

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
АРМЕНИЯ**

Ереванский Государственный Университет

ГРИШКО АННА МИКАЕЛОВНА

**ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИН С
НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по
специальности

01.02.04 - «Механика деформируемого твердого тела»

Научный руководитель :

Главный научный сотрудник Института механики НАН Армении,

Кандидат физико-математических наук,

профессор М. В. Белубекян

Ереван 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Обозначения.....	3
Введение.....	5
1 Основные уравнения и граничные условия теории упругости, поршневая теория	17
1.1 Напряженное и деформированное состояние сплошного анизотропного тела	17
1.2 Обобщённый закон Гука	19
1.3 Граничные условия	20
1.4 Поршневая теория.....	22
1.5 Гипотеза Кирхгофа.....	25
2 Устойчивость несимметричной по толщине неоднородной пластинки при обтекании в случае жесткого контакта между слоями.....	27
2.1 Упругая пластинка при условиях жесткого закрепления вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой.....	30
2.2 Упругая пластинка при условиях шарнирного опирания вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой.....	38
3 Динамическая устойчивость несимметричной по толщине неоднородной двухслойной пластинки при жестком контакте между слоями	42
3.1 Постановка задачи и метод решения.....	43
3.2 Определение зависимости критической скорости потери устойчивости от частоты планарных колебаний.....	53
4 Колебания и устойчивость несимметрично неоднородной двухслойной пластинки при условиях свободного скольжения между слоями	63
4.1 Вывод уравнений изгибных и планарных колебаний. Условие неотделимости слоев при изгибе. Частные случаи	64
4.2 Колебания двухслойных пластин при наличии проскальзывания между ортотропными слоями.....	80
4.3 Локализованные изгибные колебания прямоугольной двухслойной пластины при наличии скольжения между слоями	92
Заключение.....	103
Литература	106

ОБОЗНАЧЕНИЯ

ЛА	летательный аппарат
СК	система координат
$\sigma_x, \sigma_y,$	компоненты нормальных напряжений в декартовой СК
$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$	компоненты касательных напряжений в декартовой СК
u_x, u_y, u_z	компоненты вектора перемещений в декартовой СК
e_x, e_y, e_z	относительные деформации удлинения в декартовой СК
e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}	деформации сдвига в соответствующих координатных плоскостях
P_x, P_y, P_z	компоненты вектора объемной силы в декартовой СК
a_{ik}	упругие постоянные материала
E_i	модуль упругости материала в соответствующем направлении
G_{ik}	модуль сдвига материала в соответствующем направлении
ν_{ik}	коэффициент Пуассона материала в соответствующем направлении
u, v	компоненты планарных колебаний
w	компонента изгибных колебаний
M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}	компоненты вектора момента в направлениях напряжений
$Q_x, Q_y,$	перерезывающие силы в соответствующих направлениях

D	эффективная жесткость пластинки на изгиб
C	эффективная жесткость на растяжение (сжатие)
B_0	эффективная жесткость на сдвиг
V	скорость набегающего потока газа (воздуха)
χ	показатель политропы
p_∞ и c_∞	давление и скорость в невозмущенном газе
η	угол наклона профиля
h	толщина пластинки
h_i	толщина слоев пластинки
q	нормальная распределенная нагрузка при обтекании газом
$V_{кр}$	критическая скорость набегающего потока газа (воздуха)
m	приведенная масса
ω	частота колебаний

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория упругой устойчивости, которая берет начало еще с работ Л. Эйлера, является довольно подробно изученным разделом прикладной механики. В данной теории предполагается, что при достаточно малых нагрузках упругая система устойчива и что она остается таковой до первой точки разветвления форм равновесия, после чего исходная форма равновесия становится неустойчивой. В теории упругой устойчивости критическая сила (в случае обтекания набегающим потоком газа, критическая скорость потока) определяется как наименьшее значение силы (скорости потока газа), при котором вместе с исходной формой равновесия могут иметь место другие, довольно близкие к ней, формы равновесия. Данный подход использовал еще Эйлер, у которого критическая сила определялась как «сила, требующаяся для самого малого наклона колонны» [1]. Такая интерпретация критической силы (скорости потока газа) или метод Эйлера позволяет свести задачу устойчивости формы равновесия к вопросу определения минимальных собственных значений некоторых краевых задач.

Одним из методов исследования неконсервативных задач теории упругой устойчивости является динамический метод, который основан на изучении колебаний вблизи положения равновесия. Аэродинамические нагрузки, действующие на элементы конструкций, в основном представляют собой неконсервативные силы. Нагрузки классической теории упругой устойчивости, как правило, потенциальные силы гравитационного происхождения («мертвые» нагрузки). Неконсервативные задачи упругой устойчивости представляют интерес в связи с развитием машиностроения, ракетной техники и авиации.

В неконсервативных задачах упругой устойчивости важное место занимают вопросы устойчивости упругих тел, которые обтекаются потоком газа или находятся в жидкости. Действующие силы, которые возникают при обтекании набегающим

потоком, находятся в зависимости от упругих деформаций тела, следовательно, данные задачи решаются совместным рассмотрением уравнений теории упругости и аэрогидромеханики. Так образовался новый раздел механики: теория аэроупругости.

Задачи теории аэроупругости представляют большой интерес в ракетной технике и авиации, в меньшей мере для энергетики, строительство и т. п. Задачи аэроупругости, впервые, были поставлены в связи с потребностями авиации. Такие аэроупругие явления, как дивергенция крыла, флаттер крыла и оперения были причиной многих катастроф на заре развития авиации, но понимание и теоретическое объяснение последовало гораздо позже.

В теории упругой устойчивости большое внимание уделяется вопросам устойчивости пластин и оболочек, обтекаемых потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью. Такие задачи представляют большой интерес из-за вибраций, которые возникают в обшивках современных летательных аппаратов. Потеря устойчивости в аэроупругих системах является одним из опасных явлений, поскольку влечет за собой быстрое разрушение конструкции.

В теории упругой устойчивости рассматриваются следующие виды потери устойчивости: статическая (дивергенция) и динамическая (флаттер). Дивергенция – это статическая деформация конструкции при превышении некоторой критической скорости набегающего потока. Флаттер – это колебания конструкции, возникающие при ее взаимодействии с потоком набегающего газа. Различают три основных типа флаттера: классический флаттер, срывной флаттер и панельный флаттер. При набегающем потоке газа возможны следующие механизмы возникновения неустойчивости: одномодный флаттер и флаттер связанного типа [2]. В теории классического флаттера (колебания крыла, оперения ЛА) возможно возникновение обоих типов флаттера. В случае панельного флаттера, где используется поршневая теория [3, 4] экспериментально был выявлен и исследован только флаттер связанного типа. Существование флаттера пластины с одной степенью свободы впервые был теоретически открыт в 2000-х гг [5]. В.В. Веденеевым в 2010-м году было получено экспериментальное подтверждение его существования [6]. На сегодняшний день

продолжаются работы по изучению флаттера пластины с одной степенью свободы [7 - 10].

В данной работе изучаются колебания и устойчивость плоских упругих пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Эта задача стоит, например, при изучении «панельного флаттера», который собой представляет интенсивные вибрации панелей самолетов и ракет, возбуждаемых набегающим потоком воздуха.

Рассмотрим возмущенное состояние покоя отдельной панели обшивки крыла самолета (см. Рис. 1).

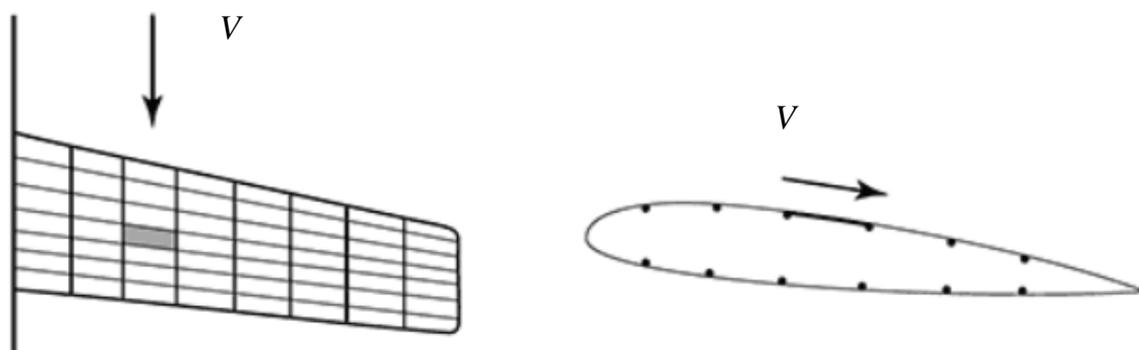


Рис. 1 Отдельная панель обшивки крыла, подверженная возмущению

Панель обшивки крыла подвержена возмущению при полете, например, при турбулентности или перепадах давления воздуха. При рассмотрении отдельной панели обшивки можно принять следующую расчетную схему: предполагается, что панель вмонтирована в жесткую раму и с одной стороны обтекается набегающим потоком воздуха (см. Рис. 2).

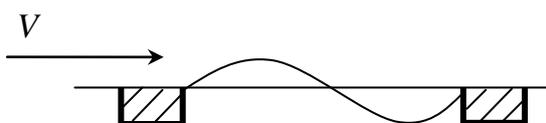


Рис. 2 Возмущение отдельной панели обшивки крыла

В случае, когда скорость набегающего потока не велика, энергия возмущений рассеивается в потоке. Но при превышении определенной критической скорости от воздуха к панели будет возникать обратный приток энергии. Вследствие чего возникающие малые колебания «раскачиваются» потоком воздуха, и положение равновесия панели обшивки становится неустойчивым. Это приводит к быстрому нарастанию амплитуды колебаний, в результате чего происходит разрушение панели.

В развитии теории аэроупругости резкий скачок произошёл в период второй мировой войны. Основные работы были посвящены учету сжимаемости и исследованию флаттера и дивергенции при околозвуковых и сверхзвуковых скоростях. Особенности развития авиации в данный период повлияли на методах определения аэродинамических сил. В связи с изменениями в конструктивных формах самолетов изменилось также «упругая» сторона задачи. Так, впервые проблема панельного флаттера возникла на немецких ракетах V-2 в 1944 г. В результате многие из этих самолетов были подвержены разрушениям [11]. На летательных аппаратах панельный флаттер (даже в случае разрушения отдельных панелей), как правило, не приводит к непосредственному разрушению, но может привести к ухудшению управляемости и разрушению других конструктивно важных частей летательного аппарата. Наглядным примером является разрушение трубопровода гидравлической системы, соединенного с панелью, которая была подвержена флаттеру. Это произошло в 1950-х гг. на одном из американских истребителей. На другом парке истребителей панельный флаттер обшивки вызвал проблему повышенного шумового фона в кабине пилотов [11]. Явление панельного флаттера было зафиксировано на американском истребителе F-117A в 1980-х гг. После испытательных полетов наблюдалось разрушение около половины композитных панелей обшивки, в результате чего они были перепроектированы [12]. Задача панельного флаттера решалась также в процессе проектирования самолета – разведчика Lockheed SR-71 [13], истребителя F-22 [14], гиперзвукового летательного аппарата X-2000 (ЦИАМ) [15, 16].

В наши дни вопрос изучения панельного флаттера остается актуальной проблемой. В связи с совершенствованием характеристик ЛА, внедрением новых материалов (композиты, полимеры и т. п.) происходит снижение их массы, следовательно, уменьшается жесткость панелей обшивки, что влечет за собой проблемы связанные с явлением потери устойчивости панелей разных конструкции. В настоящее время проектируются и испытываются летательные аппараты с гибкими крыльями, которые адаптируются к условиям полета. С внедрением новых материалов и требованиями к весовым характеристикам, обшивки этих конструкции становятся все более тонкими. Разработка новых геометрических форм, новые подходы управления схемой обтекания и пограничным слоем меняет параметры обтекания панелей потоком воздуха и их физические свойства. Это все может привести к возникновению проблем, связанных с потерей устойчивости панелей конструкции.

Как уже отмечалось, среди задач аэроупругости важное место занимают разные виды потери устойчивости авиаконструкций, в частности, «дивергенция панелей» обшивок ЛА, которые представляют собой плоские пластинки или пологие оболочки, и «панельный флаттер - интенсивные вибрации панелей обшивки с возрастающей амплитудой. Как следствие этого происходит усталостное разрушение обшивки летательных аппаратов, что влечет за собой снижение ресурсных характеристик и потерю управляемости.

В задачах панельного флаттера рассматриваются в основном сверхзвуковые скорости потока. При обтекании дозвуковым потоком газа основной вид потери устойчивости это дивергенция – статическое выпучивание пластинки. Это явление доказано теоретический и экспериментально [17].

Первые результаты по исследования задач панельного флаттера полосы приведены в работах [18] и [19]. Интегрально – дифференциальное уравнение движения конечной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком, в двумерной постановке задачи было получено еще в 1946г. [18]. Нестационарное давление получено из теории потенциального течения [20]. Для случая обтекания

прямоугольной пластинки, близкой к продольному или поперечному, в работе [21] приведены формулы для трехмерной постановки. В 1958г. было предложено аналитическое решение интегрально – дифференциального уравнения движения пластины и получено частотное уравнения [22]. В этой работе задача флаттера сводится к решению алгебраического частотного уравнения.

Подробные обзоры проведенных работ по изучению явления флаттера проведены в работах [23 - 26] и в книгах [27 - 29].

В задачах флаттера определенные трудности связаны с тем, что аэродинамические силы сложно выразить через возмущения обтекаемой поверхности. После работ Хейса [30], был предложен ряд подходов для определения аэродинамических сил. Наиболее простой и используемый подход известен как «закон плоских сечений» или «поршневая теория» [27]. Данный подход приводит к формуле, которая связывает местное давление, действующее на тело, с нормальной компонентой скорости к поверхности в рассматриваемой точке. Эту формулу можно линеаризовать, принимая возмущения малыми. Исходя из этого, многие проблемы панельного флаттера в линейной постановке сводятся к исследованию собственных значений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [31 - 35].

Поршневая теория дает возможность в линейной постановке решить проблемы устойчивости пластин и оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Ряд работ армянских и др. авторов посвящено изучению задач флаттера в рамках закона «плоских сечений» [36 - 55].

Задача панельного флаттера исследовалась в различных случаях закрепления пластин, их относительных размеров и свойств материалов. В рассмотренных задачах учитывались как усилия в плоскости пластинки, так и произвольное направление потока [27, 35, 56 - 62].

При постановке задач колебаний обычно ставится вопрос не о свободных колебаниях пластинки, а о распространении волн в ней. Это связано с тем, что свободные колебания, собственные формы которых не имеют локализованного

характера, невозможны в пластинке из-за его бесконечной длины. Локализация собственной формы ведет к свободным колебаниям бесконечного в одном из направлений тела. Свободные колебания, локализованные около края тела, назовём краевыми колебаниями, а локализованные около линии раздела свойств материала - интерфейсными. Свободные краевые колебания связаны с явлением краевого резонанса, впервые обнаруженным при экспериментальных исследованиях колебаний круглого диска [63]. Термин «краевой резонанс» обусловлен локализацией области интенсивных движений около края диска.

Экспериментальные работы проведены для конечных цилиндров [64 - 66] и прямоугольных пластин [67], при этом обнаружено явление краевого резонанса. Результаты проведенных работ согласуются с результатами численного решения задач о вынужденных колебаниях прямоугольника [68 - 71] и конечного цилиндра [68, 72 - 74], в которых найдены резонансные частоты с локализованными около края формами. Интерес к изучению этого явления в полуполосе [75 - 80] и полубесконечном цилиндре [81 - 83] вызвала зависимость частот краевого резонанса от размеров тела.

Явления граничного и краевого резонансов относятся к широкому классу резонансных явлений, связанных с локализацией колебаний около различного вида неоднородностей (трещин, включений, границ раздела свойств материала и т.п.). Изучению таких явлений посвящены работы В.А. Бабешко и И.И. Воровича [84 - 87].

Задачам свободных краевых колебаний оболочек посвящены работы [88 - 99], в которых рассмотрены локализованные у торца свободные колебания.

Изучению задач потери устойчивости панелей и оболочек посвящено огромное количество работ. В книге [29] приведено более 700 ссылок по этой теме.

Данная работа посвящена изучению колебаний и устойчивости слоистых пластин в зависимости от жесткости граничных условий и типа контакта между слоями. Изучение зависимости критической скорости потока газа при сверхзвуковом обтекании от параметра, характеризующего жесткость граничных условий, дает

возможность изначально проектировать конструкцию с необходимой критической скоростью обтекания. На поведение слоистых конструкций существенное влияние оказывает также тип контакта между слоями. В данной работе рассмотрены случаи жесткого контакта и скольжения между слоями.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Во введении приведен обзор литературы, посвященной задачам локализованных колебаний, устойчивости деформируемых тонких тел, находящихся в сверхзвуковом потоке газа, и поршневой теории. Приведено обоснование актуальности темы и краткое описание диссертационной работы.

Первая глава состоит из пяти разделов. В данной главе приведены основные сведения из теории упругости сплошного тела, необходимые для дальнейшего использования.

В первом разделе данной главы приведено описание напряженно – деформируемого состояния сплошного анизотропного тела и дифференциальные уравнения движения сплошной среды в декартовой системе координат.

Во втором разделе приведен обобщенный закон Гука для однородного упругого тела.

В третьем разделе приведены граничные условия для жестко защемленного края, шарнирно опертого, свободного края, в случае свободного скольжения.

В четвертом разделе этой главы приведено краткое описание поршневой теории. Приведена формула определения давления на поверхность при обтекании сверхзвуковым потоком газа.

В пятом разделе описана гипотеза Кирхгофа и приведена зависимость деформаций и перемещений вводя произвольные функции $u_0(x,y)$ и $v_0(x,y)$, которые представляют собой перемещения точек срединной плоскости $z = 0$ по осям x и y .

Вторая глава состоит из двух разделов. В этой главе рассмотрена проблема аэроупругой статической неустойчивости (дивергенция) несимметрично по толщине неоднородной пластинки при жестком контакте между слоями. Задача решена в

предположении, что для каждого слоя действительна теория Кирхгофа. В данной постановке рассмотрены два случая граничных условий [100].

В первом разделе рассмотрена упругая пластинка при условиях жесткого закрепления вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой. Получено решение задачи относительно безразмерных величин γ и sb , и определена критическая скорость потока, при которой будет иметь место статическая потеря устойчивости (выпучивание) пластины.

Во втором разделе рассмотрена упругая пластина при условиях шарнирного опирания вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой. Аналогично первому разделу данной главы, при граничных условиях шарнирного закрепления вдоль одной из кромок, получено решение уравнения дивергенции относительно безразмерных величин и приведена зависимость критической скорости от параметров γ и sb .

Третья глава состоит из двух разделов. В данной главе рассматривается задача динамической неустойчивости несимметрично неоднородной по толщине прямоугольной пластинки на основе дифференциальных уравнений, полученных в [101], в предположении действительности гипотезы Кирхгофа и без условия постоянности коэффициента Пуассона.

Несимметричность механических характеристик материала в данной задаче понимается следующим образом: если функции механических характеристик материала пластинки непрерывны по толщине, они несимметричны по отношению к срединной поверхности пластинки. В случае, когда функции кусочно-непрерывны - задача несимметрична по отношению к любой из слоев и к срединной поверхности пластинки. При данной постановке задачи, уравнения планарных и изгибных колебаний не отделяются.

В первом разделе приведена постановка задачи и описание метода решения в общем случае [102]. Показано, что в отличии от изотропных пластин, в случае несимметрично неоднородных пластин при воздействиях, возбуждающих планарные колебания, будут возникать также изгибные колебания и наоборот. В общем случае

наличии планарных колебаний несимметрично неоднородной по толщине пластинки получены четыре характеристических уравнения относительно частоты колебаний, при которой может иметь место явление резонанса.

Во втором разделе рассмотрен частный случай динамической неустойчивости несимметрично неоднородной по толщине прямоугольной пластинки в случае, когда планарные колебания по заданному закону вызывают изгибные колебания [103]. Приведены численные расчеты для конкретного материала при разных толщин пластинки.

Четвертая глава состоит из трех разделов. В данной главе решаются задачи колебания и устойчивости несимметрично неоднородной двухслойной пластинки при условиях свободного скольжения между слоями, на основе гипотезы Кирхгофа для каждого слоя в отдельности.

В первом разделе рассматривается двухслойная пластина при условии скользящего контакта между ортотропными слоями [104]. Предполагается, что гипотеза Кирхгофа действительна для каждого слоя в отдельности. Получены дифференциальные уравнения изгибных и планарных колебаний. Показано, что, в общем случае, задачи изгибных и планарных колебаний не отделяются. Приведены граничные условия на кромках пластины.

При решении задач изгиба и колебаний двухслойной пластинки исключается возможность отделения слоев друг от друга в процессе деформации. Возможность отделения слоев проверяется после решения задачи и определения напряжения. Показано, что независимо от граничных условий, нормальное напряжение на стыке пластин сжимающее, поэтому расслоение будет отсутствовать.

Рассмотрена возможность расслоения в частном случае, когда на двухслойную пластину действует только объемная сила веса (сила притяжения). Получен критерий живучести (условие отсутствия расслоения) двухслойной ортотропной пластины. Показано, что критерий живучести существенно зависит от толщины слоев пластинки.

Во втором разделе рассмотрена задача колебаний двухслойной пластинки в условиях свободного скольжения между контактными слоями. Данное условие подразумевает, что касательные напряжения в граничных условиях на контактных поверхностях равны нулю [105].

Рассмотрены колебания двухслойной пластины при условии шарнирного закрепления ее краев. В одномерном случае условие Навье совпадает со свободным опиранием. Приходим к системе уравнений, решение которой может существовать в трех случаях. Каждый случай рассмотрен отдельно. В первом случае показано, что изгибные колебания пластины приводят к возникновению планарных колебаний с такой же частотой колебаний как у изгибных. Во втором случае - планарные колебания пластины приводят к возникновению изгибных колебаний. Определены условия возникновения резонанса.

Рассмотрена также задача колебаний двухслойной пластины при жестком закреплении по краю $x=0$ и свободном крае по $x=a$. Получена частота колебаний, при которой возникнет резонанс.

В третьем разделе исследуются задачи колебаний пластины из двух слоев, в случае, когда между слоями касательные напряжения равны нулю (скольжения между слоями) [106]. Показано, что условия Навье приводятся к условиям шарнирного закрепления для пластин. Принимая гипотезу Кирхгофа, устанавливаются граничные условия свободного края двухслойной пластинки с проскальзыванием.

Решена задача Коненкова для двухслойной пластинки, при наличии скольжения между слоями. Рассмотрена полу бесконечная пластина – полоса с граничными условиями Навье на сторонах $y = 0; b$, и свободного края $x = 0$ с заданными условиями затухания. Существование решения этой задачи означает существование локализованных в окрестности свободного края колебаний.

Влияние двухслойности пластинки в поставленной задаче входит в безразмерный параметр, который характеризует фазовую скорость - корни характеристического уравнения.

Решение задачи приводится к системе однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных. Равенство нулю детерминанта этой системы дает уравнение, определяющее безразмерную частоту локализованных изгибных колебаний [107].

В случае двухслойных пластин с проскальзыванием отличие от уравнения Коненкова заключается в том, что здесь вместо коэффициента Пуассона в характеристическом уравнении участвует среднее значение коэффициентов Пуассона двух слоев. Это отличие может иметь значение для анизотропных материалов, либо если есть материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона.

Еще одно отличие рассматриваемой здесь задачи состоит в том, что в случае двухслойных пластин возбуждение локализованных изгибных колебаний приводит к появлению локализованных продольных колебаний.

Заключение содержит основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Пользуясь случаем, я бы хотела выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю М. В. Белубеяну за постановку задач, за понимание и терпение.

Также хотела бы выразить свою благодарность своим родителям, мужу и, конечно, сыну. Их понимание и поддержка дали мне возможность закончить эту работу.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

1 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ПОРШНЕВАЯ ТЕОРИЯ

В данной главе приведены необходимые для дальнейшего использования сведения из теории упругости сплошного анизотропного тела [101].

Подробный вывод основных уравнений теории упругости анизотропного тела можно найти в [108, 109].

1.1 Напряженное и деформированное состояние сплошного анизотропного тела

Рассмотрим сплошное тело в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z под воздействием произвольных сил (см. Рис. 3).

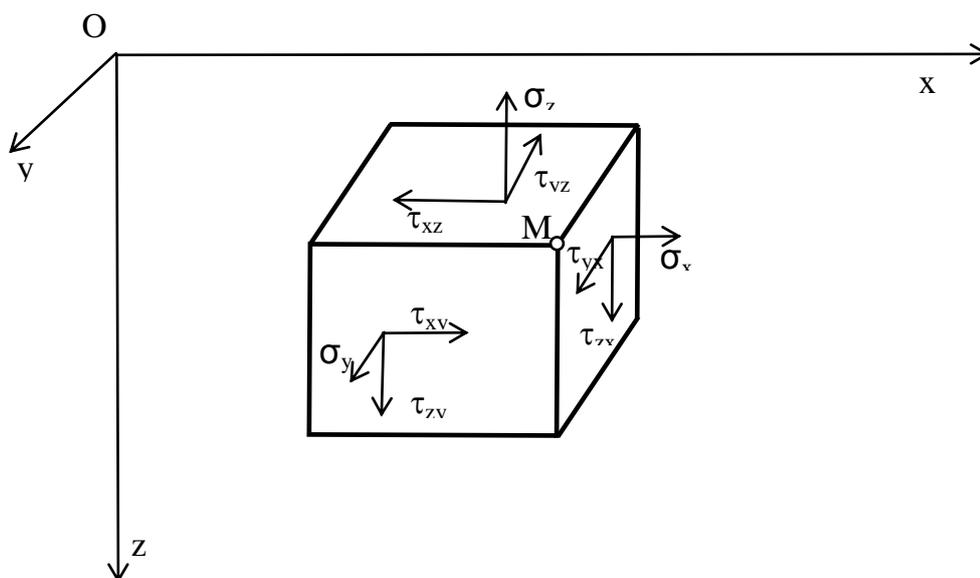


Рис. 3 Сплошное тело в прямоугольной декартовой системе координат

Произвольная точка М с координатами x, y, z , принадлежащая телу, получит перемещение, которое можно представить тремя проекциями вектора полного перемещения:

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t), \\ u_y &= u_y(x, y, z, t), \\ u_z &= u_z(x, y, z, t) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Деформированное состояние точки М характеризуется шестью составляющими деформации. Три из этих составляющих, обозначаемые e_x, e_y, e_z , представляют относительные деформации удлинения по соответствующим направлениям, а остальные три, обозначаемые e_{xy}, e_{yz}, e_{zx} , представляют деформации сдвига в соответствующих координатных плоскостях $z = \text{const}, x = \text{const}, y = \text{const}$.

