограниченный линейный оператор A, определённый на всем банаховом пространстве X и действующий в банахово пространство Y, называется нётеровым, если выполняются следующие условия:*

1. *область значений оператора A замкнуто* $\left(\operatorname{Im}(A) = \overline{\operatorname{Im}(A)}\right)$*;*
2. *ядро оператора A является конечномерным* $(\dim \operatorname{Ker}(A) < \infty)$*;*
3. *коядро оператора A конечномерно* $(\dim \operatorname{coker}(A) = \dim Y/\operatorname{Im}(A) < \infty)$.

Замечание 0.0.1. *Так как* $\mathrm{Ker}(A^*)$ *конечномерно, тогда и только тогда, когда конечномерно факторпространство* $Y/\overline{\mathrm{Im}(A)}$ *(см. [57] стр. 50), и в этом случае имеем, что* $\dim \mathrm{Ker}(A^*) = \dim Y/\overline{\mathrm{Im}(A)}$, *то отсюда можно заключить, что оператор является нётеровым тогда и только тогда, когда является одновременно и n-нормальным, и d-нормальным.*

Индексом нётерового оператора A назовем разность между размерностью ядра и коядра:

$$\mathrm{ind}\,(A) = \dim \mathrm{Ker}(A) - \dim \mathrm{coker}(A).$$

Пусть $\mathbb{R}$ множество действительных чисел, $\mathbb{R}_+$ множество неотрицательных действительных чисел, $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{Z}_+^n$ – множество n-мерных мультииндексов, $\mathbb{N}^n$ – множество n-мерных мультииндексов с натуральными компонентами.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$P\,(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{0.0.1}$$

где $s \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \nu \in \mathbb{N}^n, (\alpha : \nu) = \frac{\alpha_1}{\nu_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\nu_n}, D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, D_j = i^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_\alpha(x) \in C\,(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим

$$P_s\,(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)=s} a_\alpha\,(x)\, D^\alpha \tag{0.0.2}$$

главную часть дифференциального выражения $P\,(x, \mathbb{D})$, а

$$P_s\,(x, \xi) = \sum_{(\alpha:\nu)=s} a_\alpha\,(x)\, \xi^\alpha \tag{0.0.3}$$

символ главной части $P\,(x, \mathbb{D})$.

Обозначим

$$L\,(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)<s} a_\alpha\,(x)\, D^\alpha \tag{0.0.4}$$

младшие члены дифференциального выражения $P\,(x, \mathbb{D})$.

Определение 0.0.4. *Говорят, что дифференциальная форма* $P\,(x, \mathbb{D})$ *полуэллиптична в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *если*

$$P_s\,(x_0, \xi) \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \neq 0.$$

Определение 0.0.5. *Говорят, что дифференциальная форма $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптична в $\mathbb{R}^n$, если $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптична в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$.*

Определение 0.0.6. *Говорят, что дифференциальная форма $P(x, \mathbb{D})$ равномерно полуэллиптична в $\mathbb{R}^n$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$|P_s(x, \xi)| \geq C |\xi|_\nu^s, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $|\xi|_\nu = \left(\sum\limits_{i=1}^n \xi_i^{2\nu_i}\right)^{1/2}$.

Для $k \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{N}^n$, через $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ обозначим

$$H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in S' : \widehat{u} - \text{функция}, \|u\|_{k,\nu} = \left(\int |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|_\nu)^{2k} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

где $|\xi|_\nu = \left(\sum\limits_{i=1}^n \xi_i^{2\nu_i}\right)^{1/2}$, S' пространство обобщенных функций медленного роста, $\widehat{u}$ - преобразование Фурье распределения u.

Замечание 0.0.2. *При $k \in \mathbb{Z}_+$ норма в пространстве $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна следующей:*

$$\|u\|'_{k,\nu} = \left(\sum_{(\alpha:\nu) \leq k} \int |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Для $r \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ обозначим

$$C^{r,\nu}(\mathbb{R}^n) := \left\{ a(x) : D^\beta a(x) \in C(\mathbb{R}^n), \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\beta a(x)| < \infty, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n \ s.t. \ (\beta : \nu) \leq r \right\},$$

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) := \bigcup_{r \in \mathbb{Z}_+} C^{r,\nu}(\mathbb{R}^n),$$

$$Q := \{ g(x) \in C(\mathbb{R}^n) : g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \},$$

$$Q^{r,\nu} := \left\{ g(x) \in Q : D^\beta g(x) \in C(\mathbb{R}^n) \text{ и } \frac{1}{g(x)} \rightrightarrows 0, \lim_{|x| \to \infty} \max_{|x-y| \leq 1} \frac{|g(x) - g(y)|}{g(y)} = 0, \right.$$
$$\left. \frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)^{1+(\beta:\nu)}} \rightrightarrows 0 \text{ при } |x| \to \infty, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n, 0 < (\beta : \nu) \leq r \right\}.$$

Для $k \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ и $q \in Q$ обозначим $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ множество измеримых функций $\{u\}$ с нормой

$$\|u\|_{k,\nu,q} = \sum_{(\alpha:\nu) \leq k} \|D^\alpha u \cdot q^{k-(\alpha:\nu)}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Для положительного числа N и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$K_N := \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq N \}, \ K_N(x_0) := \{ x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq N \}.$$

Глава 1

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Данная глава посвящена априорным оценкам специального вида для дифференциальных операторов, действующих в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$. Изучаются условия на символ оператора, необходимые для выполнения априорных оценок. При определенных условиях на коэффициенты получены априорные оценки для полуэллиптических операторов в соотвествующих весовых соболевских пространствах.

Глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе исследуется выполнение специальных априорных оценок в анизотропных соболевских пространствах и устанавливаются необходимые для их выполнения условия на символ оператора. Во втором параграфе при определенных условиях на коэффициенты получены априорные оценки в соответствующих весовых пространствах. Последний параграф посвящен некоторым приложениям специальных априорных оценок для нетеровости рассматриваемых операторов.

1.1 Априорные оценки в анизотропных соболевских пространствах

Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq s$ и коэффициенты дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ вида (0.0.1) удовлетворяют условиям:

$$a_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, (\alpha : \nu) \leq s.$$

Тогда $P(x,\mathbb{D})$ порождает ограниченный линейный оператор из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим его через $\left(P;H^{k,\nu}\right)$.

Теорема 1.1.1. *Пусть для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ с некоторой постоянной $C>0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu}\leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\ ,\forall u\in H^{k,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right). \tag{1.1.1}$$

Тогда $P\left(x,\mathbb{D}\right)$ полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Предположим обратное, что $P\left(x,\mathbb{D}\right)$ не полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то есть существуют $x^0,\xi^0\in\mathbb{R}^n$, $|\xi^0|\neq 0$ такие, что $P_s\left(x^0,\xi^0\right)=0$.

Пусть N любое фиксированное положительное число и $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\operatorname{supp}\varphi\subset K_N(x^0)$ и $\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}=1$.

Для положительного числа λ обозначим $\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0=\left(\lambda^{\frac{1}{\nu_1}}\xi_1^0,\ldots,\lambda^{\frac{1}{\nu_n}}\xi_n^0\right)$ и $u_{\lambda,\nu}(x)=e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0,x\right)}\varphi(x)$.

Так как для произвольного $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$

$$D^\alpha u_{\lambda,\nu}(x)=\left(\xi^0\right)^\alpha\lambda^{(\alpha:\nu)}e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0,x\right)}\varphi(x)+\sum_{0\leq\beta<\alpha}C_\alpha^\beta\lambda^{(\beta:\nu)}\left(\xi^0\right)^\beta e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi^0,x\right)}D^{\alpha-\beta}\varphi(x),$$

то для всех $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,(\alpha:\nu)\leq k$ имеем

$$\|D^\alpha u_{\lambda,\nu}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}=\lambda^{(\alpha:\nu)}|\left(\xi^0\right)^\alpha|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}+o(\lambda^{(\alpha:\nu)}).$$

Тогда с некоторой постоянной $C_1>0$ получим

$$\|u_{\lambda,\nu}\|_{k,\nu}\geq C_1\sum_{(\alpha:\nu)\leq k}\lambda^{(\alpha:\nu)}|\left(\xi^0\right)^\alpha|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}+o(\lambda^k)\ \text{ при }\lambda\to\infty. \tag{1.1.2}$$

С другой стороны, в силу условия на коэффициенты $P(x,\mathbb{D})$ и учитывая, что $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\operatorname{supp}\varphi\subset K_N(x^0)$ для всех $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,(\alpha:\nu)\leq k-s$ имеем

$$\begin{aligned}\|D^\alpha\left(P\left(x,\mathbb{D}\right)u_{\lambda,\nu}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\leq|\left(\xi^0\right)^\alpha|\lambda^{(\alpha:\nu)}\lambda^s\cdot&\\ \cdot\max_{x\in K_N(x^0)}|P_s(x,\xi^0)|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}+o(\lambda^k).&\end{aligned}$$

Отсюда с некоторой постоянной $C_2>0$ получим

$$\|Pu_{\lambda,\nu}\|_{k-s,\nu}\leq C_2\sum_{(\alpha:\nu)\leq k-s}|\left(\xi^0\right)^\alpha|\lambda^{(\alpha:\nu)+s}\max_{x\in K_N(x^0)}|P_s(x,\xi^0)|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}+o(\lambda^k) \tag{1.1.3}$$

при $\lambda\to\infty$.

Тогда из оценки (1.1.1) в силу (1.1.2)–(1.1.3), разделив на λ^k и устремив $\lambda \to \infty$, с постоянной $C_3 = \frac{CC_2}{C_1} > 0$ получим

$$\sum_{(\alpha:\nu)=k} |\left(\xi^0\right)^\alpha| \leq C_3 \sum_{(\alpha:\nu)=k-s} |\left(\xi^0\right)^\alpha| \max_{x \in K_N(x^0)} |P_s(x, \xi^0)|. \tag{1.1.4}$$

Так как $\nu \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N}, k \geq s$, то нетрудно заметить, что существуют положительные числа δ_1 и δ_2 такие, что

$$\sum_{(\alpha:\nu)=k} |\xi^\alpha| \geq \delta_1 |\xi|_\nu^k, \sum_{(\alpha:\nu)=k-s} |\xi^\alpha| \leq \delta_2 |\xi|_\nu^{k-s} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.5}$$

С учетом (1.1.5) из (1.1.4), получим

$$\delta_1 |\xi^0|_\nu^k \leq C_3 \delta_2 |\xi^0|_\nu^{k-s} \max_{x \in K_N(x^0)} |P_s(x, \xi^0)|.$$

Обозначим $(\xi^0)' = \left(\frac{\xi_1^0}{|\xi^0|_\nu^{\frac{1}{\nu_1}}}, \dots, \frac{\xi_n^0}{|\xi^0|_\nu^{\frac{1}{\nu_n}}} \right)$.

В силу $1/\nu$-однородности порядка s многочлена $P_s(x, \xi)$ имеем, что $P_s(x, \xi^0) = |\xi^0|_\nu^s P_s(x, (\xi^0)')$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Следовательно

$$\delta_1 |\xi^0|_\nu^k \leq C_3 \delta_2 |\xi^0|_\nu^k \max_{x \in K_N(x^0)} \left| P_s \left(x, (\xi^0)' \right) \right|. \tag{1.1.6}$$

Так как $P_s \left(x^0, (\xi^0)' \right) = |\xi^0|_\nu^{-s} P_s(x^0, \xi^0)$, то в силу предположения получим, что $P_s(x^0, (\xi^0)') = 0$. Следовательно в силу непрерывности коэффициентов $P_s(x, \mathbb{D})$ существует $N_0 > 0$ такое, что $\max_{x \in K_{N_0}(x^0)} |P_s(x, (\xi^0)')| < \frac{\delta_1}{C_3 \delta_2}$. Последнее при $N = N_0$ противоречит оценке (1.1.6) и доказывает теорему.

□

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения, являющегося аналогом предложения 1.8.1 из [59]:

Утверждение 1.1.1. *Пусть $k_1 < k < k_2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C_\varepsilon > 0$ такое, что для функций $u \in H^{k_2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq \varepsilon \|u\|_{k_2,\nu} + C_\varepsilon \|u\|_{k_1,\nu}. \tag{1.1.7}$$

Замечание 1.1.1. *В общем случае из полуэллиптичности в $\mathbb{R}^n$ не следует выполнение априорной оценки (1.1.1).*

Действительно, рассмотрим полуэллиптическую в $\mathbb{R}^n$ дифференциальную форму $P(x,\mathbb{D})$ такую, что $a_\alpha(x) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha:\nu) = s, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда покажем, что априорная оценка вида (1.1.1) не может выполняться.

Для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обозначим $\Delta(P_s,\Omega) := \max\limits_{(\alpha:\nu)=s} \sup\limits_{x\in\Omega} |a_\alpha(x)|$.

Из условия на коэффициенты следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое что

$$\Delta(P_s, \mathbb{R}^n \backslash K_N) < \varepsilon.$$

Допустим имеет место оценка (1.1.1).

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \leq \varphi \leq 1$ и $\varphi(x) = 1$ при $x \in K_N$.

Тогда из оценки (1.1.1) получим

$$\|(1-\varphi)u\|_{k,\nu} \leq C\left(\|P(1-\varphi)u\|_{k-s,\nu} + \|(1-\varphi)u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.1.8}$$

Применяя утверждение 1.1.1, из (1.1.8) легко получить, что

$$\|(1-\varphi)u\|_{k,\nu} \leq C'\left(\Delta(P_s, \mathbb{R}^n\backslash K_N)\|(1-\varphi)u\|_{k,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Возьмем $\varepsilon < \frac{1}{C'}$. Тогда получим оценку

$$\|(1-\varphi)u\|_{k,\nu} \leq C''\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.1.9}$$

Докажем, что оценка (1.1.9) не может выполняться для всех $u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\eta(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\eta(x) = 0$ при $|x| \geq 2$. Возьмём $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K_N$ такую, что $K_2(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K_N$ и рассмотрим последовательность функций $u_m(x) = \eta(m \cdot (x - x_0)), m \in \mathbb{N}$.

Для произвольного $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$D^\beta u_m(x) = m^{|\beta|}\left(D^\beta \eta\right)(m \cdot (x - x_0)).$$

Подставив $u_m(x)$ в (1.1.9) после простых преобразований получим неравенство

$$\sum_{(\beta:\nu)\leq k} m^{|\beta|}\|D^\beta \eta\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|\eta\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.1.10}$$

которое при достаточно большом m не может выполняться. Следовательно, получили противоречие.

Теорема 1.1.1′. *Пусть для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.1.11}$$

Тогда $P(x,\mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $x_0, \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \neq 0, N \in \mathbb{R}_+$. Аналогично доказательству теоремы 1.1.1 с некоторой постоянной $\delta > 0$, не зависящей от x_0 и N, получим следующую оценку:

$$\max_{x \in K_N(x_0)} |P_s(x,\xi)| \geq \delta |\xi|_\nu^s.$$

В силу того, что коэффициенты $P_s(x, \mathbb{D})$ непрерывны, то переходя к пределу при $N \to 0$, получим

$$|P_s(x_0,\xi)| \geq \delta |\xi|_\nu^s.$$

Следовательно, имеет место

$$|P_s(x,\xi)| \geq \delta |\xi|_\nu^s, \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

□

Теорема 1.1.2. (см. [4] теорема 7.1). *Пусть E, F, E_0 банаховы пространства, причём E компактно вложено в E_0. Пусть A ограниченный линейный оператор, действующий из E в F. Для того, чтобы оператор A, действующий из E в F, был n–нормальным необходимо и достаточно выполнение априорной оценки:*

$$\|x\|_E \leq C \left(\|Ax\|_F + \|x\|_{E_0} \right), \ \forall x \in E.$$

Из теоремы 1.1.2 получим

Следствие 1.1.1. *Пусть $P(x, \mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (0.0.1). Тогда для того, чтобы оператор $(P; H^{k,\nu})$ был $n-$нормальным необходимо и достаточно, чтобы с некоторой постоянной $C > 0$ и числом $M > 0$ выполнялась следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_M)} \right) ,\forall u \in H^{k,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Легко убедиться, что из теоремы 1.1.1′, в силу следствия 1.1.1, имеем

Теорема 1.1.3. *Пусть $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ нётеровый оператор. Тогда $P(x, \mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.*

Для $\lambda \in \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ обозначим

$$\|u\|_{k,\nu,\lambda} = \sum_{(\alpha:\nu) \leq k} \lambda^{k-(\alpha:\nu)} \|D^\alpha u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x,\lambda,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu) \leq s} a_\alpha(x) \lambda^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha,$$

где $a_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.1.4. *Пусть для дифференциальной формы* $P(x,\lambda,\mathbb{D})$ *с некоторой постоянной* $C>0$ *выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,\lambda} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,\lambda}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n), \lambda\ >0. \tag{1.1.12}$$

Тогда $P(x,\lambda,\mathbb{D})$ *равномерно полуэллиптичен относительно параметра* λ*: существует постоянная* $\delta>0$ *такая, что*

$$|P(x,\lambda,\xi)| \geq \delta(\lambda+|\xi|_\nu)^s, \forall \xi, x \in \mathbb{R}^n, \lambda>0.$$

Доказательство. Пусть $x_0,\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| \neq 0, N \in \mathbb{R}_+$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\varphi \subset K_N(x_0), \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}=1$.

Для $\lambda \in \mathbb{R}_+$ обозначим $\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi=(\lambda^{\frac{1}{\nu_1}}\xi_1,\cdots,\lambda^{\frac{1}{\nu_n}}\xi_n)$ и $u_{\lambda,\nu}(x)=e^{i(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi,x)}\varphi(x)$.

Так как для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$D^\alpha u_{\lambda,\nu}(x)=\xi^\alpha\lambda^{(\alpha:\nu)}e^{i(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi,x)}\varphi(x)+\sum_{0\leq\beta<\alpha}C_\alpha^\beta\lambda^{(\beta:\nu)}\xi^\beta e^{i(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi,x)}D^{\alpha-\beta}\varphi(x),$$

то для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, (\alpha:\nu)\leq k$ имеем

$$\|D^\alpha u_{\lambda,\nu}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\lambda^{k-(\alpha:\nu)}=\lambda^k\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}|\xi^\alpha|+o(\lambda^k).$$

Тогда получим

$$\|u_{\lambda,\nu}\|_{k,\nu,\lambda}=\lambda^k\sum_{(\alpha:\nu)\leq k}|\xi^\alpha|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}+o(\lambda^k) \text{ при } \lambda\to\infty. \tag{1.1.13}$$

В силу условия на коэффициенты дифференциальной формы $P(x,\lambda,\mathbb{D})$ для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $(\alpha:\nu)\leq k-s$ имеем

$$\|D^\alpha(P(x,\lambda,\mathbb{D})u_{\lambda,\nu})\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\lambda^{k-s-(\alpha:\nu)} \leq |\xi^\alpha|\lambda^{(\alpha:\nu)+k-s-(\alpha:\nu)+s}\cdot$$
$$\cdot\max_{x\in K_N(x_0)}|P(x,1,\xi)|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}+o(\lambda^k),$$

$$\|P(x,\lambda,\mathbb{D})u_{\lambda,\nu}\|_{k-s,\nu,\lambda}\leq\lambda^k\sum_{(\alpha:\nu)\leq k-s}|\xi^\alpha|\max_{x\in K_N(x_0)}|P(x,1,\xi)|\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}+o(\lambda^k) \tag{1.1.14}$$

при $\lambda\to\infty$.

Тогда из оценки (1.1.12) в силу (1.1.13) и (1.1.14), разделив на λ^k и устремив $\lambda\to\infty$, получим

$$\sum_{(\alpha:\nu)\leq k}|\xi^\alpha|\leq C\sum_{(\alpha:\nu)\leq k-s}|\xi^\alpha|\max_{x\in K_N(x_0)}|P(x,1,\xi)|, \forall\xi\in\mathbb{R}^n.$$

Так как $k \in \mathbb{N}, k \geq s, \nu \in \mathbb{N}^n$, то существуют постоянные $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что

$$\sum_{(\alpha:\nu)\leq k} |\xi^\alpha| \geq \delta_1(1+|\xi|_\nu)^k, \sum_{(\alpha:\nu)\leq k-s} |\xi^\alpha| \leq \delta_2(1+|\xi|_\nu)^{k-s}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда с некоторой постоянной $\delta > 0$ получим

$$\max_{x\in K_N(x_0)} |P(x,1,\xi)| \geq \delta(1+|\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Из последнего, в силу непрерывности коэффициентов дифференциальной формы $P(x,\lambda,\mathbb{D})$, устремив $N \to 0$, получим

$$|P(x,1,\xi)| \geq \delta(1+|\xi|_\nu)^s, \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.15}$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}_+, \xi \in \mathbb{R}^n$. Подставив в (1.1.15) вместо ξ $\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{\nu}}} = \left(\frac{\xi_1}{\lambda^{\frac{1}{\nu_1}}}, \ldots, \frac{\xi_n}{\lambda^{\frac{1}{\nu_n}}}\right)$, легко получить следующую оценку:

$$|P(x,\lambda,\xi)| \geq \delta(\lambda+|\xi|_\nu)^s, \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

□

Предложение 1.1.1. *Пусть $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая в $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма вида (0.0.1) с коэффициентами из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и постоянными коэффициентами в главной части. Тогда при произвольном $k \in \mathbb{R}_+$ с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.1.16}$$

Доказательство. Обозначим через $P_s(\xi)$ символ главной части $P(x,\mathbb{D})$. Из полуэллиптичности $P(x,\mathbb{D})$ следует, что существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$|P_s(\xi)| \geq \delta\,|\xi|_\nu^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.17}$$

Рассмотрим оператор

$$R_0 = F^{-1}\frac{|\xi|_\nu^s}{(1+|\xi|_\nu^s)P_s(\xi)}F. \tag{1.1.18}$$

Из оценки (1.1.17) следует, что R_0 является ограниченным линейным оператором, действующим из $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Тогда R_0P_s можно представить в виде

$$R_0P_s = I + T,$$

где $T=-F^{-1}\frac{1}{(1+|\xi|_\nu^s)}F$. Нетрудно заметить, что для произвольного $k\in\mathbb{R}$ оператор T является ограниченным линейным оператором из $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тода для $R_0P(x,D)$ получим следующее представление

$$\begin{aligned} R_0P(x,D) &= R_0P_s(D)+R_0L(x,D)= \\ &= I+T+R_0L(x,D). \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

Используя представление (1.1.19), в силу оценки (1.1.7), получим

$$\|u\|_{k,\nu}=\|R_0Pu-Tu-R_0Lu\|_{k,\nu}\le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\ \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Этим утверждение предложения 1.1.1 доказано. □

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ вида (0.0.1) обозначим

$$\Delta_0(P_s):=\max_{(\alpha:\nu)=s}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|a_\alpha(x)-a_\alpha(0)|\,,\delta:=\delta(P_s):=\min_{|\xi|_\nu=1}|P_s(0,\xi)|.$$

Предложение 1.1.2. *Пусть $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптическая дифференциальная форма в $\mathbb{R}^n$ вида (0.0.1) с коэффициентами из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда для произвольного $k\in\mathbb{R}, k\ge s$ существует $\eta_0=\eta_0(k,\delta)>0$ такое, что при $\Delta_0(P_s)<\eta_0$ с некоторой постоянной $C>0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu}\le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\ ,\forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.1.20}$$

Доказательство. Так как $P_s(0,\mathbb{D}):H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям предложения 1.1.1, то

$$\|u\|_{k,\nu}\le C\left(\|P_s(0,\mathbb{D})u\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\ ,\forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.1.21}$$

Дифференциальную форму $P_s(0,\mathbb{D})$ представим в следующем виде

$$P_s(0,\mathbb{D})=P(x,\mathbb{D})-(P_s(x,\mathbb{D})-P_s(0,\mathbb{D}))-L(x,\mathbb{D}).$$

Используя это представление из оценки (1.1.21) с некоторой постоянной $C>0$ получим

$$\begin{aligned} \|u\|_{k,\nu} &\le C\left(\|P_s(0,D)u\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\le \\ &\le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\|(P_s(x,D)-P_s(0,D))u\|_{k-s,\nu}+\|Lu\|_{k-s,\nu}+\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \\ &\forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Отсюда в силу утверждения 1.1.1 для произвольного $\varepsilon>0$ получим

$$\|u\|_{k,\nu}\le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu}+\Delta_0(P_s)\|u\|_{k,\nu}+\varepsilon\|u\|_{k,\nu}+(C_1+1)\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right),\forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

При $C\varepsilon < 1$ получим

$$\|u\|_{k,\nu} \leq \frac{C}{1 - C\varepsilon} \left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + (C_1 + 1)\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \Delta_0(P_s)\|u\|_{k,\nu}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть $\Delta_0(P_s) < \eta_0 = \frac{1-C\varepsilon}{C}$.