Зависимость деформации $e_x, e_y, e_z, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ от перемещений u_x, u_y, u_z точки М:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & e_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ e_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & e_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \\ e_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & e_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Напряженное состояние произвольной точки характеризуется тензором напряжений с девятью компонентами. Три из этих компонент являются нормальными напряжениями, действующими по трем взаимно перпендикулярным направлениям x, y, z . Шесть из них – касательными напряжениями, действующими в трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостях. Для касательных напряжений действует закон парности, следовательно, число независимых напряжений равно шести.

Условия равновесия сплошного тела в декартовой системе координат представляются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + P_x &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + P_y &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + P_z &= 0
\end{aligned}
\tag{1.1.3}$$

где $P_x = P_x(x, y, z)$, $P_y = P_y(x, y, z)$, $P_z = P_z(x, y, z)$ – проекции объемной силы, отнесенной к единице объема по соответствующим направлениям x, y, z .

Дифференциальные уравнения движения сплошной среды в декартовой системе координат

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + P_x &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + P_y &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + P_z &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{1.1.4}$$

1.2 Обобщённый закон Гука

При малых деформациях в произвольно выбранной декартовой системе координат x, y, z обобщенный закон Гука для однородного упругого тела можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
e_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{xy} \\
e_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{xz} + a_{26}\tau_{xy} \\
e_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy} \\
e_{yz} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} + a_{46}\tau_{xy}
\end{aligned}
\tag{1.2.1}$$

$$e_{xz} = a_{51}\sigma_x + a_{52}\sigma_y + a_{53}\sigma_z + a_{54}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} + a_{56}\tau_{xy}$$

$$e_{xy} = a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{xz} + a_{66}\tau_{xy}$$

где a_{ik} – упругие постоянные. В общем случае число независимых упругих постоянных равно 21 ($a_{ik} = a_{ki}$).

Если в каждой точке тела существуют три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, тело называется ортотропно анизотропным или ортотропным.

Для ортотропного тела обобщенный закон Гука (1.2.1) запишем в следующем виде: $e_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z$, $e_y = a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z$

$$e_z = a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z \quad (1.2.2)$$

$$e_{yz} = a_{44}\tau_{yz}, e_{xz} = a_{55}\tau_{xz}, e_{xy} = a_{66}\tau_{xy}$$

В случае ортотропного тела количество упругих постоянных a_{ik} равно девяти.

Уравнения (1.2.2) можно представить в следующем виде:

$$e_x = \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_z, e_y = \frac{1}{E_2}\sigma_y - \frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_z$$

$$e_z = \frac{1}{E_3}\sigma_z - \frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_y \quad (1.2.3)$$

$$e_{yz} = \frac{1}{G_{23}}\tau_{yz}, e_{xz} = \frac{1}{G_{13}}\tau_{xz}, e_{xy} = \frac{1}{G_{12}}\tau_{xy}$$

С учетом симметрии уравнений (1.2.2) действительны следующие зависимости:

$$E_2\nu_{21} = E_1\nu_{12}, E_3\nu_{32} = E_2\nu_{23}, E_1\nu_{13} = E_3\nu_{31} \quad (1.2.4)$$

1.3 Граничные условия

Граничные условия отражают характер закрепления или нагружения пластины по контуру. Рассмотрим типовые граничные условия [110]:

а) **Жестко защемленный край.** Пусть край $x = 0$ жестко защемлен. Тогда при $x = 0$ перемещения должны быть равны нулю, т. е. $u = v = w = 0$. Отсюда следует, что:

$$\begin{aligned} \text{при } x = \text{const} \quad w = \partial w / \partial x = 0, \\ \text{при } y = \text{const} \quad w = \partial w / \partial y = 0, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

т. е. на защемленных краях пластины обращаются в нуль прогиб и соответствующие углы поворота.

б) **Шарнирно опертый край.** На шарнирно опертом крае обращаются в нуль прогиб и изгибающий момент. Например, для $x = 0$ необходимо, чтобы $w = 0$ и $M_x = 0$. Следовательно, условия шарнирного опирания имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x = \text{const} \quad w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0, \\ \text{при } y = \text{const} \quad w = \partial^2 w / \partial y^2 = 0, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

г) **Свободный край.** На свободном крае отсутствуют напряжения σ_x , τ_{xy} и τ_{xz} , т. е. должны выполняться условия $M_x = M_{xy} = Q_x = 0$. Однако, в рассматриваемой теории на каждом крае должно быть не более двух граничных условий, как это было при граничных условиях защемленного и шарнирно опертого края. Выше записанных три условия статически эквивалентны двум, поскольку крутящий момент на крае сводится к паре перерезывающих сил. Добавляя эти перерезывающие силы к основной Q_x и поступая аналогичным образом на крае $y = \text{const}$, получим обобщенные перерезывающие силы Кирхгофа.

$$Q_x^* = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y^* = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (1.3.3)$$

Выражая обобщенные силы через прогиб:

$$Q_x^* = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (1.3.4)$$

$$Q_y^* = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (1.3.5)$$

приходим к следующим граничным условиям на свободном крае:

$$\text{при } x = \text{const} \quad M_x = Q_x^* = 0 \quad (1.3.6)$$

$$\text{при } y = \text{const} \quad M_y = Q_y^* = 0 \quad (1.3.7)$$

Таким образом, условия Кирхгофа – Тэта – Томсона через прогиб w на свободном крае $x = \text{const}$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (1.3.8)$$

при $y = \text{const}$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad (1.3.9)$$

д) **Свободное скольжение.** При свободном скольжении на краю обращаются в нуль угол поворота и перерезывающая сила. Например, если на краю $x = \text{const}$ свободное скольжение, граничные условия имеют вид:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (1.3.10)$$

1.4 Поршневая теория

Рассмотрим установившееся движение тонкого профиля [27]. Предположим, профиль движется со сверхзвуковой скоростью V (см. Рис. 4).

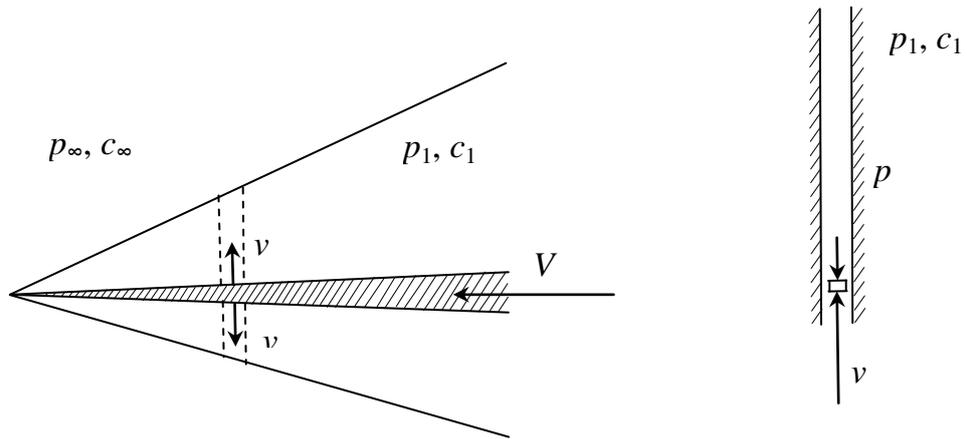


Рис. 4 Движение тонкого профиля со сверхзвуковой скоростью V

При сверхзвуковых скоростях влияние возмущений носит все более локальный характер с увеличением скорости V . В предельных случаях больших сверхзвуковых скоростей частицы газа движутся практически только в направлении, перпендикулярном к скорости V , в узких областях, ограниченных весьма близкими вертикальными плоскостями. Точность выполнения «закона плоских сечений» тем выше, чем больше скорость движения V .

Исходя из «закона плоских сечений», давление на поверхности тела p можно определить как давление газа на поршень, движущейся в одномерном канале. Отсюда название «поршневая теория».

$$p = p_{\infty} \left(1 + \frac{\chi - 1}{2} \frac{v}{c_{\infty}} \right)^{\frac{2\chi}{\chi - 1}} \quad (1.4.1)$$

где χ - показатель политропы, p_{∞} и c_{∞} - давление и скорость в невозмущенном газе. При определении давления на часть профиля за ударной волной, вместо p_{∞} и c_{∞} берутся параметры p_1 и c_1 газа (см. Рис. 4) за ударной волной.

Разлагая (1.4.1) в ряд, получим:

$$p = p_{\infty} \left[1 + \frac{\chi v}{c_{\infty}} + \frac{\chi(\chi + 1)}{4} \left(\frac{v}{c_{\infty}} \right)^2 + \frac{\chi(\chi + 1)}{12} \left(\frac{v}{c_{\infty}} \right)^3 + \dots \right] \quad (1.4.2)$$

Линейное приближение соответствует формуле для стационарного давления на тонкий профиль, обтекаемый сверхзвуковым потоком:

$$p - p_{\infty} = \frac{\rho_{\infty} V^2 \eta}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (1.4.3)$$

где η - угол наклона профиля. Если под η принимать характеристику местного «скоса» потока, который может меняться по длине профиля, то:

$$p - p_{\infty} = \frac{\rho_{\infty} V^2 v}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (1.4.4)$$

При $M^2 \gg 1$ формула (1.4.4) переходит в линейное приближение формулы (1.4.2).

В случае линеаризованного течения газа вдоль оболочки, по которой распространяются упругие волны:

$$v = \frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.4.5)$$

Следовательно, из (1.4.2) избыточное давление:

$$\bar{p} = p - p_{\infty} = \frac{\chi p_{\infty}}{c_{\infty}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.4.6)$$

Обозначив:

$$k = \frac{\chi p_{\infty}}{c_{\infty}} \quad (1.4.7)$$

выражение (1.4.6) запишем:

$$\bar{p} = k \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (1.4.8)$$

Разные варианты уточнения “поршневой теории” обсуждаются, в частности, в монографии [111] и в статье [112].

1.5 Гипотеза Кирхгофа

Введем прямоугольную декартовую систему координат, показанную на Рис. 5. Плоскость $z = 0$ назовем срединной плоскостью. Отрезок нормали mn к срединной плоскости, назовем нормальным элементом. В общем случае на пластину действуют поверхностные нагрузки на плоскостях $z = \pm h / 2$ (Рис. 5), объемные и контурные силы, которые в совокупности вызывают растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб пластины.

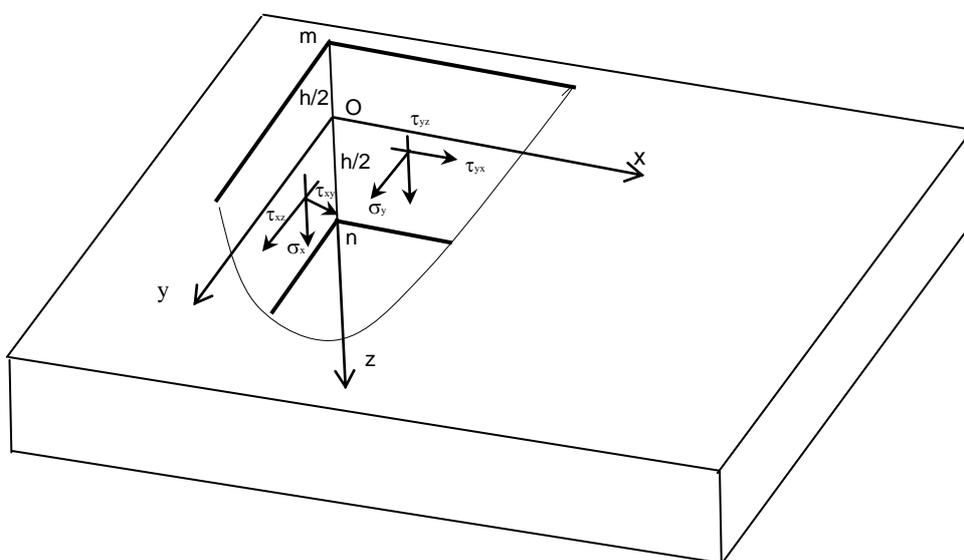


Рис. 5 Система координат и напряжения, действующие в пластине

Равновесие упругого тела описывается общими уравнениями теории упругости (1.1.3), геометрическими соотношениями (1.1.2) и законом Гука (1.2.3).

Толщина пластины h по сравнению с размерами пластины в плане мала. Это позволяет ввести ряд гипотез. Гипотеза предложенная Кирхгофом формулируется следующим образом:

1. Нормальный элемент mn (Рис. 5) в процессе деформации пластины:
 - а) не изменяет своей длины;
 - б) остается прямым и нормальным к срединной поверхности пластины после деформации.

2. Нормальные напряжения σ_z , действующие по плоскостям $z = \text{const}$, малы по сравнению с основными напряжениями.

Преобразуем уравнения (1.1.2), (1.1.3) и (1.2.3) с учетом выше изложенных гипотез. Из 1а следует, что $e_z = 0$, т. е.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad w = w(x, y) \quad (1.5.1)$$

Перемещение w является основной неизвестной в теории изгиба пластин и называется прогибом. Учитывая гипотезу 1б можно заключить, что:

$$e_{xz} = e_{yz} = 0 \quad (1.5.2)$$

Согласно равенствам (1.1.2):

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \quad (1.5.3)$$

интегрируя соотношения (1.5.3) по z , учитывая, что w не зависит от z , получим:

$$u_x = -z \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_0(x, y), \quad u_y = -z \frac{\partial u_z}{\partial y} + v_0(x, y) \quad (1.5.4)$$

Произвольные функции $u_0(x, y)$ и $v_0(x, y)$ представляют собой перемещения точек срединной плоскости $z = 0$ по осям x и y . Подставив (1.5.4) в (1.1.2), найдем деформации в плоскостях, параллельных срединной:

$$e_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, \quad e_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \quad (1.5.5)$$

ГЛАВА ВТОРАЯ

2 УСТОЙЧИВОСТЬ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ОБТЕКАНИИ В СЛУЧАЕ ЖЕСТКОГО КОНТАКТА МЕЖДУ СЛОЯМИ

В данной главе рассмотрена задача аэроупругой статической неустойчивости несимметричной по толщине неоднородной пластинки при жестком контакте между слоями (Рис. 6). Принимается, что для каждого слоя действительна теория Кирхгофа. В данной постановке рассмотрены два случая граничных условий: 1. жесткое закрепление вдоль одной из длинных кромок и наличие пружины вдоль другой; 2. шарнирное опирание вдоль одной из длинных кромок и наличие пружины вдоль другой.

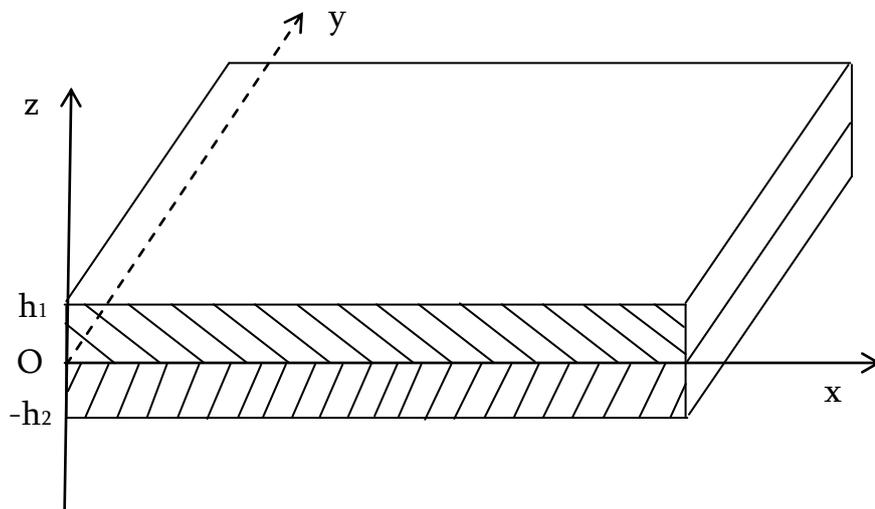


Рис. 6 Неоднородная пластинка при жестком контакте между слоями

Пусть поток направлен параллельно невозмущенной срединной поверхности пластинки (Рис. 7). Рассмотрим цилиндрический изгиб срединной поверхности неоднородной по толщине пластинки.

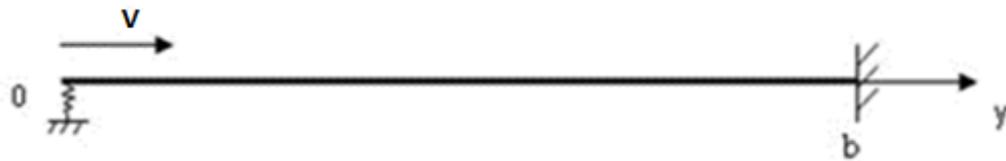


Рис. 7 Схема действия воздушного потока на упругую пластинку относительно срединной поверхности

Выясним условия, при которых наряду с невозмущенной формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривленная форма равновесия, когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими этому изгибу аэродинамическими нагрузками.

В рассматриваемом случае форма изгиба пластинки не задана, а зависит от распределения аэродинамической нагрузки. При больших сверхзвуковых скоростях потока согласно «поршневой теории» местное давление на искривленную поверхность пропорционально местному углу атаки и скорости потока V (Рис. 8).

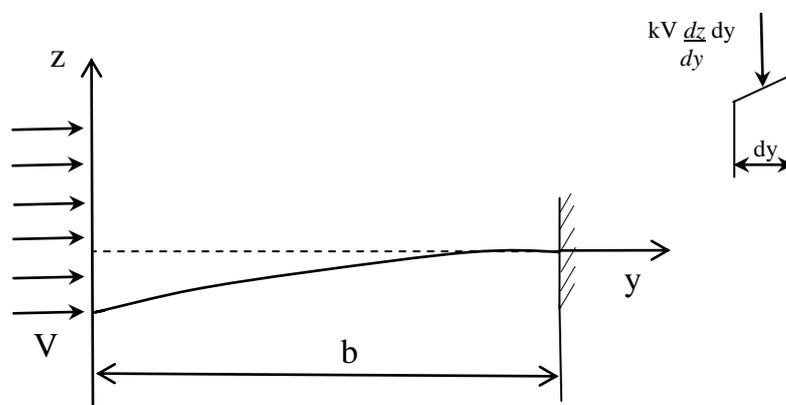


Рис. 8 Схема действия воздушного потока на искривленную поверхность упругой пластинки

Упругая пластинка в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h_2 \leq z \leq h_1$. Модуль Юнга E , коэффициент Пуассона μ и плотность материала ρ являются функциями координаты z . Согласно

[119] изгиб тонких пластин, в соответствии с теорией Кирхгофа, описывается следующей системой уравнений:

$$u = 0, \quad v = \frac{K}{C} \frac{dw}{dy}, \quad D\Delta^2 w = q, \quad D = D_0 - C^{-1}K^2 \quad (2.1)$$

где q – нормальная распределенная нагрузка при сверхзвуковом обтекании газа, D – эффективная жесткость пластинки на изгиб ($D > 0$), C – эффективная жесткость на растяжение (сжатие):

$$K = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{zE}{1-\nu^2} dz, \quad D_0 = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{z^2 E}{1-\nu^2} dz, \quad C = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{E}{1-\nu^2} dz \quad (2.2)$$

При больших сверхзвуковых скоростях, согласно «поршневой теории» [27]:

$$q = -kV \frac{dw}{dy} \quad (2.3)$$

где k – постоянная, $w = w(y)$ – прогиб пластинки, а dw/dy – местный угол атаки.

Обозначив $s = \sqrt[3]{\frac{kV}{D}}$, дифференциальное уравнение (2.1) с учетом (2.3) в случае

цилиндрического изгиба запишем в следующем виде:

$$\frac{d^4 w}{dy^4} + s^3 \frac{dw}{dy} = 0 \quad (2.4)$$

Далее в данной главе решается задача существования таких значений параметра s , при которых, кроме тривиальных решений $w = 0$, дифференциальное уравнение (2.4) имеет другие решения, которые соответствуют искривленной форме равновесия. Также определяется критическая скорость потока, при которой достигается данная форма равновесия.

2.1 Упругая пластинка при условиях жесткого закрепления вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой

Рассмотрим упругую пластинку при условиях жесткого закрепления вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой.

Изгиб неоднородной по толщине пластинки будет описываться уравнением (2.4) при следующих граничных условиях [113]:

$$\frac{d^2w}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^3w}{dy^3} - \gamma_1 w = 0 \quad \text{при } y = 0: \gamma_1 = c_1 D^{-1}, \quad (2.1.1)$$

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dy} = 0 \quad \text{при } y = b,$$

где c_1 - жесткость пружины.

Частное решение дифференциального уравнения (2.4) примем в виде:

$$w = Ae^{\lambda y} \quad (2.1.2)$$

Общее решение уравнения (2.4), выраженное тригонометрическими функциями, примет вид:

$$w = A_1 + A_2 e^{-sy} + e^{\frac{sy}{2}} \left(A'_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sy + A'_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sy \right) \quad (2.1.3)$$

Из граничных условий (2.1.1) получим четыре уравнения относительно A_1, A_2, A'_3, A'_4 :

$$A_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} A'_3 - \frac{1}{2} A'_4 = 0, \quad (2.1.4)$$

$$\gamma A_1 + (1 + \gamma) A_2 + (1 + \gamma) A'_4 = 0,$$

$$A_1 + A_2 e^{-sb} + A'_3 e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb + A'_4 e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb = 0,$$

$$-A_2 e^{-sb} + A'_3 \frac{e^{\frac{sb}{2}}}{2} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb \right) + A'_4 \frac{e^{\frac{sb}{2}}}{2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb \right) = 0$$

где γ приведенная жесткость пружины.

Данная система уравнений удовлетворяет нулевым значениям постоянных:

$$A_1 = A_2 = A_3' = A_4' = 0, \quad (2.1.5)$$

что соответствует тривиальному решению $w = 0$.

Определим условия существования нетривиального решения.

Решая систему уравнений (2.1.4) относительно переменных A_1 и A_2 получим:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{\gamma}{\sqrt{3}(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \frac{\gamma}{(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}\right] A_1 + \\ & + \left[e^{-sb} - \sqrt{3}e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}\right] A_2 = 0 \\ & \frac{\gamma}{(1+\gamma)} \left[\cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2}\right] A_1 + 2 \left[\cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} + 0.5e^{-\frac{3sb}{2}}\right] A_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

В случае чистого свободного края $y = 0$ ($\gamma = 0$) из второго уравнения (2.1.6) следует:

$$\cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} + 0.5e^{-\frac{3sb}{2}} = 0 \quad (2.1.7)$$

что совпадает с результатами дивергенции консольной пластинки [114].

Численное решение уравнения (2.1.7) для минимального корня (откуда определяется минимальная критическая скорость) дает следующее значение:

$$sb = 1,85. \quad (2.1.8)$$

Отсюда можно найти критическую скорость потока для консольной пластинки:

$$V_{кр} = \frac{6,33D}{kb^3} \quad (2.1.9)$$

При этой скорости невозмущенная форма равновесия пластинки перестает быть устойчивой и возникает состояние дивергенции.

В случае наличия пружины ($\gamma \neq 0$), равенство нулю детерминанты системы уравнений (2.1.6) после преобразований дает:

$$\left| \begin{array}{cc} \left[1 - \frac{\gamma}{\sqrt{3}(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \frac{\gamma}{(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right] & \left[e^{-sb} - \sqrt{3} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right] \\ \frac{\gamma}{(1+\gamma)} \left[\cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right] & 2 \left[\cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} + 0.5 e^{-\frac{3sb}{2}} \right] \end{array} \right| = 0$$

$$\cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} + 0.5 e^{-\frac{3sb}{2}} - \frac{\gamma}{(1+\gamma)} \left(0.5 e^{\frac{sb}{2}} + e^{-sb} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right) = 0 \quad (2.1.10)$$

На Рис. 9 приведена зависимость безразмерного параметра sb от приведенной жесткости пружины γ .

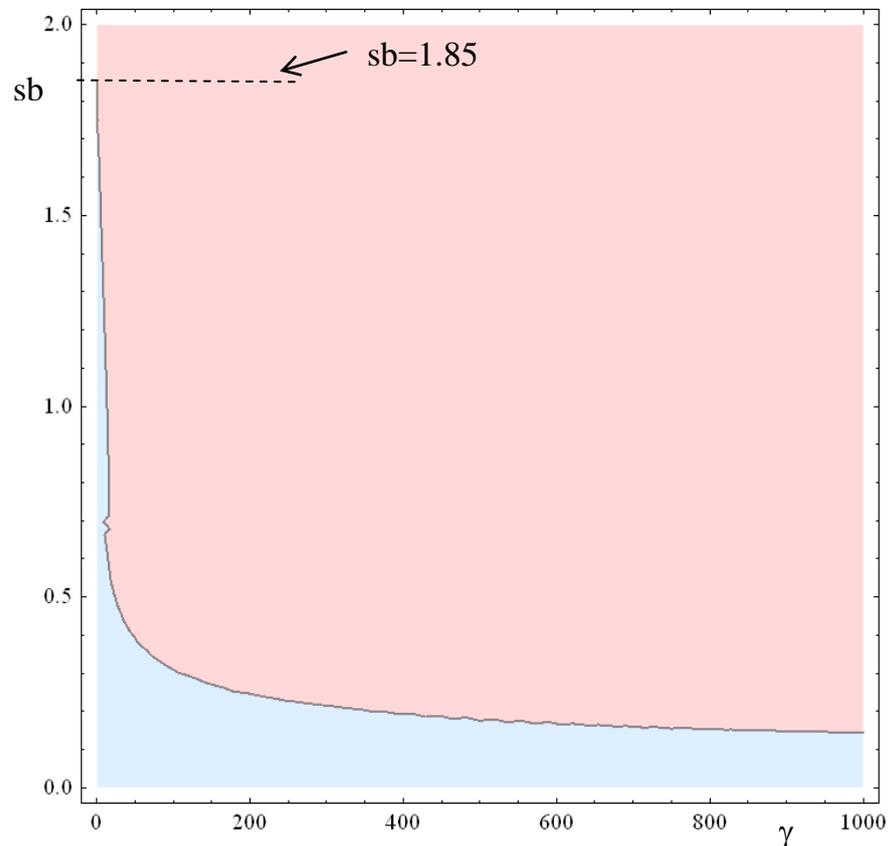


Рис. 9 Зависимость параметра sb от приведенной жесткости пружины γ

Как видно из Рис. 9 при $\gamma = 0$, получаем $sb = 1.85$, что соответствует полученному значению параметра sb в (2.1.8).

На Рис. 10 приведена зависимость безразмерного параметра sb от приведенной жесткости пружины γ при больших значениях γ .

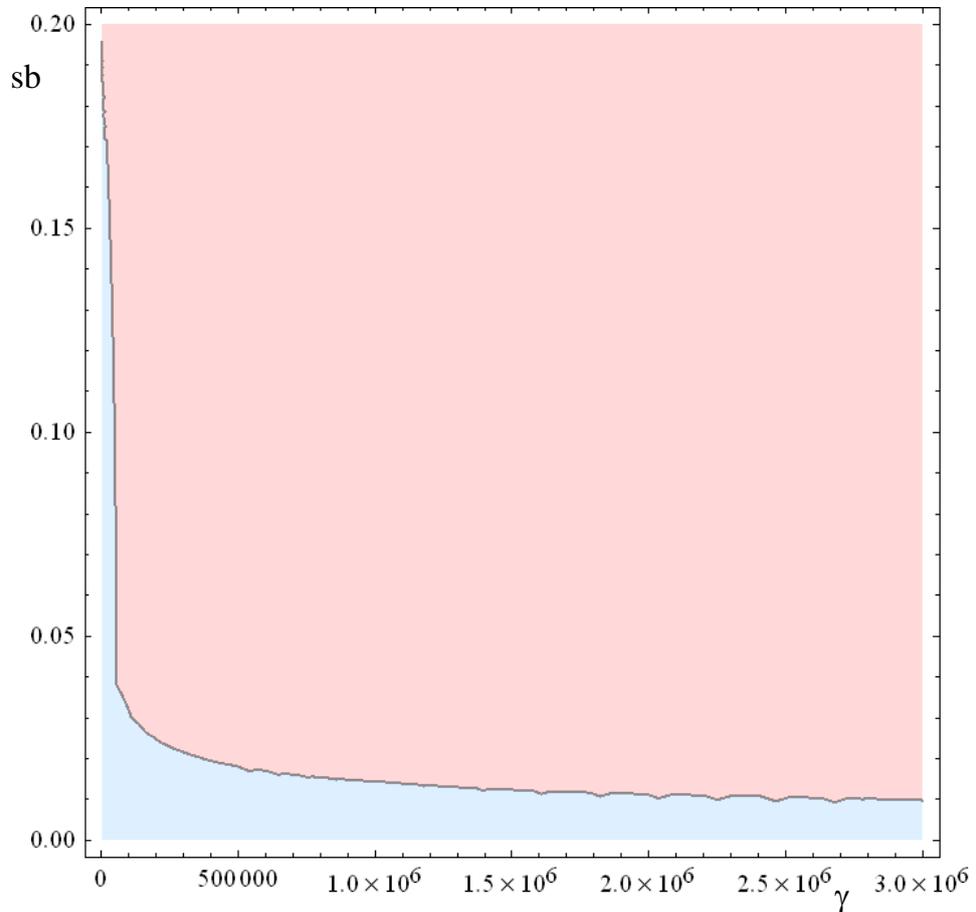


Рис. 10 Зависимость безразмерного параметра sb от приведенной жесткости пружины γ при больших значениях γ

Для определения критической скорости потока из Рис. 9, Рис. 10 для соответствующего значения γ определяется значение параметра sb . После, с учетом принятого обозначения в (2.1.4) и ниже приведенной зависимости (2.1.11) для пластины с длиной b и пружины с приведенной жесткостью γ определяется скорость потока, при которой возможна искривленная форма равновесия упругой пластинки при обтекании:

$$V = \frac{D}{kb^3} (sb)^3 \quad (2.1.11)$$

На Рис. 11 приведена зависимость критической скорости потока от безразмерного параметра sb при соотношениях $D/(kb^3) = 10^9$ [см] / [сек] и $D/(kb^3) = 10^8$ [см] / [сек].

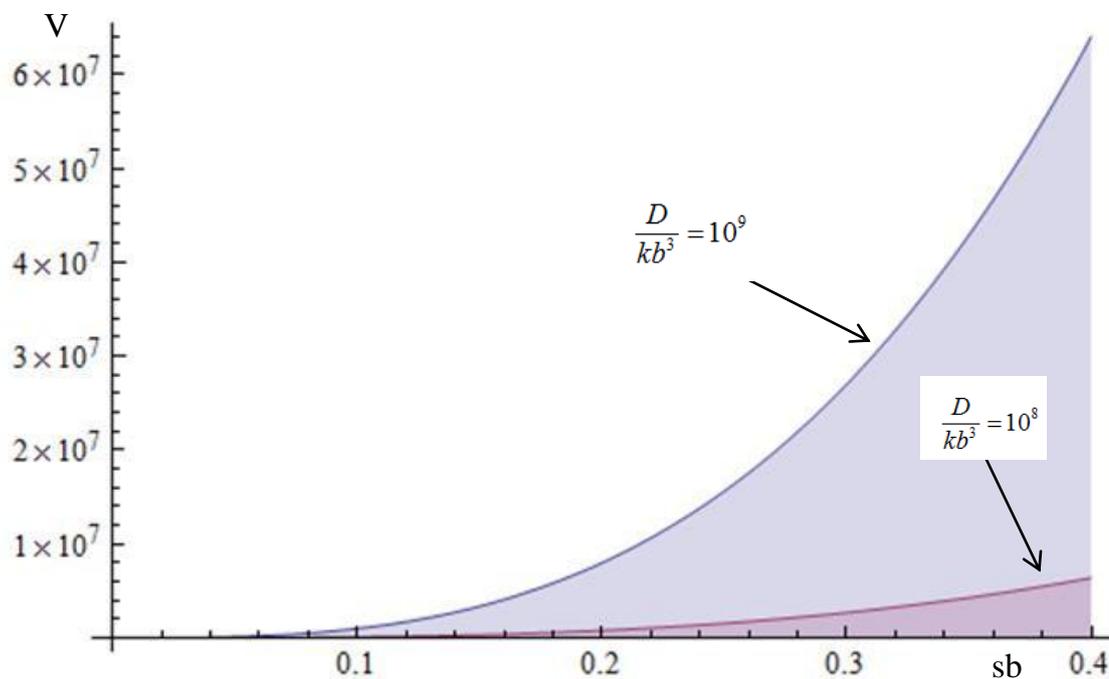


Рис. 11 Зависимость критической скорости потока V от параметра sb при следующих соотношениях: $D/(kb^3) = 10^9$ [см] / [сек] и $D/(kb^3) = 10^8$ [см] / [сек]

Для наглядности в Табл. 2.1.1 приведены значения соотношения критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ в зависимости от безразмерных параметров γ и sb при значениях параметра $\gamma < 400$. Скорость звука в воздухе: $c_\infty = 3.3 \cdot 10^4$ см / сек.

Значения параметров γ и sb , приведенные в Табл. 2.1.1, соответствуют графику на Рис. 9.

Табл. 2.1.1 Значения соотношения критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ в зависимости от безразмерных параметров γ и sb при $D/(c_\infty kb^3) = 3 \cdot 10^3$

$\gamma \backslash sb$	0.2	0.5	0.65	0.75	1	1.5	1.6
374.5	24.24	-	-	-	-	-	-
23.5005	-	378.75	-	-	-	-	-
10.4251	-	-	832.114	-	-	-	-
6.61285	-	-	-	1278.28	-	-	-
2.50412	-	-	-	-	3030	-	-
0.402782	-	-	-	-	-	10226.3	-
0.249281	-	-	-	-	-	-	12410.9

В Табл. 2.1.2 приведены значения критической скорости потока V в зависимости от безразмерных параметров γ и sb при значениях параметра $\gamma > 400$.

Значения параметров γ и sb , приведенные в Табл. 2.1.2, соответствуют графику на Рис. 10.

Табл. 2.1.2 Значения соотношения критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ в случае $\gamma > 400$ при $D/(c_\infty kb^3) = 3.03 \cdot 10^3$

$\gamma \backslash sb$	0.0001	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.185	0.19
$2.99958 \cdot 10^{12}$	$3.03 \cdot 10^{-9}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$2.4 \cdot 10^{10}$	-	$3.7875 \cdot 10^{-7}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$3 \cdot 10^9$	-	-	$3.03 \cdot 10^{-6}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$2.4 \cdot 10^7$	-	-	-	0.00037875	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$3 \cdot 10^6$	-	-	-	-	0.00303	-	-	-	-	-	-	-	-
23999.5	-	-	-	-	-	0.37875	-	-	-	-	-	-	-
2999.5	-	-	-	-	-	-	3.03	-	-	-	-	-	-
1735.61	-	-	-	-	-	-	-	5.23584	-	-	-	-	-
1092.79	-	-	-	-	-	-	-	-	8.31432	-	-	-	-
731.922	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12.4109	-	-	-
513.903	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17.671	-	-
473.312	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	19.1848	-
436.882	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	20.7828

Как видно из Табл. 2.1.2, критическая скорость потока равняется скорости звука в воздухе когда безразмерный параметр sb принимает значения в промежутке (0.05; 0.1). С целью определения приведенной жесткости пружины, в случае когда критическая скорость обтекания пластины равна скорости звука в воздухе, в Табл. 2.1.3 приведены значения соотношения критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ при значениях параметра sb в промежутке (0.05; 0.1).

Табл. 2.1.3 Значения соотношения критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ при значениях параметра sb в промежутке (0.05; 0.1)

$\gamma \backslash sb$	0.055	0.06	0.0691066	0.07	0.08	0.08248	0.09	0.0938
18031.1	0.504116	-	-	-	-	-	-	-
13888.4	-	0.65448	-	-	-	-	-	-
9089.47	-	-	1.00	-	-	-	-	-
8745.86	-	-	-	1.03929	-	-	-	-
5858.88	-	-	-	-	1.55136	-	-	-
5346.07	-	-	-	-	-	1.70016	-	-
4114.73	-	-	-	-	-	-	2.20887	-
3634.57	-	-	-	-	-	-	-	2.50064

Из Табл. 2.1.1 - Табл. 2.1.3 видно, что критическая скорость дивергенции пластины при граничных условиях жесткого закрепления вдоль одной кромки и наличии пружины вдоль другой уменьшается при увеличении приведенной жесткости пружины.

Из Табл. 2.1.3 следует, что критическая скорость дивергенции пластины равна скорости звука в воздухе при приведенной жесткости пружины: $\gamma = 9089.47$.

Известно, что при применении поршневой теории сравнение результатов с экспериментом дает хорошее совпадение уже при $M \geq 1.7$, в Табл. 2.1.3 также определена приведенная жесткость пружины при которой соотношение критической скорости потока и скорости звука в воздухе равна 1.7.

2.2 Упругая пластинка при условиях шарнирного опирания вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой

Рассмотрим задачу аэроупругой статической неустойчивости несимметрично по толщине неоднородной пластинки при жестком контакте между слоями в условиях шарнирного опирания вдоль одной из длинных кромок и наличии пружины вдоль другой.

Изгиб неоднородной по толщине пластинки будет описываться уравнением (2.4) при следующих граничных условиях [113]:

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dy^3} - \gamma_1 w = 0 \quad \text{при } y = 0: \gamma_1 = c_1 D^{-1},$$

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dy^2} = 0 \quad \text{при } y = b \quad (2.2.1)$$

Общее решение уравнения (2.4), которое описывает изгиб тонких пластин, будем искать в виде (2.1.3). Подставляя (2.1.3) в граничные условия (2.2.1), получим четыре уравнения относительно неизвестных A_1, A_2, A'_3, A'_4 :

$$A_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} A'_3 - \frac{1}{2} A'_4 = 0,$$

$$\gamma A_1 + (1 + \gamma) A_2 + (1 + \gamma) A'_4 = 0, \quad (2.2.2)$$

$$A_1 + A_2 e^{-sb} + A'_3 e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb + A'_4 e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb = 0,$$

$$A_2 e^{-sb} + A'_3 \frac{e^{\frac{sb}{2}}}{2} (\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb - \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb) - A'_4 \frac{e^{\frac{sb}{2}}}{2} (\cos \frac{\sqrt{3}}{2} sb + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} sb) = 0$$

Система уравнений (2.2.2) удовлетворяет нулевым значениям постоянных A_1 , A_2 , A'_3 , A'_4 , что соответствует тривиальному решению $w = 0$. Данное решение с физической точки зрения не представляет интереса.

Для решения поставленной задачи определим условие существования нетривиального решения системы уравнений (2.2.2).

Решая данную систему уравнений относительно переменных A_1 и A_2 , приходим к:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{\gamma}{\sqrt{3}(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \frac{\gamma}{(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}\right] A_1 + \\ & + [e^{-sb} - \sqrt{3}e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}] A_2 = 0 \\ & \frac{\gamma}{\sqrt{3}(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} A_1 + [e^{-sb} + \sqrt{3}e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}] A_2 = 0 \quad (2.2.3) \end{aligned}$$

Условием существования нетривиального решения системы уравнений (2.2.3) является равенства нулю детерминанты:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \left[1 - \frac{\gamma}{\sqrt{3}(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \frac{\gamma}{(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}\right] & [e^{-sb} - \sqrt{3}e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}] \\ \frac{\gamma}{\sqrt{3}(1+\gamma)} e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} & [e^{-sb} + \sqrt{3}e^{\frac{sb}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - e^{\frac{sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}] \end{vmatrix} = 0 \\ & e^{\frac{sb}{2}} \left(e^{-\frac{3sb}{2}} + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} - \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} \right) - \\ & - \frac{\gamma}{\gamma+1} e^{-\frac{sb}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}sb}{2} (2 + e^{\frac{3sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}) + \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2} (1 - e^{\frac{3sb}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}sb}{2}) \right) = 0 \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

Как видно из (2.2.4) при $\gamma = 0$ (получаем физический механизм), $sb = 0$ удовлетворяет уравнению (2.2.4). Следовательно, критическая скорость потока получается равным 0.

При $\gamma \rightarrow \infty$ из (2.2.4) получается уравнение для задачи шарнирного опирания вдоль кромок $y = 0; b$.

На Рис. 12 приведена зависимость безразмерного параметра sb от приведенной жесткости пружины γ . Зависимость параметров sb и γ удовлетворяет характеристическому уравнению (2.2.4), которое получено из условия равенства нулю детерминанты системы уравнений (2.2.3).

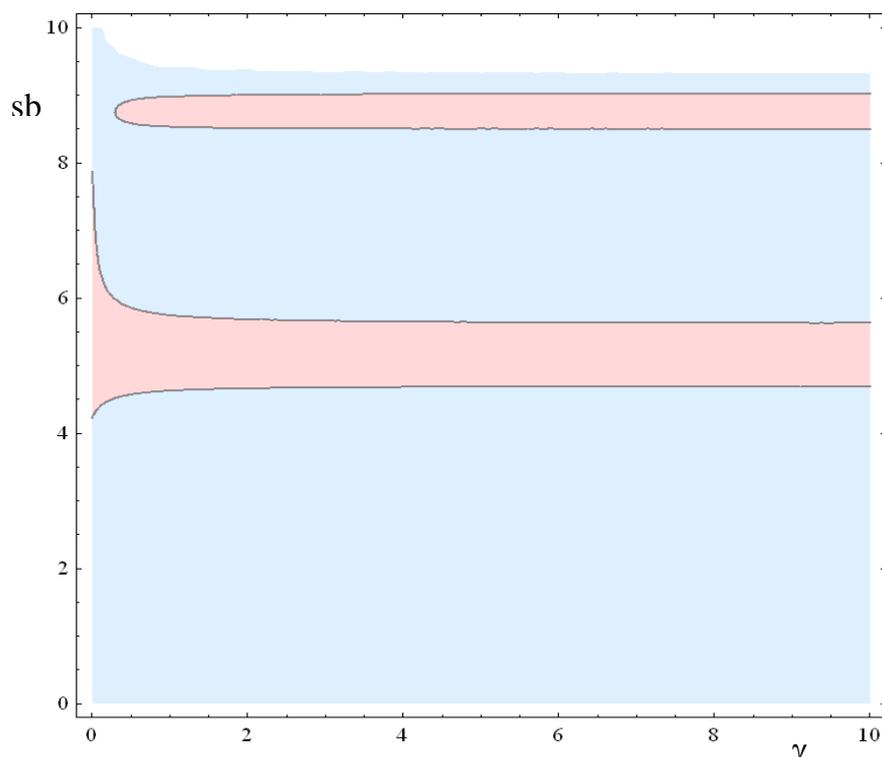


Рис. 12 Зависимость безразмерного параметра sb от приведенной жесткости пружины γ согласно уравнению дивергенции (2.2.4)

Для определения критической скорости потока из Рис. 12 для соответствующего значения γ определяется значение параметра sb . После, с учетом принятого обозначения в (2.1.4) и зависимости (2.1.11) для пластины с длиной b и пружины с приведенной жесткостью γ определяется скорость потока, при которой возможна искривленная форма равновесия упругой пластинки при обтекании.

На Рис. 11 приведена зависимость критической скорости потока от параметра sb при соотношениях $D/(kb^3) = 10^9$ [см] / [сек] и $D/(k b^3) = 10^8$ [см] / [сек].

Для наглядности в Табл. 2.2.1 приведены значения соотношения критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ в зависимости от безразмерных параметров γ и sb .

Значения параметров γ и sb , приведенные в Табл. 2.2.1, соответствуют характеристическому уравнению (2.2.4) и Рис. 12.

В задачах устойчивости интерес представляет критическая (минимальная) скорость потока газа при обтекании пластинки. Следовательно, в Табл. 2.2.1 приведены численные расчеты для минимального значения безразмерного параметра sb при заданной величине параметра γ (см. Рис. 12).

Табл. 2.2.1 Соотношение критической скорости V потока и скорости звука в воздухе c_∞ в зависимости от безразмерных параметров γ и sb при $D/(c_\infty kb^3) = 3 \cdot 10^3$

$\gamma \backslash sb$	4.25	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7
0.00722966	232600	-	-	-	-	-
0.0320221	-	240906	-	-	-	-
0.104841	-	-	258108	-	-	-
0.247648	-	-	-	276109	-	-
0.657028	-	-	-	-	294928	-
9.43615	-	-	-	-	-	314584

Как видно из Табл. 2.2.1, критическая скорость дивергенции пластины при граничных условиях шарнирного закрепления вдоль одной из кромок и наличии пружины вдоль другой при увеличении приведенной жесткости пружины увеличивается.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

3 ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ НЕОДНОРОДНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЖЕСТКОМ КОНТАКТЕ МЕЖДУ СЛОЯМИ

В современной авиации до сих пор развивается применение слоистых конструкций.

Впервые, задача симметрично неоднородной по толщине пластинки был рассмотрен Лехницким [115, 116].

В данной главе рассматривается задача динамической неустойчивости несимметрично неоднородной по толщине прямоугольной пластинки на основе дифференциальных уравнений, полученных в [119] на основе гипотезы Кирхгофа и без условия постоянности коэффициента Пуассона.

Несимметричность в данной задаче понимается следующим образом. В случае, когда функции механических характеристик материала пластинки непрерывны по толщине, они несимметричны по отношению к срединной поверхности пластинки. В случае, когда функции кусочно-непрерывны (слоистые пластинки), тогда задача несимметрична по отношению к любой из слоев и к срединной поверхности пластинки. В обоих случаях уравнения планарных и изгибных колебаний пластинки не отделяются.

В данной задаче определена зависимость изгибных колебаний несимметрично неоднородной пластинки от планарных колебаний.

Получено уравнение критической скорости динамической неустойчивости (резонанс) несимметрично неоднородной по толщине пластинки от параметра не симметрии.

Для проверки полученных результатов рассмотрен частный случай, когда нет планарных колебаний. Эта задача решена для изотропной пластинки в [27].

3.1 Постановка задачи и метод решения

Упругая пластинка в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq l$, $-h_2 \leq z \leq h_1$ (Рис. 13). В случае, когда функции механических характеристик материала пластинки кусочно-непрерывны (слоистые пластинки), жесткими будем называть слои, для которых выполняются гипотезы обычной теории пластин и оболочек [117].

Верхняя поверхность панели подвергается воздействию сверхзвукового потока газа. Модуль Юнга E , коэффициент Пуассона μ и плотность материала ρ являются функциями координаты z .

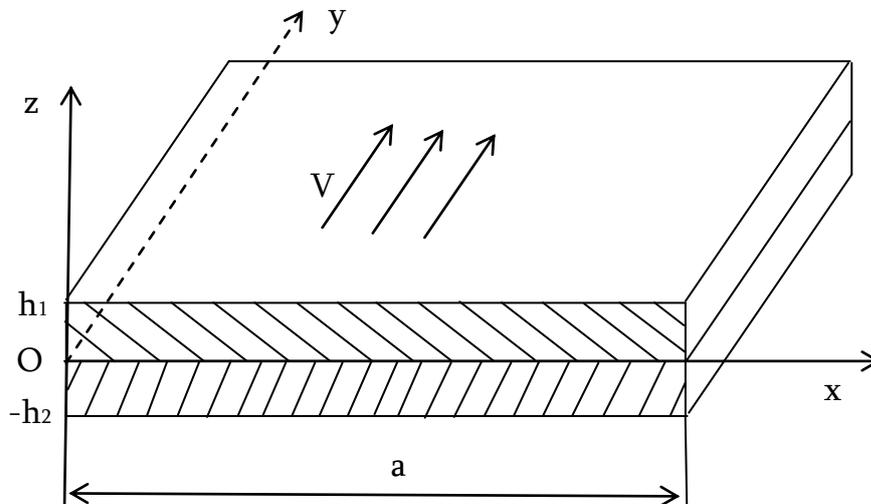


Рис. 13 Схема действия воздушного потока на упругую пластинку

Принимая допущения гипотезы Кирхгофа и пренебрегая моментами инерции вращения, для соответствующих компонент тензора напряжений получаем следующие выражения:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \quad (3.1.1)$$

Напряженно – деформированное состояние жесткого слоя полностью определено, если известны нормальные w и тангенциальные u, v перемещения точек, принадлежащих срединной поверхности. Принимая гипотезу Кирхгофа – Лява, перемещения $u_i(x, y, t)$ ($i = 1, 2, 3$) произвольных точек этого слоя определяются по формулам:

$$u_1 = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_2 = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_3 = w, \quad u, v, w \sim (x, y, t) \quad (3.1.2)$$

Осредненные уравнения движения для неоднородной по толщине прямоугольной пластинки запишем в следующем виде:

$$\int_{-h_2}^{h_1} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) dz = 0, \quad (i=1, 2, 3),$$

$$\int_{-h_2}^{h_1} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) z dz = 0, \quad (i=1, 2) \quad (3.1.3)$$

С учетом (3.1.1) и (3.1.2), для усилий и моментов получаются следующие выражения:

$$T_1 = C \frac{\partial u}{\partial x} + (C - 2B_0) \frac{\partial v}{\partial y} - \left[K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (K - 2B_1) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$T_2 = C \frac{\partial v}{\partial y} + (C - 2B_0) \frac{\partial u}{\partial x} - \left[K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (K - 2B_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$S = B_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.1.4)$$

$$M_1 = K \frac{\partial u}{\partial x} + (K - 2B_1) \frac{\partial v}{\partial y} - \left[D_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (D_0 - 2B_2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_2 = K \frac{\partial v}{\partial y} + (K - 2B_1) \frac{\partial u}{\partial x} - \left[D_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (D_0 - 2B_2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$H = B_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2B_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

где приняты следующие обозначения:

$$C = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{E}{1-\nu^2} dz; \quad K = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{zE}{1-\nu^2} dz;$$

$$D_0 = \int_{-h_2}^{h_1} \frac{z^2 E}{1-\nu^2} dz; \quad B_k = \frac{1}{2} \int_{-h_2}^{h_1} \frac{z^k E}{1+\nu} dz, \quad k=0,1,2 \quad (3.1.5)$$

Подставляя выражения для усилий и моментов (3.1.4) в осредненные уравнения движения (3.1.3) приходим к уравнениям относительно перемещений u, v, w :

$$B_0 \Delta u + (C - B_0) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \frac{\partial}{\partial x} \Delta w = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x}$$

$$B_0 \Delta v + (C - B_0) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \frac{\partial}{\partial y} \Delta w = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - p \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} \quad (3.1.6)$$

$$D_0 \Delta^2 w - r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = q$$

где q – нормальная нагрузка, действующая на внешнюю поверхность пластинки:

$$m = \int_{-h_2}^{h_1} \rho dz; \quad p = \int_{-h_2}^{h_1} \rho z dz; \quad r = \int_{-h_2}^{h_1} \rho z^2 dz \quad (3.1.7)$$

Для отделения уравнений обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба достаточным условием является $K = 0, p=0$. Согласно теории пластин Кирхгофа, можно пренебречь членами уравнения (3.1.6) с множителем p , поскольку они имеют порядок моментов инерции вращения:

$$p \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x}, \quad p \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y}, \quad p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (3.1.7^*)$$

Введем потенциалы ϕ и ψ для тангенциальных перемещений. Примем следующее преобразование для системы уравнений (3.1.6) [118]:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{K}{C} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{K}{C} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.1.8)$$

Введение преобразования (3.1.8) аналогично введению функций Ламе для частного случая задачи плоской деформации.

Учитывая преобразование (3.1.8) и пренебрегая членами с коэффициентами mKC^{-1} , τ , которые имеют порядок момента инерции вращения, согласно с теорией Кирхгофа, система уравнений (3.1.6) при $p = 0$ приводится к виду [119]:

$$C\Delta\varphi = m\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad B_0\Delta\psi = m\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (3.1.9)$$

$$D\Delta^2w + m\frac{\partial^2w}{\partial t^2} - K\Delta^2\varphi = p_i - p_e, \quad D = D_0 - C^{-1}K^2 \quad (3.1.10)$$

где C – эффективная жесткость на растяжение (сжатие), B_0 – эффективная жесткость на сдвиг, m – приведенная масса, D – эффективная жесткость пластинки на изгиб ($D > 0$), p_i – величина давления на панель при $z < 0$, p_e – величина давления на панель при $z > 0$.

Уравнения (3.1.9) показывают, что уравнения относительно φ и ψ – уравнения продольных и планарных колебаний, являются автономными. Из (3.1.10) следует, что возбуждение продольных планарных колебаний приводит к появлению поперечных колебаний.