Тогда с некоторой постоянной $C_2 > 0$ получим требуемую оценку

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C_2 \left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

□

Предложение 1.1.3. *Пусть дифференциальная форма $P(x, \mathbb{D})$ равномерно полуэллиптична в $\mathbb{R}^n$ и коэффициенты $a_\alpha(x)$ при $(\alpha : \nu) = s$ равномерно непрерывные функции. Тогда с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right) , \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n, \delta \in \mathbb{R}_+, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\varphi \subset K_\delta(x_0)$. Так как $P(x, \mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен, то в силу предложения 1.1.1 с некоторой постоянной $C_1 > 0$, не зависящей от выбора x_0, имеем:

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C_1 \left(\|P(x_0, \mathbb{D})u\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Дифференциальную форму $P(x_0, \mathbb{D})$ представим в следующем виде

$$P(x_0, \mathbb{D}) = P(x, \mathbb{D}) - (P(x, \mathbb{D}) - P(x_0, \mathbb{D})).$$

Из последнего представления получим

$$\|P(x_0, \mathbb{D})u\|_{k-s,\nu} \leq \|P(x, \mathbb{D})u\|_{k-s,\nu} + \|(P(x, \mathbb{D}) - P(x_0, \mathbb{D}))u\|_{k-s,\nu}, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Применяя последнюю оценку и утверждение 1.1.1 с некоторыми постоянными $C_1', C_2 > 0$ получим

$$\begin{gathered}\|\varphi u\|_{k,\nu}^2 \leq C_1' \left(\|P(x_0, \mathbb{D})(\varphi u)\|_{k-s,\nu}^2 + \|\varphi u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2\right) \leq \\ \leq C_1'\|P(x, \mathbb{D})(\varphi u)\|_{k-s,\nu}^2 + C_1'\|(P(x, \mathbb{D}) - P(x_0, \mathbb{D}))(\varphi u)\|_{k-s,\nu}^2 + \\ + C_1'\|\varphi u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C_2\|P(x, \mathbb{D})(\varphi u)\|_{k-s,\nu}^2 + \\ + C_2 \max_{(\alpha:\nu)=s} \max_{x \in K_\delta(x_0)} |a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)|^2 \|\varphi u\|_{k,\nu}^2 + C_2\|\varphi u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).\end{gathered}$$

В силу условий теоремы коэффициенты $a_\alpha(x)$ при $(\alpha:\nu)=s$ равномерно непрерывны, следовательно, существует $\delta_0>0$ такая, что

$$\max_{(\alpha:\nu)=s}\sup_{|x-y|<\delta_0}|a_\alpha(x)-a_\alpha(y)|^2<\frac{1}{C_2}.$$

Пусть $\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $0\le\varphi(x)\le 1$ и $\varphi(x)=1$ при $|x|\le\frac{\delta_0}{2}$, $\varphi(x)=0$ при $|x|\ge\delta_0$ и $\omega\in\mathbb{R}_+$ такая, что $\omega\sqrt{n}<\delta_0$. Обозначим через $\{z_p\}_{p=0}^\infty$ точки решетки в пространстве $\mathbb{R}^n$ со стороной ω.

Обозначим

$$\varphi_p(x):=\varphi(x-z_p)\left(\sum_{q=0}^\infty\varphi(x-z_q)\right)^{-1},\ \ p\in\mathbb{Z}_+.$$

Тогда $\{\varphi_p\}_{p=0}^\infty$ разбиение единицы, удовлетворяющее следующим условиям:

(i). $\max\limits_{x,y\in\operatorname{supp}\varphi_p}|x-y|<\delta_0$;

(ii). существует $m\in\mathbb{N}$ такое, что для произвольного номера i найдется не более m функций $\varphi_j(x)$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi_i\cap\operatorname{supp}\varphi_j\ne\emptyset$;

(iii). $|D^\alpha\varphi_p(x)|\le C_\alpha,\forall p\in\mathbb{Z}_+,\forall\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$.

Обозначим $W_p=\operatorname{supp}\varphi_p, p\in\mathbb{Z}_+$.

Используя условия (i)–(iii), нетрудно получить следующую оценку

$$\|P(x,\mathbb{D})(\varphi_pu)\|^2_{k-s,\nu}\le\|\varphi_pP(x,\mathbb{D})u\|^2_{k-s,\nu}+\|P(x,\mathbb{D})(\varphi_pu)-\varphi_pP(x,\mathbb{D})u\|^2_{k-s,\nu}\le$$
$$\le\|\varphi_pP(x,\mathbb{D})u\|^2_{k-s,\nu}+C_3\sum_{(\beta:\nu)<k}\int\limits_{W_p}|D^\beta u|^2dx$$

Из последних оценок с некоторой постоянной $C_4>0$, не зависящей от p, имеем

$$\|\varphi_pu\|^2_{k,\nu}\le C_4\left(\|\varphi_pPu\|^2_{k-s,\nu}+\|\varphi_pu\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}+\sum_{(\beta:\nu)<k}\int\limits_{W_p}|D^\beta u|^2dx\right).\tag{1.1.22}$$

В силу оценки (1.1.22) и условий (ii)–(iii) с некоторыми постоянными $C_5,C_6,C_7>0$ получим

$$\|u\|^2_{k,\nu}\le C_5\sum_{p=0}^\infty\|\varphi_pu\|^2_{k,\nu}\le C_5C_4\left(\sum_{p=0}^\infty\|\varphi_pPu\|^2_{k-s,\nu}+\sum_{p=0}^\infty\|\varphi_pu\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)+$$
$$+C_6\sum_{(\beta:\nu)<k}\|D^\beta u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\le C_7\left(\|Pu\|^2_{k-s,\nu}+\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}+\sum_{(\beta:\nu)<k}\|D^\beta u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right).$$

В силу утверждения 1.1.1 для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\|u\|_{k,\nu}^2 \leq C_7 \left(\|Pu\|_{k-s,\nu}^2 + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2\right) + C_7 \left(\varepsilon\|u\|_{k,\nu}^2 + C_\varepsilon\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Возьмём $\varepsilon < \frac{1}{C_7}$. Тогда с некоторой постоянной $C_8 > 0$ получим

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C_8 \left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

□

1.2 Априорные оценки в анизотропных весовых пространствах

Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq s, q \in Q$ и коэффициенты дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ вида (0.0.1) удовлетворяют условиям:

$$|D^\beta a_\alpha(x)| \leq C_{\alpha,\beta}\, q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)} \quad \left(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\ (\alpha:\nu) \leq s, (\beta:\nu) \leq k - s\right).$$

Тогда $P(x, \mathbb{D})$ порождает ограниченный линейный оператор из $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим его через $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$.

Теорема 1.2.1. *Пусть для дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right)\ , \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{1.2.1}$$

Тогда $P(x, \mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $x_0, \xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \neq 0$.

Пусть N любое фиксированное положительное число и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\varphi \subset K_N(x_0)$, $\|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 1$.

Аналогично доказательству теоремы 1.1.1 для $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $\nu \in \mathbb{N}^n$ рассмотрим функцию $u_{\lambda,\nu}(x) = e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi, x\right)}\varphi(x)$.

Так как для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$D^\alpha u_{\lambda,\nu}(x) = \xi^\alpha \lambda^{(\alpha:\nu)} e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi, x\right)}\varphi(x) + \sum_{0 \leq \beta < \alpha} C_\alpha^\beta \lambda^{(\beta:\nu)} \xi^\beta e^{i\left(\lambda^{\frac{1}{\nu}}\xi, x\right)} D^{\alpha-\beta}\varphi(x),$$

то для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, (\alpha:\nu) \leq k$ имеем

$$\left\|D^\alpha u_{\lambda,\nu} \cdot q^{k-(\alpha:\nu)}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{(\alpha:\nu)}\, |\xi^\alpha|\, \left\|\varphi \cdot q^{k-(\alpha:\nu)}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o\left(\lambda^{(\alpha:\nu)}\right).$$

Тогда получим

$$\|u_{\lambda,\nu}\|_{k,\nu,q} = \sum_{(\alpha:\nu)\le k} \lambda^{(\alpha:\nu)}|\xi^\alpha|\|\varphi\cdot q^{k-(\alpha:\nu)}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(\lambda^k) \text{ при } \lambda\to\infty. \tag{1.2.2}$$

С другой стороны, в силу условия на коэффициенты $P(x,\mathbb{D})$ и учитывая, что $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\varphi \subset K_N(x_0)$ для всех $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n, (\alpha:\nu)\le k-s$, имеем

$$\left\|D^\alpha\left(P\left(x,\mathbb{D}\right)u_{\lambda,\nu}\right)q^{k-s-(\alpha:\nu)}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le \left|\xi^\alpha\right|\lambda^{(\alpha:\nu)}\lambda^s\cdot$$
$$\cdot \max_{x\in K_N(x_0)}|P_s(x,\xi)|\left\|\varphi\cdot q^{k-s-(\alpha:\nu)}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(\lambda^k).$$

Отсюда получим

$$\|Pu_{\lambda,\nu}\|_{k-s,\nu,q} \le \sum_{(\alpha:\nu)\le k-s}|\xi^\alpha|\ \lambda^{(\alpha:\nu)+s}\max_{x\in K_N(x_0)}|P_s(x,\xi)|\left\|\varphi\cdot q^{k-s-(\alpha:\nu)}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + o(\lambda^k) \tag{1.2.3}$$

при $\lambda\to\infty$.

Тогда из оценки (1.2.1) в силу (1.2.2)–(1.2.3), разделив на λ^k и устремив $\lambda\to\infty$, получим

$$\sum_{(\alpha:\nu)=k}|\xi^\alpha| \le C\sum_{(\alpha:\nu)=k-s}|\xi^\alpha|\max_{x\in K_N(x_0)}|P_s(x,\xi)|. \tag{1.2.4}$$

Из (1.2.4), аналогично доказательству теоремы 1.1.1, получим

$$\delta_1|\xi|_\nu^k \le C\delta_2|\xi|_\nu^{k-s}\max_{x\in K_N(x_0)}|P_s(x,\xi)|,$$

где $\delta_1 = \min\limits_{|\xi|_\nu=1}\sum\limits_{(\alpha:\nu)=k}|\xi^\alpha|, \delta_2 = \max\limits_{|\xi|_\nu=1}\sum\limits_{(\alpha:\nu)=k-s}|\xi^\alpha|$.

Из последнего в силу непрерывности коэффициентов дифференциальной формы $P_s(x,\mathbb{D})$, устремив $N\to 0$, с постоянной $\delta = \frac{\delta_1}{C\delta_2} > 0$, получим

$$|P_s\left(x,\xi\right)| \ge \delta\left|\xi\right|_\nu^s, \forall x\in\mathbb{R}^n, \forall\xi\in\mathbb{R}^n. \tag{1.2.5}$$

□

Замечание 1.2.1. *В общем случае из равномерной полуэллиптичности $P(x,\mathbb{D})$ не следует выполнение априорной оценки вида (1.2.1). При дополнительных условиях на весовую функцию и коэффициенты дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ далее получено, что для оценки вида (1.2.1) необходимым является более сильное условие, чем равномерная полуэллиптичность в $\mathbb{R}^n$.*

Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha q(x)^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha,$$

где a_α – постоянные числа, $q \in Q^{k-s,\nu}$.

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ и $\lambda \in \mathbb{R}_+$ обозначим

$$P(\lambda,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha.$$

Теорема 1.2.2. *Пусть $q \in Q^{k-s,\nu}$ и для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\right), \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.2.6}$$

Тогда $P(\lambda,\mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен относительно параметра λ: существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\left|\sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)} \xi^\alpha\right| \ge \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Доказательство. Пусть $M \in \mathbb{R}_+, x_M \in \mathbb{R}^n \backslash K_M, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\varphi \subset K_1(x_M), \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим функцию $\tilde{u}(x) = e^{i(q(x_M)^{\frac{1}{\nu}}\xi,x)}\varphi(x)$.

Так как $\lim\limits_{|x|\to\infty} \max\limits_{|x-y|\le 1} \frac{|q(x)-q(y)|}{q(y)} = 0$, то для произвольного $r \in \mathbb{R}_+$ имеет место

$$|q(x)^r - q(x_M)^r| \le \varepsilon_r(M) q(x_M)^r, \forall x \in K_1(x_M),$$

где $\varepsilon_r(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Отсюда нетрудно убедиться, что существует M_0 такое, что при $M \ge M_0$ с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от M, имеют место неравенства:

$$\|\tilde{u}\|_{k,\nu,q} \ge C_1 \|\tilde{u}\|_{k,\nu,q(x_M)}, \tag{1.2.7}$$

$$\|P\tilde{u}\|_{k-s,\nu,q} \le C_2 \|P\tilde{u}\|_{k-s,\nu,q(x_M)}. \tag{1.2.8}$$

Обозначим $\nu_{max} = \max\limits_{1\le i\le n} \nu_i$. Легко проверить, что для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, (\alpha:\nu) \le k$ с некоторой постоянной $C_3 > 0$ имеет место

$$\|D^\alpha \tilde{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-(\alpha:\nu)} \ge q(x_M)^k \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} |\xi^\alpha| - C_3 q(x_M)^{k-\frac{1}{\nu_{max}}}(1+|\xi|_\nu)^k.$$

Тогда с некоторой постоянной $C_4 > 0$ получим

$$\|\tilde{u}\|_{k,\nu,q(x_M)} \geq q(x_M)^k \sum_{(\alpha:\nu)\leq k} |\xi^\alpha| - C_4 q(x_M)^{k-\frac{1}{\nu_{max}}}(1+|\xi|_\nu)^k. \tag{1.2.9}$$

Для $\beta \in \mathbb{Z}^n_+, (\beta:\nu) \leq k-s$ имеем оценки

$$\begin{gathered}
\left\|D^\beta(P(x,\mathbb{D})\tilde{u})\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} \leq \\
\leq \left\|D^\beta(P(x_M,\mathbb{D})\tilde{u})\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} + \\
+ \left\|D^\beta\left((P(x,\mathbb{D}) - P(x_M,\mathbb{D}))\tilde{u}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} \leq \\
\leq \left\|\sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)} D^{\alpha+\beta}\tilde{u}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} + \\
+ C_5 \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} \left\|D^\beta\left((q(x)^{s-(\alpha:\nu)} - q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)})D^\alpha\tilde{u}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)}.
\end{gathered} \tag{1.2.10}$$

Учитывая, что $q \in Q^{k-s,\nu}$ и $\operatorname{supp}\widetilde{u} \subset K_1(x_M)$, получим оценки

$$\begin{gathered}
\left\|D^\beta\left(\left(q(x)^{s-(\alpha:\nu)} - q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)}\right) D^\alpha\widetilde{u}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} \leq \\
\left\|\left(q(x)^{s-(\alpha:\nu)} - q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)}\right) D^{\beta+\alpha}\widetilde{u}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} + \\
C_6 \sum_{0\leq\gamma<\beta} \left\|D^{\beta-\gamma}\left(q(x)^{s-(\alpha:\nu)}\right) D^{\gamma+\alpha}\widetilde{u}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} \leq \\
\tau(M) q(x_M)^k (1+|\xi|_\nu)^k + C_7 q(x_M)^{k-\frac{1}{\nu_{max}}}(1+|\xi|_\nu)^k,
\end{gathered} \tag{1.2.11}$$

где $\tau(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Аналогичным образом оценим

$$\begin{gathered}
\left\|\sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)} D^{\alpha+\beta}\widetilde{u}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} \leq \\
\left|\sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha \xi^\alpha\right| \left|\xi^\beta\right| q(x_M)^k + C_8 q(x_M)^{k-\frac{1}{\nu_{max}}}(1+|\xi|_\nu)^k.
\end{gathered} \tag{1.2.12}$$

Тогда из (1.2.10), с учётом (1.2.11) и (1.2.12), получим

$$\begin{gathered}
\left\|D^\beta(P(x,\mathbb{D})\tilde{u})\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} \leq \\
C_9\left(q(x_M)^k \left|\sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha \xi^\alpha\right| \left|\xi^\beta\right| + \omega(M) q(x_M)^k (1+|\xi|_\nu)^k + q(x_M)^{k-\frac{1}{\nu_{max}}}(1+|\xi|_\nu)^k\right),
\end{gathered} \tag{1.2.13}$$

где $\omega(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Отсюда с некоторой постоянной $C_{10} > 0$ имеет место

$$\|P\tilde{u}\|_{k-s,\nu,q(x_M)} \leq C_{10} \left(q(x_M)^k \sum_{(\beta:\nu)\leq k-s} \left|\xi^\beta\right| \left| \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha \xi^\alpha \right| + \right. \\ \left. + q(x_M)^{k-\frac{1}{\nu_{max}}} (1+|\xi|_\nu)^k + \tilde{\omega}(M) q(x_M)^k (1+|\xi|_\nu)^k \right), \tag{1.2.14}$$

где $\tilde{\omega}(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Из оценки (1.2.6), в силу (1.2.7)–(1.2.14), разделив на $(q(x_M))^k$ и устремив $M \to \infty$, в силу того, что $\frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$, с некоторой постоянной $C_{11} > 0$ получим

$$\sum_{(\beta:\nu)\leq k} \left|\xi^\beta\right| \leq C_{11} \sum_{(\beta:\nu)\leq k-s} \left|\xi^\beta\right| \left| \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha \xi^\alpha \right|.$$

Из последнего неравенства аналогично доказательству теоремы 1.1.4 получим, что существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)} \xi^\alpha \right| \geq \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

$\square$

Пусть $P(x, \mathbb{D})$ представляется в виде

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a^0_\alpha(x) q(x)^{(s-(\alpha:\nu))} D^\alpha + R(x, \mathbb{D}), \tag{1.2.15}$$

где $a^0_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n), q \in Q^{k-s,\nu}$ и

$$R(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} b_\alpha(x) D^\alpha,$$

где $D^\beta(b_\alpha(x)) = o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha : \nu) \leq s, (\beta : \nu) \leq k - s$.

Теорема 1.2.3. *Пусть $q \in Q^{k-s,\nu}$ и $P(x, \mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (1.2.15) с коэффициентами удовлетворяющими $\lim\limits_{|x|\to\infty} \max\limits_{|x-y|\leq 1} |a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)| = 0$ при $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+, (\alpha : \nu) \leq s$. Пусть с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \right), \forall u \in H^{k,\nu}_q(\mathbb{R}^n). \tag{1.2.16}$$

Тогда $P(x, \lambda, \mathbb{D})$ равномерно полуэллиптичен относительно параметра λ: существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a^0_\alpha(x) \lambda^{s-(\alpha:\nu)} \xi^\alpha \right| \geq \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0, |x| \geq M,$$

где $M \in \mathbb{R}_+$ некоторое число.

Доказательство. Пусть $M \in \mathbb{R}_+, x_M \in \mathbb{R}^n \backslash K_M, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\varphi \subset K_1(x_M), \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию $\tilde{u}(x) = e^{i(q(x_M)^{\frac{1}{\nu}}\xi, x)}\varphi(x)$.

Обозначим $\nu_{max} = \max\limits_{1\le i\le n} \nu_i$.

Аналогично доказательству теоремы 1.2.2 нетрудно проверить, что существует M_0 такое, что при $M \ge M_0$ с некоторыми постоянными $C_1, C_2, C_3 > 0$ имеют место неравенства:

$$\|\tilde{u}\|_{k,\nu,q} \ge C_1\|\tilde{u}\|_{k,\nu,q(x_M)}, \tag{1.2.17}$$

$$\|P\tilde{u}\|_{k-s,\nu,q} \le C_2\|P\tilde{u}\|_{k-s,\nu,q(x_M)}. \tag{1.2.18}$$

$$\|\tilde{u}\|_{k,\nu,q(x_M)} \ge q(x_M)^k \sum_{(\alpha:\nu)\le k} |\xi^\alpha| - C_3 q(x_M)^{k-\frac{1}{\nu_{max}}}(1+|\xi|_\nu)^k. \tag{1.2.19}$$

Для произвольного $\beta \in \mathbb{Z}_+^n, (\beta:\nu) \le k-s$

$$\begin{gathered}
\left\|D^\beta(P(x,\mathbb{D})\widetilde{u})\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} \le \\
\le \left\|\sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha^0(x_M) q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)} D^{\alpha+\beta}\widetilde{u}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} + \\
+ \sum_{(\alpha:\nu)\le s} \left\|D^\beta\left(\left[a_\alpha^0(x)q(x)^{s-(\alpha:\nu)} - a_\alpha^0(x_M)q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)}\right] D^\alpha\widetilde{u}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)} + \\
+ \sum_{(\alpha:\nu)\le s} \left\|D^\beta(b_\alpha(x)D^\alpha\widetilde{u})\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} q(x_M)^{k-s-(\beta:\nu)}.
\end{gathered} \tag{1.2.20}$$

В силу того, что $a_\alpha^0(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} \max\limits_{|x-y|\le 1} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)| = 0$ и $q \in Q^{k-s,\nu}$ нетрудно проверить, что

$$\begin{gathered}
\left|a_\alpha^0(x)q(x)^{s-(\alpha:\nu)} - a_\alpha^0(x_M)q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)}\right| \le \\
\le \left|a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(x_M)\right| q(x)^{s-(\alpha:\nu)} + \left|a_\alpha^0(x_M)\left(q(x)^{s-(\alpha:\nu)} - q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)}\right)\right| \le \\
\le \varepsilon_1(M) q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)}, \forall x \in K_1(x_M)
\end{gathered} \tag{1.2.21}$$

$$\begin{gathered}
\left|D^\beta\left(a_\alpha^0(x)q(x)^{s-(\alpha:\nu)}\right)\right| \le \varepsilon_2(M) q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)} + \\
+ C_4 q(x_M)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)-\frac{1}{\nu_{max}}}, \forall x \in K_1(x_M)
\end{gathered} \tag{1.2.22}$$

где $\varepsilon_1(M), \varepsilon_2(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Из того, что $D^\beta(b_\alpha(x)) = o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha:\nu) \le s, (\beta:\nu) \le k-s$ получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}
\left\|D^\beta\left(b_\alpha(x)D^\alpha\widetilde{u}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le C_5 \sum_{0\le\gamma\le\beta} \left\|D^\gamma(b_\alpha(x))D^{\beta-\gamma+\alpha}\widetilde{u}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le \\
\le \delta(M) q(x_M)^{s+(\beta:\nu)}(1+|\xi|_\nu)^{(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)} + \\
+ C_6 q(x_M)^{s+(\beta:\nu)-\frac{1}{\nu_{max}}}(1+|\xi|_\nu)^{(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)},
\end{gathered} \tag{1.2.23}$$

где $\delta(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Тогда из оценок (1.2.20)–(1.2.23) с некоторой постоянной $C_7 > 0$ получим

$$\|P\tilde{u}\|_{k-s,\nu,q(x_M)} \leq C_7 \left(q(x_M)^k \sum_{(\beta:\nu)\leq k-s} \left|\xi^\beta\right| \left| \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha(x_M)\xi^\alpha \right| + \right.$$

$$\left. + q(x_M)^{k-\frac{1}{\nu_{max}}}(1+|\xi|_\nu)^k + \tilde{\omega}(M) q(x_M)^k (1+|\xi|_\nu)^k \right), \quad (1.2.24)$$

где $\tilde{\omega}(M) \to 0$ при $M \to \infty$.

Из оценки (1.2.16), в силу оценок (1.2.17)–(1.2.19),(1.2.24) и того, что $\frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$, разделив на $(q(x_M))^k$, получим

$$\sum_{(\beta:\nu)\leq k} \left|\xi^\beta\right| - \tau(M)(1+|\xi|_\nu)^k \leq \sum_{(\beta:\nu)\leq k-s} \left|\xi^\beta\right| \left| \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha(x_M)\xi^\alpha \right|, \quad (1.2.25)$$

где $\tau(M) \to 0$ при $M \to \infty$. Из последнего получим, что

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a^0_\alpha(x_M)\xi^\alpha \right| \geq \frac{\delta_1}{\delta_2}(1+|\xi|_\nu)^s - \frac{\tau(M)}{\delta_2}(1+|\xi|_\nu)^s, \quad (1.2.26)$$

где $\delta_1 = \min\limits_{|\xi|_\nu=1} \sum\limits_{(\beta:\nu)\leq k} \left|\xi^\beta\right|, \delta_2 = \max\limits_{|\xi|_\nu=1} \sum\limits_{(\beta:\nu)\leq k-s} \left|\xi^\beta\right|$.

Так как $\tau(M) \to 0$ при $M \to \infty$, то существует $N_0 \geq M_0$ такое, что при $M \geq N_0$ с некоторой постоянной $\delta > 0$ имеет место

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a^0_\alpha(x)\xi^\alpha \right| \geq \delta(1+|\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |x| \geq N_0.$$

Из последнего нетрудно получить, что

$$\left| \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a^0_\alpha(x)\lambda^{s-(\alpha:\nu)}\xi^\alpha \right| \geq \delta(\lambda+|\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0, |x| \geq N_0.$$

□

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ вида (1.2.15) и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$P^0(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a^0_\alpha(x_0) q(x)^{(s-(\alpha:\nu))} D^\alpha,$$

$$P^1(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a^0_\alpha(x_0) q(x)^{(s-(\alpha:\nu))} D^\alpha + R(x,\mathbb{D}).$$

Условие 1.2.1. *Пусть*

$$\sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a^0_\alpha(x_0)\lambda^{s-(\alpha:\nu)}\xi^\alpha \neq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Предложение 1.2.1. *Пусть* $q \in Q^{k-s,\nu}$ *и* $P^1(x,\mathbb{D})$ *полуэллиптическая в* $\mathbb{R}^n$ *дифференциальная форма, удовлетворяющая условию 1.2.1. Тогда с некоторой постоянной* $C>0$ *и числом* $M>0$ *выполняется:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C\left(\|P^1u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right),\ \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.2.27}$$

Доказательство. При условиях предложения, в силу теоремы 4.1 из [51], с некоторой постоянной $C_1>0$ и числом $M_1>0$ имеет место:

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C_1\left(\|P^0u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_{M_1})}\right),\ \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.2.28}$$

Тогда из определения дифференциальной формы $P^0(x,\mathbb{D})$ получим

$$\|P^0u\|_{k-s,\nu,q} \le \|P^1u\|_{k-s,\nu,q} + \|Ru\|_{k-s,\nu,q}\ ,\forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.2.29}$$

Так как $D^\beta(b_\alpha(x)) = o\left(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)}\right)$ при $|x|\to\infty$ для всех $(\alpha:\nu)\le s, (\beta:\nu)\le k-s$, то для произвольного $\varepsilon>0$ существует $N(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\frac{|D^\beta b_\alpha(x)|}{q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)}} < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^n\setminus K_{N(\varepsilon)}, (\alpha:\nu)\le s,\ (\beta:\nu)\le k-s.$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), 0\le\psi(x)\le 1$, $\psi(x)=1$ при всех $|x|\le 1$ и $\psi(x)=0$ при всех $|x|\ge 2$. Обозначим $\psi_\varepsilon(x) = \psi(\frac{x}{N(\varepsilon)}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

С некоторой постоянной $C_2>0$ получим

$$\|R\left((1-\psi_\varepsilon)u\right)\|_{k-s,\nu,q} \le C_2\varepsilon\|u\|_{k,\nu,q}\ \ ,\forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.2.30}$$

В силу полуэллиптичности $P^1(x,\mathbb{D})$, применяя результаты работы [58], получим

$$\|R\left(\psi_\varepsilon u\right)\|_{k-s,\nu,q} \le C_3\|\psi_\varepsilon u\|_{k,\nu,q} \le C_4\left(\|P^1u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_{N(\varepsilon)})}\right). \tag{1.2.31}$$

Из оценок (1.2.28)–(1.2.31) следует, что

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C_5\left(\|P^1u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right) + C_1C_2\varepsilon\|u\|_{k,\nu,q}, \tag{1.2.32}$$

где $M = \max(N(\varepsilon), M_1)$. Возьмём $\varepsilon < \frac{1}{C_1C_2}$ и получим оценку (1.2.27) для оператора $(P^1; H_q^{k,\nu})$. □

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$, $q\in Q$ и $x_0\in\mathbb{R}^n$ обозначим

$$\Delta(P,q) := \max_{\substack{(\alpha:\nu)\le s,\\ (\beta:\nu)\le k-s}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta\left(a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(x_0)\right)q(x)^{-(\beta:\nu)}|.$$

Теорема 1.2.4. *Пусть* $q \in Q^{k-s,\nu}$ *и* $P(x,\mathbb{D})$ *полуэллиптическая в* $\mathbb{R}^n$ *дифференциальная форма, удовлетворяющая условию 1.2.1. Тогда существует* $\eta_0 = \eta_0(k) > 0$, *такое, что при* $\Delta(P,q) < \eta_0$ *для оператора* $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ *с некоторой постоянной* $C > 0$ *и числом* $M > 0$ *выполняется оценка:*

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right) \ , \forall u \in H_q^{k,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right). \tag{1.2.33}$$

Доказательство. Обозначим

$$P^2(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} \left(a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(x_0)\right) q(x)^{(s-(\alpha:\nu))} D^\alpha.$$

Тогда $P(x,\mathbb{D})$ представляется в виде

$$P(x,\mathbb{D}) = P^1(x,\mathbb{D}) + P^2(x,\mathbb{D}). \tag{1.2.34}$$

Из предложения 1.2.1, в силу условий теоремы, имеем, что с некоторой постоянной $C > 0$ и числом $M > 0$

$$\|u\|_{k,\nu,q} \leq C \left(\|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right) \ , \forall u \in H_q^{k,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right). \tag{1.2.35}$$

Для $(P^2; H_q^{k,\nu})$ с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$\|P^2 u\|_{k-s,\nu,q} \leq C_1 \Delta(P,q) \|u\|_{k,\nu,q}, \ \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.2.36}$$

Учитывая (1.2.35)–(1.2.36) получим оценки

$$\begin{aligned} \|u\|_{k,\nu,q} &\leq C \left(\|P^1 u\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right) \leq \\ &\leq C\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + C\|P^2 u\|_{k-s,\nu,q} + C\|u\|_{L_2(K_M)} \leq \\ &\leq C\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + C_1 C \Delta(P,q)\|u\|_{k,\nu,q} + C\|u\|_{L_2(K_M)}. \end{aligned}$$

Взяв $\eta_0 < \frac{1}{CC_1}$ получим априорную оценку (1.2.33). □

Из теоремы 1.2.4, в силу теоремы 1.1.2, получим

Следствие 1.2.1. *Пусть* $q \in Q^{k-s,\nu}$ *и* $P(x,\mathbb{D})$ *полуэллиптическая в* $\mathbb{R}^n$ *дифференциальная форма, удовлетворяющая условию 1.2.1. Тогда существует* $\eta_0 = \eta_0(k) > 0$ *такое, что при* $\Delta(P,q) < \eta_0$ *оператор* $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ $n-$*нормален.*

1.3 Некоторые приложения априорных оценок для нётеровости

Предложение 1.3.1. *Пусть $k_0 \in \mathbb{R}_+$ и с некоторой постоянной $C > 0$ при всех $k \in [0, k_0]$ выполняется оценка*

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \right) \ , \forall u \in H^{k,\nu} \left(\mathbb{R}^n\right). \tag{1.3.1}$$

Если для $k_1 \in [0, k_0]$ оператор $\left(P; H^{k_1,\nu}\right)$ является n–нормальным, то для всех $k_2 \geq k_1, k_2 \in [0, k_0]$ оператор $\left(P; H^{k_2,\nu}\right)$ также будет n–нормальным.

Доказательство. Из n–нормальности оператора $\left(P; H^{k_1,\nu}\right)$ в силу следствия 1.1.1 имеем, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$ и числом $R > 0$ выполняется

$$\|u\|_{k_1,\nu} \leq C_1 \left(\|Pu\|_{k_1-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_R)} \right), \forall u \in H^{k_1,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.3.2}$$

Очевидно, что при $k_2 \geq k_1 \geq 0$ с некоторыми постоянными $C_2, C_3 > 0$ выполняются следующие оценки

$$\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u\|_{k_1,\nu}, \forall u \in H^{k_1,\nu}(\mathbb{R}^n) \tag{1.3.3}$$

$$\|Pu\|_{k_1-s,\nu} \leq C_3 \|Pu\|_{k_2-s,\nu}, \forall u \in H^{k_2,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{1.3.4}$$

Из оценки (1.3.1) для $k = k_2$ в силу оценок имеем (1.3.3)-(1.3.4)

$$\begin{aligned} \|u\|_{k_2,\nu} \leq C \left(\|Pu\|_{k_2-s,\nu} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \right) \leq C \|Pu\|_{k_2-s,\nu} + C C_2 \|u\|_{k_1,\nu} \leq \\ \leq C \|Pu\|_{k_2-s,\nu} + C_4 \left(\|Pu\|_{k_1-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_R)} \right) \leq \\ \leq C_5 \left(\|Pu\|_{k_2-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_R)} \right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Следовательно, в силу следствия 1.1.1, оператор $\left(P; H^{k_2,\nu}\right)$ n–нормален. □

Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq s$. Рассмотрим дифференциальную форму, формально сопряжённую для $P(x, \mathbb{D})$

$$P^* \left(x, \mathbb{D}\right) = \sum_{(\alpha:\nu) \leq s} D^\alpha \left(\overline{a_\alpha(x)} \, \bullet \right),$$

где $a_\alpha(x) \in C^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 1.3.1. *Пусть $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптическая дифференциальная форма в $\mathbb{R}^n$ вида (0.0.1) с постоянными коэффициентами в главной части и оператор $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ нормально разрешим. Тогда* $\operatorname{coker}(P; H^{k,\nu})$ *конечномерен тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker}(P^*; H^{k,\nu})$ *конечномерен, при этом*

$$\dim \operatorname{coker}(P; H^{k,\nu}) = \dim \operatorname{Ker}(P^*; H^{k,\nu}).$$

Доказательство. Обозначим $(\cdot,\cdot)_{k,\nu}$ скалярное произведение в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, задаваемое следующим образом:

$$(u,v)_{k,\nu} = \int \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}(1+|\xi|_\nu)^{2k}d\xi,$$

а скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать следующим образом:

$$(u,v)_0 = \int u(x)\overline{v(x)}dx$$

В силу замкнутости $\mathrm{Im}(P;H^{k,\nu})$ существует $L \subset H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ такое, что

$$\mathrm{Im}(P;H^{k,\nu}) \oplus L = H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Для $l \in \mathbb{R}$ обозначим $\Lambda^l := F^{-1}(1+|\xi|_\nu)^l F$ действующий из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-l,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Оператор Λ^l является изометрическим изоморфизмом из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-l,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Докажем, что $\Lambda^{2(k-s)}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между L и $\mathrm{Ker}(P^*;H^{k,\nu})$.

Для произвольных $u,v \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ имеет место:

$$(Pu,v)_0 = (u,P^*v)_0. \tag{1.3.6}$$

Продолжим $(\cdot,\cdot)_0$ на прямое произведение $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \times H^{-k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Равенство (1.3.6) сохранится для $u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n), v \in H^{-(k-s),\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\omega \in L$. Обозначим $v = \Lambda^{2(k-s)}\omega \in H^{-(k-s),\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Тогда с использованием равенства Планшареля получим

$$(Pu,v)_0 = (Pu,\Lambda^{2(k-s)}w)_0 = \int Pu \cdot \overline{F^{-1}\left((1+|\xi|_\nu)^{2(k-s)}\widehat{w}(\xi)\right)}dx$$
$$= \int \widehat{Pu}(\xi)\overline{\widehat{w}(\xi)}\,(1+|\xi|_\nu)^{2(k-s)}\,d\xi = (Pu,w)_{k-s,\nu} = 0, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда, в силу (1.3.6), имеет место

$$(Pu,v)_0 = (u,P^*v)_0 = 0\ , \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Обозначим $u_0 = \Lambda^{-2k}(P^*v) \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Подставив u_0 в последнее равенство и применяя равенство Планшареля, из последнего равенства получим

$$(u_0,P^*v)_0 = \left(\Lambda^{-2k}(P^*v),P^*v\right)_0 = \int F^{-1}\left((1+|\xi|_\nu)^{-2k}\widehat{P^*v}(\xi)\right)\overline{P^*v}dx$$
$$= \int |\widehat{P^*v}(\xi)|^2\,(1+|\xi|_\nu)^{-2k}\,d\xi = 0.$$

Следовательно, $P^*v = 0$ в $H^{-k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Так как по условию леммы коэффициенты главной части $P(x,\mathbb{D})$ постоянные, то постоянными будут также коэффициенты главной части $P^*(x,\mathbb{D})$. Для дифференциальной формы $P^*(x,\mathbb{D})$ имеет место представление

$$P^*(x,\mathbb{D}) = P_s^*(D) + \overline{Q}(x,\mathbb{D}),$$

где

$$\overline{Q}(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)<s}\ \sum_{0\le\beta\le\alpha} C_\alpha^\beta D^\beta \left(\overline{a_\alpha(x)}\right) D^{\alpha-\beta}.$$

Обозначим через $P_s^*(\xi)$ символ оператора $P_s^*(\mathbb{D})$.

Рассмотрим оператор

$$\widetilde{R} = F^{-1}\frac{|\xi|_\nu^s}{(1+|\xi|_\nu^s)P_s^*(\xi)}F.$$

Легко заметить, что $\widetilde{R}$ является ограниченным оператором из $H^{r-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ для произвольного $r\in\mathbb{R}$. Для $\widetilde{R}P^*$ имеет место представление

$$\widetilde{R}P^* = I + T + \widetilde{R}\overline{Q},$$

где $T = F^{-1}\frac{1}{1+|\xi|_\nu^s}F$. Нетрудно заметить, что для произвольного $r\in\mathbb{R}$ T является ограниченным оператором из $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r+\gamma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ при всех $0\le\gamma\le s$. В силу условий леммы, для произвольного $r\in[-k+s,k]$ $\overline{Q}$ является ограниченным оператором из $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r-s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma = \left(\prod_{i=1}^n \nu_i\right)^{-1}$, следовательно, $\widetilde{R}\overline{Q}$ – ограниченный оператор из $H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{r+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим $T_1 := T + \widetilde{R}\overline{Q}$. Для $\widetilde{R}P^*$ имеет место представление

$$\widetilde{R}P^* = I + T_1, \tag{1.3.7}$$

где $T_1 : H^{r,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{r+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ при произвольном $r\in[-k+s,k]$ и $\sigma = \left(\prod_{i=1}^n \nu_i\right)^{-1}$.

Из того, что $P^*v = 0$ в $H^{-k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, следует, что $v\in \mathrm{Ker}(P^*;H^{-k+s,\nu})$. Применив $\widetilde{R}$ к P^*v в силу представления (1.3.7) получим, что $v = -T_1v \in H^{-k+s+\sigma}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, получили, что $v\in\mathrm{Ker}(P^*;H^{-k+s+\sigma,\nu})$.

Повторяя аналогичные рассуждения m раз $(m\sigma \ge 2k-s)$, получим, что $v\in \mathrm{Ker}(P^*;H^{k,\nu})$.

Пусть теперь $v\in\mathrm{Ker}(P^*;H^{k,\nu})$. Докажем, что $\omega = \Lambda^{-2(k-s)}v\in L$.

В силу предположения $v\in\mathrm{Ker}(P^*;H^{k,\nu})$ и равенства $(Pu,v)_0 = (u,P^*v)_0$ получим, что

$$(Pu,v)_0 = 0,\ \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда, применяя равенство Планшареля, получим

$$(Pu, w)_{k-s,\nu} = (Pu, \Lambda^{2(k-s)} w)_0 = (Pu, v)_0 = 0, \ \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, $\omega \in L$.

Получили взаимно однозначное соответствие между L и $\mathrm{Ker}(P^*; H^{k,\nu})$. Тем самым лемма 1.3.1 доказана. $\square$

Из последней леммы нетрудно убедиться, что выполняется:

Следствие 1.3.1. *Пусть $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптическая дифференциальная форма в $\mathbb{R}^n$ вида (0.0.1) с постоянными коэффициентами в главной части и оператор $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ нормально разрешим. Тогда $Pu = f$ разрешимо при $f \in H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $(f, v)_0 = 0$ при всех $v \in \mathrm{Ker}(P^*; H^{k,\nu}) \subset H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.*

Теорема 1.3.1. *Пусть $k \in \mathbb{N}, k \geq s$ и $P(x, \mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (0.0.1) такая, что коэффициенты $a_\alpha(x)$ при $(\alpha : \nu) = s$ постоянные действительные числа, а при $(\alpha : \nu) < s \quad a_\alpha(x) \in C^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ вещественнозначные функции такие, что $D^\beta a_\alpha(x) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$ для всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n, 0 < (\beta : \nu) \leq k, (\alpha : \nu) < s$.*

Тогда оператор $(P; H^{k,\nu})$ является нётеровым тогда и только тогда, когда существуют постоянная $C > 0$ и число $M > 0$ такие, что выполняется оценка:

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C \left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_M)} \right) \ , \forall u \in H^{k,\nu} \left(\mathbb{R}^n\right). \tag{1.3.8}$$

Доказательство. Необходимость следует из следствия 1.1.1. Докажем достаточность.

Из условий теоремы следует, что дифференциальную форму $P^*(x, \mathbb{D})$ можно представить в виде

$$P^*(x, \mathbb{D}) = P(x, \mathbb{D}) + L(x, \mathbb{D}), \text{где}$$

$$L(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu) \leq s} \sum_{0 < \beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta D^\beta (a_\alpha(x)) D^{\alpha - \beta}.$$

Так как $D^\beta a_\alpha(x) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$, то легко проверить, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $R = R(\varepsilon) > 0$ и $C_\varepsilon > 0$ такие, что $\|Lu\|_{k-s,\nu} \leq \varepsilon \|u\|_{k,\nu} + C_\varepsilon \|u\|_{L_2(K_R)}$.

Из оценки (1.3.8) получим

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_M)}) \leq C \left(\|P^* u\|_{k-s,\nu} + \|Lu\|_{k-s,\nu} \ + \|u\|_{L_2(K_M)} \right).$$

Тогда возьмём $\varepsilon < \frac{1}{C}$ и получим априорную оценку для $(P^*; H^{k,\nu})$:

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C'(\|P^* u\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_N)}), \tag{1.3.9}$$

где $N = \max(R, M)$.

Из оценок (1.3.8) и (1.3.9), в силу следствия 1.1.1, соответственно имеем

$$\dim \mathrm{Ker}(P; H^{k,\nu}) < \infty \text{ и } \mathrm{Im}(P; H^{k,\nu}) = \overline{\mathrm{Im}(P; H^{k,\nu})},$$

$$\dim \mathrm{Ker}(P^*; H^{k,\nu}) < \infty \text{ и } \mathrm{Im}(P^*; H^{k,\nu}) = \overline{\mathrm{Im}(P^*; H^{k,\nu})}.$$

Отсюда, на основе леммы 1.3.1, получим

$$\dim \mathrm{coker}(P; H^{k,\nu}) = \dim \mathrm{Ker}(P^*; H^{k,\nu}) < \infty.$$

Следовательно, оператор $(P; H^{k,\nu})$ нётеров. □

Глава 2

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ ИНДЕКСА

Данная глава посвящена исследованию стабильности индекса на шкале анизотропных пространств и относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения. Первый параграф посвящён вопросу об инвариантности индекса операторов, действующих во вложенных гильбертовых пространствах. Во втором параграфе при определённых условиях на коэффициенты дифференциальной формы получена инвариантность индекса на шкале анизотропных пространств. В третьем параграфе изучается вопрос о стабильности индекса относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения.

2.1 Инвариантность индекса для операторов, действующих во вложенных гильбертовых пространствах

Пусть X линейное пространство, а $X_1, X_2 \subset X$ линейные подпространства.

Для любого $x \in X$ через $[x]$ обозначим $[x] = \left\{x' \in X : x' - x \in X_1\right\}$ и будем называть классом эквивалентности элемента x по X_1. Совокупность классов эквивалентности обозначим $X/X_1 = \{[x] : x \in X\}$. На множестве X/X_1 можно ввести линейную структуру и тем самым получить линейное пространство, которое называется факторпространством X по X_1 (см. [62], гл. III, пар. 4). Обозначим $\operatorname{codim} X_1 = \dim X/X_1$. Через $X_1 \oplus X_2$ обозначим сумму линейных подпространств таких, что $X_1 \cap X_2 = \{0\}$.

Лемма 2.1.1. (см. теорема 2.1 [64]) *Пусть $A : X \to Y$ ограниченный линейный оператор.*

Из конечномерности коядра оператора A $(\dim \operatorname{coker}(A) = \dim Y/\operatorname{Im}(A) < \infty)$ *следует, что* $\operatorname{Im}(A) = \overline{\operatorname{Im}(A)}$.

Лемму 2.1.1 можно также получить как следствие из критерия Като (см. [61] 7.4.10).

Замечание 2.1.1. *Из леммы 2.1.1 следует, что первое условие в определении 0.0.3 нётеровости оператора может быть опущено, так как следует из условия 3.*

Определение 2.1.1. *Для ограниченного линейного оператора* A*, определённого на всем банаховом пространстве* X *и действующего в банахово пространство* Y*, ограниченные операторы* $R_1 : Y \to X$ *и* $R_2 : Y \to X$ *называются соответственно левым и правым регуляризаторами, если* $R_1A = I_X + T_1, AR_2 = I_Y + T_2$*, где* I_X, I_Y*- единичные операторы,* $T_1 : X \to X$ *и* $T_2 : Y \to Y$ *компактные операторы.*

Определение 2.1.2. *Для линейного ограниченного оператора* A*, определённого на всем банаховом пространстве* X *и действующего в банахово пространство* Y*, ограниченный оператор* $R : Y \to X$ *называется регуляризатором для* A*, если он одновременно является и левым, и правым регуляризатором.*

Замечание 2.1.2. *Если ограниченный линейный оператор обладает левым и правым регуляризаторами, то для него существует также и регуляризатор.*

Действительно, пусть $R_1 : Y \to X$ и $R_2 : Y \to X$, соответственно, левый и правый регуляризаторы для оператора $A : X \to Y$, и $T_1 : X \to X$ и $T_2 : Y \to Y$ соответствующие компактные операторы. Применяя оператор R_2 справа в первом соотношении, а оператор R_1 слева во втором соотношении, получим:

$$R_1AR_2 = R_2 + T_1R_2,\; R_1AR_2 = R_1 + R_1T_2.$$

Из последнего следует, что разность $R_1 - R_2 = T_1R_2 - R_1T_2$ из себя представляет компактный оператор, действующий из Y в X. То есть получили, что и R_1, и R_2 являются регуляризаторами.

Следующая теорема устанавливает связь между нётеровостью и существованием регуляризатора:

Теорема 2.1.1. (см. [61] 8.5.14) *Ограниченный линейный оператор* A*, действующий из всего банахова пространства* X *в банахово пространство* Y*, является нётеровым тогда и только тогда, когда обладает регуляризатором.*

Определение 2.1.3. *Пусть $X^{'} \subset X, Y^{'} \subset Y$ банаховы пространства, такие, что $X^{'}$ плотно в X, а $Y^{'}$ в Y, причём соответствующие операторы вложения ограничены. Для ограниченного линейного оператора A, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y, ограниченные операторы $R_1 : Y \to X$ и $R_2 : Y \to X$ называются соответственно левым и правым квазирегуляризаторами, если $R_1 A = I_X + T_1, AR_2 = I_Y + T_2$, где I_X, I_Y единичные операторы, $T_1 : X \to X^{'}$ и $T_2 : Y \to Y^{'}$ ограниченные операторы.*

Пусть $H_i, H_i^{'}, i = 1, 2$ гильбертовы пространства. Далее будем считать, что выполняется следующее условие:

Условие 2.1.1. *Для гильбертовых пространств $H_i, H_i^{'} (i = 1, 2)$ выполняется:*
H_2 всюду плотно в H_1, а $H_2^{'}$ в $H_1^{'}$ и операторы вложения $H_2 \subset H_1, H_2^{'} \subset H_1^{'}$ ограниченны.

Пусть $A : H_i \to H_i^{'}$ линейный ограниченный оператор с $Dom(A)|_{H_i} = H_i$ и $A^* : \left(H_i^{'}\right)^* \to (H_i)^*$ – сопряжённый оператор, $(i = 1, 2)$.

Обозначим

$$\operatorname{Ker}_i(A) = \{u : u \in H_i, Au = 0\}, \operatorname{Ker}_i(A^*) = \left\{u : u \in \left(H_i^{'}\right)^*, A^* u = 0\right\},$$
$$\operatorname{Im}_i(A) = \left\{f : f \in H_i^{'}, \exists u \in H_i, Au = f\right\},$$
$$\alpha_i = \dim \operatorname{Ker}_i(A), \beta_i = \dim \operatorname{Ker}_i(A^*) \ \ (i = 1, 2),$$

то есть через $\operatorname{Ker}_1(A)$ обозначили ядро оператора $A : H_1 \to H_1^{'}$, а через $\operatorname{Ker}_2(A)$ ядро сужения $A : H_2 \to H_2^{'}$, через $\operatorname{Im}_1(A)$ образ оператора A в пространстве $H_1^{'}$, а $\operatorname{Im}_2(A)$ образ сужения оператора A в пространстве $H_2^{'}$, и аналогично для сопряжённого оператора A^*.

Пусть $A : H_i \to H_i^{'}, i = 1, 2$ нётеровый оператор, тогда учитывая замечание 0.0.1, обозначим:

$$\operatorname{ind}_i(A) = \alpha_i - \beta_i, \ i = 1, 2.$$

В силу условия 2.1.1 имеет место $\operatorname{Ker}_2(A) \subset \operatorname{Ker}_1(A), \operatorname{Ker}_1(A^*) \subset \operatorname{Ker}_2(A^*)$, следовательно, выполняются следующие неравенства:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2, \ \beta_2 \geq \beta_1. \tag{2.1.1}$$

Очевидно, из (2.1.1) следует, что $\operatorname{ind}_1(A) \geq \operatorname{ind}_2(A)$ и

$$\operatorname{ind}_1(A) = \operatorname{ind}_2(A) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \text{ и } \beta_1 = \beta_2. \tag{2.1.2}$$

Определение 2.1.1. *Пусть* $H_i, H_i^{'}, i = 1,2$ *удовлетворяют условию* 2.1.1. *Скажем, что оператор* $A : H_i \to H_i^{'}, i = 1,2$ *обладает свойством сужения решений, если для произвольных* $u \in H_1$ *и* $f \in H_2^{'}$*, для которых выполняется* $Au = f$*, следует, что* $u \in H_2$*.*

Замечание 2.1.3. *Легко видеть, что свойство сужения решений оператора* $A : H_i \to H_i^{'}, i = 1,2$ *эквивалентно равенству* $\mathrm{Im}_1(A) \cap H_2^{'} = \mathrm{Im}_2(A)$.

Лемма 2.1.2. *Пусть* $H_i, H_i^{'}, i = 1,2$ *удовлетворяют условиям* 2.1.1 *и* $A : H_1 \to H_1^{'}$ d*–нормальный. Тогда оператор* $A : H_2 \to H_2^{'}$ *является* d*–нормальным с* $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_2(A) = \mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_1(A)$ *в том и только том случае, если он обладает свойством сужения решений.*

Доказательство. Пусть $A : H_i \to H_i^{'}$ при $i = 1,2$ d – нормальный и $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_2(A) = \mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_1(A)$. Докажем, что имеет место равенство $\mathrm{Im}_1(A) \cap H_2^{'} = \mathrm{Im}_2(A)$.

Из d–нормальности оператора A и плотности $H_2^{'}$ в $H_1^{'}$ имеем, что существуют такие конечномерные подпространства $Q, Q^{'} \subset H_2^{'}$, что

$$Q \oplus \mathrm{Im}_1(A) = H_1^{'} \text{ и } Q^{'} \oplus \mathrm{Im}_2(A) = H_2^{'}.\text{(см. [4] лемма 2.1 и [62] стр. 135)} \qquad (2.1.3)$$

Из условия $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_2(A) = \mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_1(A)$ имеем, что $\dim Q = \dim Q^{'} < \infty$.