При больших сверхзвуковых скоростях, согласно «поршневой теории» [27]:

$$p = p_e + \frac{\chi p_\infty}{c_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.1.11)$$

где V – скорость невозмущенного потока газа вдоль оси Y , $w = w(y)$ – прогиб пластинки.

В системе дифференциальных уравнений (3.1.9), (3.1.10) уравнение относительно ψ отделяется от системы уравнений относительно φ и w . В общем случае, φ , ψ и w связаны граничными условиями. Если в частных случаях аналогичное разделение имеет место также и в граничных условиях (для этого

требуются условия специального вида), то это существенно упрощает аналитические выкладки.

Рассмотрим задачу динамической неустойчивости несимметрично – неоднородной по толщине прямоугольной пластинки при следующих граничных условиях шарнирного закрепления кромки $y = 0$ и 1 . Граничные условия для свободного опирания:

$$T_2 = 0, u = 0, w = 0, M_y = 0 \quad (3.1.12)$$

С учетом преобразований (3.1.8) и выражений для усилий и моментов (3.1.4) получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0; w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1.13)$$

Точным решением задачи устойчивости является тривиальное решение уравнений (3.1.9), (3.1.10) - $w \equiv 0, \varphi \equiv 0, \psi \equiv 0$.

Из первого условия (3.1.13) получаем, что $\partial \psi / \partial y = -\partial \varphi / \partial x$. Подставляя во второе условие (3.1.13), получаем $\Delta \varphi = 0$ при $y = const$. Для гармонических колебаний: $\varphi(x, y, t) = e^{i\omega t} \phi(x, y)$ или $\varphi(x, y, t) = \phi(x, y) \cos \omega t$. Из первого уравнения (3.1.9) для φ получаем:

$$C \Delta \phi = -m \omega^2 \phi \quad (3.1.13^*)$$

Учитывая (3.1.13*) из условия $\Delta \varphi = 0$ следует условие $\varphi = 0$ при $y = const$. С учетом полученного, из первого уравнения (3.1.13) следует $\partial \psi / \partial y = 0$

Таким образом, вместо граничных условий (3.1.13) для гармонических колебаний получаем условия:

$$\varphi = 0; \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; y = const \quad (3.1.14)$$

Из (3.1.14) следует, что при таких граничных условиях уравнения (3.1.9) определяют задачу планарных колебаний независимо от изгибных.

Для упрощения примем $a \gg 1$, что разрешает рассмотреть цилиндрический изгиб срединной поверхности неоднородной по толщине пластинки относительно координаты y .

Колебания неоднородной по толщине пластинки при условии цилиндрического изгиба будут описываться следующим дифференциальными уравнениями:

$$C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad B_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.1.15)$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = p_i - p_e \quad (3.1.16)$$

Решение дифференциальных уравнений (3.1.15), (3.1.16), при граничных условиях (3.1.14), представим в виде:

$$w(y,t) = \sum_n w_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} y; \quad \varphi(y,t) = \sum_n \varphi_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} y;$$

$$\psi(y,t) = \sum_n \psi_n(t) \cos \frac{\pi n}{l} y \quad (3.1.17)$$

В случае задачи динамической неустойчивости минимальным количеством членов в уравнениях (3.1.17) является 2 [27]:

$$w(y,t) = w_1(t) \sin \frac{\pi}{l} y + w_2(t) \sin \frac{2\pi}{l} y; \quad (3.1.18)$$

$$\varphi(y,t) = \varphi_1(t) \sin \frac{\pi}{l} y + \varphi_2(t) \sin \frac{2\pi}{l} y; \quad (3.1.19)$$

$$\psi(y,t) = \psi_1(t) \cos \frac{\pi}{l} y + \psi_2(t) \cos \frac{2\pi}{l} y. \quad (3.1.20)$$

Подставляя выражения (3.1.19) и (3.1.20) в (3.1.15), приходим к решению следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\varphi}_1(t) + \beta^2 \varphi_1(t) = 0; \quad \ddot{\varphi}_2(t) + 4\beta^2 \varphi_2(t) = 0 \quad (3.1.21)$$

$$\ddot{\psi}_1(t) + \alpha^2 \psi_1(t) = 0; \quad \ddot{\psi}_2(t) + 4\alpha^2 \psi_2(t) = 0 \quad (3.1.22)$$

где:

$$\beta^2 = C \frac{\pi^2}{ml^2}; \alpha^2 = B_0 \frac{\pi^2}{ml^2} \quad (3.1.23)$$

Решая уравнения (3.1.21) и (3.1.22):

$$\varphi_1(t) = \bar{\varphi}_1 e^{i\beta t} + \bar{\varphi}_2 e^{-i\beta t}; \quad (3.1.24)$$

$$\varphi_2(t) = \bar{\bar{\varphi}}_1 e^{2i\beta t} + \bar{\bar{\varphi}}_2 e^{-2i\beta t}; \quad (3.1.25)$$

$$\psi_1(t) = \bar{\psi}_1 e^{i\alpha t} + \bar{\psi}_2 e^{-i\alpha t}; \quad (3.1.26)$$

$$\psi_2(t) = \bar{\bar{\psi}}_1 e^{2i\alpha t} + \bar{\bar{\psi}}_2 e^{-2i\alpha t}. \quad (3.1.27)$$

Подставляя уравнения (3.1.11), (3.1.18) и (3.1.19) в уравнение (3.1.16) и, применяя метод Галеркина, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{ml}{2} \ddot{w}_1(t) + \frac{kl}{2} \dot{w}_1(t) + \frac{D\pi^4}{2l^3} w_1(t) - \frac{4kV}{3} w_2(t) - \frac{K\pi^4}{2l^3} \varphi_1(t) = 0 \quad (3.1.28)$$

$$\frac{ml}{2} \ddot{w}_2(t) + \frac{kl}{2} \dot{w}_2(t) + \frac{8D\pi^4}{l^3} w_2(t) + \frac{4kV}{3} w_1(t) - \frac{8K\pi^4}{l^3} \varphi_2(t) = 0 \quad (3.1.29)$$

где:

$$k = \frac{\chi P_\infty}{c_\infty} \quad (3.1.30)$$

Общий случай решения системы дифференциальных уравнений (3.1.28) и (3.1.29) при условии $\varphi_1(t) \neq 0$, $\varphi_2(t) \neq 0$ рассмотрен в [102].

Когда $\varphi_1(t) \neq 0$ и $\varphi_2(t) \neq 0$, решение системы дифференциальных уравнений (3.1.28), (3.1.29) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t} + A_3 e^{2\beta t} + A_4 e^{-2\beta t}; \\ w_2(t) &= B_1 e^{\beta t} + B_2 e^{-\beta t} + B_3 e^{2\beta t} + B_4 e^{-2\beta t} \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

Подставляя уравнение (3.1.31) в уравнения (3.1.28) и (3.1.29) приходим к решению следующих систем уравнений относительно неизвестных A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4 :

$$\begin{cases} \left(\frac{ml}{2} \beta^2 + \frac{kl}{2} \beta + \frac{\pi^4 D}{2l^3} \right) A_1 - \frac{4kV}{3} B_1 = \frac{\pi^4 K}{2l^3} \varphi_1 \\ \frac{4kV}{3} A_1 + \left(\frac{ml}{2} \beta^2 + \frac{kl}{2} \beta + \frac{8\pi^4 D}{l^3} \right) B_1 = 0 \end{cases} \quad (3.1.32)$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{ml}{2} \beta^2 - \frac{kl}{2} \beta + \frac{\pi^4 D}{2l^3} \right) A_2 - \frac{4kV}{3} B_2 = \frac{\pi^4 K}{2l^3} \varphi_2 \\ \frac{4kV}{3} A_2 + \left(-\frac{ml}{2} \beta^2 - \frac{kl}{2} \beta + \frac{8\pi^4 D}{l^3} \right) B_2 = 0 \end{cases} \quad (3.1.33)$$

$$\begin{cases} \left(2ml\beta^2 + kl\beta + \frac{\pi^4 D}{2l^3} \right) A_3 - \frac{4kV}{3} B_3 = 0 \\ \frac{4kV}{3} A_3 + \left(2ml\beta^2 + kl\beta + \frac{8\pi^4 D}{l^3} \right) B_3 = \frac{8\pi^4 K}{l^3} \varphi_1 \end{cases} \quad (3.1.34)$$

$$\begin{cases} \left(-2ml\beta^2 - kl\beta + \frac{\pi^4 D}{2l^3} \right) A_4 - \frac{4kV}{3} B_4 = 0 \\ \frac{4kV}{3} A_4 + \left(-2ml\beta^2 - kl\beta + \frac{8\pi^4 D}{l^3} \right) B_4 = \frac{8\pi^4 K}{l^3} \varphi_2 \end{cases} \quad (3.1.35)$$

Решая систему алгебраических уравнений (3.1.32) - (3.1.35) относительно $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ получаем зависимость изгибных колебаний от планарных:

$$A_1 = \frac{9K\pi^4(ml^4\beta^2 + kl^4\beta + 16D\pi^4)\overline{\varphi_1}}{[9(ml^4\beta^2 + kl^4\beta + D\pi^4)(ml^4\beta^2 + kl^4\beta + 16D\pi^4) + 64l^6V^2k^2]} \quad (3.1.36)$$

$$A_2 = \frac{9K\pi^4(-ml^4\beta^2 - kl^4\beta + 16D\pi^4)\overline{\varphi_2}}{[9(-ml^4\beta^2 - kl^4\beta + D\pi^4)(-ml^4\beta^2 - kl^4\beta + 16D\pi^4) + 64l^6V^2k^2]} \quad (3.1.37)$$

$$A_3 = \frac{576l^3kVK\pi^4\overline{\varphi_1}}{3[9(-2ml^4\beta^2 - kl^4\beta - 8D\pi^4)(-4ml^4\beta^2 - 2kl^4\beta - D\pi^4) + 32l^6V^2k^2]} \quad (3.1.38)$$

$$A_4 = \frac{576l^3kVK\pi^4\bar{\varphi}_2}{3[9(-2ml^4\beta^2 - kl^4\beta + 8D\pi^4)(-4ml^4\beta^2 - 2kl^4\beta + D\pi^4) + 32l^6V^2k^2]} \quad (3.1.39)$$

$$B_1 = \frac{72l^3kVK\pi^4\bar{\varphi}_1}{3[9(ml^4\beta^2 + kl^4\beta + D\pi^4)(ml^4\beta^2 + kl^4\beta + 16D\pi^4) + 64l^6V^2k^2]} \quad (3.1.40)$$

$$B_2 = \frac{-72l^3kVK\pi^4\bar{\varphi}_2}{3[9(-ml^4\beta^2 - kl^4\beta + D\pi^4)(-ml^4\beta^2 - kl^4\beta + 16D\pi^4) + 64l^6V^2k^2]} \quad (3.1.41)$$

$$B_3 = \frac{-72K\pi^4(-4ml^4\beta^2 - 2kl^4\beta - D\pi^4)\bar{\varphi}_1}{[9(-2ml^4\beta^2 - kl^4\beta - 8D\pi^4)(-4ml^4\beta^2 - 2kl^4\beta - D\pi^4) + 32l^6V^2k^2]} \quad (3.1.42)$$

$$B_4 = \frac{72K\pi^4(-4ml^4\beta^2 - 2kl^4\beta + D\pi^4)\bar{\varphi}_2}{[9(-2ml^4\beta^2 - kl^4\beta + 8D\pi^4)(-4ml^4\beta^2 - 2kl^4\beta + D\pi^4) + 32l^6V^2k^2]} \quad (3.1.43)$$

Условие равенства нулю детерминанты систем алгебраических уравнений (3.1.32) - (3.1.35) является условием возникновения резонанса.

С целью проверки полученных результатов рассмотрим частный случай, когда отсутствуют планарные колебания: $\varphi_1(t) \equiv 0$, $\varphi_2(t) \equiv 0$. Уравнение изгибных колебаний тонкой пластинки может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{ml}{2}\ddot{w}_1(t) + \frac{kl}{2}\dot{w}_1(t) + \frac{D\pi^4}{2l^3}w_1(t) - \frac{4kV}{3}w_2(t) &= 0 \\ \frac{ml}{2}\ddot{w}_2(t) + \frac{kl}{2}\dot{w}_2(t) + \frac{8D\pi^4}{l^3}w_2(t) + \frac{4kV}{3}w_1(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

В этом случае получаем известную задачу флаттера [27].

Решение системы дифференциальных уравнений (3.1.44) может быть представлено в следующем виде:

$$w_1(t) = Ae^{\lambda t}; w_2(t) = Be^{\lambda t} \quad (3.1.45)$$

Подставляя уравнение (3.1.45) в уравнение (3.1.44) приходим к решению системы уравнений относительно неизвестных А и В:

$$\begin{cases} \left(\frac{ml}{2} \lambda^2 + \frac{kl}{2} \lambda + \frac{\pi^4 D}{2l^3} \right) A - \frac{4kV}{3} B = 0 \\ \frac{4kV}{3} A + \left(\frac{ml}{2} \lambda^2 + \frac{kl}{2} \lambda + \frac{8\pi^4 D}{l^3} \right) B = 0 \end{cases} \quad (3.1.46)$$

Из условия равенства нулю детерминанты системы уравнений (3.1.46) получаем:

$$\left(\frac{ml}{2} \lambda^2 + \frac{kl}{2} \lambda + \frac{\pi^4 D}{2l^3} \right) \left(\frac{ml}{2} \lambda^2 + \frac{kl}{2} \lambda + \frac{8\pi^4 D}{l^3} \right) + \frac{16k^2}{9} V^2 = 0 \quad (3.1.47)$$

В частном случае полученный результат совпадает с результатами, приведенными в [27].

Таким образом, в данном разделе рассмотрена проблема динамических колебаний пластин с несимметричной по толщине неоднородностью. При принятых условиях дифференциальные уравнения планарных и изгибных колебаний не отделяются. Как результат рассмотренной задачи, получена зависимость изгибных колебаний пластин с несимметричной по толщине неоднородностью от формы планарных колебаний в общем случае. В отличие от изотропных пластин, в случае пластин с несимметричной по толщине неоднородностью, при воздействиях, которые вызывают планарные колебания $\varphi(x,y,t) \neq 0$, будут возникать изгибные колебания и наоборот, что может привести к возникновению резонанса пластинки. В общем случае, при наличии планарных колебаний пластин с несимметричной по толщине неоднородностью, получены четыре условия возникновения резонанса.

3.2 Определение зависимости критической скорости потери устойчивости от частоты планарных колебаний

Как видно из (3.1.9) и (3.1.10) уравнения планарных и изгибных колебаний неоднородных по толщине пластин не отделяются.

Рассмотрим частный случай динамической неустойчивости несимметрично неоднородной по толщине прямоугольной пластинки в случае, когда планарные колебания $\varphi_1(t) = \varphi_{10} \cos \beta t$, $\varphi_2(t) \equiv 0$, $\psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) \equiv 0$ вызывают изгибные колебания.

В общем случае решение задачи флаттера неоднородной по толщине прямоугольной пластинки приводится к решению системы дифференциальных уравнений (3.1.28) и (3.1.29).

Решение системы дифференциальных уравнений (3.1.28) и (3.1.29) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t + B_1 \sin 2\beta t + B_2 \cos 2\beta t ; \\ w_2(t) &= A_3 \sin \beta t + A_4 \cos \beta t + B_3 \sin 2\beta t + B_4 \cos 2\beta t . \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Подставляя данное решение в систему дифференциальных уравнений (3.1.28) и (3.1.29) приходим к решению системы уравнений относительно неизвестных A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$\begin{cases} \left(-\frac{ml}{2} \beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3} \right) A_1 - \frac{kl}{2} \beta A_2 - \frac{4kV}{3} A_3 = 0 \\ \frac{kl}{2} \beta A_1 + \left(-\frac{ml}{2} \beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3} \right) A_2 - \frac{4kV}{3} A_4 = \frac{\pi^4 K}{2l^3} \varphi_{10} \\ \frac{4kV}{3} A_1 + \left(-\frac{ml}{2} \beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3} \right) A_3 - \frac{kl}{2} \beta A_4 = 0 \\ \frac{4kV}{3} A_2 + \frac{kl}{2} \beta A_3 + \left(-\frac{ml}{2} \beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3} \right) A_4 = 0 \end{cases} \quad (3.2.2)$$

и относительно неизвестных B_1, B_2, B_3, B_4 :

$$\begin{cases} \left(-2ml\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)B_1 - kl\beta B_2 - \frac{4kV}{3}B_3 = 0 \\ kl\beta B_1 + \left(-2ml\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)B_2 - \frac{4kV}{3}B_4 = 0 \\ \frac{4kV}{3}B_1 + \left(-2ml\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right)B_3 - kl\beta B_4 = 0 \\ \frac{4kV}{3}B_2 + kl\beta B_3 + \left(-2ml\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right)B_4 = 0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Для неизвестных B_1, B_2, B_3, B_4 из системы (3.2.3) получаем решение: $B_1 = 0, B_2=0, B_3=0, B_4=0$.

Критическую скорость обтекания потоком газа неоднородной пластинки в случае наличия планарных колебаний по закону $\varphi_1(t) = \varphi_{10} \cos\beta t, \varphi_2(t) \equiv 0, \psi_1(t) \equiv 0, \psi_2(t) \equiv 0$ можно определить из условия равенства нулю детерминанты системы дифференциальных уравнений (3.2.2).

Условие равенства нулю детерминанты системы дифференциальных уравнений (3.2.2) запишем в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right) & -\frac{kl}{2}\beta & -\frac{4kV}{3} & 0 \\ \frac{kl}{2}\beta & \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right) & 0 & -\frac{4kV}{3} \\ \frac{4kV}{3} & 0 & \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right) & -\frac{kl}{2}\beta \\ 0 & \frac{4kV}{3} & \frac{kl}{2}\beta & \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{16D^4\pi^{16}}{l^{12}} + \frac{128D^2k^2\pi^8V^2}{9l^6} + \frac{256k^4V^4}{8l} + \frac{257D^2k^2\pi^8\beta^2}{16l^4} - \frac{34D^3m\pi^{12}\beta^2}{l^8} - \frac{8}{9}k^4l^2V^2\beta^2 - \\ & - \frac{136Dk^2m\pi^4V^2\beta^2}{9l^2} + \frac{1}{16}k^4l^4\beta^4 - \frac{17}{8}Dk^2m\pi^4\beta^4 + \frac{321D^2m^2\pi^8\beta^4}{16l^4} + \frac{8}{9}k^2l^2m^2V^2\beta^4 + \\ & + \frac{1}{8}k^2l^4m^2\beta^6 - \frac{17}{8}Dm^3\pi^4\beta^6 + \frac{1}{16}l^4m^4\beta^8 = 0 \end{aligned}$$

Принимая обозначение:

$$\alpha^2 = \frac{D\pi^4}{ml^4} \quad (3.2.5)$$

характеристическое уравнение (3.2.6) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & 16\alpha^8 m^4 l^4 + \frac{128\alpha^4 l^2 m^2 k^2 V^2}{9} + \frac{256k^4 V^4}{8l} + \frac{257\alpha^4 m^2 l^4 \beta^2}{16} - 34\alpha^6 l^4 m^4 \beta^2 - \frac{8}{9} k^4 l^2 V^2 \beta^2 - \\ & - \frac{136\alpha^2 k^2 m^2 l^2 V^2 \beta^2}{9} + \frac{1}{16} k^4 l^4 \beta^4 - \frac{17}{8} \alpha^2 k^2 m^2 l^4 \beta^4 + \frac{321\alpha^4 m^4 l^4 \beta^4}{16} + \frac{8}{9} k^2 l^2 m^2 V^2 \beta^4 + \\ & + \frac{1}{8} k^2 l^4 m^2 \beta^6 - \frac{17}{8} \alpha^2 m^4 l^4 \beta^6 + \frac{1}{16} l^4 m^4 \beta^8 = 0 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

1. Рассмотрим численный пример динамической неустойчивости неоднородной по толщине пластинки. Предположим, что пластина с толщиной $-0.5 \leq z \leq 0.2$ и длиной $l = 20$ см обтекается воздухом при нормальных условиях, с показателем политропы $\chi = 1.4$. Давление в невозмущенном газе: $p_\infty = 1$ кг / см², скорость звука в воздухе: $c_\infty = 3.3 * 10^4$ см / сек. Предположим, что плотность и модуль упругости изменяются по толщине пластинки по линейному закону. Модуль Юнга меняется от $E(-h_2) = 2 * 10^6$ кг / см² до $E(h_1) = 1 * 10^7$ кг / см², а плотность от $\rho(-h_2) = 2 * 10^{-6}$ кг * сек² / см⁴ до $\rho(h_1) = 8 * 10^{-6}$ кг * сек² / см⁴. Коэффициент Пуассона: $\nu = 0.31$.

Рассмотрим случай динамической неустойчивости несимметрично неоднородной по толщине прямоугольной пластинки описанными свойствами в случае, когда при обтекании присутствуют также планарные колебания, которые в неоднородных пластинах приводят к возникновению изгибных колебаний.

В Табл. 3.2.1 приведены корни характеристического уравнения (3.2.6) при разных скоростях обтекания.

Табл. 3.2.1 Частота колебаний в зависимости от скорости обтекания пластинки с толщиной 0.7 см

-	β_1		β_2		β_3		β_4		β_5		β_6		β_7		β_8	
	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
$V = 0$	-50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.72	0	127.72	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = c_\infty$	-50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.72	0	127.72	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = 2c_\infty$	-50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.72	0	127.72	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = 3c_\infty$	-50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.72	0	127.72	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = 4c_\infty$	50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.721	0	127.721	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = 5c_\infty$	50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.721	0	127.721	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = 6c_\infty$	50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.721	0	127.721	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = 7c_\infty$	50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.721	0	127.721	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = 8c_\infty$	-50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.722	0	127.722	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = 9c_\infty$	-50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.722	0	127.722	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = 10c_\infty$	-50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.722	0	127.722	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = 15c_\infty$	-50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.724	0	127.724	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6
$V = 20c_\infty$	-50982.4	-25719.6	-50982.4	25719.6	0	-127.727	0	127.727	0	-51311.4	0	51311.4	50982.4	-25719.6	50982.4	25719.6

2. Рассмотрим численный пример динамической неустойчивости неоднородной по толщине пластинки с толщиной $-0.5 \leq z \leq 0.5$ и длиной $l = 20$ см. Свойства материала пластинки примем как в первом примере.

В Табл. 3.2.2 приведены корни характеристического уравнения (3.2.6) при разных скоростях обтекания пластинки с толщиной 1 см.

Табл. 3.2.2 Частота колебаний в зависимости от скорости обтекания пластинки с толщиной 1 см

-	β_1		β_2		β_3		β_4		β_5		β_6		β_7		β_8	
	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
$V = 0$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.698	0	386.698	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4
$V = c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.698	0	386.698	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4
$V = 2c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.698	0	386.698	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4
$V = 3c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.698	0	386.698	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4
$V = 4c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.698	0	386.698	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4
$V = 5c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.698	0	386.698	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4
$V = 6c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.698	0	386.698	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4

Табл. 3.2.2 Частота колебаний в зависимости от скорости обтекания пластинки с толщиной 1см

-	β_1		β_2		β_3		β_4		β_5		β_6		β_7		β_8	
Скорость обтекания	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im	Re	Im
$V = 7 c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.698	0	386.698	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4
$V = 8 c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.698	0	386.698	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4
$V = 9 c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.698	0	386.698	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4
$V = 10 c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.699	0	386.699	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4
$V = 15 c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.699	0	386.699	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4
$V = 20 c_\infty$	-60447.5	-28052.4	-60447.5	28052.4	0	-386.7	0	386.7	0	-55718.1	0	55718.1	60447.5	-28052.4	60447.5	28052.4

Как видно из Табл. 3.2.1, Табл. 3.2.2, скорость обтекания пластинки практически не влияет на величину резонансной частоты. Увеличение скорости обтекания оказывает незначительное влияние только на мнимые части корней β_3 и β_4 , что характеризует затухание колебаний.

В Табл. 3.2.3 приведены расчеты резонансных частот пластинки со свойствами материала как в первом примере при разных толщинах.