Подпространство $\mathrm{Im}_1(A) \cap H_2^{'}$ содержит в себе $\mathrm{Im}_2(A)$. Тогда существует $Q^{''} \subset Q^{'}, \dim Q^{''} \leq \dim Q^{'}$ такое, что $Q^{''} \oplus (\mathrm{Im}_1(A) \cap H_2^{'}) = H_2^{'}$. Но из (2.1.3) получим, что $Q \cap (\mathrm{Im}_1(A) \cap H_2^{'}) = H_1^{'} \cap H_2^{'} = H_2^{'}$, следовательно, $\dim Q^{''} = \dim Q = \dim Q^{'}$. Получили равенство $Q^{''} = Q^{'}$, что означает $\mathrm{Im}_1(A) \cap H_2^{'} = \mathrm{Im}_2(A)$.

Пусть теперь $\mathrm{Im}_1(A) \cap H_2^{'} = \mathrm{Im}_2(A)$. Докажем, что оператор $A : H_2 \to H_2^{'}$ d–нормальный с $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_2(A) = \mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_1(A)$.

Из того, что $A : H_1 \to H_1^{'}$ d–нормальный имеем, что существует такое конечномерное подпространство $Q \subset H_2^{'}$, что $Q \oplus \mathrm{Im}_1(A) = H_1^{'}$ (см. [4] лемма 2.1). Тогда учитывая равенство $\mathrm{Im}_1(A) \cap H_2^{'} = \mathrm{Im}_2(A)$ получим, что $Q \oplus (\mathrm{Im}_1(A) \cap H_2^{'}) = Q \oplus \mathrm{Im}_2(A) = H_1^{'} \cap H_2^{'} = H_2^{'}$, то есть оператор обладает конечномерным коядром, таким, что $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_2(A) = \mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_1(A)$. Из леммы 2.1.1 получим, что $\mathrm{Im}_2(A) = \overline{\mathrm{Im}_2(A)}$. Учитывая также замечание 2.1.1 можем заключить, что $A : H_2 \to H_2^{'}$ d–нормальный с $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_2(A) = \mathrm{codim}\,\mathrm{Im}_1(A)$.

Лемма 2.1.2 доказана. □

Теорема 2.1.2. *Пусть* $H_i, H_i^{'}, i = 1,2$ *удовлетворяют условию* 2.1.1 *и* $A : H_i \to H_i^{'}$ *нётеровый оператор,* $i = 1,2$*. Для того, чтобы* $\mathrm{ind}_1(A) = \mathrm{ind}_2(A)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный ограниченный оператор* $R : H_i^{'} \to H_i$ *такой, что* $(RA - I)$ *конечномерный оператор в* H_1*.*

Доказательство. Достаточность. Пусть существует оператор $R : H_i' \to H_i$ такой, что $(RA - I)$ конечномерный оператор в $H_i, i = 1, 2$. Докажем $\operatorname{ind}_1(A) = \operatorname{ind}_2(A)$.

Для ограниченных линейных операторов $R : H_i' \to H_i$ и $A : H_i \to H_i'$ имеем, что $RA = I + T$, где $T : H_i \to H_i$ конечномерный оператор в $H_i, i = 1, 2$.

В силу того, что H_2 плотно в H_1, а $T : H_1 \to H_1$ конечномерный оператор и для него образ единичного шара в пространстве H_1 вполне ограничен (см. [62], стр. 116), нетрудно проверить, что конечномерный в H_1 и в H_2 оператор T можно представить в виде: $T = T_1 + T_2$, где $T_1 : H_i \to H_2$ конечномерный оператор, а $T_2 : H_i \to H_i$ конечномерный оператор такой, что его норма меньше единицы и в H_1, и в H_2 при $i = 1, 2$.

Тогда существует обратный для оператора $I + T_2$ в H_1, и в H_2 (см. [60] гл. II, п. 5). Следовательно, получим представление:

$$\widetilde{R}A = I + \widetilde{T}, \tag{2.1.4}$$

где $\widetilde{R} = (I + T_2)^{-1} R : H_i' \to H_i$, а $\widetilde{T} = (I + T_2)^{-1} T_1 : H_i \to H_2, i = 1, 2$.

Тогда для произвольного $u \in \operatorname{Ker}_1(A)$, в силу (2.1.4) имеем, что $u = -\widetilde{T}u \in H_2$, следовательно, $u \in H_2$, отсюда $u \in \operatorname{Ker}_2(A)$, т.е. получили, что $\operatorname{Ker}_1(A) \subset \operatorname{Ker}_2(A)$. Так как обратное включение $\operatorname{Ker}_2(A) \subset \operatorname{Ker}_1(A)$ очевидно, то получим, что $\operatorname{Ker}_1(A) = \operatorname{Ker}_2(A)$ и $\alpha_1 = \alpha_2$.

Из равенства (2.1.4) легко получить, свойство сужения решений для оператора A, то есть $\operatorname{Im}_1(A) \cap H_2' = \operatorname{Im}_2(A)$. По лемме 2.1.2 получим, что $\operatorname{codim} \operatorname{Im}_2(A) = \operatorname{codim} \operatorname{Im}_1(A)$.

Тем самым доказано, что $\operatorname{ind}_1(A) = \operatorname{ind}_2(A)$.

Необходимость. Пусть $\operatorname{ind}_1(A) = \operatorname{ind}_2(A)$, тогда из (2.1.2) и замечания 2.1.1 следует, что $\operatorname{Ker}_1(A) = \operatorname{Ker}_2(A)$ и $\operatorname{Ker}_1(A^*) = \operatorname{Ker}_2(A^*)$. Обозначим $N \equiv \operatorname{Ker}_1(A) = \operatorname{Ker}_2(A)$. Из того, что $\dim N < \infty$ следует, что существуют такие M_1 и M_2 замкнутые подпространства соответственно пространств H_1 и H_2, что $M_i \oplus N = H_i$, $M_2 = M_1 \cap H_2, i = 1, 2$. Пусть H_i/N факторпространство по замкнутому в H_i подпространству $N, i = 1, 2$. Так как M_i изоморфно H_i/N и $M_2 = M_1 \cap H_2$ существует такой линейный ограниченный оператор $\widetilde{P} : H_i/N \to H_i$, что $\widetilde{P} : H_i/N = M_i$ для $i = 1, 2$ (см. [61] 7.4.10).

Так как $A : H_i \to H_i'$ нётеровый оператор при $i = 1, 2$ и $\operatorname{codim} \operatorname{Im}_2(A) = \operatorname{codim} \operatorname{Im}_1(A)$, то применяя лемму 2.1.2 будем иметь равенство: $\operatorname{Im}_1(A) \cap H_2' = \operatorname{Im}_2(A)$. Учитывая последнее равенство и d – нормальность оператора A, получим, что существует проектор $S : H_i' \to H_i'$ на $\operatorname{Im}_i(A), i = 1, 2$.

Обозначим через $\widetilde{A}$ линейный ограниченный оператор взаимно однозначно отображающий H_i/N на $\mathrm{Im}_i(A)$ по правилу: для произвольного $[x] \in H_i/N$ его образом является $\widetilde{A}\,[x] = Ax, i = 1,2$. Так как $\mathrm{Im}_i(A) = \overline{\mathrm{Im}_i(A)}$ и $\mathrm{Im}_1(A) \cap H_2^{'} = \mathrm{Im}_2(A)$, применяя теорему Банаха об обратном операторе (см. [60], гл. II, пар. 5) получим, что существует $\widetilde{A}^{-1} : \mathrm{Im}_i(A) \to H_i/N, i = 1,2$.

Теперь в качестве оператора R, фигурирующего в теореме, возьмём оператор

$$R := \widetilde{P}\widetilde{A}^{-1}S : H_i^{'} \to H_i, i = 1,2.$$

Тогда легко заметить, что $RA - I$ будет конечномерным оператором, тем самым, оператор R удовлетворяет условиям теоремы.

Теорема 2.1.2 доказана. □

Из доказательства теоремы 2.1.2 легко заметить, что следует:

Следствие 2.1.1. *Пусть* $H_i, H_i^{'}, i = 1,2$ *удовлетворяют условию 2.1.1 и* $A : H_i \to H_i^{'}$ *нётеровый оператор* $(i = 1,2)$. *Для того, чтобы* $\mathrm{ind}_1(A) = \mathrm{ind}_2(A)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный ограниченный оператор* $\widetilde{R} : H_i^{'} \to H_i\,(i = 1,2)$ *такой, что* $(\widetilde{R}A - I)$ *оператор из* H_1 *в* H_2.

Аналогичное условие из теоремы 2.1.2 можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2.1.2′. *Пусть* $H_i, H_i^{'}, i = 1,2$ *удовлетворяют условию 2.1.1 и* $A : H_i \to H_i^{'}$ *нётеровый оператор,* $i = 1,2$. *Для того, чтобы* $\mathrm{ind}_1(A) = \mathrm{ind}_2(A)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный ограниченный оператор* $R : H_i^{'} \to H_i$ *такой, что* $(AR - I)$ *конечномерный оператор в* $H_i^{'}, i = 1,2$.

Доказательство. Докажем, что условия теоремы 2.1.2 и условия теоремы 2.1.2′ эквивалентны. Обозначим $I_1 : H_i \to H_i$ единичный оператор в $H_i, i = 1,2$, а $I_2 : H_i^{'} \to H_i^{'}$ единичный оператор в $H_i^{'}, i = 1,2$. Покажем, что для линейного ограниченного оператора $R : H_i^{'} \to H_i$ $(RA - I_1)$ конечномерный оператор в $H_i, i = 1,2$ тогда и только тогда, когда $(AR - I_2)$ конечномерный оператор в $H_i^{'}, i = 1,2$. Докажем сперва, что из конечномерности $(RA - I_1)$ в $H_i, i = 1,2$ следует конечномерность $(AR - I_2)$ в $H_i^{'}, i = 1,2$. Так как $A : H_i \to H_i^{'}$ нётеровый, то левый регуляризатор $R : H_i^{'} \to H_i$ будет также и правым регуляризатором (см. замечание 2.1.2). Тогда имеем, что $RA = I_1 + T$, где $T : H_i \to H_i$ конечномерный, а $AR = I_2 + T^{'}$, где $T^{'} : H_i^{'} \to H_i^{'}$ компактный оператор, $i = 1,2$. Следовательно, применяя оператор R в первом соотношении справа, во втором слева, получим $RAR = R + RT^{'}, RAR = R + TR$.

Из последнего получим, что $RT^{'} = TR$ как операторы из $H_i^{'}$ в H_i.

Заметим, что $\mathrm{Im}_i\left(RT^{'}\right) = \mathrm{Im}_i(TR)$ конечномерное подпространство в H_i, следовательно, $\mathrm{Im}_i\left(RT^{'}\right)$ является замкнутым. В силу нётеровости $R : H_i^{'} \to H_i$ имеем, что $\mathrm{Im}_i(R) = \overline{\mathrm{Im}_i(R)}$. Если $T^{'} : H_i^{'} \to H_i^{'}$ являлся бы компактным неконечномерным оператором, тогда $\mathrm{Im}_i\left(T^{'}\right)$ было бы открытым множеством (см. [57] стр. 12). Тогда применив теорему об открытом отображении (см. [60] , гл. II, пар. 5) для оператора R, получили бы, что $\mathrm{Im}_i\left(RT^{'}\right)$ также открытое множество, то есть получили противоречие. Следовательно, $T^{'} : H_i^{'} \to H_i^{'}$ конечномерный оператор.

Теперь допустим, что $R : H_i^{'} \to H_i$ такой, что что $(AR - I_2)$ конечномерный оператор в $H_i^{'}, i = 1, 2$. Тогда аналогичными рассуждения получим, что $T^{''}R = RT$, где $T : H_i^{'} \to H_i^{'}$ конечномерный, а $T^{''} : H_i \to H_i$ компактный. Так как $\mathrm{Im}_i(T^{''}R)$ конечномерно и R обладает конечномерным коядром, то оператор $T^{''} : H_i \to H_i$ является конечномерным, $i = 1, 2$.

Теорема 2.1.2$'$ доказана. $\square$

Приведём пример нётерового оператора с нарушением инвариантности индекса.

Пример 2.1.1. Рассмотрим пространство

$$l_2^{\overline{a}} := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

где $\overline{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительная неограниченная монотонная последовательность, такая что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0. \tag{2.1.5}$$

Ясно, что $l_2^{\overline{a}} \subset l_2$ и $l_2^{\overline{a}}$ плотно в l_2. Построим оператор $A : l_2 \to l_2$ и $A : l_2^{\overline{a}} \to l_2^{\overline{a}}$ такой, что $\mathrm{ind}_{l_2^{\overline{a}}}(A) = k$ и $\mathrm{ind}_{l_2}(A) = -r$, где $k, r \in \mathbb{N}$ произвольные числа.

Пусть $\{e_i\}$ ортонормированный базис в l_2. Обозначим $e_i^{'} = a_i^{-1} e_i, i = 1, 2, \ldots$. Тогда $\left\{e_i^{'}\right\}$ будет ортонормированным базисом в $l_2^{\overline{a}}$.

Рассмотрим оператор A, действующий из l_2 в l_2 по следующему правилу:

$$Ae_i = e_{i-k} + \frac{a_i}{a_{i+r}} e_{i+r}, i = 1, 2, \ldots \tag{2.1.6}$$

где $k, r \in \mathbb{N}$ и $e_{i-k} = 0$ при $i - k \leq 0$. Умножив обе части на a_i^{-1}, получим, что оператор A, действует из $l_2^{\overline{a}}$ в $l_2^{\overline{a}}$ по правилу:

$$Ae_i^{'} = \frac{a_{i-k}}{a_i} e_{i-k}^{'} + e_{i+r}^{'}, i = 1, 2, \ldots \tag{2.1.7}$$

Оператор $A : l_2 \to l_2$ представляется в следующем виде:

$$A = C + S^k,$$

где $S^k, C : l_2 \to l_2$, $S^k e_i = \begin{cases} e_{i-k}, i > k \\ 0, i \le k \end{cases}, Ce_i = \frac{a_i}{a_{i+r}} e_{i+r}, i = 1, 2, \dots.$

Оператор S^k, как оператор сдвига влево на k, имеет индекс равный k $\left(\operatorname{ind}_{l_2} S^k = k\right)$. Так как в силу (2.1.5) оператор C является компактным, то имеем, что $\operatorname{ind}_{l_2}(A) = \operatorname{ind}_{l_2}\left(S^k + C\right) = \operatorname{ind}_{l_2} S^k = k$ (см. [61] теорема 8.5.20).

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что $\operatorname{ind}_{l_2^{\overline{a}}}(A) = -r$.

То есть получили, что инвариантность индекса нарушается для рассматриваемого оператора.

Теперь приведём пример оператора с нарушением нётеровости в плотном подпространстве.

Пример 2.1.1.. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим оператор A, действующий из l_2 в l_2 следующим образом:

$$Ae_i = \begin{cases} e_{i-k}, i > k \\ 0, i \le k \end{cases}, i = 1, 2, \dots,$$

а из пространства $l_2^{\overline{a}}$ в $l_2^{\overline{a}}$ будет действовать по следующему правилу:

$$Ae_i' = \begin{cases} \frac{a_{i-k}}{a_i} e_{i-k}', i > k \\ 0, i \le k \end{cases}, i = 1, 2, \dots.$$

Оператор A, рассматриваемый из l_2 в l_2, является нётеровым и имеет индекс равный k, а оператор A, рассматриваемый из $l_2^{\overline{a}}$ в $l_2^{\overline{a}}$, является компактным оператором. Так как компактный оператор, который не является конечномерным, не может иметь замкнутый образ (см. [57] стр. 12), то для оператора A нарушается нётеровость в пространстве $l_2^{\overline{a}}$.

Пусть $H_i, H_i', i = 1, 2$ гильбертовые пространства удовлетворяющие условию 2.1.1. Такие пары пространств $\{H_2, H_1\}, \{H_2', H_1'\}$ будем называть интерполяционными парами (см. [63] глава I, пар. 1.2).

Обозначим через $\mathcal{L}(H_1, H_1')$ множество линейных непрерывных отображений из H_1 в H_1', а через $\mathcal{L}(\{H_2, H_1\}, \{H_2', H_1'\})$ непрерывные линейные отображения из H_1 в H_1', сужение которых на H_2 являются непрерывными линейными отображениями из H_2 в H_2'.

Определение 2.1.2. *Отображение $\mathcal{F}$ из множества интерполяционных пар в множество гильбертовых пространств назовём интерполяционным функтором, если выполняются:*

1. $H_2 \subset \mathcal{F}(\{H_2, H_1\}) \subset H_1$ *для произвольных гильбертовых пространств* $H_2 \subset H_1$.
2. *для произвольного* $T \in \mathcal{L}(\{H_2, H_1\}, \{H_2^{'}, H_1^{'}\})$ *сужение на* $\mathcal{F}(\{H_2, H_1\})$ *является непрерывным линейным оператором из* $\mathcal{F}(\{H_2, H_1\})$ *в* $\mathcal{F}(\{H_2^{'}, H_1^{'}\})$ *(т.е.* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(\{H_2, H_1\}), \mathcal{F}(\{H_2^{'}, H_1^{'}\}))$*).*

Обозначим $H_3 = \mathcal{F}(\{H_2, H_1\}), H_3^{'} = \mathcal{F}(\{H_2^{'}, H_1^{'}\})$, где $\mathcal{F}$ - интерполяционный функтор. Пространство H_3 называется интерполяционным для $\{H_2, H_1\}$, а $H_3^{'}$, соответственно, для $\{H_2^{'}, H_1^{'}\}$ (см. [63] глава I, пар. 1.2).

Ниже мы будем использовать следующие предложения (см. [63] глава 1.17 теоремы 1,2):

Предложение 2.1.1. *Пусть* $H_i, i = 1, 2$ *удовлетворяют условию 2.1.1 и* B *дополняемое подпространство* H_1, *причём соответствующий проектор принадлежит* $\mathcal{L}(\{H_2, H_1\}, \{H_2, H_1\})$, *а* $\mathcal{F}$ *произвольный интерполяционный функтор.*

Тогда $\{H_2 \cap B, H_1 \cap B\}$ *является интерполяционной парой и для неё верно следующее соотношение:*

$$\mathcal{F}(\{H_2 \cap B, H_1 \cap B\}) = \mathcal{F}(\{H_2, H_1\}) \cap B.$$

Предложение 2.1.2. *Пусть* $H_i, i = 1, 2$ *удовлетворяют условию 2.1.1 и* C *дополняемое подпространство пространства* H_2, *причём соответствующий проектор принадлежит* $\mathcal{L}(\{H_2, H_1\}, \{H_2, H_1\})$, *а* $\mathcal{F}$ *произвольный интерполяционный функтор.*

Тогда $\{H_2/C, H_1/C\}$ *является интерполяционной парой и для неё верно следующее соотношение:*

$$\mathcal{F}(\{H_2/C, H_1/C\}) = \mathcal{F}(\{H_2, H_1\})/C.$$

Имеет место следующий результат об интерполяции нётеровых операторов:

Предложение 2.1.3. *Пусть* $H_i, H_i^{'}, i = 1, 2$ *удовлетворяют условию 2.1.1, а* $H_3 = \mathcal{F}(\{H_2, H_1\}), H_3^{'} = \mathcal{F}(\{H_2^{'}, H_1^{'}\})$, *где* $\mathcal{F}$ *- интерполяционный функтор. Пусть* $A : H_i \to H_i^{'}$ *нётеровый оператор для* $i = 1, 2$ *с* $\operatorname{ind}_1(A) = \operatorname{ind}_2(A)$. *Тогда оператор* $A : H_3 \to H_3^{'}$ *также будет нётеровым, при этом*

$$\operatorname{ind}_3(A) = \operatorname{ind}_1(A) = \operatorname{ind}_2(A).$$

Доказательство. Так как $\mathrm{Ker}_2(A) \subset \mathrm{Ker}_3(A) \subset \mathrm{Ker}_1(A)$ и $\mathrm{ind}_1(A) = \mathrm{ind}_2(A)$, из 2.1.2 получим, что $\mathrm{Ker}_2(A) = \mathrm{Ker}_1(A)$, следовательно, $\mathrm{Ker}_2(A) = \mathrm{Ker}_3(A) = \mathrm{Ker}_1(A)$. Обозначим $N \equiv \mathrm{Ker}_2(A) = \mathrm{Ker}_3(A) = \mathrm{Ker}_1(A)$. Аналогичным образом и с учётом замечания 0.0.1 получим, что $\mathrm{Ker}_2(A^*) = \mathrm{Ker}_3(A^*) = \mathrm{Ker}_1(A^*)$.

Для доказательства нётеровости $A : H_3 \to H_3'$ осталось показать, что $\mathrm{Im}_3(A) = \overline{\mathrm{Im}_3(A)}$ (см. замечание 2.1.4). По лемме 2.1.2 для этого достаточно доказать равенство $\mathrm{Im}_3(A) = \mathrm{Im}_1(A) \cap H_3'$.

Имеют место следующие изоморфизмы:

$$A : H_i/N \leftrightarrow \mathrm{Im}_i(A), i = 1, 2.$$

Используя свойства интерполяционного функтора, имеем:

$$A : \mathcal{F}\left(\{H_1/N, H_2/N\}\right) \leftrightarrow \mathcal{F}(\mathrm{Im}_1(A), \mathrm{Im}_2(A)). \tag{2.1.8}$$

Так как N конечномерное подпространство H_2, следовательно, дополняемо и в H_1, и в H_2. Тогда применяя предложение 2.1.2, получим:

$$\mathcal{F}\left(\{H_1/N, H_2/N\}\right) = \mathcal{F}\left(\{H_1, H_2\}\right)/N = H_3/N. \tag{2.1.9}$$

Учитывая конечномерность коядра и равенство $\mathrm{Im}_2(A) = \mathrm{Im}_1(A) \cap H_2'$ по лемме 2.1.2, получим, что можно применить предложение 2.1.1. Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\{\mathrm{Im}_1(A), \mathrm{Im}_2(A)\}\right) = \mathcal{F}\left(\{H_1' \cap \mathrm{Im}_1(A), H_2' \cap \mathrm{Im}_1(A)\}\right) = \\ = \mathcal{F}\left(\{H_1', H_2'\}\right) \cap \mathrm{Im}_1(A) = \mathrm{Im}_1(A) \cap H_3'. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Из (2.1.8)–(2.1.10) следует, что $A : H_3/N \leftrightarrow \mathrm{Im}_1(A) \cap H_3'$, а из последнего, что $\mathrm{Im}_3(A) = A : H_3/N = \mathrm{Im}_1(A) \cap H_3'$. Это доказывает замкнутость $\mathrm{Im}_3(A)$.

Следовательно, оператор $A : H_3 \to H_3'$ также нётеровый и $\mathrm{ind}_3(A) = \mathrm{ind}_1(A) = \mathrm{ind}_2(A)$.

Предложение 2.1.3 доказано. □

Замечание 2.1.4. *Из конечномерности ядра оператора и ядра сопряжённого оператора вообще говоря не следует нётеровость оператора. Замкнутость образа и конечномерность коядра могут нарушаться. Примером такого оператора является лапласиан:* $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i^2 : H^2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ *для которого* $\mathrm{Ker}\,(\Delta) = \mathrm{Ker}\,(\Delta^*) = \{0\}$, *но образ оператора не замкнут в* $L_2\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Приведём пример, демонстрирующий, что условие $\mathrm{ind}_1(A) = \mathrm{ind}_2(A)$ из предложения 2.1.3, является существенным.

Пример 2.1.3. Обозначим $l_2^{\overline{a},\alpha} := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n a_n^{\alpha}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$, где $0 \le \alpha \le 1$, $\overline{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительная неограниченная монотонная последовательность, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0$.

Ясно, что $l_2^{\overline{a},\alpha_2} \subset l_2^{\overline{a},\alpha_1}$ при $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le 1$, причём $l_2^{\overline{a},\alpha_2}$ всюду плотно в $l_2^{\overline{a},\alpha_1}$ и оператор вложения непрерывен.

Рассмотрим оператор, действующий из $l_2^{\overline{a},\alpha}$ в $l_2^{\overline{a},\alpha}$ для $0 \le \alpha \le 1$ по следующему правилу:

$$Ae_i^{(\alpha)} = \left(\frac{a_{i-k}}{a_i} \right)^{\alpha} e_{i-k}^{(\alpha)} + \left(\frac{a_i}{a_{i+r}} \right)^{1-\alpha} e_{i+r}^{(\alpha)}, i = 1, 2, \dots$$

где $k, r \in \mathbb{N}, e_i^{(\alpha)} = e_i a_i^{-\alpha}$, $\{e_i\}$ ортонормированный базис в l_2, следовательно, $\left\{ e_i^{(\alpha)} \right\}$ ортонормированный базис в $l_2^{\overline{a},\alpha}$, $e_{i-k}^{(\alpha)} = 0$ при $i - k \le 0$.

Оператор $A : l_2^{\overline{a},\alpha} \to l_2^{\overline{a},\alpha}$ является нётеровым при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ с индексами $\mathrm{ind}_{l_2}(A) = k$ и $\mathrm{ind}_{l_2^{\overline{a}}}(A) = -r$, соответственно. При $0 < \alpha < 1$ оператор является компактным оператором в силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_{i-k}}{a_i} \right)^{\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_i}{a_{i+r}} \right)^{\alpha} = 0$, следовательно, не может иметь замкнутый образ, то есть не является нётеровым.

Теперь приведём пример, демонстрирующий, что равенство $\mathrm{ind}_1(A) = \mathrm{ind}_2(A)$ из предложения 2.1.3, не является необходимым.

Пример 2.1.4. Используя те же обозначения, рассмотрим оператор, действующий из $l_2^{\overline{a},\alpha}$ в $l_2^{\overline{a},\alpha}$ для $0 \le \alpha \le 1$ по следующему правилу:

$$Be_i^{(\alpha)} = \frac{1}{2} e_i^{(\alpha)} + \left(\frac{a_{i-k}}{a_i} \right)^{\alpha} e_{i-k}^{(\alpha)} + \left(\frac{a_i}{a_{i+r}} \right)^{1-\alpha} e_{i+r}^{(\alpha)}, i = 1, 2, \dots .$$

Оператор $B : l_2^{\overline{a},\alpha} \to l_2^{\overline{a},\alpha}$ является нётеровым при $0 \le \alpha \le 1$. При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ имеет индексы $\mathrm{ind}_{l_2}(B) = k$ и $\mathrm{ind}_{l_2^{\overline{a}}}(B) = -r$, соответственно. При $0 < \alpha < 1$, оператор имеет индекс равный 0, в силу компоненты $\frac{1}{2} e_i^{(\alpha)}$ и того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_{i-k}}{a_i} \right)^{\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_i}{a_{i+r}} \right)^{\alpha} = 0$.

2.2 Инвариантность индекса на шкале анизотропных соболевских пространств

Пусть $k_0 \in \mathbb{R}_+$ и коэффициенты дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ вида (0.0.1) удовлетворяют условиям:

$$a_\alpha(x) \in C^{\lceil k_0 \rceil + s, \nu}(\mathbb{R}^n), \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, (\alpha : \nu) \le s.$$

Лемма 2.2.1. *Пусть* $P_s(\mathbb{D}) : H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *полуэллиптеческий оператор без младших членов и с постоянными коэффициентами. Тогда для оператора* $P_s(\mathbb{D}) : H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *существует квазирегуляризатор* $R_0 : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пусть $P_s(\xi)$ символ оператора $P_s(\mathbb{D})$. Из полуэллиптичности оператора $P_s(\mathbb{D})$ следует, что существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$|P_s(\xi)| \geq \delta \, |\xi|_\nu^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.1}$$

Рассмотрим оператор

$$R_0 = F^{-1} \frac{|\xi|_\nu^s}{(1 + |\xi|_\nu^s) P_s(\xi)} F. \tag{2.2.2}$$

Из оценки (2.2.1) следует, что R_0 является ограниченным линейным оператором из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|R_0\|_{k,\nu} \leq \frac{M}{\delta}$, где M некоторая положительная постоянная зависящая от s.

Имеем

$$R_0 P_s = I + T, P_s R_0 = I + T,$$

где $T = -F^{-1} \frac{1}{(1+|\xi|_\nu^s)} F$. T является ограниченным линейным оператором из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ для произвольного $k \in \mathbb{R}$.

То есть получили, что R_0 является искомым квазирегуляризатором.

Лемма 2.2.1 доказана. □

В дальнейшем будем использовать следующую лемму, доказанную для изотропного случая в ([59], лемма 1.9.3). В анизотропном случае доказательство проводится аналогичным образом с заменой $|\xi|$ на $|\xi|_\nu$.

Лемма 2.2.2. *Пусть* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}, k_1 < k_2$ *и для линейного оператора* T*, действующего в* $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$*, справедлива оценка*

$$\|Tu\|_{k,\nu} \leq K_1 \|u\|_{k,\nu} + K_2 \|u\|_{k-\sigma,\nu}$$

при $k_1 \leq k \leq k_2$ *и* $\sigma > 0$ *с постоянными* K_1 *и* K_2*, не зависящими от* k*. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *оператор* T *допускает представление*

$$T = T_1 + T_2,$$

где $T_2 : H^{k-\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *ограниченный оператор, а для* T_1 *справедлива оценка*

$$\|T_1 u\|_{k,\nu} \leq (K_1 + \varepsilon) \|u\|_{k,\nu} \ \textit{для}\ k_1 \leq k \leq k_2.$$

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$ (см. (0.0.1)) и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$\Delta(P) := \max_{(\alpha:\nu)=s} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)|\,, \delta := \min_{|\xi|_\nu=1} |P_s(x_0,\xi)|\,.$$

Лемма 2.2.3. *Пусть дифференциальная форма $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптична в точке $x = x_0$. Тогда существует $\eta_0 = \eta_0(k_0,\delta) > 0$, такое что при $\Delta(P) < \eta_0$ для произвольного $k \in [-k_0,k_0]$ $P(x,\mathbb{D}) : H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ обладает квазирегуляризатором $R : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$:*

то есть существует такое $\sigma = \sigma(\nu) > 0$, что $RP(x,\mathbb{D}) = I + T_1, P(x,\mathbb{D})R = I + T_2$, где $T_1 : H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$, $T_2 : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ ограниченные линейные операторы.

Доказательство. Рассмотрим оператор (2.2.2) $R_0 : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ для $k \in [-k_0,k_0]$.

Применяя лемму 2.2.1 и учитывая обозначения (0.0.2), (0.0.4) получим следующее представление для $R_0P(x,\mathbb{D})$:

$$\begin{aligned} &R_0P(x,\mathbb{D}) = R_0P_s(x,\mathbb{D}) + R_0L(x,\mathbb{D}) = \\ &R_0[P_s(x,\mathbb{D}) - P_s(x_0,\mathbb{D})] + R_0P_s(x_0,\mathbb{D}) + R_0L(x,\mathbb{D}) \\ &= I + T + R_0[P_s(x,\mathbb{D}) - P_s(x_0,\mathbb{D})] + R_0L(x,\mathbb{D}), \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

где $T = -F^{-1}\frac{1}{1+|\xi|_\nu^s}F$ ограниченный оператор из $H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k+s+\gamma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ для произвольного $0 < \gamma \le s$.

Рассмотрим оператор $R_0L(x,\mathbb{D})$. Пусть положительное число σ такое, что $\left\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : (\alpha:\nu) < s\right\} = \left\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : (\alpha:\nu) \le s-\sigma\right\}$. Заметим, что в качестве σ можно взять $\left(\prod\limits_{i=1}^n \nu_i\right)^{-1}$.

Докажем, что $R_0L(x,\mathbb{D})$ является ограниченным оператором из $H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k+s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Для этого покажем, что $L(x,\mathbb{D})$ есть ограниченный оператор из $H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что $|\xi^\alpha| \le |\xi|_\nu^{(\alpha:\nu)}$ для произвольных $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, следовательно, для некоторой постоянной $C > 0$ имеет место:

$$\sum_{(\alpha:\nu)<s} |\xi^\alpha| \le C\left(1 + |\xi|_\nu\right)^{s-\sigma}. \tag{2.2.4}$$

Тогда получим оценку

$$\|L(x,\mathbb{D})u\|_{k+\sigma,\nu} \le C' \sum_{(\alpha:\nu)<s} \|D^\alpha u\|_{k+\sigma,\nu} \le C'' \|u\|_{k+s,\nu}\,, \forall u \in H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)\,, -k_0 \le k \le k_0,$$

где постоянные C', C'' не зависят от k. То есть получили, что $R_0L(x,\mathbb{D})$ является ограниченным оператором из $H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k+s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Из свойств нормы оператора и оценки для дифференциальных операторов в пространствах $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ (см. [47]) имеем:

$$\begin{aligned} &\|R_0[P_s(x,\mathbb{D}) - P_s(x_0,\mathbb{D})]u\|_{k+s,\nu} \le \|R_0\|_{k,\nu} \|[P_s(x,\mathbb{D}) - P_s(x_0,\mathbb{D})]u\|_{k,\nu} \le \\ &\le \frac{M}{\delta} K_1 \Delta(P) \|u\|_{k+s,\nu} + K_2 \|u\|_{k+s-\sigma,\nu} \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

для $-k_0 \le k \le k_0$, где $M = M(s)$, $K_1 = K_1\left(\left|\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+ : (\alpha:\nu) = s\}\right|, k_0, \nu, n\right)$ и $K_2 = K_2\left(\left|\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+ : (\alpha:\nu) = s\}\right|, k_0, \nu, n, \max\limits_{\substack{(\alpha:\nu)=s,\\ 0<(\beta:\nu)\le\lceil k_0\rceil}} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left|D^\beta a_\alpha(x)\right|\right)$ – некоторые постоянные.

Из оценки (2.2.5) следует, что к оператору $R_0[P_s(x,\mathbb{D}) - P_s(x_0,\mathbb{D})]$ можно применить лемму 2.2.2. Зафиксируем некоторое $0 < \varepsilon < 1$. Тогда получим представление:

$$R_0[P_s(x,\mathbb{D}) - P_s(x_0,\mathbb{D})] = T_1{}' + T_2{}', \tag{2.2.6}$$

где $T_1' : H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ ограниченный оператор, а $T_2' : H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ ограниченный оператор такой, что

$$\left\|T_2' u\right\|_{k+s,\nu} \le \left(\frac{M}{\delta} K_1 \Delta(P) + \varepsilon\right) \|u\|_{k+s,\nu}, \forall u \in H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n), -k_0 \le k \le k_0.$$

Пусть $\Delta(P) < \frac{(1-\varepsilon)\delta}{MK_1}$, тогда $\|T_2'\|_{H^{k+s,\nu}} < 1$ для $-k_0 \le k \le k_0$.

Из (2.2.6) и (2.2.3) получим

$$R_0 P(x,\mathbb{D}) = I + T_2' + T_1' + T + R_0 L(x,\mathbb{D}), \tag{2.2.7}$$

где $T_1' + T + R_0L(x,\mathbb{D})$ ограниченный оператор из $H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k+s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$, а T_2' оператор с нормой меньше 1 в пространстве $H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ при $-k_0 \le k \le k_0$.

Из последнего свойства оператора T_2', следует, что существует $\left(I + T_2'\right)^{-1}$ в $H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ при $-k_0 \le k \le k_0$ (см. [62] гл. II, п. 5).

Применив оператор $\left(I + T_2'\right)^{-1}$ слева в (2.2.7) получим

$$\left(I + T_2'\right)^{-1} R_0 P(x,\mathbb{D}) = I + \left(I + T_2'\right)^{-1} \left(T_1' + T + R_0 L(x,\mathbb{D})\right).$$

Обозначим $R = \left(I + T_2'\right)^{-1} R_0$, $T_1 = \left(I + T_2'\right)^{-1} \left(T_1' + T + R_0L(x,\mathbb{D})\right)$.

Оператор $R : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ ограниченный оператор, а $T_1 : H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ ограниченный оператор при $-k_0 \le k \le k_0$ и

$$RP(x,\mathbb{D}) = I + T_1.$$

То есть R является искомым квазирегуляризатором. Аналогичным образом можно построить и правый квазирегуляризатор.

Лемма 2.2.3 доказана. $\square$

Пусть k некоторое действительное число. Далее оператор $P(x, \mathbb{D})$, действующий из $H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, будем обозначать также $\left(P; H^{k,\nu}\right)$.

Теорема 2.2.1. *Пусть дифференциальная форма $P(x, \mathbb{D})$ полуэллиптична в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует $\eta_0 = \eta_0(k_0, \delta) > 0$ такое, что при $\Delta(P) < \eta_0$ для произвольных k_1 и $k_2 \in [-k_0, k_0]$ имеет место соотношение:*

если $P(x, \mathbb{D}) : H^{k_1+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k_1,\nu}(\mathbb{R}^n)$ нётеровый, то $P(x, \mathbb{D}) : H^{k_2+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k_2,\nu}(\mathbb{R}^n)$ также нётеровый, при этом

$$\dim \operatorname{Ker}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \dim \operatorname{Ker}\left(P; H^{k_2,\nu}\right),$$
$$\dim \operatorname{coker}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \dim \operatorname{coker}\left(P; H^{k_2,\nu}\right),$$
$$\operatorname{ind}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H^{k_2,\nu}\right).$$

Доказательство. Пусть $k_2 = k_1 + \tau$, где $\tau > 0$. Так как выполняются условия леммы 2.2.3, то существует $\eta_0 = \eta_0(k_0, \delta) > 0$ такое, что если $\Delta(P) < \eta_0$, то $P(x, \mathbb{D})$ обладает квазирегуляризатором $R : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ таким, что

$$RP(x, \mathbb{D}) = I + T_1, \tag{2.2.8}$$

где $T_1 : H^{k+s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k+s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ ограниченный оператор для некоторого $\sigma > 0$ при $k_1 < k_2 \le k_0$.

Если $u \in \operatorname{Ker}\left(P; H^{k_1,\nu}\right)$, то подставив u в (2.2.8) получим, что $u \in H^{k_1+s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$, следовательно,

$$\operatorname{Ker}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \operatorname{Ker}\left(P; H^{k_1+\sigma,\nu}\right).$$

Пусть $P(x, \mathbb{D})u = f$ при $u \in H^{k_1+s,\nu}(\mathbb{R}^n), f \in H^{k_2,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Подставив u в (2.2.8) будем иметь, что $u = Rf - T_1 u$. Учитывая, что $Rf \in H^{k_2+s,\nu}(\mathbb{R}^n) = H^{k_1+s+\tau,\nu}(\mathbb{R}^n)$ и $T_1 u \in H^{k_1+s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$, получим, что $u \in H^{k_1+s+\min(\tau,\sigma),\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Если $\tau \le \sigma$, то из вышеизложенного с учётом замечания 2.1.2, получим

$$\operatorname{Ker}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \operatorname{Ker}\left(P; H^{k_2,\nu}\right). \tag{2.2.9}$$

$$\operatorname{Im}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) \cap H^{k_2,\nu}(\mathbb{R}^n) = \operatorname{Im}\left(P; H^{k_2,\nu}\right). \tag{2.2.10}$$

Из (2.2.9) следует, что

$$\dim \operatorname{Ker}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \dim \operatorname{Ker}\left(P; H^{k_2,\nu}\right).$$

Из (2.2.10) применяя лемму 2.1.2 получим, что

$$\operatorname{Im}\left(P; H^{k_2,\nu}\right) = \overline{\operatorname{Im}\left(P; H^{k_2,\nu}\right)},\ \operatorname{codim} \operatorname{Im}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \operatorname{codim} \operatorname{Im}\left(P; H^{k_2,\nu}\right).$$

Следовательно, получили, что $P(x, \mathbb{D}) : H^{k_2+s,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right) \to H^{k_2,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right)$ нётеровый оператор и $\operatorname{ind}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H^{k_2,\nu}\right)$.

Если же $\tau > \sigma$, то применив аналогичные рассуждения для оператора $P(x, \mathbb{D}) : H^{k_1+s+\sigma,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right) \to H^{k_1+\sigma,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right)$ получим равенство индексов для $\left(P; H^{k_1,\nu}\right)$ и $\left(P; H^{k_1+2\sigma,\nu}\right)$. После конечного числа m шагов (т.е. когда $m\sigma \geq \tau$), получим равенство индексов для $\left(P; H^{k_1,\nu}\right)$ и $\left(P; H^{k_2,\nu}\right)$.

Пусть теперь $k_1 > k_2$. Рассмотрим дифференциальную форму, формально сопряжённую для $P(x, \mathbb{D})$

$$P^*\left(x, \mathbb{D}\right) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} D^\alpha \left(\overline{a_\alpha(x)}\, \boldsymbol{\cdot}\right).$$

Тогда, в силу теоремы 8.5.4 работы [61], из нётеровости $P(x, \mathbb{D}) : H^{k_1+s,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right) \to H^{k_1,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right)$ следует нётеровость для оператора $P^*(x, \mathbb{D}) : H^{-k_1,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right) \to H^{-k_1-s,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Тогда применяя аналогичные рассуждения для $P^*(x, \mathbb{D}) : H^{-k_1,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right) \to H^{-k_1-s,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right)$ и $P^*(x, \mathbb{D}) : H^{-k_2,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right) \to H^{-k_2-s,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right)$, получим, что оператор $P^*(x, \mathbb{D}) : H^{-k_2,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right) \to H^{-k_2-s,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right)$ нётеров, при этом

$$\operatorname{ind}\left(P^*; H^{-k_1,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P^*; H^{-k_2,\nu}\right).$$

Следовательно, оператор $P^*(x, \mathbb{D}) : H^{k_2+s,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right) \to H^{k_2,\nu}\left(\mathbb{R}^n\right)$ является нётеровым, при этом:

$$\operatorname{ind}\left(P; H^{k_1,\nu}\right) = -\operatorname{ind}\left(P^*; H^{-k_1,\nu}\right) = -\operatorname{ind}\left(P^*; H^{-k_2,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H^{k_2,\nu}\right).$$

Теорема 2.2.1 доказана. □

2.3 Стабильность индекса относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения

Обозначим

$$\overline{Q} := \left\{ g(x) \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) : g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n;\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\left|D^\beta g(x)\right|}{g(x)} < \infty, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n \right\},$$

$$\widetilde{Q} := \left\{ g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n; \quad \frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)} \rightrightarrows 0 \text{ при } |x| \to \infty, \right.$$
$$\left. \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \beta \neq 0 \right\}.$$

Замечание 2.3.1. *В дальнейшем для весовых функций из множеств $\overline{Q}$ и $\widetilde{Q}$ будут использованы производные до некоторого определённого порядка.*

Для $k \in \mathbb{Z}_+, \nu \in \mathbb{N}^n$ и $r \in \overline{Q}$ через $\widetilde{H}_r^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество измеримых функций $\{u\}$, $ru \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|u\|'_{k,\nu,r} = \|ru\|_{k,\nu} < \infty.$$

Пусть $r \in \overline{Q}$ и M_r оператор умножения на $r(x)$:

$$M_r : \widetilde{H}_r^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n), \; M_r u(x) = r(x)u(x), \; \forall u \in \widetilde{H}_r^{k,\nu}(\mathbb{R}^n),$$

$$M_r^{-1} : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to \widetilde{H}_r^{k,\nu}(\mathbb{R}^n), \; M_r^{-1} v(x) = \frac{v(x)}{r(x)}, \; \forall v \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Для $r \in \overline{Q}$ и дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ вида (0.0.1) обозначим

$$P_r(x, \mathbb{D}) := M_r P(x, \mathbb{D}) M_r^{-1}. \tag{2.3.1}$$

Так как $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|D^\beta r(x)|}{r(x)} < \infty$ для всех $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, то $P_r(x, \mathbb{D})$ порождает линейный ограниченный оператор, действующий из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Будем обозначать его также через $\left(P_r; H^{k,\nu}\right)$.

Пусть $k, s \in \mathbb{N}, k \geq s$.

Лемма 2.3.1. *Оператор $\left(P_r; H^{k,\nu}\right)$ нётеров тогда и только тогда, когда оператор $\left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right)$ нётеров, и при этом имеют место следующие равенства:*

$$\dim \operatorname{Ker} \left(P_r; H^{k,\nu}\right) = \dim \operatorname{Ker} \left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right),$$
$$\dim \operatorname{coker} \left(P_r; H^{k,\nu}\right) = \dim \operatorname{coker} \left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right),$$
$$\operatorname{ind} \left(P_r; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind} \left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right).$$

Доказательство. Пусть $u \in \operatorname{Ker}\left(P_r; H^{k,\nu}\right)$. Легко проверить, что $v = M_r^{-1} u \in \widetilde{H}_r^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ и $Pv = 0$. Обратно, для $v \in \operatorname{Ker}\left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right)$ имеем, что $u = M_r v \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ и $P_r u = 0$. Учитывая аналогичное соответствие для ядер сопряжённых операторов, получим биекцию между базисами ядер $\left(P_r; H^{k,\nu}\right)$ и $\left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right)$ и базисами ядер $\left(P_r; H^{k,\nu}\right)^*$ и $\left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right)^*$.

Тогда

$$\dim \operatorname{Ker} \left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right) = \dim \operatorname{Ker} \left(P_r; H^{k,\nu}\right), \tag{2.3.2}$$

$$\dim \operatorname{Ker}\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right)^* = \dim \operatorname{Ker}\left(P_r; H^{k,\nu}\right)^*. \tag{2.3.3}$$

Пусть $\left(P_r; H^{k,\nu}\right)$ нётеровый. Тогда по теореме 3.2 из книги [57] из нормальной разрешимости следует, что $\operatorname{Im}\left(P_r; H^{k,\nu}\right) = {}^{\perp}\left(\operatorname{Ker}\left(P_r; H^{k,\nu}\right)^*\right)$, где ${}^{\perp}\left(\operatorname{Ker}\left(P_r; H^{k,\nu}\right)^*\right)$ множество элементов из $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, которые ортогональны элементам из $\operatorname{Ker}\left(P_r; H^{k,\nu}\right)^*$. Используя последнее равенство, нетрудно показать, что для оператора $\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right)$ выполняется $\operatorname{Im}\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right) = {}^{\perp}\left(\operatorname{Ker}\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right)^*\right)$. Из последнего, в силу теоремы 3.2 из книги [57], получим, что $\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right)$ нормально разрешимый оператор, то есть $\left(\operatorname{Im}\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right) = \overline{\operatorname{Im}\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right)}\right)$.

Аналогичным образом из нормальной разрешимости оператора $\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right)$ можно показать, что следует нормальная разрешимость оператора $\left(P_r; H^{k,\nu}\right)$. Учитывая (2.3.2)–(2.3.3) получим, что из нётеровости $\left(P_r; H^{k,\nu}\right)$ следует нётеровость $\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right)$, и обратно.

Из (2.3.2)–(2.3.3) для индексов этих операторов получим

$$\operatorname{ind}\left(P_r; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right).$$

$\square$

Лемма 2.3.2. *Пусть $r \in \widetilde{Q}$. Тогда оператор $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ нётеров тогда и только тогда, когда оператор $\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right)$ нётеров, и при этом имеют место следующие равенства:*

$$\dim \operatorname{Ker}\left(P; H^{k,\nu}\right) = \dim \operatorname{Ker}\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right),$$

$$\dim \operatorname{coker}\left(P; H^{k,\nu}\right) = \dim \operatorname{coker}\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right),$$

$$\operatorname{ind}\left(P; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; \widetilde{H}^{k,\nu}_r\right).$$

Доказательство. Для дифференциальной формы $P_r(x, \mathbb{D})$ имеет место следующее представление:

$$P_r(x, \mathbb{D}) = M_r P(x, \mathbb{D}) M_r^{-1} = P(x, \mathbb{D}) + T(x, \mathbb{D}),$$

где

$$T(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha(x) \sum_{\beta\le\alpha, \beta\ne 0} C^\beta_\alpha r(x) D^\beta \left(\frac{1}{r(x)}\right) D^{\alpha-\beta}.$$

В силу того, что $r \in \widetilde{Q}$ для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$D^\gamma\left(r(x) D^\beta\left(\frac{1}{r(x)}\right)\right) < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus K_{N(\varepsilon)}, \forall \gamma, \beta \in \mathbb{Z}^n_+, (\gamma:\nu) \le k - s, 0 < (\beta:\nu) \le s.$$

Пусть $\varphi(x) \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ такая, что $0 \le \varphi(x) \le 1$ и $\varphi(x) = 1$ при $|x| \le 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \ge 2$. Тогда $\varphi_\varepsilon(x) := \varphi\left(\frac{x}{N(\varepsilon)}\right) \in C^\infty_0, \operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset K_{2N(\varepsilon)}, \varphi_\varepsilon(x) = 1$ при $x \in K_{N(\varepsilon)}$.

Обозначим $T_\varepsilon^{'} = (1-\varphi_\varepsilon)\,T$, $T_\varepsilon^{''} = \varphi_\varepsilon T$. Тогда с некоторой постоянной $C > 0$ имеем

$$\left\|T_\varepsilon^{'} u\right\|_{k-s,\nu} = \|(1-\varphi_\varepsilon)\,Tu\|_{k-s,\nu} \le C\varepsilon\,\|u\|_{k,\nu}\,, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n),$$

а $T_\varepsilon^{''} = \varphi_\varepsilon T$ компактный оператор из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, в силу теоремы 8.3.2 работы [61], оператор $T(x,\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ компактен.

Тогда в силу компактности $T(x,\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, применяя теорему 8.5.20 из [61], получим взаимосвязь для нётеровости операторов $(P_r; H^{k,\nu})$ и $(P; H^{k,\nu})$, и при этом следующее равенство:

$$\operatorname{ind}\left(P_r; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H^{k,\nu}\right).$$

Отсюда, применяя лемму 2.3.1, получим, что оператор $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ нётеров тогда и только тогда, когда оператор $\left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right)$ нётеров, и имеет место следующее равенство:

$$\operatorname{ind}\left(P; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P_r; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right).$$

Тогда с учетом (2.1.2) для размерностей ядра и коядра выполняется:

$$\dim\operatorname{Ker}\left(P; H^{k,\nu}\right) = \dim\operatorname{Ker}\left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right),$$
$$\dim\operatorname{coker}\left(P; H^{k,\nu}\right) = \dim\operatorname{coker}\left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right).$$

Тем самым лемма 2.3.2 доказана. □

Пример 2.3.1. Пусть $a, \delta \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим оператор $Pu = u'' - au$, действующий из $H^2(\mathbb{R}^1)$ в $L_2(\mathbb{R}^1)$. Оператор $P : H^2(\mathbb{R}^1) \to L_2(\mathbb{R}^1)$ является нётеровым и $\dim\operatorname{Ker}(P) = \dim\operatorname{coker}(P) = \operatorname{ind}(P) = 0$.

Обозначим $r_\delta(x) = e^{-\delta\sqrt{1+x^2}} \in \overline{Q}$.

Рассмотрим

$$P_{r_\delta} u = e^{-\delta\sqrt{1+x^2}} P\left(e^{\delta\sqrt{1+x^2}} u\right) = u'' + 2\delta\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}u' +$$
$$+\left(\delta^2\frac{x^2}{1+x^2} + \delta\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} - a\right)u.$$

С помощью теоремы 4.1 работы [30] нетрудно проверить, что $P_{r_\delta} : H^2(\mathbb{R}^1) \to L_2(\mathbb{R}^1)$ при $\delta = \sqrt{a}$ не является нётеровым, при $\delta > \sqrt{a}$ является нётеровым оператором, и имеет место:

$$\operatorname{Ker}\left(P_{r_\delta}\right) = Span\left\{e^{\sqrt{a}-\delta\sqrt{1+x^2}}; e^{-\sqrt{a}-\delta\sqrt{1+x^2}}\right\},$$

$$\dim\operatorname{Ker}\left(P_{r_\delta}\right) = 2, \dim\operatorname{coker}\left(P_{r_\delta}\right) = 0,$$

$$\operatorname{ind}\left(P_{r_\delta}\right) = 2.$$

Следовательно, условие $r \in \widetilde{Q}$ является существенным.