Табл. 3.2.3 Частота колебаний в зависимости от толщины пластинки

Толщина пластинки	β_1		β_2		β_3		β_4		β_5		β_6		β_7		β_8	
$h_1=0.3$ $h_2=0.2$	- 53950.7	- 28078.3	- 53950.7	28078.3	0	-80.7461	0	80.7461	0	- 56075.9	0	56075.9	53950.7	- 28078.3	53950.7	28078.3
$h_1=0.03$ $h_2=0.02$	- 23854.5	- 13705.7	- 23854.5	13705.7	0	- 0.0807289	0	0.0807289	0	- 27411.4	0	27411.4	23854.5	- 13705.7	23854.5	13705.7
$h_1=0.3$ $h_2=0.3$	- 48466.4	- 25032.6	- 48466.4	25032.6	0	-83.3776	0	83.3776	0	- 49981.8	0	49981.8	48466.4	- 25032.6	48466.4	25032.6
$h_1=0.03$ $h_2=0.03$	- 21354.9	- 12265.1	- 21354.9	12265.1	0	- 0.0833555	0	0.0833555	0	- 24530.2	0	24530.2	21354.9	- 12265.1	21354.9	12265.1
$h_1=0.4$ $h_2=0.3$	- 58779.5	- 29094.5	- 58779.5	29094.5	0	-190.535	0	190.535	0	- 57998.5	0	57998.5	58779.5	- 29094.5	58779.5	29094.5
$h_1=0.04$ $h_2=0.03$	- 25402.7	- 14560.6	- 25402.7	14560.6	0	-0.190401	0	0.190401	0	- 29121.1	0	29121.1	25402.7	- 14560.6	25402.7	14560.6
$h_1=0.4$ $h_2=0.4$	- 54671.1	- 26821.2	- 54671.1	26821.2	0	-197.749	0	197.749	0	- 53444.6	0	53444.6	54671.1	- 26821.2	54671.1	26821.2
$h_1=0.04$ $h_2=0.04$	- 23532.7	-13483	- 23532.7	13483	0	-0.197583	0	0.197583	0	- 26965.9	0	26965.9	23532.7	-13483	23532.7	13483

Рассмотрим случай, когда изгибные колебания пластинки вызваны только планарными колебаниями (обтекание отсутствует). В этом случае система дифференциальных уравнений (3.1.28) и (3.1.29) будет иметь вид:

$$\frac{ml}{2} \ddot{w}_1(t) + \frac{D\pi^4}{2l^3} w_1(t) - \frac{K\pi^4}{2l^3} \varphi_1(t) = 0 \quad (3.2.7)$$

$$\frac{ml}{2} \ddot{w}_2(t) + \frac{8D\pi^4}{l^3} w_2(t) - \frac{8K\pi^4}{l^3} \varphi_2(t) = 0 \quad (3.2.8)$$

Рассмотрим частный случай динамической неустойчивости пластинки, когда планарные колебания $\varphi_1(t) = \varphi_{10} \cos \beta t$, $\varphi_2(t) \equiv 0$, $\psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) \equiv 0$ вызывают изгибные колебания. В этом случае систему дифференциальных уравнений (3.2.7), (3.2.8) запишем в виде:

$$\ddot{w}_1(t) + \alpha^2 w_1(t) = \frac{K\pi^4}{ml^4} \varphi_{10} \cos \beta t \quad (3.2.9)$$

$$\ddot{w}_2(t) + 16\alpha^2 w_2(t) = 0 \quad (3.2.10)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{D\pi^4}{ml^4} \quad (3.2.11)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (3.2.9), (3.2.10) может быть представлено в следующем виде:

$$w_1(t) = A_1 e^{i\alpha t} + A_2 e^{-i\alpha t} + C \cos \beta t; \quad w_2(t) = B_1 e^{4i\alpha t} + B_2 e^{-4i\alpha t} \quad (3.2.12)$$

Подставляя выражение для $w_1(t)$ из (3.2.12) в (3.2.9), для амплитуды изгибных колебаний, вызванных планарными колебаниями, получаем:

$$C = \frac{K\pi^4}{ml^4(-\beta^2 + \alpha^2)} \varphi_{10} \quad (3.2.13)$$

Таким образом, получаем, что для неоднородных по толщине прямоугольных пластин при жестком контакте между слоями планарные колебания вызывают изгибные колебания. В случае, когда частота планарных колебаний совпадает с собственной частотой изгибных колебаний неоднородной пластинки, возникает резонанс:

$$\beta^2 = \frac{D\pi^4}{ml^4} \quad (3.2.14)$$

Из системы алгебраических уравнений (3.2.2) получаем:

$$\begin{cases} \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)A_1 = 0 \\ \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)A_2 = \frac{\pi^4 K}{2l^3}\varphi_{10} \\ \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right)A_3 = 0 \\ \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right)A_4 = 0 \end{cases} \quad (3.2.15)$$

Следовательно, для амплитуды изгибных колебаний будем иметь:

$$A_2 = \frac{\pi^4 K}{2l^3} \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)^{-1} \varphi_{10} \quad (3.2.16)$$

Таким образом, в случае, когда изгибные колебания пластинки вызваны только планарными колебаниями (обтекание отсутствует) $\varphi_1(t) = \varphi_{10} \cos\beta t$, $\varphi_2(t) \equiv 0$, $\psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) \equiv 0$, получаем изгибные колебания с амплитудой (3.2.16) и резонансной частотой (3.2.14).

Рассмотрим случай, когда в системе дифференциальных уравнений (3.1.28), (3.1.29) члены с коэффициентам $kl/2$ равны нулю. В этом случае будем иметь:

$$\frac{ml}{2}\ddot{w}_1(t) + \frac{D\pi^4}{2l^3}w_1(t) - \frac{4kV}{3}w_2(t) - \frac{K\pi^4}{2l^3}\varphi_1(t) = 0 \quad (3.2.17)$$

$$\frac{ml}{2}\ddot{w}_2(t) + \frac{8D\pi^4}{l^3}w_2(t) + \frac{4kV}{3}w_1(t) - \frac{8K\pi^4}{l^3}\varphi_2(t) = 0 \quad (3.2.18)$$

Для амплитуды изгибных колебаний из системы уравнений (3.2.2) получаем:

$$\begin{cases} \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)A_1 - \frac{4kV}{3}A_3 = 0 \\ \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)A_2 - \frac{4kV}{3}A_4 = \frac{\pi^4 K}{2l^3}\varphi_{10} \\ \frac{4kV}{3}A_1 + \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right)A_3 = 0 \\ \frac{4kV}{3}A_2 + \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right)A_4 = 0 \end{cases} \quad (3.2.19)$$

Как видно из (3.2.19), уравнения относительно A_1, A_3 и A_2, A_4 отделяются.

$$\begin{cases} \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)A_2 - \frac{4kV}{3}A_4 = \frac{\pi^4 K}{2l^3}\varphi_{10} \\ \frac{4kV}{3}A_2 + \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right)A_4 = 0 \end{cases} \quad (3.2.20)$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)A_1 - \frac{4kV}{3}A_3 = 0 \\ \frac{4kV}{3}A_1 + \left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right)A_3 = 0 \end{cases} \quad (3.2.21)$$

Из (3.2.21) получаем: $A_1 = 0, A_3 = 0$. Из условия равенства нулю детерминанты системы (3.2.20) получаем условие возникновения резонанса:

$$\left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)\left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right) + \frac{16k^2V^2}{9} = 0 \quad (3.2.22)$$

Для амплитуды изгибных колебаний получаем:

$$A_2 = -\frac{9\pi^4(-ml^4\beta^2 + 16\pi^4 D)}{2l^3\left(9\left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)\left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right) + 16k^2V^2\right)}K\varphi_{10} \quad (3.2.23)$$

$$A_4 = -\frac{12\pi^4 kV}{9\left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{\pi^4 D}{2l^3}\right)\left(-\frac{ml}{2}\beta^2 + \frac{8\pi^4 D}{l^3}\right) + 16k^2V^2}K\varphi_{10} \quad (3.2.24)$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

4 КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ НЕСИММЕТРИЧНО НЕОДНОРОДНОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ УСЛОВИЯХ СВОБОДНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Известно большое количество работ по исследованию упругих многослойных пластин при условии жесткого контакта между слоями пластины [101], [120]. В современном машиностроении и авиастроении благодаря ценным свойствам большое место занимает использование полимеров. Очень часто соединение металл - полимер реализуется с помощью заклепочных швов по контуру, возможны случаи, когда склеивание или сваривание слоев не эффективно. Для исследования таких задач в работах [121 - 124] используется асимптотический метод интегрирования.

Рассмотрим случай, когда два слоя прямоугольных пластин закреплены по кромкам, а между слоями имеет место условие скользящего контакта.

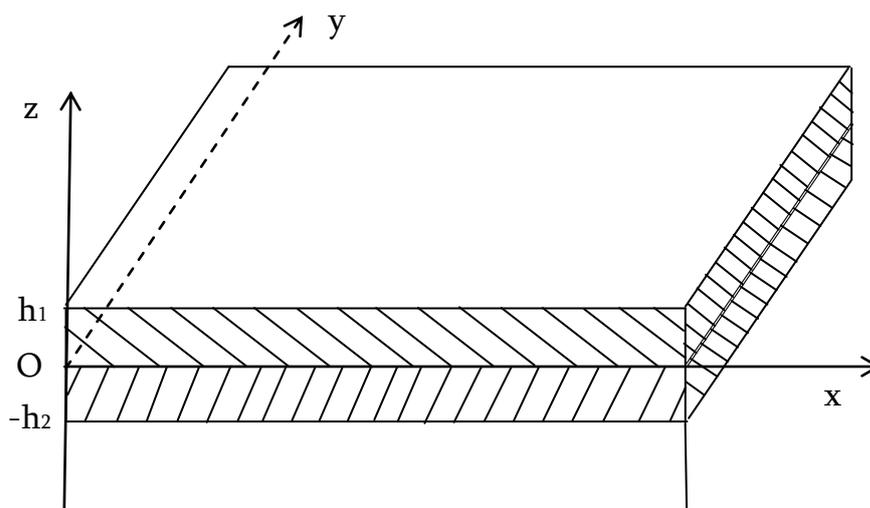


Рис. 14 Двухслойная пластина при условии скользящего контакта между ортотропными слоями

В данной главе рассматриваются задачи колебаний двухслойной пластины с ортотропными и изотропными слоями (Рис. 14) при условии скользящего контакта между слоями на основе гипотезы Кирхгофа для каждого слоя в отдельности.

$$\begin{aligned}
 u_1^{(k)}(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_k(x, y, t); \\
 u_2^{(k)}(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_k(x, y, t), \quad k = 1, 2; \\
 u_3^{(k)}(x, y, t) &= w(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

4.1 Вывод уравнений изгибных и планарных колебаний. Условие неотделимости слоев при изгибе. Частные случаи

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) слой с индексом (1) и толщиной h_1 занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq h_1$, а слой с индексом (2) и толщиной h_2 – область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h_2 \leq z \leq 0$.

Уравнения колебания слоев имеют вид [101]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = \rho_k \frac{\partial^2 u_j^{(k)}}{\partial t^2}, \quad k = 1, 2
 \tag{4.1.1}$$

Допустим, внешняя лицевая сторона слоя с индексом (1) находится под нормальной нагрузкой (см. Рис. 15):

$$\sigma_{33}^{(1)} = -q(x, y, t), \quad \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{32}^{(1)} = 0 \quad \text{при } z = h_1
 \tag{4.1.2}$$

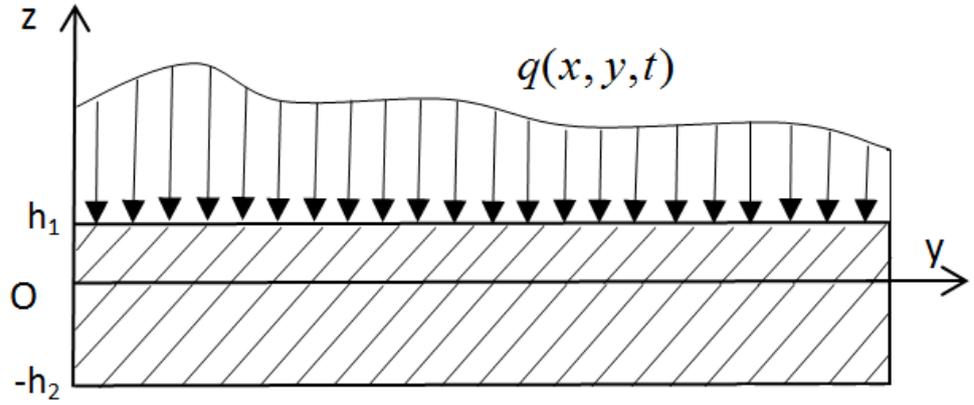


Рис. 15 Нагружение прямоугольной пластинки

Внешняя сторона второго слоя свободна (см. Рис. 15):

$$\sigma_{33}^{(2)} = \sigma_{31}^{(2)} = \sigma_{32}^{(2)} = 0 \text{ при } z = h_2 \quad (4.1.3)$$

Условия скользящего контакта на стыке слоев (непрерывность поперечного перемещения и нормального напряжения, равенство нулю касательных напряжений) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_3^{(1)} = U_3^{(2)}, \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)}, \sigma_{31}^{(1)} = 0, \sigma_{32}^{(1)} = 0 \text{ при } z = 0 \\ \sigma_{31}^{(2)} = 0, \sigma_{32}^{(2)} = 0 \text{ при } z = 0 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Принимая гипотезу Кирхгофа относительно компонент упругих перемещений слоев пластинки и усредняя уравнения (4.1.1), получим следующие уравнения относительно усилий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial S^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial y} &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial S^{(2)}}{\partial y} &= \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial S^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial T_2^{(2)}}{\partial y} &= \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$$\frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial y} - q(x, y) - \sigma_{33}(0) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y} + \sigma_{33}(0) = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

После осреднения уравнения (4.1.1), с учетом гипотезы Кирхгофа относительно компонент упругих перемещений слоев пластинки, получим следующие уравнения относительно моментов:

$$\frac{\partial M_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial y} - N_1^{(1)} = \frac{\rho_1 h_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial M_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial x} - N_2^{(1)} = \frac{\rho_1 h_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_1 - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial M_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial y} - N_1^{(2)} = -\frac{\rho_2 h_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (4.1.6)$$

$$\frac{\partial M_2^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial x} - N_2^{(2)} = -\frac{\rho_2 h_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_2 + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Усилия в (4.1.5) и (4.1.6) выразим через компоненты перемещений:

$$T_1^{(1)} = \int_0^{h_1} \sigma_{11}^{(1)} dz = C_{11}^{(1)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu_{22}^{(1)} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{22}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$T_2^{(1)} = \int_0^{h_1} \sigma_{22}^{(1)} dz = C_{22}^{(1)} \left[\frac{\partial v_1}{\partial y} + \nu_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{h_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$S^{(1)} = \int_0^{h_1} \sigma_{12}^{(1)} dz = C_{66}^{(1)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (4.1.7)$$

$$T_1^{(2)} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{11}^{(2)} dz = C_{11}^{(2)} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} + \nu_{22}^{(2)} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{22}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$T_2^{(2)} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{22}^{(2)} dz = C_{22}^{(2)} \left[\frac{\partial v_2}{\partial y} + \nu_{11}^{(2)} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{11}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$S^{(2)} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{12}^{(2)} dz = C_{66}^{(2)} \left[\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

$$N_1^{(1)} = \int_0^{h_1} \sigma_{13}^{(1)} dz \quad N_2^{(1)} = \int_0^{h_1} \sigma_{23}^{(1)} dz$$

$$N_1^{(2)} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{13}^{(2)} dz \quad N_2^{(2)} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{23}^{(2)} dz$$

Моменты в (4.1.5) и (4.1.6), выраженные через компоненты перемещений, можем записать в следующем виде:

$$M_1^{(1)} = \int_0^{h_1} z \sigma_{11}^{(1)} dz = K_{11}^{(1)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu_{22}^{(1)} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2h_1}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{22}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$M_2^{(1)} = \int_0^{h_1} z \sigma_{22}^{(1)} dz = K_{22}^{(1)} \left[\frac{\partial v_1}{\partial y} + \nu_{11}^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2h_1}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$H^{(1)} = \int_0^{h_1} z \sigma_{12}^{(1)} dz = K_{66}^{(1)} \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{2}{3} h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (4.1.7^*)$$

$$M_1^{(2)} = \int_{-h_2}^0 z \sigma_{11}^{(2)} dz = -K_{11}^{(2)} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} + \nu_{22}^{(2)} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{2h_2}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{22}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$M_2^{(2)} = \int_{-h_2}^0 z \sigma_{22}^{(2)} dz = -K_{22}^{(2)} \left[\frac{\partial v_2}{\partial y} + \nu_{11}^{(2)} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{2h_2}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{11}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$H^{(2)} = \int_{-h_2}^0 z \sigma_{12}^{(2)} dz = -K_{66}^{(2)} \left[\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{2}{3} h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

В (4.1.7), (4.1.7*) введены следующие обозначения:

$$C_{ii}^{(j)} = h_j B_{ii}^{(j)}, \quad K_{ii}^{(j)} = \frac{1}{2} h_j^2 B_{ii}^{(j)}, \quad B_{ii}^{(j)} = \frac{E_{ii}^{(j)}}{1 - \nu_1^{(j)} \nu_2^{(j)}} \quad (4.1.8)$$

Подставляя (4.1.7), (4.1.7*) в (4.1.5) получаем следующую систему уравнений относительно перемещений:

$$\begin{aligned}
& C_{66}^{(1)} \Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left((C_{11}^{(1)} - C_{66}^{(1)}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (C_{11}^{(1)} \nu_{22}^{(1)} + C_{66}^{(1)}) \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \\
& \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (C_{11}^{(1)} \nu_{22}^{(1)} + 2C_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& C_{66}^{(1)} \Delta v_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left((C_{22}^{(1)} - C_{66}^{(1)}) \frac{\partial v_1}{\partial y} + (C_{22}^{(1)} \nu_{11}^{(1)} + C_{66}^{(1)}) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \\
& \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{22}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (C_{22}^{(1)} \nu_{11}^{(1)} + 2C_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
& C_{66}^{(2)} \Delta u_2 + \frac{\partial}{\partial x} \left((C_{11}^{(2)} - C_{66}^{(2)}) \frac{\partial u_2}{\partial x} + (C_{11}^{(2)} \nu_{22}^{(2)} + C_{66}^{(2)}) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \\
& \frac{h_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{11}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (C_{11}^{(2)} \nu_{22}^{(2)} + 2C_{66}^{(2)}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& C_{66}^{(2)} \Delta v_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left((C_{22}^{(2)} - C_{66}^{(2)}) \frac{\partial v_2}{\partial y} + (C_{22}^{(2)} \nu_{11}^{(2)} + C_{66}^{(2)}) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \\
& \frac{h_2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{22}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (C_{22}^{(2)} \nu_{11}^{(2)} + 2C_{66}^{(2)}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Подстановка выражений для $M_1^{(k)}$, $M_2^{(k)}$ и $H^{(k)}$ из (4.1.7*) в уравнения системы

(4.1.6) приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned}
& K_{66}^{(1)} \Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1^1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + F_{2,1}^1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_{2,1}^1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_1^{(1)} = \frac{\rho_1 h_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& K_{66}^{(1)} \Delta v_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left(f_2^1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + F_{1,2}^1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{22}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + F_{1,2}^1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - N_2^{(1)} = \frac{\rho_1 h_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_1 - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
& K_{66}^{(2)} \Delta u_2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + F_{2,1}^2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{11}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_{2,1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + N_1^{(2)} = \frac{\rho_2 h_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& K_{66}^{(2)} \Delta v_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(f_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + F_{1,2}^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{22}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + F_{1,2}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + N_2^{(2)} = \frac{\rho_2 h_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_2 + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

где принято следующее обозначение:

$$f_l^k = (K_{ll}^{(k)} - K_{66}^{(k)}), F_{l,p}^k = \nu_{ll}^{(k)} K_{pp}^{(k)} + K_{66}^{(k)}, l, p, k = 1, 2 \tag{4.1.11}$$

Пренебрегая в системе уравнений (4.1.10) членами, имеющими порядок момента инерции вращения:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1 h_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \frac{\rho_1 h_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_1 - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ & \frac{\rho_2 h_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \frac{\rho_2 h_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_2 + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.1.11^*)$$

получаем выражения для $N_1^{(k)}$ и $N_2^{(k)}$ относительно компонентов перемещений:

$$\begin{aligned} N_1^{(1)} &= K_{66}^{(1)} \Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1^1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + F_{2,1}^1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_{2,1}^1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ N_2^{(1)} &= K_{66}^{(1)} \Delta v_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left(f_2^1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + F_{1,2}^1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{22}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + F_{1,2}^1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (4.1.11^{**})$$

$$\begin{aligned} N_1^{(2)} &= -K_{66}^{(2)} \Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + F_{2,1}^2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) - \frac{2h_2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{11}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_{2,1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ N_2^{(2)} &= -K_{66}^{(2)} \Delta v_2 - \frac{\partial}{\partial y} \left(f_2^2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + F_{1,2}^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) - \frac{2h_2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{22}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + F_{1,2}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения (4.1.11**) для $N_1^{(k)}$ и $N_2^{(k)}$ в пятое и шестое уравнения системы дифференциальных уравнений (4.1.5), получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} h_1 \left[K_{11}^{(1)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_{22}^{(1)} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] - K_{66}^{(1)} \Delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - f_1^1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - f_2^1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial y^3} \\ & - F_{2,1}^1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial y} - F_{1,2}^1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2} + \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q(x, y) - \sigma_{33}(0) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} h_2 \left[K_{11}^{(2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_{22}^{(2)} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + A_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + K_{66}^{(2)} \Delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \\ & + f_1^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + f_2^2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial y^3} + F_{2,1}^2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^2 \partial y} + F_{1,2}^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x \partial y^2} + \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sigma_{33}(0) \end{aligned}$$

где:

$$A_k = (2K_{66}^{(k)} + \nu_{11}^{(1)} K_{22}^{(k)} + \nu_{22}^{(k)} K_{11}^{(k)}) \quad (4.1.13)$$

Таким образом, приходим к решению системы из шести уравнений (4.1.9), (4.1.12) относительно шести искомым функций $u_1, u_2, v_1, v_2, w, \sigma_{33}(0)$ от переменных x, y, t .

Исключая $\sigma_{33}(0) = \sigma_{33}(0, x, y, t)$ из уравнений (4.1.12), получаем:

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2}{3} (h_1 A_k + h_2 A_k) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - (K_{66}^{(1)} \Delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \\
 & K_{66}^{(2)} \Delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right)) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} (f_1^1 u_1 - f_1^2 u_2) - \frac{\partial^3}{\partial y^3} (f_2^1 v_1 - f_2^2 v_2) - \\
 & \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} (F_{2,1}^1 v_1 - F_{2,1}^2 v_2) - \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} (F_{1,2}^1 u_1 - F_{1,2}^2 u_2) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -q(x, y)
 \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

где

$$m = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2, \quad D_{kk} = \frac{2}{3} (h_1 K_{kk}^{(1)} + h_2 K_{kk}^{(2)}) \tag{4.1.15}$$

Таким образом, из (4.1.9) и (4.1.12) следует, что в рассмотренной постановке задачи изгибных и планарных колебаний не отделяются. Это означает, что изгибные колебания пластинки могут вызвать планарные колебания и наоборот.

Граничные условия на краях пластины получаются при помощи осреднения условий задачи в трехмерной постановке [125] и приведены в [126].

1. Граничные условия закрепленного края в трехмерной постановке:

$$u_1^{(k)} = 0, \quad u_2^{(k)} = 0, \quad u_3^{(k)} = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \tag{4.1.16}$$

Осредняя условия (4.1.16):

$$\int_{-h_2}^{h_1} u_i^{(k)} dz = 0, \quad \int_{-h_2}^{h_1} z u_i^{(k)} dz = 0, \quad i=1,2,3, \quad k=1,2 \tag{4.1.16*}$$

и учитывая гипотезу Кирхгофа (4.1) для первого слоя приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{h_1^2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + h_1 u_1 = 0 \\ -\frac{h_1^3}{3} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h_1^2}{2} u_1 = 0 \end{cases} \tag{4.1.16**}$$

Как видно, детерминант системы уравнений (4.1.16**) не равняется нулю. Следовательно, система (4.1.16**) может быть удовлетворена только в случае нулевых значений неизвестных u_1 и $\partial w/\partial x$. Для второго слоя и второй компоненты перемещений получаем аналогичный критерий.

Осредненные условия закрепленного края:

$$u_k = 0, v_k = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.1.17)$$

2. Случаю облегченной заделки соответствуют условия:

$$u_1^{(k)} = 0, \sigma_{12}^{(k)} = 0, u_3^{(k)} = 0 \text{ при } x = const \quad (4.1.18)$$

Осредняя условия (4.1.18):

$$\int_{-h_2}^{h_1} u_i^{(k)} dz = 0, \int_{-h_2}^{h_1} z u_i^{(k)} dz = 0, \int_{-h_2}^{h_1} \sigma_{12}^{(k)} dz = 0, \int_{-h_2}^{h_1} z \sigma_{12}^{(k)} dz = 0 \quad i=1,3, k=1,2 \quad (4.1.18^*)$$

и учитывая гипотезу Кирхгофа (4.1) из первых двух условий (4.1.18*) приходим к системе уравнений (4.1.16**) детерминант которой не равняется нулю. Следовательно, имеет место условие равенства нулю неизвестных u_1 и $\partial w/\partial x$. Аналогично для второго слоя.

Второе и третье условия (4.1.18*) означают, что $S^{(k)} = 0, H^{(k)} = 0$. Отсюда, с учетом (4.1.7) для первого слоя получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{2}{3} h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad (4.1.18^{**})$$

С учетом условий $u_1 = 0$ и $\partial w/\partial x = 0$ при $x = const$ из (4.1.18**) следует, что $\partial v_1/\partial x = 0$. Аналогично для второго слоя. Таким образом, случаю облегченной заделки будут соответствовать осредненные граничные условия:

$$u_1 = 0, \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, u_2 = 0, \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.1.19)$$

3. Условия стесненного скользящего контакта:

$$u_1^{(k)} = 0, u_2^{(k)} = 0, \sigma_{13}^{(k)} = 0 \text{ при } x = const \quad (4.1.20)$$

Осредняя условия (4.1.20):

$$\int_{-h_2}^{h_1} u_i^{(k)} dz = 0, \int_{-h_2}^{h_1} z u_i^{(k)} dz = 0, \int_{-h_2}^{h_1} \sigma_{13}^{(k)} dz = 0, \int_{-h_2}^{h_1} z \sigma_{13}^{(k)} dz = 0 \quad i=1,2, k=1,2 \quad (4.1.20^*)$$

и учитывая гипотезу Кирхгофа (4.1) из первых двух условий (4.1.20*) приходим к системе уравнений (4.1.16**) детерминант которой не равняется нулю. Следовательно, имеет место условие равенства нулю неизвестных u_1 и $\partial w / \partial x$. Аналогично для второго слоя и для второй компоненты перемещений.

Второе условие (4.1.20*) означают, что $N_1^{(k)} = 0$. Третьим условием, согласно теории Кирхгофа, пренебрегаем.

Осредненные условия в случае стесненного скользящего контакта будут:

$$u_k = 0, v_k = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (4.1.21)$$

4. Условиям шарнирного закрепления (условия Навье) соответствуют:

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0, u_2^{(k)} = 0, u_3^{(k)} = 0 \text{ при } x = const \quad (4.1.22)$$

Осредняя условия (4.1.22):

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma_{11}^{(k)} dz = 0, \int_{-h_2}^{h_1} z \sigma_{11}^{(k)} dz = 0, \int_{-h_2}^{h_1} u_i^{(k)} dz = 0, \int_{-h_2}^{h_1} z u_i^{(k)} dz = 0, \quad i=2,3, k=1,2 \quad (4.1.22^*)$$

учитывая гипотезу Кирхгофа (4.1), из второго и третьего условий (4.1.22*), как показано в случае закрепленного края, следует, что $v_k = 0$ и $w = 0$. Первое и второе условия (4.1.22*) означают, что $T_1^{(k)} = 0, M_1^{(k)} = 0$. Отсюда, с учетом (4.1.7) и полученных условий $v_k = 0$ и $w = 0$ при $x = const$ для первого слоя будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (4.1.22^{**})$$

Как видно, детерминант системы уравнений (4.1.22**) не равен нулю. Следовательно, система может быть удовлетворена только в случае $\partial u_1 / \partial x = 0$ и $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$. Аналогично для второго слоя.