При $\delta < \sqrt{a}$ оператор $P_{r_\delta} : H^2(\mathbb{R}^1) \to L_2(\mathbb{R}^1)$ является нётеровым, и имеет место: $\dim\operatorname{Ker}(P_{r_\delta}) = \dim\operatorname{coker}(P_{r_\delta}) = \operatorname{ind}(P_{r_\delta}) = 0$.

Тем самым условие на весовую функцию r не является необходимым для равенства размерностей ядра, коядра, следовательно, и индекса.

Лемма 2.3.3. *Пусть функция $q \in \widetilde{Q}$ такая, что $\frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$, оператор $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ нётеров и оператор $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ нормально разрешим. Тогда $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ также нётеров, и при этом имеют место следующие равенства:*

$$\dim\operatorname{Ker}\left(P; H_q^{k,\nu}\right) = \dim\operatorname{Ker}\left(P; H^{k,\nu}\right),$$

$$\dim\operatorname{coker}\left(P; H_q^{k,\nu}\right) = \dim\operatorname{coker}\left(P; H^{k,\nu}\right),$$

$$\operatorname{ind}\left(P; H_q^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H^{k,\nu}\right).$$

Доказательство. Пусть $r(x) = (q(x))^k \in \widetilde{Q}$. Тогда имеют место следующие вложения:

$$\widetilde{H}_r^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Учитывая также вложения для сопряжённых пространств, в силу леммы 2.3.2, получим:

$$\dim\operatorname{Ker}\left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right) = \dim\operatorname{Ker}\left(P; H_q^{k,\nu}\right) = \dim\operatorname{Ker}\left(P; H^{k,\nu}\right) < \infty, \tag{2.3.4}$$

$$\dim\operatorname{Ker}\left(P; \widetilde{H}_r^{k,\nu}\right)^* = \dim\operatorname{Ker}\left(P; H_q^{k,\nu}\right)^* = \dim\operatorname{Ker}\left(P; H^{k,\nu}\right)^* < \infty. \tag{2.3.5}$$

Из нормальной разрешимости $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ и $\dim\operatorname{Ker}\left(P; H_q^{k,\nu}\right)^* < \infty$ по теореме 3.2 работы [57] получим, что $\dim\operatorname{coker}\left(P; H_q^{k,\nu}\right) = \dim\operatorname{Ker}\left(P; H_q^{k,\nu}\right)^* < \infty$.

Отсюда, с учетом (2.3.4)–(2.3.5), получим, что оператор $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ также нётеров и для индексов выполняется

$$\operatorname{ind}\left(P; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H_q^{k,\nu}\right).$$

□

Обозначим

$$T(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)<s} b_\alpha(x) D^\alpha, \tag{2.3.6}$$

где $b_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы:

Лемма 2.3.4. *Пусть $q(x)$ положительная функция такая, что $\frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$. Тогда $T(x, \mathbb{D}) : H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ является компактным оператором.*

Обозначим

$$\widetilde{P}(x, \mathbb{D}) = P(x, \mathbb{D}) + T\,(x, \mathbb{D})\,.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть функция* $q \in \widetilde{Q}$ *такая, что* $\frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0$ *при* $|x| \to \infty$, *операторы* $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ *и* $\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right)$ *являются нётеровыми, и оператор* $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ *нормально разрешимый. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$\operatorname{ind}\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H^{k,\nu}\right).$$

Доказательство. Применяя лемму 2.3.3 для оператора $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ и $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ получим, что $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ также нётеров и $\operatorname{ind}\left(P; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$.

Из леммы 2.3.4 следует, что $T\,(x, \mathbb{D}) : H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ является компактным оператором. В силу теоремы 8.5.20 из работы [61] получим, что $\left(\widetilde{P}; H_q^{k,\nu}\right)$ также нётеров и $\operatorname{ind}\left(\widetilde{P}; H_q^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$. С учётом нётеровости $\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right)$, применяя лемму 2.3.3, получим:

$$\operatorname{ind}\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(\widetilde{P}; H_q^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H_q^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(P; H^{k,\nu}\right).$$

□

Замечание 2.3.2. *В общем случае возмущения оператора младшими членами дифференциального выражения могут влиять на нётеровость оператора. В случае если нётеровость сохраняется, индекс оператора, возмущённого младшими членами дифференциального оператора, может также измениться, как это видно из примера 2.3.1. Поэтому условия теоремы 2.3.1 являются существенными.*

Замечание 2.3.3. *В том случае, если значение индекса при возмущении младшими членами дифференциального оператора сохраняется, размерности ядра и коядра могут измениться.*

Пример 2.3.2. Пусть $a \in \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим операторы $P_1 u = u'' + \frac{2-x^2\sqrt{1+x^2}}{4(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} u$ и $P_2 u = u'' - a u$, действующие из $H^{k+2}(\mathbb{R}^1)$ в $H^k(\mathbb{R}^1)$. Оператор $P_1 : H^{k+2}(\mathbb{R}^1) \to H^k(\mathbb{R}^1)$ является нётеровым и

$$\operatorname{Ker}\,(P_1) = \mathit{Span}\left\{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}}\right\},$$

$$\dim \operatorname{Ker}\,(P_1) = \dim \operatorname{coker}\,(P_1) = 1,$$

откуда $\operatorname{ind}\,(P_1) = 0$.

Оператор $P_2 : H^{k+2}(\mathbb{R}^1) \to H^k(\mathbb{R}^1)$ является нётеровым, и имеет место $\dim \operatorname{Ker}(P_2) = \dim \operatorname{coker}(P_2) = \operatorname{ind}(P_2) = 0$.

Тем самым получили, что $\operatorname{ind}(P_1) = \operatorname{ind}(P_2) = 0$, но размерности ядра и коядра отличаются.

Пусть

$$L_s(\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)=s} a_\alpha D^\alpha, \tag{2.3.7}$$

где коэффициенты a_α – заданные действительные числа.

Рассмотрим $L(x, \mathbb{D}) = L_s(\mathbb{D}) + T(x, \mathbb{D})$ (см. (2.3.6)).

Следствие 2.3.1. *Пусть функция* $q \in \widetilde{Q}$ *такая, что* $\frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0$ *при* $|x| \to \infty$*, оператор* $\left(L; H^{k,\nu}\right)$ *нётеров и оператор* $\left(L; H_q^{k,\nu}\right)$ *нормально разрешим. Тогда* $\operatorname{ind}(L; H^{k,\nu}) = 0$.

Доказательство. В силу условий теоремы, применяя лемму 2.3.3, получим, что $\left(L; H_q^{k,\nu}\right)$ также нётеров и $\operatorname{ind}\left(L; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(L; H_q^{k,\nu}\right)$. Из нётеровости $\left(L; H^{k,\nu}\right)$ по теореме 1.1.3 получим, что дифференциальная форма $L(x, \mathbb{D})$ полуэллиптична в $\mathbb{R}^n$. В силу полуэллиптичности $L(x, \mathbb{D})$ и того, что коэффициенты $a_\alpha(x)$ при $(\alpha : \nu) = s$ вещественные константы, легко проверить, что существует число c_0 такое, что для дифференциальной формы $L(x, \mathbb{D})$ имеет место следующее представление:

$$L(x, \mathbb{D}) = L^1(\mathbb{D}) + L^2(x, \mathbb{D}),$$

где $L^1(\mathbb{D}) = L_s(\mathbb{D}) + c_0, L^1(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $L^2(x, \mathbb{D}) = T(x, \mathbb{D}) - c_0$.

Из леммы 2.3.4 следует, что $\left(L^2; H_q^{k,\nu}\right)$ является компактным оператором. В силу теоремы 8.5.20 работы [61] получим, что $\left(L^1; H_q^{k,\nu}\right)$ нётеров и $\operatorname{ind}\left(L; H_q^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(L^1; H_q^{k,\nu}\right)$. Из того, что $L^1(\xi) \neq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ следует, что $L^1(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ обратимый оператор и $\operatorname{ind}\left(L^1; H^{k,\nu}\right) = 0$. Применяя лемму 2.3.3, получим

$$\operatorname{ind}\left(L^1; H_q^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(L^1; H^{k,\nu}\right) = 0.$$

Следовательно, получили

$$\operatorname{ind}\left(L; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(L; H_q^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(L^1; H_q^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(L^1; H^{k,\nu}\right) = 0.$$

$\square$

Глава 3

УСЛОВИЯ НЁТЕРОВОСТИ ДЛЯ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В данной главе исследована нётеровость полуэллиптического оператора с постоянными и переменными коэффициентами, имеющими определённое поведение на бесконечности. Получены условия для нётеровости полуэллиптических операторов со специальными коэффициентами в анизотропных пространствах Соболева.

3.1 Нётеровость и индекс операторов с постоянными коэффициентами

Лемма 3.1.1. ([57] теорема 2.3). *Пусть X, Y - банаховы пространства, A ограниченный линейный оператор из X в Y, с областью определения X. Оператор является нормально разрешимым, тогда и только тогда, когда существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $y \in \mathrm{Im}(A)$ существует решение $x \in X(Ax = y)$, для которого*

$$\|x\|_X \leq C\|y\|_Y. \tag{3.1.1}$$

Следствие 3.1.1. *Пусть X, Y банаховы пространства, A ограниченный линейный оператор из X в Y, с областью определения X, а E_0 такое полное подпространство пространства X, что $E_0 \cap \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Для того, чтобы $A : E_0$ было замкнутым в Y необходимо и достаточно, чтобы существовало $d > 0$ такое, что*

$$\|x\|_X \leq d\|Ax\|_Y, \forall x \in E_0.$$

Доказательство. Необходимость следует из теоремы Банаха об обратном операторе, а достаточность является следствием леммы 3.1.1. □

Пусть

$$P(\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\leq s} a_\alpha D^\alpha, \tag{3.1.2}$$

где a_α - заданные числа.

Лемма 3.1.2. *Пусть $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ – n-нормальный, E_0 такое полное подпространство пространства $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, что $E_0 \cap \mathrm{Ker}(P) = \{0\}$. Тогда $P : E_0 = \overline{P : E_0}$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда, в силу следствия из леммы 3.1.1, существует последовательность $\{\tilde{u}_m\} \subset E_0$ такая, что $\|\tilde{u}_m\|_{k,\nu} \geq m\|P\tilde{u}_m\|_{k-s,\nu}$, и следовательно, $\left\|P\left(\frac{\tilde{u}_m}{\|\tilde{u}_m\|_{k,\nu}}\right)\right\|_{k-s,\nu} \leq \frac{1}{m}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Обозначив $u_m = \frac{\tilde{u}_m}{\|\tilde{u}_m\|_{k,\nu}}$, $f_m = Pu_m$, получим, что

$$\|u_m\|_{k,\nu} = 1, \|f_m\|_{k-s,\nu} \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{3.1.3}$$

В силу того, что оператор (3.1.2) является нормально разрешимым, из леммы 3.1.1 следует, что существуют $\{u'_m\} \subset H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ такие, что

$$\|u'_m\|_{k,\nu} \leq d\|f_m\|_{k-s,\nu}, \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.1.4}$$

Так как $f_m = Pu_m$, то u'_m можно представить в виде $u'_m = u_m - u^0_m$, где $u^0_m \in \mathrm{Ker}(P)$. Из конечномерности $\mathrm{Ker}(P)$ и ограниченности $\{u^0_m\}$ следует, что из $\{u^0_m\}$ можно выделить сходящуюся в $\mathrm{Ker}(P)$ подпоследовательность. Без ограничения общности можем считать, что $u^0_m \to u^0$ в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, где $u^0 \in \mathrm{Ker}(P)$. Тогда в силу оценки (3.1.4) имеем, что

$$\|u_m - u^0\|_{k,\nu} \leq \|u_m - u^0_m\|_{k,\nu} + \|u^0_m - u^0\|_{k,\nu} \leq d\|f_m\|_{k-s,\nu} + \|u^0_m - u^0\|_{k,\nu}.$$

В последней оценке переходя к пределу при $m \to \infty$, учитывая (3.1.3) получим, что $u_m \to u^0$ по норме $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Так как $E_0 \cap \mathrm{Ker}(P) = \{0\}$, следовательно, $u^0 \equiv 0$ и $\|u_m\|_{k,\nu} \to 0$. Получили противоречие, доказывающее замкнутость образа E_0. Лемма доказана. □

Пусть оператор P^* , действующий из $\left(H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)\right)^*$ в $\left(H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\right)^*$ сопряжённый для оператора P , а D' – пространство обобщённых функций над $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.1.1. *Оператор $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ является нётеровым тогда и только тогда, когда $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ является обратимым.*

Доказательство. Так как из обратимости оператора следует нётеровость, то докажем только необходимую часть теоремы.

Для произвольного $R > 0$ обозначим $E_R = \{u(x) \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n), u(x) \equiv 0, |x| \le R\}$. Покажем, что существует $R > 0$ такое, что $E_R \cap \operatorname{Ker}(P) = \{0\}$.

Предположим обратное, то есть для любого $R > 0 \quad E_R \cap \operatorname{Ker}(P) \setminus \{0\} \neq \emptyset$. Возьмём произвольное $R_1 > 0$. Для него существует $u_1(x) \in \operatorname{Ker}(P)$ и число $R_2 > 0$ такие, что $u_1(x) \equiv 0$ при $|x| \le R_1$ и $\int\limits_{|x| \le R_2} [u_1(x)]^2 \, dx \neq 0$. Так как R_2 также по предположению не удовлетворяет требуемому условию, то существует $u_2(x) \in \operatorname{Ker}(P)$ и $R_3 > 0$ такие, что $u_2(x) \equiv 0$ при $|x| \le R_2$ и $\int\limits_{|x| \le R_3} [u_2(x)]^2 \, dx \neq 0$. Продолжая таким образом, мы получим бесконечную систему из линейно независимых элементов в $\operatorname{Ker}(P)$, что противоречит тому, что $\dim \operatorname{Ker}(P) < \infty$. Применяя лемму 3.1.2 получим, что образ подпространства E_R замкнут в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Отсюда из того, что $E_R \cap \operatorname{Ker}(P) = \{0\}$ и теоремы Банаха (см. [60], гл. II, пар. 5) следует, что существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|u\|_{k,\nu} \le C \|Pu\|_{k-s,\nu}, \forall u \in E_R. \tag{3.1.5}$$

Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда для некоторого $h \in \mathbb{R}^n \quad \tau_{-h} u(x) := u(x-h) \in E_R$, и, следовательно, в силу оценки (3.1.5)

$$\|Pu\|_{k-s,\nu} = \|\tau_h P \tau_{-h} u\|_{k-s,\nu} = \|P \tau_{-h} u\|_{k-s,\nu} \ge C^{-1} \|\tau_{-h} u\|_{k,\nu} = C^{-1} \|u\|_{k,\nu}. \tag{3.1.6}$$

Из плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ следует, что оценка (3.1.6) верна для всех $u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Из оценки (3.1.6) непосредственно следует, что $\operatorname{Ker}(P) = \{0\}$.

Теперь докажем, что для любого $f \in H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ уравнение $Pu = f$ имеет решение из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $r = \dim \operatorname{Ker}(P^*), \{\psi_1, \ldots, \psi_r\} \subset \operatorname{Ker}(P^*)$ - базис в $\operatorname{Ker}(P^*)$, а $\{g_1, \ldots, g_r\} \subset H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ такие функции, что $(\psi_i, g_j) = \delta_i^j, i, j = \overline{1, r}$ и $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) = \operatorname{Im}(P) \oplus Span\{g_1, \ldots, g_r\}$, где $Span\{g_1, \ldots, g_r\}$ линейная оболочка $\{g_1, \ldots, g_r\}$.

Рассмотрим уравнение

$$Pu = f - \sum_{i=1}^r (\psi_i, f) g_i, \tag{3.1.7}$$

где $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Так как для любого $f \in H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \quad f - \sum\limits_{i=1}^r (\psi_i, f) g_i \in \operatorname{Im}(P)$, то из нормальной разрешимости P имеем, что для любого $f \in H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ существует $u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, являющееся решением уравнения (3.1.7) и для которого с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C \left\| f - \sum_{i=1}^{r} (\psi_i, f) g_i \right\|_{k-s,\nu} \leq C' \|f\|_{k-s,\nu}. \tag{3.1.8}$$

Пусть $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \{h_m\} \subset \mathbb{R}^n, |h_m| \to \infty, f_m(x) := \tau_{-h_m} f_0(x)$, а $u_m(x)$ – соответствующие $f_m(x)$ решения уравнения (3.1.7) , удовлетворяющие оценке (3.1.8). Тогда функция $v_m(x) := u_m(x + h_m)$ будет решением следующего уравнения

$$P v_m(x) = f_0(x) - \sum_{i=1}^{r} (\psi_i, \tau_{-h_m} f_0)\, \tau_{h_m} g_i. \tag{3.1.9}$$

Отсюда, в силу оценки (3.1.8), следует, что $\{v_m\}$ ограничены в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $v_0(x) \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ – слабый предел некоторой подпоследовательности $\{v_m\}$. Без ограничения общности можем считать, что $v_m \xrightarrow{D'} v_0$ при $m \to \infty$.

Тогда для любого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\lim_{m \to \infty} (P v_m, \varphi) = (P v_0, \varphi) + \lim_{m \to \infty} (P(v_m - v_0), \varphi) = (P v_0, \varphi)\,. \tag{3.1.10}$$

С другой стороны

$$\left(f_0 - \sum_{i=1}^{r} (\psi_i, \tau_{-h_m} f_0)\, \tau_{h_m} g_i, \varphi \right) = (f_0, \varphi) - \sum_{i=1}^{r} (\psi_i, \tau_{-h_m} f_0)\, (\tau_{h_m} g_i, \varphi)\,. \tag{3.1.11}$$

В силу того, что $\|\tau_{-h_m} f_0\|_{k-s,\nu} = \|f_0\|_{k-s,\nu}, m = 1, 2, \ldots$ последовательность $\{\tau_{-h_m} f_0\}$ ограничена в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Так как $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то имеем, что $\tau_{-h_m} f_0 \xrightarrow{D'} 0$ при $m \to \infty$. Из последнего и ограниченности $\{\tau_{-h_m} f_0\}$ получим, что $\lim\limits_{m \to \infty} (\psi_i, \tau_{-h_m} f_0) = 0, i = \overline{1, r}$. Тогда из (3.1.10) и (3.1.11) получим, что

$$(P v_0, \varphi) = (f_0, \varphi)\,.$$

Откуда по лемме дю Буа-Реймонда получим, что $P v_0 = f_0$.

Так как $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{Ker}(P) = \{0\}$, то отсюда непосредственно следует, что уравнение $Pu = f$ для любого $f \in H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ имеет и притом единственное решение в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ является обратимым и $\mathrm{ind}(P) = 0$. □

Следующая теорема устанавливает связь между нётеровостью и полуэллиптичностью.

Теорема 3.1.2. *Для оператора $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ следующие условия эквивалентны:*

1) оператор $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *нётеровый;*

2) оператор $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *обратимый;*

3) существует постоянная $\delta > 0$ *такая, что*

$$|P(\xi)| \geq \delta \left(1 + |\xi|_\nu\right)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Условия 1) и 2) эквивалентны по теореме 3.1.1. Докажем эквивалентность 2) и 3), тем самым теорема 3.1.2 будет доказана.

Так как $P(\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ – обратимый, следовательно, по теореме Банаха об обратном операторе, существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$C\|u\|_{k,\nu} \leq \|Pu\|_{k-s,\nu}, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.1.12}$$

Из (3.1.12) имеем, что

$$\int \left[|P(\xi)|^2 - C^2 \left(1 + |\xi|_\nu\right)^{2s}\right] |\hat{u}(\xi)|^2 \left(1 + |\xi|_\nu\right)^{2(k-s)} d\xi \geq 0, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно,

$$|P(\xi)| \geq C \left(1 + |\xi|_\nu\right)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.13}$$

Докажем полуэллиптичность $P(\mathbb{D})$.

Обозначим $M = \max\limits_{(\alpha:\nu)<s} |a_\alpha|$. Тогда

$$|P(\xi) - P_s(\xi)| = \left|\sum_{(\alpha:\nu)<s} a_\alpha \xi^\alpha\right| \leq M \sum_{(\alpha:\nu)<s} |\xi_1|^{\alpha_1} \ldots |\xi_n|^{\alpha_n} \leq M \sum_{(\alpha:\nu)<s} |\xi|_\nu^{\frac{\alpha_1}{\nu_1}} \ldots |\xi|_\nu^{\frac{\alpha_n}{\nu_n}} \leq$$
$$\leq M \sum_{(\alpha:\nu)<s} |\xi|_\nu^{(\alpha:\nu)} \tag{3.1.14}$$

Из (3.1.13) имеем

$$|P_s(\xi)| + |P(\xi) - P_s(\xi)| \geq C \left(1 + |\xi|_\nu\right)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.15}$$

Пусть $t > 0$. Подставив в (3.1.15) вместо ξ вектор $t^{1/\nu}\xi = \left(t^{1/\nu_1}\xi_1, \ldots, t^{1/\nu_n}\xi_n\right)$ и учитывая (3.1.14), получим:

$$t^s|P_s(\xi)| + o(t^s)|P(\xi) - P_s(\xi)| \geq C \left(1 + t|\xi|_\nu\right)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0. \tag{3.1.16}$$

Разделив обе части (3.1.16) на t^s и переходя к пределу при $t \to \infty$ получим полуэллиптичность оператора $P(\mathbb{D})$:

$$|P_s(\xi)| \geq C|\xi|_\nu^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть теперь существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|P(\xi)| \geq C\left(1 + |\xi|_\nu\right)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.17}$$

Докажем обратимость такого оператора, из чего и следует нётеровость.

Расссмотрим произвольное $f \in H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \subset S'$. Докажем, что из $P(\xi) \neq 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, следует, что обратное преобразование Фурье функции $\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{P(\xi)} \in S', u(x) \in S'$ является единственным решением в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ уравнения $Pu = f$. Для этого покажем, что из того, что $Pu \in H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ следует, что $u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, причём с некоторой постоянной $C > 0$ выполняется оценка

$$\|Pu\|_{k-s,\nu} \geq C\|u\|_{k,\nu}, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.1.18}$$

Используя (3.1.17) получим

$$\|Pu\|^2_{k-s,\nu} = \int |P(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \left(1 + |\xi|_\nu\right)^{2(k-s)} d\xi \geq C^2 \int |\hat{u}(\xi)|^2 \left(1 + |\xi|_\nu\right)^{2k} d\xi = C^2 \|u\|^2_{k,\nu}.$$

т. е. $u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ и выполняется оценка (3.1.18).

Из доказанного следует, что уравнение $Pu = f$ для любого $f \in H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ имеет и притом единственное решение в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, то есть P является обратимым из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема доказана. □

3.2 Нётеровость и индекс операторов со специальными переменными коэффициентами

Пусть $k, s \in \mathbb{N}, k \geq s, \nu \in \mathbb{N}^n$. Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu) \leq s} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{3.2.1}$$

где $a_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Условие 3.2.1. *Пусть для коэффициентов $a_\alpha(x)$ дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$ вида (3.2.1) существуют постоянные $\widetilde{a}_\alpha$ такие, что $D^\beta(a_\alpha(x) - \widetilde{a}_\alpha) \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$ для всех $\beta, \alpha \in \mathbb{Z}^n_+, (\beta : \nu) \leq k - s,\ (\alpha : \nu) \leq s$.*

Пусть дифференциальная форма $P(x, \mathbb{D})$ удовлетворяет условию 3.2.1. Тогда $P(x, \mathbb{D})$ порождает ограниченный линейный оператор, действующий из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Будем обозначать его через $P(x, \mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ или $\left(P; H^{k,\nu}\right)$.

Для дифференциальной формы $P(x,\mathbb{D})$, удовлетворяющей условию 3.2.1, обозначим

$$\widetilde{P}\left(\mathbb{D}\right)=\sum_{(\alpha:\nu)\leq s}\widetilde{a}_{\alpha}D^{\alpha},$$

$$T(x,\mathbb{D})=\sum_{(\alpha:\nu)\leq s}(a_{\alpha}\left(x\right)-\widetilde{a}_{\alpha})D^{\alpha}.$$

Теорема 3.2.1. *Пусть дифференциальная форма $P(x,\mathbb{D})$ удовлетворяет условию 3.2.1 и коэффициенты $a_{\alpha}(x)$ при $(\alpha:\nu)=s$ постоянны. Тогда $\left(P;H^{k,\nu}\right)$ нётеров тогда и только тогда, когда существует постоянная $\delta>0$ такая, что*

$$\left|\widetilde{P}(\xi)\right|\geq\delta\left(1+|\xi|_{\nu}\right)^{s},\forall\xi\in\mathbb{R}^{n}.$$

Доказательство. Имеет место следующее представление:

$$P(x,\mathbb{D})=\widetilde{P}\left(\mathbb{D}\right)+T(x,\mathbb{D}).$$

В силу того, что коэффициенты $a_{\alpha}(x)$ при $(\alpha:\nu)=s$ постоянны имеем:

$$T(x,\mathbb{D})=\sum_{(\alpha:\nu)<s}(a_{\alpha}\left(x\right)-\widetilde{a}_{\alpha})D^{\alpha}.$$

Докажем компактность оператора $T(x,\mathbb{D}):H^{k,\nu}(\mathbb{R}^{n})\to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^{n})$.