Таким образом, условиям Навье будут соответствовать следующие осредненные условия:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad v_1 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad v_2 = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4.1.23)$$

5. Случай скользящего контакта. Условия трехмерной задачи:

$$u_1^{(k)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(k)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(k)} = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \quad (4.1.24)$$

Осредняя условия (4.1.24).

$$\begin{aligned} \int_{-h_2}^{h_1} u_1^{(k)} dz = 0, \quad \int_{-h_2}^{h_1} z u_1^{(k)} dz = 0, \quad \int_{-h_2}^{h_1} \sigma_{12}^{(k)} dz = 0, \\ \int_{-h_2}^{h_1} z \sigma_{12}^{(k)} dz = 0, \quad \int_{-h_2}^{h_1} \sigma_{13}^{(k)} dz = 0 \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.1.24^*)$$

Учитывая гипотезу Кирхгофа (4.1), как показано в случае закрепленного края, из первых двух условий (4.1.24*) вытекает: $u_1 = 0$ и $\partial w / \partial x = 0$. Из третьего и четвертого условий получаем, что $\partial v_1 / \partial x = 0$ (показано в случае облегченной заделки). Полученные условия действительны также для второго слоя. После осреднения, с учетом полученных условий, из пятого выражения (4.1.24*) приходим к условию $\partial^3 w / \partial x^3 = 0$.

Таким образом, случаю скользящего контакта соответствуют осредненные условия:

$$u_1 = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad u_2 = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (4.1.25)$$

6. Стесненный свободный край:

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0, u_2^{(k)} = 0, \sigma_{13}^{(k)} = 0, \text{ при } x = const \quad (4.1.26)$$

В случае граничных условий стесненного свободного края, число осредненных условий больше, чем нужно для постановки задачи. Аналогично классической теории пластин, в случае свободного края, необходимо применить сочетание условий.

7. Как и в предыдущем случае, число осредненных граничных условий больше и в случае свободного края

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0, \sigma_{12}^{(k)} = 0, \sigma_{13}^{(k)} = 0, \text{ при } x = const \quad (4.1.27)$$

Для приведенной выше модели исследования задач изгиба и колебаний двухслойной пластинки исключается возможность отделения слоев друг от друга в процессе деформации. Возможность отделения слоев проверяется после решения задачи и определения напряжения $\sigma_{33}(0) = \sigma_{33}(0, x, y, t)$.

Условие отсутствия расслоения есть:

$$\sigma_{33}(0) < 0 \quad (4.1.28)$$

Условие $\sigma_{33}(0) = 0$ на стыке слоев является критерием возникновения расслоения.

Рассмотрим пластинку, которая изгибается в виде цилиндрической поверхности под действием равномерно распределенной нагрузки:

$$q = q_0 = const > 0 \quad (4.1.29)$$

С учетом цилиндрического изгиба и независимости искомых функции от времени t , (4.1.9) и (4.1.12) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} u_1'' - 0.5h_1 w''' = 0, \quad v_1'' = 0, \\ u_2'' + 0.5h_2 w''' = 0, \quad v_2'' = 0, \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

$$D_* w^{IV} = -q_0, \quad D_* = 0.25D_{11}, \quad D_{11} = \frac{2}{3}(h_1 K_{11}^{(1)} + h_2 K_{11}^{(2)})$$

Из системы (4.1.12) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} h_1 [K_{11}^{(1)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}] - K_{66}^{(1)} \Delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - f_1^1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} &= -q(x, y) - \sigma_{33}(0) \\ \frac{2}{3} h_2 [K_{11}^{(2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}] + K_{66}^{(2)} \Delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + f_1^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} &= \sigma_{33}(0) \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Из второго уравнения системы (4.1.31) получаем:

$$\sigma_{33}(0) = \frac{2}{3} h_2 K_{11}^{(2)} w^{IV} + K_{11}^{(2)} u_2''' \quad (4.1.32)$$

Подставляя выражения для w^{IV} и u_2''' , полученные из (4.1.9) и (4.1.30), в (4.1.32) находим:

$$\sigma_{33}(0) = -\frac{h_2 K_{11}^{(2)}}{h_1 K_{11}^{(1)} + h_2 K_{11}^{(2)}} q_0 \quad (4.1.33)$$

Как видно из (4.1.33) для данной задачи, независимо от граничных условий, нормальное напряжение на стыке пластин сжимающее, поэтому расслоение будет отсутствовать.

Рассмотрим возможность расслоения в частном случае, когда на двухслойную пластину действует лишь объемная сила веса (сила притяжения).

В данном случае меняются только пятое и шестое уравнения системы дифференциальных уравнений (4.1.5), которые получаются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial y} - \rho_1 h_1 g - \sigma_{33}(0) &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y} - \rho_2 h_2 g + \sigma_{33}(0) &= \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

Из третьего и четвертого уравнений системы (4.1.10), пренебрегая членами, которые имеют порядок момента инерции и с учетом принятых обозначений, для $N_1^{(2)}$ и $N_2^{(2)}$ получаем:

$$N_1^{(2)} = -K_{66}^{(2)} \Delta u_2 - (K_{11}^{(2)} - K_{66}^{(2)}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - (K_{66}^{(2)} + \nu_{22}^{(2)} K_{11}^{(2)}) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} - \frac{2}{3} h_2 K_{11}^{(2)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{2}{3} h_2 (K_{66}^{(2)} + \nu_{22}^{(2)} K_{11}^{(2)}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad (4.1.35)$$

$$N_2^{(2)} = -K_{66}^{(2)} \Delta v_2 - (K_{22}^{(2)} - K_{66}^{(2)}) \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} - (K_{66}^{(2)} + \nu_{11}^{(2)} K_{22}^{(2)}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - \frac{2}{3} h_2 K_{22}^{(2)} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{2}{3} h_2 (K_{66}^{(2)} + \nu_{11}^{(2)} K_{22}^{(2)}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

В случае цилиндрического изгиба для $N_1^{(2)}$ и $N_2^{(2)}$ из (4.1.35) получим следующие выражения:

$$N_1^{(2)} = -K_{66}^{(2)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - (K_{11}^{(2)} - K_{66}^{(2)}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{2}{3} h_2 K_{11}^{(2)} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$$

$$N_2^{(2)} = -K_{66}^{(2)} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \quad (4.1.36)$$

Для нормального напряжения на стыке пластин после постановки (4.1.36) во второе уравнение (4.1.34), получаем:

$$\sigma_{33}(0) = \frac{2}{3} h_2 K_{11}^{(2)} w^{IV} + K_{11}^{(2)} u_2''' + \rho_2 h_2 g \quad (4.1.37)$$

В случае, когда на двухслойную пластинку действует только сила притяжения, из системы (4.1.30) для w и u_2 получаем:

$$w^{IV} = -mgD_*^{-1}, \quad u_2''' = -0.5h_2 w^{IV} \quad (4.1.38)$$

Подставляя выражения для w^{IV} и u_2''' из (4.1.38) в (4.1.37) для нормального напряжения на стыке слоев получаем:

$$\sigma_{33}(0) = -\frac{h_1 h_2 g}{h_1 K_{11}^{(1)} + h_2 K_{11}^{(2)}} (\rho_2 K_{11}^{(1)} - \rho_1 K_{11}^{(2)}) \quad (4.1.39)$$

Из принятого условия отсутствия расслоения (4.1.28) и полученного выражения для нормального напряжения получаем критерий живучести двухслойной пластинки:

$$\rho_2 K_{11}^{(1)} - \rho_1 K_{11}^{(2)} > 0 \quad (4.1.40)$$

Полученное условие (4.1.40) является критерием живучести (критерием отсутствия расслоения) двухслойной пластинки с ортотропными слоями. Согласно принятого обозначения (4.1.8) и полученного условия (4.1.40), критерий живучести двухслойной пластинки существенно зависит от веса слоев.

В Табл. 4.1.1 приведены численные расчеты для полученного критерия живучести (4.1.40) при разных толщинах монослоев пластинки. Свойства материалов взяты из [127] и приведены в следующих единицах измерения: [см]; [кг / см²]; [кг / см³].

Табл. 4.1.1 Критерий расслоения слоистой пластинки в зависимости от толщин монослоев

Материал	E_{11}^1	E_{11}^2	μ_{11}^1	μ_{22}^1	μ_{11}^2	μ_{22}^2	h_1	h_2	ρ_1	ρ_2	$K_{11}^{(1)}$	$K_{11}^{(2)}$	$\rho_2 K_{11}^{(1)} - \rho_1 K_{11}^{(2)}$
<u>слой 1</u> - КМКС 2м.120.Т10	280418	193743	0.3	0.33	0.31	0.29	0.014	0.028	0.0018	0.0015	31	83	-0.10
<u>слой 2</u> - КМКС 2м.120.Т15	280418	193743	0.3	0.33	0.31	0.29	0.014	0.014	0.0018	0.0015	31	21	0.01
<u>слой 1</u> - КМКС 2м.120.Т60	428274	316107	0.31	0.3	0.32	0.29	0.014	0.014	0.0017	0.00174	46.2744	34.14736	0.02
<u>слой 2</u> - КМКС 2м.120.Т64	428274	316107	0.31	0.3	0.32	0.29	0.014	0.028	0.0017	0.00174	46.2744	136.5894	-0.15
<u>слой 1</u> - КМКУ 3м.150.УОЛ(У)	1305216	1233837	0.3	0.33	0.29	0.31	0.014	0.014	0.0013	0.00184	141.966	132.8602	0.09
<u>слой 2</u> - КМКУ 3м.150.Р14535	1305216	1233837	0.3	0.33	0.29	0.31	0.014	0.028	0.0013	0.00184	141.966	531.4406	-0.43

При расчетах, приведенных в Табл. 4.1.1, в качестве толщины слоя взята кратная величина характерной толщины монослоя для КМКС 2м.120: 0.014 см. Как видно из Табл. 4.1.1, в случае когда при скользящем контакте толщина нижнего монослоя больше толщины верхнего слоя имеет место расслоение.

Учитывая обозначение (4.1.8), критерий живучести (4.1.40) можно записать в следующем виде:

$$\rho_2 h_1^2 B_{11}^{(1)} > \rho_1 h_2^2 B_{11}^{(2)} \quad (4.1.41)$$

Поскольку обычно задача стоит в определении толщин монослоев, критерий живучести можно записать в виде зависимости соотношения толщин слоев от физических свойств материала слоев:

$$\frac{h_1^2}{h_2^2} > \frac{\rho_1 E_{11}^{(2)} (1 - \nu_1^{(1)} \nu_2^{(1)})}{\rho_2 E_{11}^{(1)} (1 - \nu_1^{(2)} \nu_2^{(2)})} \quad (4.1.42)$$

Используя условие (4.1.42) можно определить необходимые толщины слоев, чтобы предотвратить расслоение, не утяжеляя конструкцию. Например, для приведенных примеров в Табл. 4.1.1, для отсутствия расслоения достаточными являются следующие соотношения толщин монослоев пластинки.

Табл. 4.1.2 Критерий расслоения слоистой пластинки в зависимости от толщин монослоев

Материал	E_{11}^1	E_{11}^2	μ_{11}^1	μ_{22}^1	μ_{11}^2	μ_{22}^2	ρ_1	ρ_2	h_1^2 / h_2^2
<u>слой 1</u> - КМКС 2м.120.Т10 <u>слой 2</u> - КМКС 2м.120.Т15	280418	193743	0.3	0.33	0.31	0.29	0.0018	0.0015	0.82080
<u>слой 1</u> - КМКС 2м.120.Т60 <u>слой 2</u> - КМКС 2м.120.Т64	428274	316107	0.31	0.3	0.32	0.29	0.0017	0.00174	0.72097
<u>слой 1</u> - КМКУ 3м.150.УОЛ(У) <u>слой 2</u> - КМКУ 3м.150.Р14535	1305216	1233837	0.3	0.33	0.29	0.31	0.0013	0.00184	0.66121

На Рис. 16 приведена зависимость соотношения слоев двухслойной пластинки от физических свойств материала слоев обеспечивающая отсутствие расслоения.

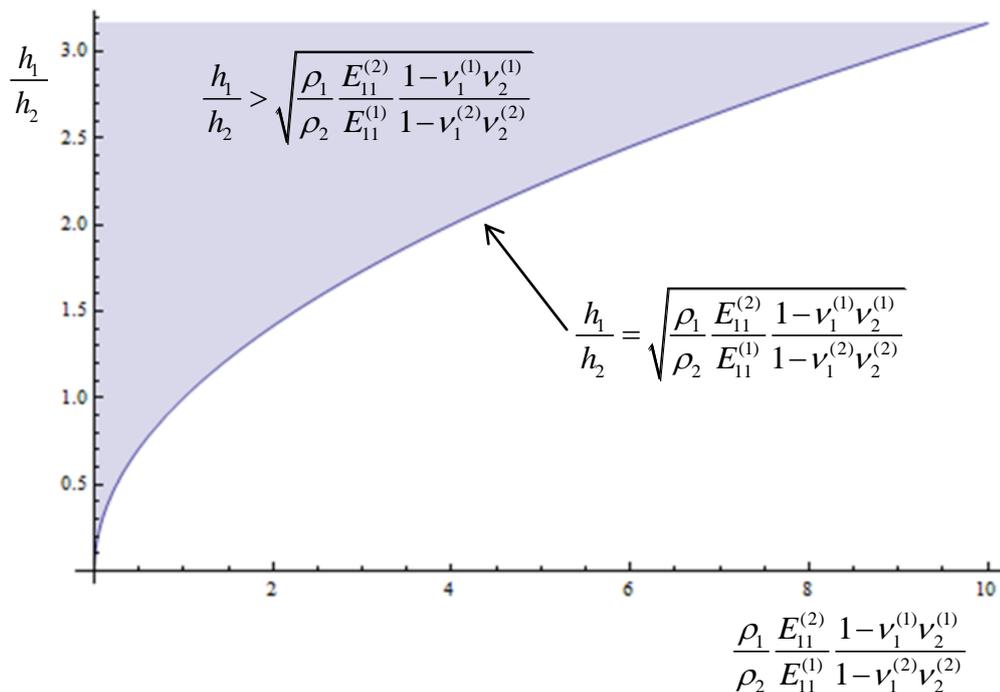


Рис. 16 Соотношение толщин слоев пластинки в зависимости от физических свойств материала слоев

4.2 Колебания двухслойных пластин при наличии проскальзывания между ортотропными слоями

Изучению задач упругих многослойных пластин при условиях жесткого контакта между слоями посвящено множество работ [101], [108]. В работе [104] получены уравнения колебаний двухслойной пластинки в условиях свободного скольжения между контактными ортотропными слоями. Данное условие подразумевает, что касательные напряжения в граничных условиях на контактных поверхностях равны нулю. Уравнения колебаний получены в предположении действительности гипотезы Кирхгофа относительно пакета в целом.

Рассмотрим прямоугольную двухслойную пластину с ортотропными слоями в декартовой системе координат (x, y, z) . Пусть слой с индексом (1) и толщиной h_1 занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq h_1$, а слой с индексом (2) и толщиной h_2 - область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h_2 \leq z \leq 0$. Уравнения колебаний двухслойной пластины при условии свободного скольжения между контактными поверхностями пластины, согласно [104], имеют вид:

$$\begin{aligned}
& C_{66}^{(1)} \Delta u_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left((C_{11}^{(1)} - C_{66}^{(1)}) \frac{\partial u_1}{\partial x} + (C_{11}^{(1)} \nu_{22}^{(1)} + C_{66}^{(1)}) \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \\
& \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (C_{11}^{(1)} \nu_{22}^{(1)} + 2C_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& C_{66}^{(1)} \Delta v_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left((C_{22}^{(1)} - C_{66}^{(1)}) \frac{\partial v_1}{\partial y} + (C_{22}^{(1)} \nu_{11}^{(1)} + C_{66}^{(1)}) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) - \\
& \frac{h_1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{22}^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (C_{22}^{(1)} \nu_{11}^{(1)} + 2C_{66}^{(1)}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
& C_{66}^{(2)} \Delta u_2 + \frac{\partial}{\partial x} \left((C_{11}^{(2)} - C_{66}^{(2)}) \frac{\partial u_2}{\partial x} + (C_{11}^{(2)} \nu_{22}^{(2)} + C_{66}^{(2)}) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \\
& \frac{h_2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(C_{11}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (C_{11}^{(2)} \nu_{22}^{(2)} + 2C_{66}^{(2)}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& C_{66}^{(2)} \Delta v_2 + \frac{\partial}{\partial y} \left((C_{22}^{(2)} - C_{66}^{(2)}) \frac{\partial v_2}{\partial y} + (C_{22}^{(2)} \nu_{11}^{(2)} + C_{66}^{(2)}) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \\
& \frac{h_2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(C_{22}^{(2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (C_{22}^{(2)} \nu_{11}^{(2)} + 2C_{66}^{(2)}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(v_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
& D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2}{3} (h_1 A_k + h_2 A_k) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - (K_{66}^{(1)} \Delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \\
& K_{66}^{(2)} \Delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right)) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} (f_1^1 u_1 - f_1^2 u_2) - \frac{\partial^3}{\partial y^3} (f_2^1 v_1 - f_2^2 v_2) - \\
& \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} (F_{2,1}^1 v_1 - F_{2,1}^2 v_2) - \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} (F_{1,2}^1 u_1 - F_{1,2}^2 u_2) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

где приняты следующие обозначения:

$$m = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2, D_{kk} = \frac{2}{3}(h_1 K_{kk}^{(1)} + h_2 K_{kk}^{(2)}), A_k = (2K_{66}^{(k)} + \nu_{11}^{(1)} K_{22}^{(k)} + \nu_{22}^{(k)} K_{11}^{(k)}) \quad (4.2.2)$$

$$f_l^k = (K_{ll}^{(k)} - K_{66}^{(k)}), F_{l,p}^k = \nu_{ll}^{(k)} K_{pp}^{(k)} + K_{66}^{(k)}, l, p, k = 1, 2$$

В случае одномерных колебаний уравнения (4.2.1) с учетом (4.2.2) имеют вид:

$$C_{11}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$C_{66}^{(1)} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \quad (4.2.3)$$

$$C_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$C_{66}^{(2)} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - K_{11}^{(1)} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + K_{11}^{(2)} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Как видно из системы дифференциальных уравнений (4.2.3) в случае двухслойных пластин уравнения планарных колебаний относительно перемещений v_1, v_2 автономны, они не зависят от изгибных колебаний w . Планарные колебания относительно перемещений v_1, v_2 не связаны также с компонентами перемещений u_1, u_2 .

Принимая следующие обозначения:

$$f_1 = u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, f_2 = u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.2.4)$$

задача колебаний двухслойных пластин в случае наличия проскальзывания между контактными поверхностями приходит к решению следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} (K_{11}^{(2)} f_2 - K_{11}^{(1)} f_1) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{\rho_1 h_1}{C_{11}^{(1)}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = \frac{\rho_2 h_2}{C_{11}^{(2)}} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \end{cases} \quad (4.2.5)$$

где

$$D_{11}^* = \frac{1}{6} (K_{11}^{(1)} h_1 + K_{11}^{(2)} h_2) \quad (4.2.6)$$

Обозначим:

$$\frac{1}{C_1^1} = \frac{\rho_1 h_1}{C_{11}^{(1)}}, \quad \frac{1}{C_1^2} = \frac{\rho_2 h_2}{C_{11}^{(2)}} \quad (4.2.7)$$

1. Рассмотрим колебания двухслойной пластины при граничных условиях шарнирного закрепления по краям. В одномерном случае условие Навье совпадает со свободным опиранием:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0; a \quad (4.2.8)$$

Продифференцировав относительно переменной x обозначения (4.2.4), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Учитывая граничные условия свободного опирания (4.2.8), написанные относительно переменных u_1 , u_2 и w , из (4.2.9) для $x = 0; a$ получаем условия:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \quad (4.2.10)$$

Следовательно, для системы дифференциальных уравнений (4.2.5) получаем следующие граничные условия свободного опирания:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0; a \quad (4.2.11)$$

Решение задачи колебаний двухслойных пластин при наличии проскальзывания между слоями в случае шарнирного закрепления по краям, которое описывается системой дифференциальных уравнений (4.2.5) и граничными условиями (4.2.11), будем искать в виде:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n e^{i\omega_n t} \sin \lambda_n x; \quad \lambda_n = \pi n / a,$$

$$f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n} e^{i\omega_n t} \cos \lambda_n x, \quad f_2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} e^{i\omega_n t} \cos \lambda_n x \quad (4.2.12)$$

Подставляя (4.2.12) в (4.2.5) приходим к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} D_{11}^* w_n \lambda_n^4 + (K_{11}^{(2)} f_{2n} - K_{11}^{(1)} f_{1n}) \lambda_n^3 - m \omega_n^2 w_n = 0 \\ \lambda_n^2 f_{1n} = \frac{\omega_n^2}{C_1} f_{1n} \\ \lambda_n^2 f_{2n} = \frac{\omega_n^2}{C_1} f_{2n} \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Для удовлетворения второй и третьей уравнений системы (4.2.13) возможны следующие случаи:

- а) $\lambda_n^2 \neq \frac{\omega_n^2}{C_1}; \lambda_n^2 \neq \frac{\omega_n^2}{C_1^2}$ следовательно $f_{1n} = 0; f_{2n} = 0$
- б) $\lambda_n^2 = \frac{\omega_n^2}{C_1}$ следовательно $f_{2n} = 0; f_{1n}$ - произвольная функция
- г) $\lambda_n^2 = \frac{\omega_n^2}{C_1^2}$ следовательно $f_{1n} = 0; f_{2n}$ - произвольная функция

Рассмотрим каждый случай отдельно:

- а) Из условий $f_{1n} = 0; f_{2n} = 0$ получаем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{h_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4.2.14)$$

Проинтегрировав (4.2.14) получаем связь планарных колебаний u_1, u_2 с w :

$$u_1 = \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + c_1$$

$$u_2 = -\frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + c_2 \quad (4.2.14^*)$$

Постоянные интегрирования c_1, c_2 характеризуют перемещение пластинки по направлению x . В данной задаче планарные перемещения пластинки целиком (или цельное перемещение) не рассматриваются. Исходя из этого (4.2.14*) можно записать в следующем виде:

$$u_1 = \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$u_2 = -\frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.2.15)$$

Как видно из выше полученного в этом случае изгибные колебания пластины приводят к возникновению планарных колебаний с такой же частотой колебаний как у изгибных.

$$D_{11}^* w_n \lambda_n^4 - m \omega_n^2 w_n = 0, \quad \omega_n^2 = \frac{D_{11}^* \lambda_n^4}{m} \quad (4.2.16)$$

б) $\omega_n^2 = \lambda_n^2 C_1^1; f_{2n} = 0$ - случай, когда планарные колебания первого слоя возбуждают изгибные колебания пластинки. Во втором слое планарные колебания отсутствуют.

Из первого уравнения системы (4.2.13) получаем:

$$(D_{11}^* \lambda_n^4 - m \lambda_n^2 C_1^1) w_n - \lambda_n^3 K_{11}^{(1)} f_{1n} = 0 \quad (4.2.17)$$

Для изгибных колебаний w_n из (4.2.17) получаем:

$$w_n = \frac{\lambda_n K_{11}^{(1)}}{(D_{11}^* \lambda_n^2 - m C_1^1)} f_{1n} \quad (4.2.18)$$

Как видно из (4.2.18), в данном случае планарные колебания пластины приводят к возникновению изгибных колебаний.

В случае, когда будет иметь место равенство нулю знаменателя равенства (4.2.18), возникнет явление резонанса:

$$D_{11}^* \lambda_n^2 - m C_1^1 = 0 \quad (4.2.19)$$

С учетом обозначений (4.1.8), (4.2.6) и (4.2.7), получаем:

$$\frac{1}{6} (K_{11}^{(1)} h_1 + K_{11}^{(2)} h_2) \lambda_n^2 - \frac{E_{11}^{(1)}}{\rho_1 (1 - \nu_1^{(1)} \nu_2^{(1)})} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) = 0 \quad (4.2.20)$$

Из уравнения (4.2.20) можно определить λ_n , при которых имеет место резонанс.

Рассмотрим частный случай:

$$h_1 = h_2 = h; \nu_1^{(1)} = \nu_2^{(1)} = \nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} = \nu \quad (4.2.21)$$

Уравнение (4.2.20) будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{12} h^3 \frac{(E_{11}^{(1)} + E_{11}^{(2)})}{1 - \nu^2} \lambda_n^2 - \frac{E_{11}^{(1)}}{\rho_1 (1 - \nu^2)} (\rho_1 + \rho_2) h = 0 \quad (4.2.22)$$

$$h^2 \lambda_n^2 = \frac{12 E_{11}^{(1)}}{(E_{11}^{(1)} + E_{11}^{(2)})} \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$$

Для пластин Кирхгофа действительно условие $h^2 \lambda_n^2 < 1$. Следовательно, из второго уравнения (4.2.22) должно иметь место следующее условие:

$$E_{11}^{(2)} \gg E_{11}^{(1)}; \rho_2 \ll \rho_1. \quad (4.2.23)$$

г) $\omega_n^2 = \lambda_n^2 C_1^2$; $f_{1n} = 0$ - случай, когда планарные колебания второго слоя возбуждают изгибные колебания пластинки. В первом слое планарные колебания отсутствуют.

В данном случае, как и в случае б), планарные колебания приводят к возникновению изгибных колебаний. Условие возникновения резонанса (4.2.19) и λ_n , при которых имеет место резонанс из (4.2.20) действительны также в этом случае.

2. Рассмотрим колебания двухслойной пластины при жестком закреплении по краю $x=0$ и свободном крае по $x=a$.

Граничные условия относительно переменных u_1 , u_2 и w для края $x = 0$ будут:

$$u_1 = 0; \quad u_2 = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad (4.2.24)$$

Учитывая обозначения (4.2.4), из граничных условий (4.2.24), написанных относительно переменных u_1 , u_2 и w , для $x = 0; a$ получаем условия:

$$f_1 = 0; \quad f_2 = 0; \quad (4.2.25)$$

Таким образом, задача колебаний двухслойной пластины при жестком закреплении по краю $x=0$ и свободном крае по $x=a$ приходит к решению системы дифференциальных уравнений (4.2.5) с граничными условиями (4.2.25) по краям $x = 0; a$.