Так как $D^{\beta}(a_{\alpha}\left(x\right)-\widetilde{a}_{\alpha})\rightrightarrows 0$ при $|x|\to\infty$ для всех $(\beta:\nu)\leq k-s,(\alpha:\nu)<s$, то для произвольного $\varepsilon>0$ существует $N\left(\varepsilon\right)>0$ такое, что

$$\left|D^{\beta}(a_{\alpha}\left(x\right)-\widetilde{a}_{\alpha})\right|<\varepsilon,\forall x\in\mathbb{R}^{n}\backslash K_{N(\varepsilon)},(\beta:\nu)\leq k-s,(\alpha:\nu)<s.$$

Пусть $\varphi\left(x\right)\in C_{0}^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$ такая, что $0\leq\varphi\left(x\right)\leq 1$ и $\varphi\left(x\right)=1$ при $|x|\leq 1$ и $\varphi\left(x\right)=0$ при $|x|\geq 2$. Тогда $\varphi_{\varepsilon}\left(x\right):=\varphi\left(\frac{x}{N(\varepsilon)}\right)\in C_{0}^{\infty},\operatorname{supp}\varphi_{\varepsilon}\subset K_{2N(\varepsilon)},\varphi_{\varepsilon}\left(x\right)=1$ при $x\in K_{N(\varepsilon)}$.

Обозначим $T_{\varepsilon}^{'}=(1-\varphi_{\varepsilon})\,T$, $T_{\varepsilon}^{''}=\varphi_{\varepsilon}T$. Тогда с некоторой постоянной $C>0$ имеем

$$\left\|T_{\varepsilon}^{'}u\right\|_{k-s,\nu}=\left\|(1-\varphi_{\varepsilon})\,Tu\right\|_{k-s,\nu}\leq C\varepsilon\left\|u\right\|_{k,\nu},\forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^{n}),$$

а $T_{\varepsilon}^{''}=\varphi_{\varepsilon}T$ компактный оператор из $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^{n})$ в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^{n})$. Следовательно, в силу теоремы 8.3.2 работы [61], оператор $T(x,\mathbb{D}):H^{k,\nu}(\mathbb{R}^{n})\to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^{n})$ компактен.

Поэтому на основании теоремы 8.5.10 работы [61], оператор $P(x,\mathbb{D}):H^{k,\nu}(\mathbb{R}^{n})\to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^{n})$ является нётеровым тогда и только тогда, когда $\widetilde{P}\left(\mathbb{D}\right):H^{k,\nu}(\mathbb{R}^{n})\to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^{n})$ является нётеровым.

В теореме 3.1.2 установлено, что оператор $\widetilde{P}\left(\mathbb{D}\right):H^{k,\nu}(\mathbb{R}^{n})\to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^{n})$ нётеров тогда и только тогда, когда с некоторой постоянной $\delta>0$

$$\left|\widetilde{P}(\xi)\right| \geq \delta\left(1+|\xi|_\nu\right)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

□

Замечание 3.2.1. *Так как из условия* $\left|\widetilde{P}(\xi)\right| \geq \delta\left(1+|\xi|_\nu\right)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ *следует полуэллиптичность* $\widetilde{P}(\mathbb{D})$, *то из нётеровости* $P(x,\mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ *следует, что* $P(x,\mathbb{D})$ *также полуэллиптичен в* $\mathbb{R}^n$.

Теорему 8.5.14 работы [61] можно переформулировать следующим образом:

Теорема 3.2.2. *Пусть A ограниченный линейный оператор из банахово пространства X в банахово пространство Y. Тогда:*

1. *если A обладает левым регуляризатором, то ядро оператора A в X конечномерно;*
2. *если A обладает правым регуляризатором, то область значений оператора A замкнута в Y и коядро конечномерно.*

В частности, A обладает левым и правым регуляризатором тогда и только тогда, когда A нётеровый оператор.

Из теоремы 2.4 работы [4] следует следующее утверждение.

Теорема 3.2.3. *Пусть семейство нётеровых операторов A_t, где $t \in [0,1]$, из банахова пространства X в банахово пространство Y, непрерывно по t.*

Тогда $\operatorname{ind}(A_0) = \operatorname{ind}(A_1)$.

Теорема 3.2.4. *Пусть дифференциальная форма $P(x,\mathbb{D})$, коэффициенты которой удовлетворяют условию 3.2.1, полуэллиптична в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ нётеров тогда и только тогда, когда существует постоянная $\delta > 0$ такая, что*

$$|\widetilde{P}(\xi)| \geq \delta(1+|\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2.2}$$

при этом $\operatorname{ind}(P; H^{k,\nu}) = \operatorname{ind}(\widetilde{P}; H^{k,\nu}) = 0$.

Доказательство. Докажем сперва достаточность.

В силу оценки (3.2.2) оператор $(\widetilde{P}; H^{k,\nu})$ обратим. Для $\widetilde{P}(\mathbb{D})$ имеет место следующее представление:

$$\widetilde{P}(\mathbb{D}) = P(x,\mathbb{D}) - T(x,\mathbb{D}).$$

Из последнего и из обратимости $\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right)$ с некоторой постоянной $C > 0$ имеем

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C\|\widetilde{P}u\|_{k-s,\nu} \leq C\|Pu\|_{k-s,\nu} + C\|Tu\|_{k-s,\nu}, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

В силу условия теоремы, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left|D^\beta(a_\alpha(x) - \tilde{a}_\alpha)\right| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash K_{N(\varepsilon)}, (\beta : \nu) \leq k - s, (\alpha : \nu) \leq s. \tag{3.2.3}$$

Пусть $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $0 \leq \eta\,(x) \leq 1$ и $\eta\,(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\eta\,(x) = 0$ при $|x| \geq 2$. Тогда $\eta_\varepsilon(x) := \eta(\frac{x}{N(\varepsilon)}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\eta_\varepsilon \subset K_{2N(\varepsilon)}$ и $\eta_\varepsilon(x) = 1$ при $x \in K_{N(\varepsilon)}$. Из (3.2.3) легко получить, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеет место:

$$\|(1 - \eta_\varepsilon)Tu\|_{k-s,\nu} \leq C_1\varepsilon\|u\|_{k,\nu}, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.2.4}$$

Используя результаты работы [58] получим

$$\|\eta_\varepsilon Tu\|_{k-s,\nu} \leq C_2\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_{N(\varepsilon)})}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.2.5}$$

Из (3.2.4) и (3.2.5) с некоторой постоянной $C_3 > 0$ имеем

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C_3\|Pu\|_{k-s,\nu} + C_1\varepsilon\|u\|_{k,\nu} + C_2\|u\|_{L_2(K_{N(\varepsilon)})}, \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

При $\varepsilon < \frac{1}{C_1}$ с некоторой постоянной $C_4 > 0$ получим

$$\|u\|_{k,\nu} \leq C_4\left(\|Pu\|_{k-s,\nu} + \|u\|_{L_2(K_{N(\varepsilon)})}\right), \forall u \in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

Из последней оценки в силу следствия 1.1.1 получим, что $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ – n–нормальный.

Докажем конечномерность $\operatorname{coker}\left(P; H^{k,\nu}\right)$.

Пусть $\widetilde{R} : H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ – обратный для оператора $\widetilde{P} : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Используя (3.2.3) легко проверить, что с некоторыми постоянными $C_5, C_6 > 0$ имеет место:

$$\left\|T\left((1 - \eta_\varepsilon)\widetilde{R}u\right)\right\|_{k-s,\nu} \leq C_5\varepsilon\|\widetilde{R}u\|_{k,\nu} \leq C_6\varepsilon\|u\|_{k-s,\nu}, \forall u \in H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.2.6}$$

Возьмём $\varepsilon_0 = \frac{1}{2C_6}$. Обозначим $T_1 := T(1 - \eta_{\varepsilon_0})\widetilde{R}$. Из (3.2.6) имеем:

$$\|T_1u\|_{k-s,\nu} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{k-s,\nu}, \forall u \in H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.2.7}$$

Пусть $m \in \mathbb{N}, \{\varphi_i\}_{i=1}^m, \{\psi_i\}_{i=1}^m \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, – системы функций такие, что $\psi_i(x) = 1$ при $x \in \operatorname{supp}\varphi_i$, $\sum\limits_{i=1}^m \varphi_i(x) = 1$ – разбиение единицы в $\operatorname{supp}\eta_{\varepsilon_0}$, а $P^i(x, \mathbb{D}) : H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ – операторы с мало изменяющимися в $\mathbb{R}^n$ коэффициентами, удовлетворяющие

$$\varphi_i P^i(x, \mathbb{D})\psi_i = \varphi_i P(x, \mathbb{D})\psi_i, i = \overline{1, m}.$$

Тогда в силу леммы 2.2.3 для $\left(P^i; H^{k,\nu}\right)$ существует квазирегуляризатор R^i : $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ такой, что

$$P^i R^i = I + T^i,$$

где $T^i : H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma = \sigma(\nu) > 0$.

Рассмотрим следующие операторы

$$B := \sum_{j=1}^{m} \psi_j R^j \varphi_j, \tag{3.2.8}$$

$$R := (1-\eta_{\varepsilon_0})\widetilde{R} + \eta_{\varepsilon_0} B, \tag{3.2.9}$$

действующие из $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} PR = P\left((1-\eta_{\varepsilon_0})\widetilde{R}\right) + P(\eta_{\varepsilon_0}B) = \widetilde{P}\left((1-\eta_{\varepsilon_0})\widetilde{R}\right) + T\left((1-\eta_{\varepsilon_0})\widetilde{R}\right) + P\left(\eta_{\varepsilon_0}B\right) = \\ = (1-\eta_{\varepsilon_0})\widetilde{P}\widetilde{R} + \left[\widetilde{P}\left((1-\eta_{\varepsilon_0})\widetilde{R}\right) - (1-\eta_{\varepsilon_0})\widetilde{P}\widetilde{R}\right] + \eta_{\varepsilon_0}PB + \left[P\left(\eta_{\varepsilon_0}B\right) - \eta_{\varepsilon_0}PB\right] + \\ + T_1. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Обозначим $T_2 := \left[\widetilde{P}\left((1-\eta_{\varepsilon_0})\widetilde{R}\right) - (1-\eta_{\varepsilon_0})\widetilde{P}\widetilde{R}\right] + \left[P\left(\eta_{\varepsilon_0}B\right) - \eta_{\varepsilon_0}PB\right]$.

Легко проверить, что $T_2 : H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ компактный оператор.

В силу свойств функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^m, \{\psi_i\}_{i=1}^m$ легко проверить, что имеет место

$$\eta_{\varepsilon_0} P(x,\mathbb{D})u = \eta_{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i P(x,\mathbb{D})u = \eta_{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i P(x,\mathbb{D})\psi_i u.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \eta_{\varepsilon_0} PBu = \eta_{\varepsilon_0} \sum_{i,j=1}^{m} \varphi_i P(x,\mathbb{D})\psi_i\varphi_j R^j\psi_j u = \eta_{\varepsilon_0} \sum_{i,j=1}^{m} \varphi_i P^i(x,\mathbb{D})\psi_i\varphi_j R^j\psi_j u = \\ = \eta_{\varepsilon_0} \sum_{i,j=1}^{m} \varphi_i\psi_i\varphi_j P^j(x,\mathbb{D}) R^j\psi_j u + \\ + \eta_{\varepsilon_0} \sum_{i,j=1}^{m} \varphi_i \left[P^j(x,\mathbb{D})\psi_i\varphi_j R^j\psi_j u - \psi_i\varphi_j P^j(x,\mathbb{D})R^j\psi_j u\right] = \\ = \eta_{\varepsilon_0} \sum_{i,j=1}^{m} \varphi_j\varphi_i u + \eta_{\varepsilon_0} \sum_{i,j=1}^{m} \varphi_i\varphi_j T^j\psi_j u + \\ + \eta_{\varepsilon_0} \sum_{i,j=1}^{m} \varphi_i \left[P^j(x,\mathbb{D})\psi_i\varphi_j R^j\psi_j u - \psi_i\varphi_j P^j(x,\mathbb{D})R^j\psi_j u\right]. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Обозначим $T_3 := \eta_{\varepsilon_0} \sum\limits_{i,j=1}^{m} \varphi_i \left[P^j(x,\mathbb{D})\psi_i\varphi_j R^j\psi_j u - \psi_i\varphi_j P^j(x,\mathbb{D})R^j\psi_j u\right]$.

Легко проверить, что $T_3 : H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ – компактный оператор.

В силу того, что $T^j : H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ ограниченный оператор, то $T_4 := \eta_{\varepsilon_0} \sum\limits_{i,j=1}^{m} \varphi_i\varphi_j T^j\psi_j$ компактный оператор из $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Из (3.2.10) и (3.2.11) получим

$$PR = (1-\eta_{\varepsilon_0})I + \eta_{\varepsilon_0}I + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = I + T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \tag{3.2.12}$$

где $T_5 := T_2 + T_3 + T_4$ компактный оператор из $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

В силу (3.2.7) существует $(I+T_1)^{-1} : H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, следовательно

$$PR(I+T_1)^{-1} = I + T_5(I+T_1)^{-1}.$$

Из последнего получим, что $R(I+T_1)^{-1}$ является правым регуляризатором для $\left(P; H^{k,\nu}\right)$.

По теореме 3.2.2 из существования правого регуляризатора следует конечномерность $\operatorname{coker}\left(P; H^{k,\nu}\right)$. Тем самым нётеровость $\left(P; H^{k,\nu}\right)$ доказана.

Аналогичным образом из нётеровости $(P; H^{k,\nu})$ можно доказать нётеровость $\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right)$.

В силу теоремы 3.1.2 оператор $\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right)$ нётеров тогда и только тогда, когда с некоторой постоянной $\delta > 0$

$$\left|\widetilde{P}(\xi)\right| \geq \delta(1+|\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Тем самым необходимость оценки (3.2.2) доказана.

Заметим, что $\tau P + (1-\tau)\widetilde{P}, \tau \in [0,1]$ удовлетворяет условиям теоремы, следовательно, при выполнении оценки (3.2.2) является нётеровым для всех значений $\tau \in [0,1]$. Тогда по теореме 3.2.3 имеем, что

$$\operatorname{ind}\left(P; H^{k,\nu}\right) = \operatorname{ind}\left(\widetilde{P}; H^{k,\nu}\right) = 0.$$

$\square$

Пример 3.2.1. Рассмотрим $Pu = u'' + \frac{2-x^2\sqrt{1+x^2}}{4(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}u$, $P : H^2(\mathbb{R}^1) \to L_2(\mathbb{R}^1)$ и $\widetilde{P}u = u'' - \frac{1}{4}u$, $\widetilde{P} : H^2(\mathbb{R}^1) \to L_2(\mathbb{R}^1)$.

Оператор $\widetilde{P} : H^2(\mathbb{R}^1) \to L_2(\mathbb{R}^1)$ нётеров по теореме 3.1.2 с

$$\dim \operatorname{Ker}(\widetilde{P}) = \dim \operatorname{coker}(\widetilde{P}) = \operatorname{ind}(\widetilde{P}) = 0.$$

Оператор $P : H^2(\mathbb{R}^1) \to L_2(\mathbb{R}^1)$ нётеров по теореме 3.2.4 с

$$\mathrm{Ker}\,(P) = Span\{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}}\},$$

$$\dim \mathrm{Ker}\,(P) = \dim \mathrm{coker}\,(P) = 1,\ \mathrm{ind}\,(P) = 0.$$

Рассмотрим дифференциальную форму

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} \left(a^0_\alpha(x) q(x)^{s-(\alpha:\nu)} + a^1_\alpha(x)\right) D^\alpha, \tag{3.2.13}$$

где $q \in Q^{k-s,\nu}, a^0_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n), D^\beta\,(a^1_\alpha(x)) = o(q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\beta:\nu)})$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha:\nu) \le s$ и $(\beta:\nu) \le k-s$.

Условие 3.2.2. *Пусть $P(x, \mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (3.2.13) такая, что для коэффициентов $a^0_\alpha(x) \in C^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ существуют $\widetilde{a}_\alpha$ константы такие, что $a^0_\alpha(x) \rightrightarrows \widetilde{a}_\alpha$ при $|x| \to \infty$ для всех $(\alpha:\nu) \le s$.*

Для дифференциальной формы $P(x, \mathbb{D})$, коэффициенты которой удовлетворяют условию 3.2.2, обозначим

$$\overline{P}\,(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} \widetilde{a}_\alpha q(x)^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha.$$

Условие 3.2.3. *Пусть*

$$\sum_{(\alpha:\nu)\le s} \widetilde{a}_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)} \xi^\alpha \ne 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Предложение 3.2.1. *Пусть дифференциальная форма $P\,(x, \mathbb{D})$ коэффициенты которой удовлетворяют условиям 3.2.2, 3.2.3 и постоянны при $(\alpha:\nu) = s$, полуэллиптична в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\left(P; H^{k,\nu}_q\right)$ нётеров.*

Доказательство. На основании условия 3.2.2 представим $P\,(x, \mathbb{D})$ в следующем виде

$$P\,(x, \mathbb{D}) = \overline{P}\,(x, \mathbb{D}) + \sum_{(\alpha:\nu)<s} \left(a^0_\alpha(x) - \widetilde{a}_\alpha\right) q(x)^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha + \sum_{(\alpha:\nu)<s} a^1_\alpha(x)\, D^\alpha$$

и обозначим

$$T^1\,(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)<s} \left(a^0_\alpha(x) - \widetilde{a}_\alpha\right) q(x)^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha,$$

$$T^2\,(x, \mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)<s} a^1_\alpha(x)\, D^\alpha.$$

Так как для всех $(\alpha:\nu)<s$ $a_\alpha^0(x)\rightrightarrows\widetilde{a}_\alpha$ и $\frac{1}{q(x)}\rightrightarrows 0$ при $|x|\to\infty$, то для произвольного $\varepsilon>0$ существует $N_1(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\frac{\left|D^\gamma(a_\alpha^0(x)-\widetilde{a}_\alpha)\right|}{q(x)^{(\gamma:\nu)}}<\varepsilon, \forall x\in\mathbb{R}^n\backslash K_{N_1(\varepsilon)}, (\gamma:\nu)\leq k-s, (\alpha:\nu)<s. \tag{3.2.14}$$

Пусть $\varphi(x)\in C_0^\infty$ такая, что $0\leq\varphi(x)\leq 1$ и $\varphi(x)=1$ при $|x|\leq 1$ и $\varphi(x)=0$ при $|x|\geq 2$. Тогда $\varphi_\varepsilon(x):=\varphi\left(\frac{x}{N_1(\varepsilon)}\right)\in C_0^\infty, \operatorname{supp}\varphi_\varepsilon\subset K_{2N_1(\varepsilon)}, \varphi_\varepsilon(x)=1$ при $x\in K_{N_1(\varepsilon)}$ и $T^1=(1-\varphi_\varepsilon)T^1+\varphi_\varepsilon T^1$.

В силу оценки (3.2.14) с некоторыми постоянными $C_1, C_2>0$ для всех $(\beta:\nu)\leq k-s$ и $(\alpha:\nu)<s$ имеем

$$\begin{aligned}&\left\|D^\beta\left((1-\varphi_\varepsilon(x))\left(a_\alpha^0(x)-\widetilde{a}_\alpha\right)D^\alpha u(x)\right)q(x)^{k-s-(\beta:\nu)}\right\|_{L_2(R^n)}\leq\\ &\leq C_1\sum_{0\leq\gamma\leq\beta}\left\|D^\gamma\left((1-\varphi_\varepsilon(x))\left(a_\alpha^0(x)-\widetilde{a}_\alpha\right)\right)D^{\alpha+\beta-\gamma}u(x)\,q(x)^{k-s-(\beta:\nu)}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\leq\\ &\leq C_2\varepsilon\sum_{0\leq\gamma\leq\beta}\left\|D^{\alpha+\beta-\gamma}u\cdot q^{k-(\beta:\nu)-(\alpha:\nu)+(\gamma:\nu)}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Отсюда с некоторыми постоянными $C_3, C_4>0$ получим, что

$$\begin{aligned}&\left\|(1-\varphi_\varepsilon)T^1(x,\mathbb{D})u\right\|_{k-s,\nu,q}\leq\\ &\leq C_3\sum_{(\beta:\nu)\leq k-s}\sum_{(\alpha:\nu)<s}\left\|D^\beta\left((1-\varphi_\varepsilon(x))\left(a_\alpha^0(x)-\widetilde{a}_\alpha\right)D^\alpha u(x)\right)q(x)^{k-s-(\beta:\nu)}\right\|_{L_2(R^n)}\leq\\ &\leq C_4\varepsilon\left\|u\right\|_{k,\nu,q}, \forall u\in H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Так как $\varphi_\varepsilon T^1: H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ компактен, то отсюда на основании теоремы 8.3.2 работы [61] получим, что оператор $T^1(x,\mathbb{D}): H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ также компактен.

Рассмотрим оператор $T^2(x,\mathbb{D}): H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

В силу условия 3.2.2 для произвольного $\varepsilon>0$ существует $N_2(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\frac{\left|D^\gamma a_\alpha^1(x)\right|}{q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\gamma:\nu)}}<\varepsilon, \forall x\in\mathbb{R}^n\backslash K_{N_2(\varepsilon)}, (\gamma:\nu)\leq k-s, (\alpha:\nu)<s.$$

Тогда $\psi_\varepsilon(x):=\psi\left(\frac{x}{N_2(\varepsilon)}\right)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\psi_\varepsilon\subset K_{2N_2(\varepsilon)}, \psi_\varepsilon(x)=1$ при $x\in K_{N_2(\varepsilon)}$.

Проводя аналогичные рассуждения как при доказательстве компактности оператора $T^1(x,\mathbb{D}): H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$, с заменой T^1 на T^2 и φ_ε на ψ_ε, в силу теоремы 8.3.2 работы [61] получим, что $T^2(x,\mathbb{D}): H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)\to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ также компактен.

При условиях теоремы, с помощью результатов работы [51], получим, что оператор $\overline{P}(x,\mathbb{D}) : H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ нётеров. Тогда на основании теоремы 8.5.10 работы [61] получим, что оператор $P(x,\mathbb{D}) : H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ также нётеров. □

Теорема 3.2.5. *Пусть дифференциальная форма $P(x,\mathbb{D})$, коэффициенты которой удовлетворяют условию 3.2.2 полуэллиптична в $\mathbb{R}^n$. Тогда $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ нётеров тогда и только тогда, когда существует постоянная $\delta > 0$ такая, что*

$$\left|\sum_{(\alpha:\nu)\le s} \widetilde{a}_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)} \xi^\alpha\right| \ge \delta(\lambda + |\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$Q^1(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} \left(a_\alpha^0(x) - \widetilde{a}_\alpha\right) q(x)^{s-(\alpha:\nu)} D^\alpha,$$

$$Q^2(x,\mathbb{D}) = \sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha^1(x) D^\alpha.$$

Имеет место следующее представление для $\overline{P}(x,\mathbb{D})$:

$$\overline{P}(x,\mathbb{D}) = P(x,\mathbb{D}) - Q^1(x,\mathbb{D}) - Q^2(x,\mathbb{D}). \tag{3.2.15}$$

Докажем достаточность. В силу условий теоремы, из теоремы 4.1 работы [51], получим, что для оператора $\left(\overline{P}; H_q^{k,\nu}\right)$ с некоторой постоянной $C > 0$ и числом $M > 0$ выполняется оценка:

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C\left(\left\|\overline{P}u\right\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right), \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.2.16}$$

В силу условия 3.2.2 и того, что $\frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$ для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\begin{gathered} \frac{\left|D^\gamma\left(a_\alpha^0(x) - \widetilde{a}_\alpha\right)\right|}{q(x)^{(\gamma:\nu)}} < \varepsilon, \quad \frac{\left|D^\gamma a_\alpha^1(x)\right|}{q(x)^{s-(\alpha:\nu)+(\gamma:\nu)}} < \varepsilon, \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash K_{N(\varepsilon)}, \forall \alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n, (\gamma:\nu) \le k-s, (\alpha:\nu) \le s. \end{gathered} \tag{3.2.17}$$

Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $0 \le \varphi \le 1$ и $\varphi(x) = 1$ при $|x| \le 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \ge 2$. Тогда $\varphi_\varepsilon(x) := \varphi\left(\frac{x}{N(\varepsilon)}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset K_{2N(\varepsilon)}, \varphi_\varepsilon(x) = 1$ при $x \in K_{N(\varepsilon)}$.

Используя (3.2.17) нетрудно убедиться, что с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеет место:

$$\left\|\left(Q^1(x,\mathbb{D}) + Q^2(x,\mathbb{D})\right)((1-\varphi_\varepsilon)u)\right\|_{k-s,\nu,q} \le C_1\varepsilon\|u\|_{k,\nu,q}, \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \tag{3.2.18}$$

Так как $P(x,\mathbb{D})$ полуэллиптичен в $\mathbb{R}^n$, то используя результаты работы [58] имеем оценку

$$\left\| \left(Q^1(x,\mathbb{D}) + Q^2(x,\mathbb{D})\right)(\varphi_\varepsilon u)\right\|_{k-s,\nu,q} \le C_2\|\varphi_\varepsilon u\|_{k,\nu,q} \le$$
$$\le C_3\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_{2N(\varepsilon)})}\right), \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n). \quad (3.2.19)$$

Из оценки (3.2.16) в силу (3.2.15), (3.2.18)–(3.2.19) получим

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C\left(\left\|\left(Q^1+Q^2\right)u\right\|_{k-s,\nu,q} + \|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right) \le$$
$$\le C\left(\left\|\left(Q^1+Q^2\right)((1-\varphi_\varepsilon)u)\right\|_{k-s,\nu,q} + \left\|(Q^1+Q^2)(\varphi_\varepsilon u)\right\|_{k-s,\nu,q} + \|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_M)}\right) \le$$
$$\le (C+C_3)\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \varepsilon C C_1\|u\|_{k,\nu,q} + C_3\|u\|_{L_2(K_{2N(\varepsilon)})} + C\|u\|_{L_2(K_M)}.$$

Возьмём $\varepsilon < \frac{1}{CC_1}$.