Решение системы (4.2.25) с граничными условиями (4.2.25) относительно неизвестных $f_1; f_2$ будем искать в следующем виде:

$$f_1(x, t) = g_1(x)e^{i\omega t}; \quad f_2(x, t) = g_2(x)e^{i\omega t}; \quad (4.2.26)$$

Из второго и третьего уравнений системы (4.2.5) получаем:

$$g_1(x) = C_1 \sin \frac{\omega}{C_1} x; \quad g_2(x) = C_2 \sin \frac{\omega}{C_1^2} x; \quad (4.2.27)$$

Граничные условия для края $x = a$ будут:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0; \quad M_1 = 0; \quad N_1 = 0 \quad \text{при } x = a; \quad (4.2.28)$$

Для одномерной задачи, согласно [104], получаем:

$$M_1^{(1)} = K_{11}^{(1)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2h_1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (4.2.29)$$

отсюда, учитывая первое условие из (4.2.28), получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = a; \quad (4.2.30)$$

Из условия $M_1^{(2)} = 0$ также следует:

$$M_1^{(2)} = -K_{11}^{(2)} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{2h_2}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (4.2.31)$$

Согласно [104], N_1 можем записать в виде:

$$N_1^{(2)} = -\frac{2h_2}{3} K_{11}^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w, \quad (4.2.32)$$

Отсюда, учитывая четвертое условие граничных условий (4.2.28), для края $x = a$ получаем:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \text{ при } x = a; \quad (4.2.32^*)$$

Учитывая (4.2.28) и (4.2.30) из (4.2.4) получаем:

$$f_1' = 0; \quad f_2' = 0; \quad (4.2.33)$$

Условие (4.2.25) с учетом (4.2.27) может быть выполнено в следующих случаях:

а) $\cos \frac{\omega}{C_1} a = 0;$

б) $\cos \frac{\omega}{C_1^2} a = 0;$

Рассмотрим случай когда

$$\cos \frac{\omega}{C_1} a = 0; \quad f_2 = 0; \quad (4.2.34)$$

Отсюда

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a} C_1; \quad (4.2.35)$$

Изгибные колебания представим в виде:

$$w_0(x, t) = w_0(x) e^{i\omega_n t}; \quad (4.2.36)$$

Из первого уравнения системы (4.2.25) получаем:

$$D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - \frac{m\omega_n^2}{D_{11}^*} w_0 = 0 \quad (4.2.37)$$

Обозначим:

$$\beta_n^4 = \frac{m\omega_n^2}{D_{11}^*} \quad (4.2.38)$$

Решение уравнения (4.2.37) представим в виде:

$$w_0(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x + C \operatorname{sh} \beta x + D \operatorname{ch} \beta x \quad (4.2.39)$$

Из граничных условий (4.2.24) по краю $x=0$ получаем:

$$w_0(x) = 0, \quad w_0'(x) = 0 \quad (4.2.40)$$

Следовательно, подставляя (4.2.39) в (4.2.40) получаем $D=-B$, $C=-A$:

$$w_0(x) = (\sin \beta x - \operatorname{sh} \beta x)A + (\cos \beta x - \operatorname{ch} \beta x)B \quad (4.2.41)$$

В случае когда:

$$f_1(x) = C_1 \sin \frac{\omega}{C_1} x e^{i\omega t}; \quad f_2 = 0; \quad (4.2.42)$$

Первое уравнение системы (4.2.25) будет иметь вид:

$$D_{11}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -C_1 K_{11}^{(1)} \left(\frac{\omega}{C_1} \right)^3 \cos \frac{\omega}{C_1} x e^{i\omega t} \quad (4.2.43)$$

Решение дифференциального уравнения (4.2.43) представим в виде:

$$w(x, t) = w_0(x, t) + w_1(x, t) \quad (4.2.44)$$

где $w_0(x, t)$ является решением однородной части дифференциального уравнения (4.2.43) и имеет вид (4.2.41), а w_1 представляет собой решение, соответствующее неоднородной части дифференциального уравнения (4.2.43). w_1 представим в следующем виде:

$$w_1(x, t) = R \cos \frac{\omega}{C_1} x e^{i\omega t} \quad (4.2.45)$$

Из (4.2.43) и (4.2.44) получаем:

$$R = -C_1 \frac{K_{11}^1 \omega / C_1^1}{D_{11}^* \left(\left(\omega / C_1^1 \right)^2 - m \right)} \quad (4.2.46)$$

Из граничных условий (4.2.30) и (4.2.32*) по краю $x=a$ получаем:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = 0; \quad (4.2.47)$$

С учетом (4.2.41), (4.2.44)-(4.2.46) для удовлетворения граничных условий (4.2.47) приходим к решению следующей системы уравнений относительно неизвестных A и B :

$$\begin{cases} (\sin \beta a + sh \beta a)A + (\cos \beta a + ch \beta a)B = - \left(\frac{\omega}{C_1^1 \beta} \right)^2 R \cos \frac{\omega}{C_1} a \\ (\cos \beta a + ch \beta a)A - (\sin \beta a - sh \beta a)B = - \left(\frac{\omega}{C_1^1 \beta} \right)^3 R \sin \frac{\omega}{C_1} a \end{cases} \quad (4.2.48)$$

Условием возникновения резонанса будет равенство нулю детерминанты системы уравнений (4.2.48).

$$\begin{vmatrix} (\sin \beta a + sh \beta a) & (\cos \beta a + ch \beta a) \\ (\cos \beta a + ch \beta a) & (\sin \beta a - sh \beta a) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2.49)$$

Решая равенство (4.2.49) получаем:

$$\cos \beta a ch \beta a = -1 \quad (4.2.50)$$

Из решения данного уравнения для минимального корня получается (см. Рис. 17):

$$\beta a = 1.8751 \quad (4.2.51)$$

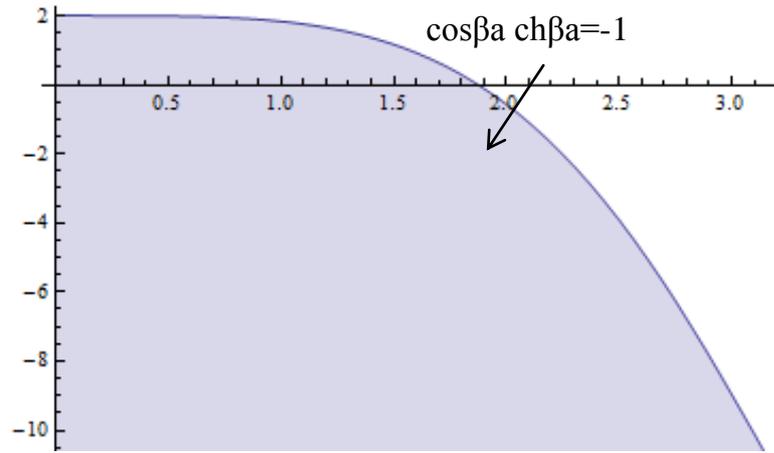


Рис. 17 Графическое решение уравнения (4.2.50)

При больших βa приближенные значения корней уравнения (4.2.50) получаем из решения уравнения $\cos \beta a = 0$, т.е.

$$\beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.2.52)$$

Формула (4.2.38), определяющая резонансную частоту, для первой резонансной частоты дает:

$$\omega^2 = \frac{(1.8751)^4 D_{11}^*}{m a^4} \quad (4.2.53)$$

для последующих:

$$\omega_n^2 = \frac{(2n-1)^4 D_{11}^*}{m a^4} \quad (4.2.53)$$

Рассмотрены колебания двухслойных пластин при проскальзывании между слоями. При принятых условиях дифференциальные уравнения планарных и изгибных колебаний не отделяются. В случае двухслойных пластин изгибные колебания могут вызвать планарные колебания и наоборот. Как результат этого, возможен резонанс. Получена зависимость изгибных и планарных колебаний. В одномерном случае условия Навье приводятся к условиям свободного опирания. Определены условия возникновения резонанса.

4.3 Локализованные изгибные колебания прямоугольной двухслойной пластины при наличии скольжения между слоями

В данной главе исследуются задачи колебаний пластины из двух слоев, в случае, когда между слоями касательные напряжения равны нулю. Принимая гипотезу Кирхгофа, устанавливаются граничные условия свободного края прямоугольной пластины. Определяются также частоты изгибных колебаний, локализованных в окрестности свободного края пластинки.

После основополагающей статьи Коненкова [128] по возможности появления локализованных в окрестности свободного края пластинки изгибных колебаний (по Коненкову изгибные волны «рзлеевого типа») было опубликовано много работ по этой тематике. Обзор этих работ приводится в монографии [129], в обзорной статье [130], в статьях [131, 132].

1. Тонкая прямоугольная пластинка в прямоугольной декартовой системе координат занимает область: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h_2 \leq z \leq h_1$. На основе допущений гипотезы Кирхгофа в статьях [126, 104], пространственные уравнения теории упругости сведены к следующим двумерным уравнениям колебаний двухслойной пластинки при наличии скольжения между слоями:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_1 + \theta_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \frac{h_1}{1-\nu_1} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) &= \frac{1}{C_{11}^2} \left(u_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \Delta v_1 + \theta_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - \frac{h_1}{1-\nu_1} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) &= \frac{1}{C_{11}^2} \left(v_1 - \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 \Delta u_2 + \theta_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{h_2}{1-\nu_2} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) &= \frac{1}{C_{12}^2} \left(u_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

$$\Delta v_2 + \theta_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{h_2}{1-\nu_2} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) = \frac{1}{C_{t2}^2} \left(v_2 + \frac{h_2}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$D \Delta^2 w - \Delta \left[K_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - K_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right] + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

При выводе уравнений (4.3.1) плоскость соприкосновения слоев пластины выбрана как плоскость $z=0$. Индекс (1) относится к пластинке с толщиной h_1 ($0 < z \leq h_1$), индекс (2) к пластинке с толщиной h_2 ($-h_2 \leq z < 0$), u_1, v_1 – планарные перемещения пластины с индексом (1), а u_2, v_2 – пластины с индексом (2) функции изгиба $w(x, y, t)$ – в соответствии с гипотезой Кирхгофа. Постоянные ν_1, ν_2 являются коэффициентами Пуассона материалов соответствующих слоев, Δ – двумерный оператор Лапласа. В (4.3.1) использованы также следующие обозначения:

$$C_{tk}^2 = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)\rho_k}, \theta_k = \frac{1+\nu_k}{1-\nu_k}, k = 1, 2 \quad (4.3.2)$$

$$K_k = \frac{E_k h_k^2}{2(1-\nu_k^2)}, D = (2/3) * (h_1 K_1 + h_2 K_2), m = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$$

В (4.3.2) E_k – модули Юнга, ρ_k – плотности материалов соответствующих слоев пластины.

В [126] приведены также некоторые варианты граничных условий для кромки прямоугольной пластинки. Наиболее наглядно эти условия получаются для граничных условий Навье.

Пусть на кромке двуслойной пластинки $x = \text{const}$ требуется удовлетворить условиям равенства нулю нормального напряжения и двух составляющих касательных перемещений (по y и z). В результате усреднения получаем:

$$T_1^{(k)} = 0, \nu_k = 0, w = 0, M_1^{(k)} = 0, k = 1, 2 \quad (4.3.3)$$

В (4.3.3) $T_1^{(k)}, M_1^{(k)}$ – растягивающие (сжимающие) усилия и изгибающие моменты для соответствующих слоев пластинки, которые определяем по формулам:

$$T_1^{(k)} = C_k \left[\frac{\partial u_k}{\partial x} + \nu_k \frac{\partial v_k}{\partial y} \mp \frac{h_k}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$M_1^{(k)} = K_k \left[\frac{\partial u_k}{\partial x} + \nu_k \frac{\partial v_k}{\partial y} \mp \frac{2h_k}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (4.3.4)$$

Где минус относится к слою с индексом (1), а плюс к слою с индексом (2) и принято следующее обозначение:

$$C_k = \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2} \quad (4.3.5)$$

Приравнивая нулю (4.3.4) и используя условие $v_k = 0$, $w = 0$ получаем:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} \mp \frac{h_k}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x} \mp \frac{2h_k}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4.3.6)$$

Из системы (4.3.6) следует:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (4.3.6^*)$$

С учетом (4.3.6*), окончательно условия Навье приводятся к условиям шарнирного закрепления для пластин:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} = 0, \quad v_k = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (4.3.7)$$

Сложности возникают, как и в теории Кирхгофа, при установлении граничных условий свободного края пластинки. Условия равенства нулю компонент напряжений пространственной задачи, после усреднения, согласно гипотезе Кирхгофа приводит к равенству нулю соответствующих усилий и моментов (при $x = \text{const}$)

$$T_1^{(k)} = 0, \quad S^{(k)} = 0, \quad M_1^{(k)} = 0, \quad H^{(k)} = 0, \quad N_1^{(k)} = 0 \quad k = 1, 2 \quad (4.3.8)$$

Новые усилия ($S^{(k)}$ - усилия сдвига, $N_1^{(k)}$ - перерезывающие усилия, $H^{(k)}$ - крутящий момент) определяются по формулам:

$$S^{(k)} = \frac{1 - \nu_k}{2} C_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \mp h_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$H_1^{(k)} = \frac{1-\nu_k}{2} K_k \left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \mp \frac{4h_k}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (4.3.9)$$

$$N_1^{(k)} = \frac{1-\nu_k}{2} K_k \left(\Delta u_k + \theta_k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \right) \mp \frac{2h_k}{3} K_k \frac{\partial}{\partial x} \Delta w$$

Из условий $T_1^{(k)} = 0$, $M_1^{(k)} = 0$, согласно (4.3.4) следует

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \nu_k \frac{\partial v_k}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_k \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3.10)$$

В (4.3.10) одно условие для w лишнее, естественно вместо двух условий для w из (4.3.10) брать среднее, а именно:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3.11)$$

Что будет соответствовать принципу усреднения граничных условий.

По теории Кирхгофа требуется объединить условия равенства нулю крутящего момента и перерезывающего усилия обобщенным перерезывающим усилием. В согласии с этим последние два условия из (4.3.8) заменяются условием:

$$\tilde{N}_1^{(k)} \equiv N_1^{(k)} + \frac{\partial H^{(k)}}{\partial y} = 0, \quad k = 1, 2 \quad (4.3.12)$$

Используя условие $S^{(k)} = 0$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} = \pm h_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.3.13)$$

Условие равенства нулю обобщенного перерезывающего усилия ($\tilde{N}_1^{(k)}$) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu_k) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0, \quad k = 1, 2 \quad (4.3.14)$$

Как и в случае равенства нулю изгибающего момента, появляется лишнее условие, которое аналогично (4.3.11) следует заменить усреднённым условием:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(2 - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (4.3.15)$$

Окончательно условия свободного края двухслойной пластинки с проскальзыванием при $x = \text{const}$ будет:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \nu_k \frac{\partial v_k}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = \pm \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad k = 1, 2 \quad (4.3.16)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(2 - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0$$

2. Систему уравнений (4.3.1) можно упростить, используя преобразование Ламе [133]:

$$u_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \psi_k}{\partial y}, \quad v_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x}, \quad k = 1, 2 \quad (4.3.17)$$

Преобразования аналогичные преобразованиям плоской задачи теории упругости приводят к уравнениям:

$$\Delta \psi_k - \frac{1}{C_{lk}^2} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial t^2} = 0, \quad C_{lk}^2 = \frac{E_k}{(1 - \nu_k^2) \rho_k} \quad (4.3.18)$$

$$\Delta \varphi_k - \frac{1}{C_{lk}^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2} = \pm \frac{h_k}{2} \left(\Delta w - \frac{1}{C_{lk}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (4.3.19)$$

$$\Delta^2 (Dw - K_1 \varphi_1 + K_2 \varphi_2) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.3.20)$$

Уравнения (4.3.18) относительно планарных сдвиговых волн в первом и втором слоях оказываются автономными. Уравнения для продольных волн (4.3.19) и для поперечных колебаний оказываются связанными.

Приведем постановку задачи Коненкова [128] для двуслойной пластинки, при наличии скольжения между слоями. Рассматривается полу бесконечная пластина – полоса $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$, $-h_2 \leq z \leq h_1$. Пластина состоит из двух слоев $0 < z \leq h_1$ и $-h_2 \leq z < 0$, касательные напряжения между которыми равны нулю. Требуется найти решения системы уравнений (4.3.18) – (4.3.20) удовлетворяющих граничным условиям Навье

(шарнирного закрепления) на сторонах $y = 0; b$, граничным условиям свободного края $x = 0$ и условиям затухания:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_k = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_k = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} w = 0 \quad (4.3.21)$$

Граничные условия шарнирного закрепления $y = 0; b$, аналогично условиям (4.3.7), будут иметь вид:

$$u_k = 0, \frac{\partial v_k}{\partial y} = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3.22)$$

Первые две части условия (4.3.22) выразим через функции φ_k и ψ_k :

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \psi_k}{\partial y} = 0, \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} - \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right) = 0, k = 1, 2 \quad (4.3.22^*)$$

Для принятого преобразования (4.3.17) функции φ_k и ψ_k должны удовлетворять однородным уравнениям Лапласа:

$$\Delta \varphi_k = 0, \Delta \psi_k = 0 \quad (4.3.22^{**})$$

Граничные условия (4.3.22) с учетом (4.3.22*) и (4.3.22**) после некоторых преобразований [104] имеют следующий вид:

$$\varphi_k = 0, \frac{\partial \psi_k}{\partial y} = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0; b \quad (4.3.23)$$

Новая форма записи граничных условий свободного края $x = 0$ (4.3.16) будет:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \nu_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} + (1 - \nu_k) \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x \partial y} &= 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} &= \pm h_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_c \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0, \text{ где } \nu_c = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu_c) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Таким образом, требуется найти решение системы уравнений (4.3.18)-(4.3.20), удовлетворяющих граничным условиям (4.3.23), (4.3.24) и условию затухания (4.3.21). Существование такого решения означает существование колебаний локализованных в окрестности свободного края.

Решения системы уравнений (4.3.18), (4.3.20) удовлетворяющие условиям шарнирного закрепления (4.3.23) представляется в виде:

$$\begin{aligned}\psi_k &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{kn}(x) \cos \lambda_n y, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{b} \\ \varphi_k &= e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn}(x) \sin \lambda_n y \\ w &= e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \sin \lambda_n y\end{aligned}\tag{4.3.25}$$

Подстановка (4.3.25) в (4.3.18)-(4.3.20) приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\psi''_{kn} - \lambda_n^2 (1 - \xi_k^2) \psi_{kn} &= 0 \\ \varphi''_{kn} - \lambda_n^2 (1 - \theta_k \xi_k^2) \varphi_{kn} &= \pm \frac{h_k}{2} \left[w''_n - \lambda_n^2 (1 - \theta_k \xi_k^2) w_n \right] \\ D \left(w_n^{IV} 2\lambda_n^2 w''_n + \lambda_n^4 w_n \right) - K_1 \left(\varphi_{1n}^{IV} - 2\lambda_n^2 \varphi_{1n}'' + \lambda_n^4 \varphi_{1n} \right) + \\ + K_2 \left(\varphi_{2n}^{IV} - 2\lambda_n^2 \varphi_{2n}'' + \lambda_n^4 \varphi_{2n} \right) - m\omega^2 w_n &= 0\end{aligned}\tag{4.3.26}$$

где

$$\xi_k^2 = \frac{\omega^2}{\lambda_n^2 C_{tk}^2}, \quad \theta_k = \frac{C_{tk}^2}{C_{lk}^2}\tag{4.3.27}$$

Решение системы (4.3.26) представляется в виде

$$\psi_{kn} = F_k e^{-\lambda_n p x}, \quad \varphi_{kn} = B_k e^{-\lambda_n p x}, \quad w_n = A e^{-\lambda_n p x}\tag{4.3.28}$$

с тем, чтобы положительные корни характеристического уравнения относительно p удовлетворяли условиям затухания (4.3.21).

Подстановка (4.3.28) в систему (4.3.26) приводит к алгебраическим уравнениям относительно произвольных постоянных F_k, B_k, A :

$$\begin{aligned} (p^2 - 1 + \xi_k^2)F_k &= 0 \\ (p^2 - 1 + \theta_k \xi_k^2) \left(B_k \mp \frac{h_k}{2} A \right) &= 0 \\ (p^2 - 1)^2 (DA - K_1 B_1 + K_2 B_2) - \frac{m\omega^2}{\lambda_n^4} A &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

3. Система (4.3.29) допускает различные варианты получения характеристического уравнения задачи. Рассмотрим следующий вариант:

$$p^2 \neq 1 - \xi_k^2, \quad p^2 \neq 1 - \theta_k \xi_k^2 \quad (4.3.30)$$

В этом случае из (4.3.29) получается

$$F_k = 0, \quad B_k = \mp \frac{h_k}{2} A \quad (4.3.31)$$

С учетом выражения для B_k из (4.3.31) в третьем уравнении системы (4.3.29) получается характеристическое уравнение

$$(p^2 - 1)^2 - \eta^2 = 0, \quad (4.3.32)$$

где

$$\eta^2 = \frac{m\omega^2}{\lambda_n^4 D_1}, \quad D_1 = \frac{1}{6}(h_1 K_1 + h_2 K_2) \quad (4.3.33)$$

Уравнение (4.3.32) совпадает с характеристическим уравнением задачи Коненкова. Влияние двухслойности пластинки входит в безразмерный параметр η^2 , характеризующий фазовую скорость корни уравнения (4.3.32) удовлетворяющие требованию затухания будут:

$$p_1 = \sqrt{1 + \eta}, \quad p_2 = \sqrt{1 - \eta} \quad (4.3.34)$$

При этом необходимо дополнительные условия:

$$0 < \eta < 1 \quad (4.3.35)$$

Окончательные решения для функции прогиба будет:

$$w = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{1n} e^{-\sqrt{1+\eta} \lambda_n x} + A_{2n} e^{-\sqrt{1-\eta} \lambda_n x} \right) \sin \lambda_n y \quad (4.3.36)$$

Подстановка (4.3.36) в граничные условия свободного края w (4.3.24) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно A_{1n} , A_{2n} .

$$\begin{cases} (p_1^2 - \nu_c) \lambda_n^2 A_{1n} + (p_2^2 - \nu_c) \lambda_n^2 A_{2n} = 0 \\ (-p_1^2 + (2 - \nu_c)) p_1 \lambda_n^3 A_{1n} - (p_2^2 - (2 - \nu_c)) p_2 \lambda_n^3 A_{2n} = 0 \end{cases} \quad (4.3.37)$$

Равенство нулю детерминанта этой системы дает уравнение, определяющее безразмерную частоту локализованных изгибных колебаний [107].

$$\begin{vmatrix} (p_1^2 - \nu_c) \lambda_n^2 & (p_2^2 - \nu_c) \lambda_n^2 \\ (-p_1^2 + (2 - \nu_c)) p_1 \lambda_n^3 & -(p_2^2 - (2 - \nu_c)) p_2 \lambda_n^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3.38)$$

Характеристическое уравнение, которое определяет безразмерную частоту локализованных изгибных колебаний, будет иметь вид:

$$p_1^2 p_2^2 + 2(1 - \nu_c) p_1 p_2 - \nu_c^2 = 0 \quad (4.3.39)$$

Отличие от уравнения Коненкова заключается в том, что здесь вместо коэффициента Пуассона участвует среднее значение коэффициентов Пуассона двух слоев. Это обстоятельство может иметь значение для анизотропных материалов, либо если есть материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона.

Корни уравнения второй степени (4.3.39) имеют вид:

$$p_1 p_2 = -(1 - \nu_c) \pm \sqrt{(1 - \nu_c)^2 + \nu_c^2} \quad (4.3.40)$$

С учетом обозначений (4.3.34) для параметра η^2 , характеризующего фазовую скорость, получим:

$$\eta^2 = 1 - ((1 - \nu_c) \mp \sqrt{(1 - \nu_c)^2 + \nu_c^2})^2 \quad (4.3.41)$$

Рассмотрим граничные условия Навье по краю $x = 0$ (4.3.7). Подстановка (4.3.36) в граничные условия Навье относительно w (4.3.7) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно A_{1n} , A_{2n} .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (1+\eta) & (1-\eta) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3.42)$$

Равенство нулю детерминанта этой системы дает уравнение, определяющее безразмерную частоту локализованных изгибных колебаний. Равенство нулю детерминанта (4.3.42) будет иметь место, если фазовая скорость колебаний будет равна нулю: $\eta^2 = 0$.

Рассмотрим задачу существования локализованных колебаний в полу бесконечной пластине – полосе с граничным условиям Навье (шарнирного закрепления) на сторонах $y = 0; b$ (4.3.22), условиям затухания (4.3.21) и граничным условиям скользящего контакта по краю $x = 0$:

$$u_k = 0, \frac{\partial v_k}{\partial x} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \text{ при } x = 0 \quad (4.3.43)$$

Подстановка (4.3.36) в граничные условия Навье относительно w (4.3.43) по краю $x = 0$ приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно A_{1n}, A_{2n} . Характеристическое уравнение, определяющее безразмерную частоту локализованных изгибных колебаний, получаем из условия равенство нулю детерминанта этой системы:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{1+\eta} & \sqrt{1-\eta} \\ (1+\eta)\sqrt{1+\eta} & (1-\eta)\sqrt{1-\eta} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3.44)$$

$$2\eta\sqrt{1-\eta^2} = 0$$

Как видно из (4.3.44), условие равенство нулю детерминанта будет иметь место при двух значениях безразмерного параметра η^2 : $\eta^2 = 0$ или $\eta^2 = 1$.

Следовательно, при граничных условиях на краю $x = 0$ шарнирного закрепления и скользящего контакта (4.3.43) дисперсионные уравнения не имеют решения удовлетворяющих условие $0 < \eta < 1$, т. е. в этих случаях локализованные колебания не существуют.

Другое отличие рассматриваемой здесь задачи – возбуждение локализованных изгибных колебаний приводит к появлению локализованных продольных колебаний:

$$\varphi_{kn} = \mp \frac{h_k}{2} \left(A_{1n} e^{-\sqrt{1+\eta} \lambda_n x} + A_{2n} e^{-\sqrt{1-\eta} \lambda_n x} \right) \quad (4.3.45)$$

Задачи локализованных изгибных колебаний прямоугольной двухслойной пластинки рассмотрены в случае скольжения между слоями, при принятых условиях, условия Навье совпадают с условиями шарнирного закрепления. Получены граничные условия свободного края прямоугольной пластинки. Проведено сравнение поставленной задачи с задачей Коненкова. В отличие от уравнения Коненкова в характеристическом уравнении (4.3.39), которое определяет безразмерную частоту локализованных изгибных колебаний, участвует среднее значение коэффициентов Пуассона двух слоев. Это может иметь существенное значение в случае анизотропных материалов или при отрицательных значениях коэффициента Пуассона слоев пластинки. Еще одно отличие рассмотренной задачи состоит в возбуждении локализованных продольных колебаний при возникновении локализованных изгибных колебаний.

Рассмотрены также задачи существования локализованных изгибных колебаний при граничных условиях шарнирного опирания и скользящего контакта по краю $x = 0$. По краям $y = 0; b$ приняты условия Навье. При рассмотренных граничных условиях характерно нулевая фазовая скорость локализованных около края $x = 0$ изгибных колебаний, что означает отсутствие локализованных колебаний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматриваются колебания и устойчивость плоских упругих пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа.

1. Исследована проблема аэроупругой статической неустойчивости (дивергенция) несимметрично по толщине неоднородной пластинки при жестком контакте между слоями. Задача решена в предположении, что для каждого слоя действительна теория Кирхгофа. В данной постановке рассмотрены два случая граничных условий [100]: жесткое закрепление вдоль одной из длинных кромок и наличие пружины вдоль другой; шарнирное опирание вдоль одной из длинных кромок и наличия пружины вдоль другой. Получено графическое решение задачи относительно безразмерных величин и определена критическая скорость потока, при которой будет иметь место статическая потеря устойчивости (выпучивание) пластины.

2. Рассмотрена задача динамической неустойчивости несимметрично неоднородной по толщине прямоугольной пластинки в предположении действительности гипотезы Кирхгофа и без условия постоянности коэффициента Пуассона. Показано, что в отличие от изотропных пластин, в случае несимметрично неоднородных по толщине пластин при воздействиях, возбуждающих планарные колебания, будут возникать изгибные колебания и наоборот, что может привести к резонансу. В общем случае относительно частоты колебаний, при которой будет иметь место явление резонанса, получены четыре характеристических уравнения. Для данной задачи рассмотрен частный случай динамической неустойчивости несимметрично неоднородной по толщине прямоугольной пластинки в случае, когда планарные колебания по заданному закону вызывают изгибные колебания [103]. Приведены численные расчеты для конкретного материала при разных толщинах пластики.

3. Исследованы задачи колебания и устойчивости несимметрично неоднородной двухслойной пластинки при условиях свободного скольжения между слоями, на основе гипотезы Кирхгофа для каждого слоя в отдельности.

Рассмотрена двухслойная пластина при условии скользящего контакта между ортотропными слоями [104]. В предположении, что гипотеза Кирхгофа действительна для каждого слоя в отдельности, получены дифференциальные уравнения изгибных и планарных колебаний. Показано, что, в общем случае, задачи изгибных и планарных колебаний не отделяются. Приведены граничные условия на кромках пластины.

Проверена возможность отделения слоев в случае изгибных колебаний после решения задачи и определения напряжения. Показано, что независимо от граничных условий, нормальное напряжение на стыке пластин сжимающее, поэтому расслоение будет отсутствовать.

Возможность возникновения расслоения рассмотрена также в частном случае, когда на двухслойную пластину действует только объемная сила веса (сила притяжения). Получен критерий живучести (условие отсутствия расслоения) двухслойной ортотропной пластины. Показано, что критерий живучести существенно зависит от толщин слоев пластинки.

Исследована задача колебаний двухслойной пластинки в условиях свободного скольжения между контактными слоями. Рассмотрены колебания двухслойной пластины при условии шарнирного закрепления по краям. В одномерном случае условие Навье совпадает со свободным опиранием. Показано, что задача приводится к системе уравнений, решение которой может существовать в трех случаях. Каждый случай рассмотрен отдельно. В одном случае показано, что изгибные колебания пластины приводят к возникновению планарных колебаний с такой же частотой колебаний как у изгибных. В другом случае - планарные колебания пластины приводят к возникновению изгибных колебаний. Определены условия возникновения резонанса.

Рассмотрена также задача колебаний двухслойной пластины при жестком закреплении по краю $x=0$ и свободном крае по $x=a$. Как результат получена частота колебаний, при которой возникает резонанс.

Исследованы задачи колебаний пластины из двух слоев, в случае, когда между слоями касательные напряжения равны нулю (скольжения между слоями) [106]. Показано, что условия Навье приводятся к условиям шарнирного закрепления для пластин. Принимая гипотезу Кирхгофа, установлены граничные условия свободного края двухслойной пластинки с проскальзыванием.

Рассмотрена задача Коненкова для двухслойной пластинки, при наличии скольжения между слоями. Исследована полу бесконечная пластина – полоса с граничными условиями Навье на сторонах $y = 0; b$, и свободного края $x = 0$ с заданными условиями затухания. Существование решения этой задачи означает существование локализованных в окрестности свободного края колебаний.

Решение задачи приводится к системе однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных. Равенство нулю детерминанта этой системы дает уравнение, определяющее безразмерную частоту локализованных изгибных колебаний [107].

В случае двухслойных пластин с проскальзыванием, в отличие от уравнения Коненкова, здесь вместо коэффициента Пуассона участвует среднее значение коэффициентов Пуассона двух слоев. Это отличие может иметь значение для анизотропных материалов, либо если есть материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона.

Еще одно отличие рассматриваемой здесь задачи состоит в том, что в случае двухслойных пластин возбуждение локализованных изгибных колебаний приводит к появлению локализованных продольных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами либо максимума, либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. Гостехиздат, 1934, стр. 491.
2. Dowell E. H. (ed.), Clark R., Cox D., Curtiss H. C., Edwards J. W., Hall K. C., Peters D. A., Scalan R. H., Simiu E., Sisto F., Strganac T. W. A modern course in aeroelasticity. Kluwer Academic Pub., 2004. 752 p.
3. Илюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // Известия АН СССР. ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 6. С. 733-755.
4. Ashley H., Zartarian G. Piston theory – new aerodynamic tool for the aeroelastician // Journal of the aeronautical sciences. 1956. V. 23. № 12. P. 1109-1118.
5. http://lab103.imec.msu.ru/sc_aeroelast.html
6. Веденеев В. В. Панельный флаттер при низких сверхзвуковых скоростях // Диссертация на соискание учёной степени доктора физико – математических наук. Москва. 2011г. С. 431.
7. Абдухакимов Ф.А., Веденеев В.В. Исследование одномодового флаттера пластин различной формы при малой сверхзвуковой скорости. Ученые записки ЦАГИ. Изд. отдел ЦАГИ (Жуковский). 2017. Том 48, № 1, с. 86-98.
8. Anastasia Shishaeva, Vasily Vedeneev, Andrey Aksenov. Nonlinear single-mode and multi-mode panel flutter oscillations at low supersonic speeds. Journal of Fluids and Structures. Academic Press (United States). 2015. V. 56, p. 205-223 DOI.
9. Веденеев В.В. Предельные циклы колебаний при одномодовом флаттере пластины. Прикладная математика и механика. 2013. Том 77, № 3, с. 355-370.
10. Веденеев В.В. Одномодовый флаттер пластины с учётом пограничного слоя. Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2012. № 3, с. 147-160.
11. Garric I. E., Reed W. H., III. Historical development of aircraft flutter// Journal of aircraft. 1981. V. 18. № 11. P. 897-912.

12. Zhou R. C., Lai Z., Xue D. Y., Huang J. – K., Mei C. Suppression of nonlinear panel flutter with piezoelectric actuators using finite element method // AIAA journal. 1995. V. 33. № 6. P. 1098-1105.
13. E. Livne, T. A. Weisshaar. Aeroelasticity of nonconventional airplane configurations – past and future // Journal of aircraft. 2003. V. 40. № 6. P. 1047-1065.
14. D. S. Layton, W. D. Anderson, D. S. Piette. Consideration of Nonlinearities in the Aeroelastic Design and Testing of the F-22 // Proceedings of International Forum of Aeroelasticity and Structural Dynamics (IFASD). 2009. Paper IFASD-2009-060. 12p.
15. С. Ю. Мензульский. Расчетные исследования вибрационных характеристик крупномасштабной модели экспериментального гиперзвукового летательного аппарата в интеграции с высокоскоростным прямоточным ВРД-демонстратором // Сборник тезисов докладов конференции «Новые решения и технологии в газотурбостроении». М.: ЦИАМ, 2010. С. 206-207.
16. С. Ю. Мензульский, И. Ю. Головченко, В. А. Шестаков, А. О. Коскин. Экспериментальные исследования вибрационных характеристик крупномасштабной модели экспериментального гиперзвукового летательного аппарата в интеграции с высокоскоростным прямоточным ВРД – демонстратором // Сборник тезисов докладов конференции «Новые решения и технологии в газотурбостроении». М.: ЦИАМ, 2010. С. 208-209.
17. Takao Ishii. Aeroelastic instabilities of simply supported panels in subsonic flow // AIAA paper No. 65 – 772. 1965. 30 p.
18. Garric I. E., Rabinow S. E. Flutter and oscillating air – force calculations for an airfoil in a two – dimensional supersonic flow //NACA. 1946. Report № 846. 25 p.1
19. Nelson H. C., Cunningham H. J. Theoretical investigation of two – dimensional flat panels with one surface exposed to supersonic potential flow // NACA. 1956. Report № 1280. 24 p.
20. Дж. У. Майлс. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М.: Физматгиз. 1963. 272 с.

¹ Цитируемые отчеты по NASA доступны в интернете по адресу: <https://ntrs.nasa.gov/>.

21. Кийко И. А., Показеев В. В. К постановке задачи о колебаниях и устойчивости полосы в сверхзвуковом потоке газа // Известия РАН. МЖГ. 2009. № 1. С. 159 – 166.
22. Дун Мин – Дэ. Об устойчивости упругой пластинки при сверхзвуковом обтекании // Доклады АН СССР. 1958. Т. 120. № 4. С. 726-729.
23. Григолюк Э. И., Лампер Р. Е., Шандаров Л. Г. Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Механика. 1963. М.: ВИНТИ, 1965. С. 34-90.
24. Dowell E. H. Panel flutter: A review of the aeroelastic stability of plates and shells // AIAA journal. 1970. V. 8. № 3. P. 385 – 399. Перевод: Панельный флаттер. Обзор исследований аэроупругой устойчивости пластин и оболочек // Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 3. С. 3 – 24.
25. Новичков Ю. Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 67 – 122.
26. Mei C., Abdel – Motagaly K., Chen R. R. Review of nonlinear panel flutter supersonic and hypersonic speeds // Applied mechanics reviews. 1999. V. 52. Issue 10. P. 321 – 332.
27. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. ФМ. Москва 1961. 339 с.
28. Dowell E. H. Aeroelasticity of plates and shells. Kluwer Academic Pub., 1974. 196 p.
29. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
30. Hayes W. D. On the hypersonic similitude. Quart. Appl. Math. 5. 1947. № 1.
31. Hedgpeeth J. M. On the flutter of panels at high Mach numbers. Journ. Aeronaut. Sci. 23. 1956. № 6.
32. Мовчан А. А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Известия АН СССР. ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 211 – 222.
33. Мовчан А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // Известия АН СССР. ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231 – 243.
34. Мовчан А. А. Устойчивость лопатки, движущейся в газе // Известия АН СССР. ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 5. С. 700 – 706.

35. Махортых Ж. К. Устойчивость многопролетной панели, движущейся в газе // Изв. АН СССР. ОТН. «Механика и машиностроение». 1959. №2. С. 174 – 177.
36. Miles J. W. on the aerodynamic instability of thin panels // J. Aeronaut Sci. 1956. Vol. 23. N8. P. 771 – 780.
37. Miles J. W. Supersonic flutter of a cylindrical shell. Pt I // Ibid. 1957. Vol. 24. N2. P. 107 – 118.
38. Miles J. W. Supersonic flutter of a cylindrical shell. Pt II // Ibid. 1958. Vol. 25. N5. P. 312 – 316.
39. Швейко Ю. Ю. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки в потоке газа // Изв. АН. СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1960. № 6. С. 74 – 79.
40. Швейко Ю. Ю. Устойчивость цилиндрической оболочки с жидким заполнением в потоке газа // Изв. АН. СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1964. № 5. С. 112 – 116.
41. Швейко Ю. Ю., Брусиловский А. Д., Мельникова Л. М. Колебания и устойчивость цилиндрической оболочки в потоке газа // Изв. АН СССР. МТТ. №1. С. 67-73.
42. Болотин В. В. Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости // Инж. сб. 1956. Т. 24. С. 3-16.
43. Болотин В. В. К вопросу об устойчивости пластины в потоке сжимаемого газа // Вопросы прочности материалов и конструкций. М. 1959.
44. Ильюшин А. А., Кийко И. А. Новая постановка задачи о флаттере пологой оболочки // ПММ.- 1994.- Т.58.- Вып.3.- С.167-171.
45. Ильюшин А. А., Кийко И. А. Колебания прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1994. №4. С. 40-44.
46. Ильюшин А. А., Кийко И. А. Закон плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике и проблема панельного флаттера // Изв. РАН. МТТ. 1995. №6. С. 138-142.

47. Минасян Д. М., Минасян М. М.. Новое приближение в задаче о флаттере пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // Доклады НАН РА. Т.101. №1. 2001. Ереван. С.49-54.
48. Белубекян М. В., Мартиросян С. Р.. Об одной задаче динамической устойчивости прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа // Изв. НАН Армения. Механика. 2014. Т. 114. №3. С. 213 - 221.
49. Белубекян М. В., Мартиросян С. Р.. Об одном неожиданном совпадении в задаче устойчивости пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. // Изв. НАН Армения. Механика. 2008. Т. 108. №3. С. 215 - 221.
50. Белубекян М. В., Мартиросян С. Р.. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армения. Механика. 2014. Т. 67. №2. С. 12 - 42.
51. Belubekyan M. V., Martirosyan S. R. On the Destabilizing Effect of Constructional Friction in Supports on the Stability of a Plate in a Supersonic Gas Flow. // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 205, № 4, Mart, 2015; 1072-3374/15/2054–0567, Springer Science+Business Media New York.
52. Белубекян М. В., Мартиросян С. Р. Об одной задаче устойчивости прямоугольной пластинки с двумя свободными краями в сверхзвуковом потоке газа, набегающим на её свободный край. // Изв. НАН Армения. Механика. 2012. Т. 65. №4. С. 55 - 64.
53. Belubekyan M. V., Martirosyan S. R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армения. Механика. 2012. Т. 65. №1. С. 29 - 34.
54. Багдасарян Г. Е., Микилян М. А. Сагоян Р. О. Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно – частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки. // Изв. НАН Армения. Механика. 2013. Т. 66. №3. С. 24 - 38.
55. Белубекян М. В., Мартиросян С. Р. Сверхзвуковой панельный флаттер при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов. // Изв. НАН Армения. Механика. 2016. Т. 69. №1. С. 39 - 52.
56. Hedgepeth J. M. Flutter of rectangular simply supported panels at high supersonic speeds // Journal of the aeronautical sciences. V. 24. № 8. P. 563 -573,

586. 1957. Перевод: Флаттер прямоугольных свободно опертых панелей при больших сверхзвуковых скоростях // Механика. Сборник переводов. 1958. № 2. С. 103 – 126.
57. Bohon H. L. Flutter of flat rectangular orthotropic panels with biaxial loading and arbitrary flow direction. NASA TN D – 1949. 1963. 33 p.
58. Dugundji J. Theoretical considerations of panel flutter at high supersonic Mach numbers // AIAA journal. 1966. V. 4. № 7. P. 1257 – 1266. Перевод: Теоретическое исследование панельного флаттера при высоких сверхзвуковых числах Маха // Ракетная техника и космонавтика. 1966. Т. 4. № 7. С. 136 – 148.
59. Метсавээр Я. А. О флаттере заземленных пластин // Известия АН СССР. МТТ. 1969. № 4. С. 179 – 180.
60. Алгазин С. Д., Кийко И. А. Численное исследование флаттера прямоугольной пластины // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44. № 4. С. 35 – 42.
61. В. П. Радин, Ю. Н. Самогин, В. П. Чирков, А. В. Щугорев. Решение неконсервативных задач теории устойчивости. Москва. Физматлит. 2017. 240 с.
62. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 400с.
63. Stoneley R. The elastic waves at the interface of separation of two solids // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1924. - 106, № 732. - P. 416-429.
64. Gaunard G. and Brill D. Acoustic spectrogram and complex-frequency poles of a resonantly excited elastic tube // J. Acoust. Soc. Am. 1984. - 75, № 6. -P. 1680-1693.
65. McNiven H.D. Extensional waves in a semi-infinite elastic rod // J. Acoust. Soc. Am. 1961.-33, № 1.-P. 23-27.
66. Roitberg I., Yassiliev D., Weidl T. Edge resonance in an elastic semi-strip // Q. J1 Mech. Appl. Math. 1998. - 51. - P. 1-13.
67. Гринченко В.Т., Карлаш В.Л., Мелешко В.В., Улитко А.Ф. Исследование планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин // Прикл. механика. 1976. - 12, № 5. - С.71-78.

68. Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гузь А.Н., Гринченко В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т. 5. Динамика упругих тел. Киев: Наук. Думка, 1986, - 288 с.
69. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. О краевом резонансе при планарных колебаниях прямоугольных пластин // Прикл. механика. 1975. - 11, № 10. - С.52-58.
70. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Особенности распределения энергии в тонкой прямоугольной пластине при краевом резонансе // Докл. АН УССР. Сер. А. 1976. - № 7. С.612-616.
71. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. Думка, 1981. - 283 с.
72. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акуст. ж. 1978. - 24, № 6. - С.861-866.
73. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. Academic Press, San Diego, 1998 - 226 p.
74. Oliver J. Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique // J. Acoust. Soc. Am. 1957. - 29, № 2. - P. 189-194.
75. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. О резонансе в полубесконечной упругой полосе // Прикл. механика. 1980. - 16, № 2. - С.58-63.
76. Лийва Т.В. О собственных неосесимметричных колебаниях оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны // Тр. Таллинского политехнического ин-та. 1970. - сб .5, сер. А. - С. 47-60.
77. Berezin V.L., Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu. Synthesis of the dispersion curves for a cylindrical shell on the basis of approximate theories // J. of Sound and Vibration. 1995. - 186, № 1. - P. 37-53.
78. Gol'denveizer A.L. Asymptotic method in the theory of shells // Proc. 15th Intern. Congr. Theory Appl. Mech. Toronto, Amsterdam et al, North-Holland, 1980.- P. 91-104.
79. Torvik P. J., McClatchey J. J. Response of an elastic plate to a cyclic longitudinal force // J. Acoust. Soc. Am. 1968. - 44. - P. 59-64.
80. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // J. Acoust. Soc. Am. 1972. - 51, № 1, pt 2. -P. 265-283.

81. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Особенности волнового поля в полубесконечном упругом цилиндре (краевой резонанс) // Изв. АН СССР. МТТ. 1982.-№6. -С. 81-89.
82. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.-400 с.
83. McNiven H.D., Perry D.C. Axially symmetric waves in finite, elastic rods // J. Acoust. Soc. Am. 1962. - 34, № 4. - P. 433-437.
84. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно упругих сред. М.: 1989. - 344 с.
85. Бабешко В.А., Ворович И.И., Образцов И.Ф. Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. - № 3. - С. 74-83.
86. Бабешко В.А., Собисевич А.Л., Шошина С.Ю. К вопросу о возникновении резонансов на неоднородностях в неограниченной среде // Развитие методов и средств экспериментальной геофизики. 1993, № 1. - С. 73-83.
87. Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979.-245, № 5. - С. 1076-1079.
88. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке // В. сб. Волновые задачи механики. Под ред. А.И. Веснинского и В.И. Ерофеева. Нижний Новгород: 1992. - С. 87-93.
89. Белубекян М.В., Гулгазарян Г.Р., Саакян А.В. Волны типа Рэлея в полубесконечной круговой замкнутой цилиндрической оболочке // Изв. НАН Армении, Механика. 1997. - 50, №3-4. - С. 49-55.
90. Гулгазарян Г.Р. Приближенные частоты собственных колебаний некруговой цилиндрической оболочки // Изв. НАН Армении, Механика. -1996, 49, №1.-С. 61-70.
91. Гулгазарян Г.Р., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой некруговой цилиндрической оболочке // Изв. НАН Армении, Механика. 1997. - 50, №1, 27-33.

92. Гулгазрян Г.Р. Волны, локализованные у свободного края гофрированной пластинки // В. сб. Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: 1997. - С. 143-146.
93. Гулгазрян Г.Р., Гулгазрян Л.Г. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке с произвольной направляющей // В. сб. Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. Ереван: 1997. - С. 147-150.
94. Гулгазрян Г.Р. Волны, локализованные у свободного торца круговой замкнутой цилиндрической оболочки с малой кривизной // Изв. НАН Армении, Механика. 2000. Т. 53. №2. С. 22-29.
95. Зильберглейт А.С., Сулова И.Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинках//Акуст. ж. 1983.-29. - С. 186-191.
96. В. М. Белубекян, М. В. Белубекян. Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением. // Изв. НАН Армения. Механика. 2015. Т. 115. №1. С. 40-43.
97. Саноян Ю. Г. О существовании локализованных изгибных колебаний в составных свободно опертых пластинах. // Изв. НАН Армения. Механика. 2017. Т. 70. №4. С. 68-77.
98. М. В. Белубекян, Э. О. Чил-Акопян. О задаче локализованной неустойчивости составной пластинки // Изв. НАН Армения. Механика. 2004. Т. 104. №3. С. 185-188.
99. М. В. Белубекян, С. Р. Мартиросян. Дивергентная неустойчивость прямоугольной упругой пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа // Изв. НАН Армения. Механика. 2012. Т. 112. №3. С. 256 - 263.
100. Гришко А. М. Дивергенция пластины при сверхзвуковом обтекании. // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды международной конференции, посвященной 100-летию академика НАН Армении Н. Х. Арутюняна. 08-12 октября 2012. Цахкадзор. Армения. Ереван. Тигран Мец. 2012. Том 1. 347 с. С. 191 – 195.
101. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания.- 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1987. – 360 с.

102. M. V. Belubekyan, A. M. Grishko. The problem of flutter of a non-symmetric non-homogeneous over thickness rectangular plate. *Shell Structures: Theory and Applications. Proceedings of the 10th SSTA Conference, Gdansk, Poland, 16 – 18 October 2013.* 281 – 284 p.
103. Гришко А. М. Об одной задаче устойчивости двухслойной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. // *Механика 2013. Труды международной школы – конференции молодых ученых, посвященной 70-летию Национальной Академии Наук Армении. 1 – 4 октября 2013. Цахкадзор. Армения. – Ер.: ЕГУАС. 2013. 284с. С. 137-141.*
104. Гришко А. М. Изгиб двухслойной пластинки при условии свободного скольжения между ортотропными слоями. // *Механика 2016: Труды международной школы- конференции молодых ученых, 3-7 октября 2016, Цахкадзор, Армения-Ер.: Ереванский государственный университет архитектуры и строительства, 2016. – 198с.*
105. A. M. Grishko. Vibrations of two-layered plates in case of sliding contact between contact surfaces of the plate. // *Proceedings of Yerevan State University. Physical and Mathematical Sciences. 2017. V. 51. № 3. 255 – 261 p.*
106. Belubekyan M. V., Grishko A. M. Localized bending vibrations of a rectangular two-layer plate in the presence of slip between layers. // *Изв. НАН Армения. Механика. 2018. Т. 71. №1. С. 4-11.*
107. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки// *Прикладная механика, НАН Украина, 1994, т. 30, №2, с. 61-68.*
108. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415с.
109. Новожилов В. В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370с.
110. И. Ф. Образцов, Л. А. Булычев, В. В. Васильев и др. Строительная механика летательных аппаратов: Учебник для авиационных специальностей вузов. Под ред. И. Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с., ил.
111. Минасян М. М. Нелинейные волны и колебания в физически активных деформируемых средах. Ереван, изд. ЕГУ, 2007. 254.

112. Веденеев В. В. Численное исследование сверхзвукового флаттера пластины с использованием точной аэродинамической теории. Изв. РАН, Мех. жидкости и газа. 2009, №2, с. 169 – 178.
113. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978 – Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978, 352., ил.
114. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. – 4-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 352 с. – (Пробл. науки и техн. прогресса).
115. Lekhnitskii, S. G. 1941. Bending of inhomogeneous anisotropic thin plates of a symmetric layup. Applied Mathematics and Mecanics V. Issue 1, 71 – 92. In Russian.
116. Lekhnitskii, S. G. 1967. Anisotropic Plates, 2nd ed. (transl. from 1957 Russian ed.). Gordon and Breach, New York.
117. В. В. Болотин, Ю. Новичков. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с., ил.
118. Амбарцумян С. А. Белубекян М. В. Об одном подходе к определению эффективных модулей несимметрично собранных многослойных пластин. // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз сб.. Нижегородский ун-т. 2000, вып. 61, с. 26-30.
119. Белубекян М. В. К вопросу колебаний неоднородной по толщине пластинки. НАН Армения. Механика. 2002. Т. 55. №3. С. 34-41.
120. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: theory and analysis. CRC Press. 2004. 825p.
121. Агаловян Л. А., Хачатрян А. М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями// В сб.: “Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твердого тела” Ереван: 1999. С. 23-29.
122. Агаловян Л. А., Багдасарян Ю. М., Хачатрян А. М. К определению напряженно-деформированного состояния слоистых пластин с анизотропией общего вида // Известия НАН Армении. Механика. 1996. Т. 49. №3. С. 10-22.

123. Баласанян Е. С. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной двухслойной пластины при неполном контакте между слоями // Известия НАН Армении. Механика. 2018. Т. 71. №1. С. 47-60.
124. Хачатрян А. М. Об уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при нежестком контакте слоев.// Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. №2. С. 159-175.
125. Белубекян М. В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги.// В сб.: “Проблемы механики тонких деформируемых тел” (Посв. 80-летию С. А. Амбарцумяна) Ереван: Изд. “Титутюн”, 2002. С. 67-88.
126. Белубекян М. В. Изгиб и колебания двухслойной пластинки при условиях свободного скольжения между слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т. 66. №2. С. 14-24.
127. http://viam-works.ru/ru/articles?art_id=995
128. Коненков Ю. К. Об изгибной волне релеевского типа. // Акуст. журнал. 1960, т. 6, №1, с 124-126.
129. Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. // М.: Физматлит 2010. 280с.
130. Lwrie J. B., Kaplunov J. D. Edge waves and resonance on elastic structures. a overview. // Mathematics and Mechanics of solids 2012, v. 17, №1, 4-16.
131. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzoca P. Localized Flexural Vibrations of Membrane Cylindrical Shell. // The Journal of the Acoustical Society of America 2017, 141(3), p 1947-1952.
132. Belubekyan M. V. On the condition of Planar Localized Vibration Appearance in the Vicinity of the free Edge of Thin Rectangular Plate. // Proceedings of the Yerevan State University. (Physical and Mathematical Sciences) 2017, 51(1) p 42-45.
133. Новацкий В. Теория упругости. // Пер. с польск. Б. Е. Победри. – М.: Мир, 1975. –256 с, OCR-слой.