Тогда с некоторой постоянной $C_4 > 0$ и числом $R = \max(2N(\varepsilon), M)$ получим

$$\|u\|_{k,\nu,q} \le C_4\left(\|Pu\|_{k-s,\nu,q} + \|u\|_{L_2(K_R)}\right), \forall u \in H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n).$$

В силу следствия 1.1.1 n–нормальность $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ доказана.

Теперь построим правый регуляризатор аналогично теореме 3.2.4. Из существования правого регуляризатора по теореме 3.2.2 следует конечномерность $\operatorname{coker}\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$. Тем самым нётеровость $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ будет доказана.

Из результатов работы [51] получим, что оператор $\left(\overline{P}; H_q^{k,\nu}\right)$ нётеровый. Тогда по теореме 3.2.2 существует правый регуляризатор для $\left(\overline{P}; H_q^{k,\nu}\right)$. Обозначим его R_1. Тогда имеет место:

$$\overline{P}R_1 = I + T_1,$$

где $T_1 : H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ компактный оператор.

Аналогично оценке (3.2.18) легко проверить, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\left\|(1-\varphi_{\varepsilon_0})\left(Q^1(x,\mathbb{D}) + Q^2(x,\mathbb{D})\right)R_1 u\right\|_{k-s,\nu,q} \le \frac{1}{2}\|u\|_{k-s,\nu,q}, \forall u \in H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n). \quad (3.2.20)$$

В силу полуэллиптичности $P(x,\mathbb{D})$ аналогично доказательству теоремы 3.2.4 рассмотрим оператор B, действующий из $H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ (см. (3.2.8) и (3.2.11)) для которого выполняется следующее соотношение:

$$P\varphi_{\varepsilon_0}Bu = \varphi_{\varepsilon_0}u + \varphi_{\varepsilon_0}T_2 u,$$

где $T_2 : H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ – компактный, следовательно, $T_3 := \varphi_{\varepsilon_0}T_2$ – компактный оператор из $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим

$$R := (1-\varphi_{\varepsilon_0})R_1 + \varphi_{\varepsilon_0}B.$$

Обозначим $T_4 := (1-\varphi_{\varepsilon_0})\left(Q^1+Q^2\right)R_1$. Тем самым получим

$$\begin{aligned} PRu &= P(1-\varphi_{\varepsilon_0})R_1u + P\varphi_{\varepsilon_0}Bu = \\ &= (1-\varphi_{\varepsilon_0})PR_1u + [P(1-\varphi_{\varepsilon_0})R_1u - (1-\varphi_{\varepsilon_0})PR_1u)] + \varphi_{\varepsilon_0}u + T_3u = \\ &= (1-\varphi_{\varepsilon_0})u + (1-\varphi_{\varepsilon_0})T_1u + T_4u + \varphi_{\varepsilon_0}u + T_3u + [P(1-\varphi_{\varepsilon_0})R_1u - (1-\varphi_{\varepsilon_0})PR_1u]\,. \end{aligned}$$

Обозначим $T_5 := P(1-\varphi_{\varepsilon_0})R_1-(1-\varphi_{\varepsilon_0})PR_1$. Нетрудно проверить, что $T_5 : H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ компактный оператор.

В силу (3.2.20) существует обратный оператор для $I+T_4$, действующий из $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда получим

$$PR(I+T_4)^{-1} = I + (T_1+T_3+T_5)(I+T_4)^{-1},$$

где оператор $T_6 := (T_1+T_3+T_5)(I+T_4)^{-1}$ компактен из $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Аналогичным образом из нётеровости $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ можно доказать нётеровость для $\left(\overline{P}; H_q^{k,\nu}\right)$. В силу теоремы 1.2.2 и следствия 1.1.1 из нётеровости $\left(\overline{P}; H_q^{k,\nu}\right)$ следует, что с некоторой постоянной $\delta > 0$ имеет место оценка

$$\left|\sum_{(\alpha:\nu)\le s} \widetilde{a}_\alpha \lambda^{s-(\alpha:\nu)}\xi^\alpha\right| \ge \delta(\lambda+|\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0.$$

Тем самым необходимость также доказана.

□

Теорема 3.2.6. *Пусть $P(x,\mathbb{D})$ дифференциальная форма вида (3.2.13) с коэффициентами удовлетворяющими $\lim\limits_{|x|\to\infty}\max\limits_{|x-y|\le 1}|a_\alpha^0(x)-a_\alpha^0(y)| = 0$ при $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, (\alpha:\nu) \le s$. Тогда $\left(P; H_q^{k,\nu}\right)$ нётеров тогда и только тогда, когда существует постоянная $\delta > 0$ такая, что*

$$\left|\sum_{(\alpha:\nu)\le s} a_\alpha^0(x)\lambda^{s-(\alpha:\nu)}\xi^\alpha\right| \ge \delta(\lambda+|\xi|_\nu)^s, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0, |x| \ge M, \tag{3.2.21}$$

где $M \in \mathbb{R}_+$ некоторое число.

Доказательство. Пусть $\delta_0 \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $0 \le \varphi(x) \le 1$ и $\varphi(x) = 1$ при $x \in K_{\frac{\delta_0}{2}}$, $\varphi(x) = 0$ при $|x| \ge \delta_0$ и $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\operatorname{supp}\psi \subset K_{2\delta_0}$ и $\psi(x) = 1$ при $x \in K_{\delta_0}$. Пусть $\omega \in \mathbb{R}_+$ такая, что $\omega\sqrt{n} < \delta_0$. Обозначим через $\{z_m\}_{m=0}^\infty$ точки решетки в пространстве $\mathbb{R}^n$ со стороной ω.

Обозначим

$$\varphi_m(x) := \varphi(x - z_m) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \varphi(x - z_q) \right)^{-1}, \psi_m(x) := \psi(x - z_m), \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда $\{\varphi_m\}_{m=0}^{\infty}$ разбиение единицы, удовлетворяющее следующим условиям:

(i). $\max\limits_{x,y \in \operatorname{supp} \varphi_m} |x - y| < \delta_0$,

(ii). существует $r \in \mathbb{N}$ такое, что для произвольного номера i найдётся не более r функций $\varphi_j(x)$ таких, что $\operatorname{supp} \varphi_i \cap \operatorname{supp} \varphi_j \neq \emptyset$;

(iii). $|D^\alpha \varphi_m(x)| \leq C_\alpha, \forall m \in \mathbb{Z}_+, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Обозначим $W_m = \operatorname{supp} \varphi_m, m \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $x_m \in W_m$.

Для $m \in \mathbb{Z}_+$ обозначим

$$P^m(x, \mathbb{D}) := \sum_{(\alpha:\nu) \leq s} \left(\psi_m(x) \left(a_\alpha^0(x) q(x)^{s-(\alpha:\nu)} - a_\alpha^0(x_m) q(x_m)^{s-(\alpha:\nu)} \right) + a_\alpha^0(x_m) q(x_m)^{s-(\alpha:\nu)} \right) D^\alpha.$$

Так как $q \in Q^{k-s,\nu}$, $\lim\limits_{m \to \infty} \max\limits_{|x - x_m| \leq 1} |a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(x_m)| = 0$, то нетрудно убедиться, что существует m_0 такое, что при $m > m_0$ выполняются условия теоремы 2.2 из [51] и существует оператор $R^m : H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ обратный для $P^m : H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$.

Для $m \leq m_0$ обозначим

$$P^m(x, \mathbb{D}) := \sum_{(\alpha:\nu) \leq s} \left(\psi_m(x) \left(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_m) \right) + a_\alpha(x_m) \right) D^\alpha.$$

Возьмём δ_0 из условия (i) настолько малым, что по лемме 2.2.3 для $m \leq m_0$ существует оператор $R^m : H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ такой, что

$$P^m R^m = I + T^m,$$

где $T^m : H^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H^{k-s+\sigma,\nu}(\mathbb{R}^n)$ с некоторым числом $\sigma = \sigma(\nu) > 0$.

Обозначим

$$L(x, \mathbb{D}) := \sum_{(\alpha:\nu) \leq s} a_\alpha^1(x) D^\alpha,$$

$$R := \sum_{q=0}^{\infty} \psi_q R^q \varphi_q.$$

Для $P(x, \mathbb{D})$ и $RP(x, \mathbb{D})$ имеют место следующие представления

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m P(x, \mathbb{D}) \psi_m$$

$$= \sum_{m=0}^{m_0} \varphi_m P^m(x, \mathbb{D}) \psi_m + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \varphi_m P^m(x, \mathbb{D}) \psi_m + \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \varphi_m L(x, \mathbb{D}) \psi_m,$$

$$RP = \sum_{q,m=0}^{m_0} \psi_q R^q \varphi_q \varphi_m P^m \psi_m + \sum_{q=0}^{m_0} \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \psi_q R^q \varphi_q \varphi_m P^m \psi_m$$
$$+ \sum_{q=m_0+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_0} \psi_q R^q \varphi_q \varphi_m P^m \psi_m + \sum_{q,m=m_0+1}^{\infty} \psi_q R^q \varphi_q \varphi_m P^m \psi_m$$
$$+ \sum_{q=0}^{m_0} \psi_q R^q \varphi_q \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \varphi_m L \psi_m + \sum_{q,m=m_0+1}^{\infty} \psi_q R^q \varphi_q \varphi_m L \psi_m. \quad (3.2.22)$$

Рассмотрим

$$\sum_{q,m=0}^{m_0} \psi_q R^q \varphi_q \varphi_m P^m \psi_m = \sum_{q,m=0}^{m_0} \psi_q R^q P^q \varphi_q \varphi_m \psi_m + \sum_{q,m=0}^{m_0} \psi_q R^q \left[\varphi_q \varphi_m P^m \psi_m - P^m \varphi_q \varphi_m \psi_m\right]$$
$$= \sum_{q,m=0}^{m_0} \varphi_q \varphi_m + \sum_{q,m=0}^{m_0} \psi_q T^q \varphi_q \varphi_m + \sum_{q,m=0}^{m_0} \psi_q R^q \left[\varphi_q \varphi_m P^m \psi_m - P^m \varphi_q \varphi_m \psi_m\right].$$

Из последнего получим, что

$$\sum_{q,m=0}^{m_0} \psi_q R^q \varphi_q \varphi_m P^m \psi_m = \sum_{q,m=0}^{m_0} \varphi_q \varphi_m + T_1,$$

где $T_1 : H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, как нетрудно убедиться, компактный оператор.

Рассмотрим

$$\sum_{q,m=m_0+1}^{\infty} \psi_q R^q \varphi_q \varphi_m P^m \psi_m = \sum_{q,m=m_0+1}^{\infty} \varphi_q \varphi_m + \sum_{q,m=m_0+1}^{\infty} \psi_q R^q \left[\varphi_q \varphi_m P^m \psi_m - P^m \varphi_q \varphi_m \psi_m\right].$$

Используя то, что $\frac{1}{q(x)} \rightrightarrows 0$ при $|x| \to \infty$ и то, что нормы операторов R^q, действующих из $H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$, равномерно ограничены, можно доказать, что для $T_2 := \sum\limits_{q,m=m_0+1}^{\infty} \psi_q R^q \left[\varphi_q \varphi_m P^m \psi_m - P^m \varphi_q \varphi_m \psi_m\right]$ из $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ в $H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ при достаточно большом m_0 имеет место $\|T_2\| < \dfrac{1}{2}$.

Аналогично, в силу условий на коэффициенты $a_\alpha^1(x)$, получим, что при достаточно большом m_0

$$\sum_{q=0}^{\infty} \psi_q R^q \varphi_q \sum_{m=m_0+1}^{\infty} \varphi_m L \psi_m = T_3,$$

где $T_3 : H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ и $\|T_3\| < \dfrac{1}{2}$.

Рассматривая остальные слагаемые из представления (3.2.22), нетрудно убедиться, что имеет место

$$RP = \sum_{q,m=0}^{\infty} \varphi_q \varphi_m + T_1' + T_2' = I + T_1' + T_2',$$

где $T_1^{'} : H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ – компактный оператор, а $\|T_2^{'}\| < 1$. Следовательно

$$\left(I + T_2^{'}\right)^{-1} RP = I + \left(I + T_2^{'}\right)^{-1} T_1^{'},$$

где $T := \left(I + T_2^{'}\right)^{-1} T_1^{'} : H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ – компактный оператор и, следовательно, $\left(I + T_2^{'}\right)^{-1} R : H_q^{k-s,\nu}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{k,\nu}(\mathbb{R}^n)$ – левый регуляризатор.

Аналогичным образом можно построить и правый регуляризатор.

Тем самым нётеровость $(P; H_q^{k,\nu})$ доказана.

Необходимость условия (3.2.21) для нётеровости $(P; H_q^{k,\nu})$ следует из теоремы 1.2.3.

$\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. **Априорные оценки в анизотропных пространствах**

   (a) Установлены условия на символ оператора, необходимые для выполнения априорных оценок специального вида в анизотропных весовых пространствах, а также в пространствах без веса.

   (b) Получены достаточные условия для выполнения априорных оценок для полуэллиптических операторов, действующих в специальных анизотропных весовых пространствах.

   (c) Получены достаточные условия для нётеровости полуэллиптического оператора в терминах выполнения специальных априорных оценок.

2. **Исследование стабильности индекса**

   (a) Доказана инвариантность индекса для полуэллиптического оператора на шкале анизотропных пространств при определённых условиях на коэффициенты главной части оператора.

   (b) Получены достаточные условия для стабильности индекса относительно возмущений младшими членами дифференциального выражения.

3. **Условия нётеровости для полуэллиптических операторов**

   (a) Описан класс нётеровых дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, действующих в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$.

   (b) Получены необходимые и достаточные условия для нётеровости полуэллиптического оператора с переменными коэффициентами, имеющими определённое поведение на бесконечности, действующего в анизотропных соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$, установлено равенство нулю индекса таких операторов.

(c) Получены необходимые и достаточные условия для нётеровости полуэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами, действующих в анизотропных весовых соболевских пространствах в $\mathbb{R}^n$.

Литература

[1] Noether F. Ueber eine Klasse singularer Integralgleichungen, Math. Ann., no. 82 (1921), p. 42–63.

[2] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962.

[3] Аткинсон Ф. В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб. 28 (70): 1 (1951), p. 3–14.

[4] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, т. 12, вып. 2(74) (1957) с. 43–118.

[5] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., изд. ЛГУ, 1950.

[6] Бицадзе А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными, УМН, т. 3, вып. 6 (1948), с. 211–212.

[7] Вишик М. И., Ладыженская О. А. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, УМН, т. 11, вып. 6 (1956), с. 41–97.

[8] Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

[9] Векуа И. Н. Уравнения и системы уравнений эллиптического типа, Труды IV Всес. матем. съезда, т. 1, (1963), с. 29–48.

[10] Боярский Б. В. О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости, Бюлл. Польской АН, сер. матем., астр, и физ. наук 7(9) (1959), с. 565–570.

[11] Вольперт А. И. Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, Труды Моск. матем. о-ва 10 (1961), с. 41–84.

[12] Schechter M. Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary cditioonditions, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), p. 37–66.

[13] Слободецкий Л. Н. Оценки решений линейных эллиптических и параболических систем, ДАН 120, № 3 (1958), с. 468–471.

[14] Слободецкий Л. Н. Оценки в L_2 решений эллиптических и параболических систем, Вестн. ЛГУ, №7 (1960), с. 28–47.

[15] Browder F. E. Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 45, № 3 (1959), p. 365–372.

[16] Browder F. E. A priori estimates for solutions of elliptic boundary value problems. I, II, Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wetenschap. 22 (1960), p. 145–159, 160–169 (I960). III, Indag. Math. 23 (1961), p. 404–410.

[17] Агмон Ш ., Дуглис А. , Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, I, М., ИЛ, 1962 (перевод из Comm. Pure Appl. Math. 12, № 4 (1959), p. 623–727).

[18] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II, Coram. Pure Appl. Math. 17, № 1 (1964), p. 35–92.

[19] Дынин А. С. Эллиптические интегро-дифференциальные операторы на многообразии, канд. диссертация, МГУ, 1961.

[20] Агранович М. С., Дынин А. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области, ДАН 146, № 3 (1962), с. 511–514.

[21] Волевич Л. Р. К теории краевых задач для общих эллиптических систем, ДАН 148, № 3 (1963), с. 489–492.

[22] Агранович М.С. Эллиптические сингулярные интегродифференциальные операторы. Успехи Мат. Наук, т. 20, вып. 5(125) (1965), с. 3–120.

[23] Atiyah M. F., Singer I. M., The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. A.M.S. 69 (1963), p. 422 – 433.

[24] Atiyah M. F., Bott R. The index problem for manifolds with boundary, Differential Analysis (Bombay Colloquium, 1964), p. 175–186.

[25] Rempel S., Schulze B.-W. Index Theory of Elliptic Boundary Problems. Monograph , Akademie-Verlag Berlin, 1982; North Oxford Acad. Publ. Comp., Oxford, 1985.

[26] Schulze B.-W. Pseudo-differential boundary problems with discontinuous symbols. Math. Nachr. 110 (1983), p. 263–277.

[27] Schulze B.-W. Pseudo-differential Boundary Value Problems, Conical Singularities, and Asymptotics. Monograph, Akademie Verlag, Berlin, 1994.

[28] Бабаян А. О. Об одной краевой задаче для уравнения Бицадзе в единичном круге. Известия НАН Армении: Математика. 42 (4). (2007) с. 3–10.

[29] Мухамадиев Э. М. О нормальной разрешимости и нетеровости эллиптических операторов в пространствах функций на $\mathbb{R}^n$, часть I. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 13, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 110, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1981, с. 120–140.

[30] Мухамадиев Э. М. О нормальной разрешимости и нетеровости эллиптических операторов в пространствах функций на $\mathbb{R}^n$, часть II. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 13, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 110, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1984, с. 108–126.

[31] Volpert V. Elliptic Partial Differential Equations, Volume 1: Fredholm Theory of Elliptic Problems in Unbounded Domains. Springer 2011.

[32] Багиров Л. А. Эллиптические уравнения в неограниченной области, Матем. сб., 86(128):1(9) (1971), с. 121–139.

[33] Nirenberg L., Walker H. F. The null spaces of elliptic partial differential operators in $\mathbb{R}^n$. J. Math. Anal. Appl. 1973. vol. 42, no. 2, p. 271–301.

[34] McOwen R. C. Behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces. Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979), p. 783–795.

[35] Lockhart R. B., McOwen R. C. On elliptic systems in $\mathbb{R}^n$. Acta Math. 150 (1983), p. 125–135.

[36] Lockhart R. B., McOwen R. C. Elliptic differential operators on noncompact manifolds. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CI. Sci. (4). 1985. vol. 12, no. 3., p. 409–447.

[37] Schrohe E. Fréchet algebra techniques for boundary value problems on noncompact manifolds: Fredholm criteria and functional calculus via spectral invariance. Mathematische Nachrichten. 199 (1) (1999), p. 145–185.

[38] Schrohe E. Spectral Invariance, Ellipticity, and the Fredholm Property for Pseudodifferential Operators on Weighted Sobolev Spaces. Annals of Global Analysis and Geometry. 10:3 (1992), p. 237–254.

[39] Арутюнов А. А., Мищенко А. С. Редукция исчисления псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к исчислению на компактном многообразии удвоенной размерности, Матем. заметки, 94:4 (2013), с. 488–505.

[40] Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., Мир, 1965.

[41] Волевич Л. Р. Локальные свойства решений квазиэллиптических систем. Мат. сб. т. 59, № 3, (1962), с. 3–52.

[42] Никольский С. М. Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения, ДАН СССР, т. 144 (1962), с. 767–769.

[43] Михайлов В. П. О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Тр. МИАН, т. 91 (1967), с. 59–81.

[44] Казарян Г.Г. Об одном семействе гипоэллиптических полиномов. Изв. АН Арм. ССР, Мат. т.9, но. 3 (1974), с. 189–211.

[45] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М., Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

[46] Волевич Л. Р., Панеях Б. П. Некоторые Пространства Обобщенных Функций И Теоремы Вложения, УМН, 20:1(121) (1965), с. 3–74.

[47] Слободецкий Л.Н. Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Уч. записки Ленинградского гос. института. том 197 (1958), с. 54–112.

[48] Карапетян Г. А., Дарбинян А. А. Нетеровость полуэллиптеского оператора с постоянными коэффициентами в области, Уч. Записи ЕГУ, no. 3 (2008), с. 16–24.

[49] Карапетян Г. А., Дарбинян А. А. Нетеровость регулярного оператора с постоянными коэффициентами в области, Труды инст. мат. им. Размадзе, Тбилиси, Т. 146 (2008), с. 57–66.

[50] Багиров Л. А. Априорные оценки, теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$. Матем. сб., 110(152):4(12) (1979), с. 475–492.

[51] Karapetyan G. A., Darbinyan A. A. Index of semi-elliptic operator in $\mathbb{R}^n$. Proceedings of the NAS Armenia: Mathematics, v. 42, no. 5 (2007), p. 33–50.

[52] Дарбинян А. А. Индекс полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Вестник РАУ N2 (2008), с. 100–105.

[53] Демиденко Г. В. О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}^n$. Сиб. матем. журн., 39:5 (1998), с. 1028–1037.

[54] Демиденко Г. В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа, Сиб. матем. журн., 49:5 (2008), с. 1064–1076.

[55] Rodino, L., Boggiatto P. Partial differential equations of multi-quasi-elliptic type, Ann. Univ. Ferrara, 45: 275 (1999), p. 275–291.

[56] Boggiatto P., Buzano E., Rodino L. Multi-Quasi-Elliptic Operators in $\mathbb{R}^n$. Partial Differential Operators and Mathematical Physics. Operator Theory Advances and Applications, vol 78.(1995), Birkhäuser Basel.

[57] Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховых пространствах, Наука, Москва 1971.

[58] Pehkonen E. Ein hypoelliptisches Diriclet Problem, Com.Mat.Phys., vol.48,no. 3 (1978), p. 131–143.

[59] Агранович М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: МЦНМО, 2013. — 379 с.

[60] Иосида К. Функциональный анализ, Мир, Москва, 1967.

[61] Kutateladze S. S. Fundamentals of Functional Analysis. Kluwer Texts in the Mathematical Sciences. V. 12. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1996.

[62] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, Физматлит 2006.

[63] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы, Мир, Москва, 1980.

[64] Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A. Basic Classes of Linear Operators, Birkhäuser Basel, 2003.

Статьи по теме диссертации

1. Tumanyan A. G. On the Invariance of Index of Semielliptical Operator on the Scale of Anisotropic Spaces. Journal of Contemporary Mathematical Analysis. vol. 51, no. 4 (2016), p. 167–178.

2. Tumanyan A. G. On Noethericity and Index of Differential Operators in Anisotropic Weighted Sobolev Spaces. Proceedings of the Yerevan State University, series Physical and Mathematical sciences, no. 3 (2016), p. 63—69.

3. Darbinyan A. A., Tumanyan A. G. On a priori estimates and the Fredholm property of differential operators in anisotropic spaces. Journal of Contemporary Mathematical Analysis. vol. 53, no. 2 (2018), p. 61–70.

4. Дарбинян А. А, Туманян А.Г. Необходимое и достаточное условие нетеровости оператора с постоянными коэффициентами. Вестник РАУ (2014) N2, с. 4–14.

5. Дарбинян А. А, Туманян А. Г. О необходимых и достаточных условиях для полуэллиптического оператора со специальными коэффициентами. Вестник РАУ (2017) N2, с. 5–13.

Тезисы по теме диссертации

1. Tumanyan A. G. On the Fredholm property of differential operators in anisotropic spaces. Book of Abstracts of Workshop "Analysis and PDE. Leibniz Universität Hannover"(2017), p. 14.

2. Tumanyan A. G. On Index Stability of Differential Operators in Anisotropic Spaces. Abstracts of the conference “YW in Harmonic Analysis and PDE”. Mathematical Institute of the University of Bonn (2016), p. 14–15.

3. Туманян А. Г. О стабильности индекса дифференциальных операторов в анизотропных пространствах. Сборник тезисов международной научной конференции “Ломоносов-2016” МГУ М. В. Ломоносова, Секция: Математика и Механика, Подсекция: Дифф. уравнения, динам. системы и оптимальное управление, М.: МАКС Пресс, 2016.

4. Darbinyan A. A., Tumanyan A. G. On Noethericity of differential operators. Abstracts of the 9th Annual Session of Armenian Mathematical Union, Yerevan (2017) p. 20–22.

5. Darbinyan A., Tumanyan A., Interpolation of Noethericity and index invariance on the scale of anisotropic spaces. Proceedings of International Conference "Harmonic analysis and approximations, VI", Tsaghkadzor, Armenia (2015) p. 28.

6. Darbinyan A. A., Tumanyan A. G. On index invariance of semi-elliptic operator, Abstracts of the 7th Annual Session of Armenian Mathematical Union, Yerevan (2015) p. 17–19.

7. Туманян А. Г. Исследование индекса полуэллиптического оператора. Сборник тезисов форума "Наука будущего – наука молодых" (2015) т. 1 , с. 352–354.

8. Дарбинян А. А., Туманян А. Г. Инвариантность индекса и интерполяция нетеровости. Сборник научных статей. Девятая Годичная Научная конференция РАУ (2015), с. 25-30.

9. Туманян А. Г. Об устойчивости индекса в анизотропных пространствах. Сборник научных статей. Десятая Годичная Научная конференция РАУ (2016), с. 24–29.

10. Дарбинян А. А. Туманян А. Г. Об априорных оценках для полуэллиптических операторов в анизотропных соболевских пространствах. Сборник научных статей. Одиннадцатая Годичная конференция РАУ (2017) с. 27–32.