

ՀՀ ԳԱԱ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՄԱՀԱԿՅԱՆ ԱՐԵԳ ԱՎԵՏԻԿՔԻ

ԷԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ
ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ա.02.04 “Դեֆորմացվող պինդ մարմնի մեխանիկա” մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական
աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2018

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ НАН РА

СААКЯН АРЕГ АВЕТИКОВИЧ

**ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ИЗГИБ И
УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.02.04 – “механика деформируемого твёрдого тела”

ЕРЕВАН – 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում:

Գիտական ղեկավար՝

Ֆ.մ.գ.թ., պրոֆեսոր Մ.Վ.Բելուբեկյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

Ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Կ.Բ.Ղազարյան
տ.գ.դ., պրոֆեսոր Մ.Զ.Պողոսյան

Առաջատար կազմակերպություն՝

Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2018թ. հունիսի 15-ին, ժամը 14.00-ին
ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտում գործող 047 մասնագիտական խորհրդի նիստում
(հասցեն՝ Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24/2, avсах@mechins.sci.am):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի
գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է՝ մայիսի 11-ին 2018թ.

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
Ֆիզ.մաթ.գիտ. դոկտոր



Ս.Վ.Սահակյան

Тема диссертации утверждена в Институте механики НАН РА.

Научный руководитель:

к.ф.м.н., профессор М.В.Белубекян

Официальные оппоненты:

д.ф.м.н., профессор К.Б.Казарян
д.т.н., профессор М.З.Погосян

Ведущая организация:

Ереванский государственный университет

Защита диссертации состоится 15-ого июня 2018г. в 14⁰⁰ часов

на заседании специализированного совета 047 в Институте механики НАН РА
по адресу: 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, avсах@mechins.sci.am.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики НАН
РА.

Автореферат разослан 11-ого мая 2018г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физико-математических наук



А.В.Саакян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение условий устойчивости упругих систем, нагруженных как консервативными, так и неконсервативными силами, представляет значительный интерес для современного машиностроения, авиации и ракетной техники, объектов систем автоматического регулирования, а также для объектов гражданского строительства.

На современном этапе развития расчетных методов наиболее плодотворным аппаратом для решения неконсервативных задач теории упругой устойчивости является динамический метод, основанный на рассмотрении колебаний системы вблизи положения равновесия. Это сближает теорию упругой устойчивости с общей теорией устойчивости движения, а также с ее приложениями в других областях механики и техники.

Инженерная практика ставит все новые и новые задачи по созданию новых высокопрочных композиционных материалов, тонкостенные конструкции из которых будут отличаться высокой несущей способностью при малом весе, достигаемом, главным образом, за счет уменьшения толщины конструкции, что, в свою очередь, приводит к увеличению риска потери устойчивости.

В сложившейся ситуации вопросы исследования устойчивости различных тонкостенных конструкций приобретают особую важность. Это подтверждают многочисленные публикации в этой области.

Целью диссертационной работы является

- исследование влияния граничных условий и промежуточной опоры различного типа на устойчивость консольно закрепленного стержня при действии на его свободный конец осевой сжимающей силы;
- изучение зависимости максимального прогиба шарнирно опертой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки и точки его достижения от места приложения распределенной по линии нагрузки, граничных условий на двух других сторонах и отношения сторон пластинки;
- исследование форм потери устойчивости тонкой упругой прямоугольной пластинки с одним свободным и двумя шарнирно опертыми сторонами, сжатой в одном направлении, в зависимости от отношения сторон пластинки и коэффициента Пуассона материала пластинки при различных граничных условиях на четвертой стороне пластинки.

Научная новизна работы состоит в следующем:

- построена система сосредоточенных сил меньшей интенсивности, которая вместе с сосредоточенной силой, приложенной вне центра балки и вызывающей асимметрию при ее изгибе, максимально приближает изогнутую ось балки к симметричной кривой;

- показано, что при установке в определенной точке центрально сжатого упругого стержня опоры типа муфты вместо опоры шарнирного типа можно достичь более чем двукратного увеличения значения критической силы;
- построены графики зависимости критической консервативной нагрузки, вызывающей локализованную потерю устойчивости шарнирно опертой по трем сторонам прямоугольной пластинки, от отношения сторон пластинки при различных значениях коэффициента Пуассона ее материала, найдены значения отношения сторон прямоугольной пластинки, обеспечивающие ее максимальную устойчивость;
- для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум сторонам и жестко защемленной по третьей, противостоящей к свободной, стороне, найдено минимальное значение отношения сторон пластинки, после которого может иметь место локализованная потеря устойчивости от действия сжимающей консервативной нагрузки;
- показано, что в динамической постановке задачи при действии на свободный край равномерно распределенной сжимающей следящей нагрузки, в обоих случаях закрепления противостоящей стороны, происходит потеря устойчивости, но она не носит локальный характер. Минимальные значения относительной длины пластинки, начиная с которых может наступить потеря устойчивости, определяются условиями прочности материала пластинки.

Обоснованность и достоверность полученных результатов обеспечены применением известных постановок задач, строгих математических методов и вычислительных алгоритмов, а также совпадением некоторых результатов с ранее известными.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела “Динамика деформируемых сред и связанные поля” Института механики НАН РА,
- семинаре «Волновые процессы» Института механики НАН РА,
- международной школе-конференции молодых ученых «Механика-2016» (Цахкадзор, 2016),
- V-ой международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Цахкадзор, 2017),

Диссертационная работа в целом обсуждена на заседании отдела “Динамика деформируемых сред и связанные поля” Института механики НАН РА и на общем семинаре Института механики НАН РА.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в семи статьях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 103 страницы печатного текста и содержит 47 рисунков и 4 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор работ, связанных с тематикой диссертационной работы. Кратко описано содержание работы, обоснована ее актуальность, представлены основные положения, выносящиеся на защиту.

Первая глава, состоящая из трех параграфов, посвящена исследованию изгиба балки под действием сосредоточенной силы и устойчивости сжатого центральной осевой силой консольно закрепленного упругого стержня при наличии точечной промежуточной опоры типа шарнира или муфты при различных граничных условиях на конце стержня.

В §1.1 на основе уравнения цилиндрического изгиба пластинки классической теории Кирхгоффа-Лява (изгиба балки теории Эйлера - Бернулли)

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = -q(x) \quad (1)$$

где $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$, E и ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластинки, $2h$ - толщина пластинки, определены интервалы точек, в которых балка, при различных условиях опирания на концах, может иметь максимальный прогиб. Полагается, что внешней нагрузкой является сосредоточенная сила, действующая в произвольной точке балки, а каждый из концов балки либо шарнирно оперт, либо жестко защемлен.

Часть результатов, относящихся к интервалам точек достижения максимального прогиба, были ранее известны.

Поставлен вопрос – можно ли в случае одинаковых условий на концах асимметрию изогнутой оси балки, вызванную сосредоточенной силой, приложенной вне центра балки, свести к минимуму посредством приложения подчиняющейся определенной закономерности системы сосредоточенных сил меньшей интенсивности.

Полагая, что сосредоточенная сила P приложена в $\zeta = pl$ ($0.5 < p < 1$),

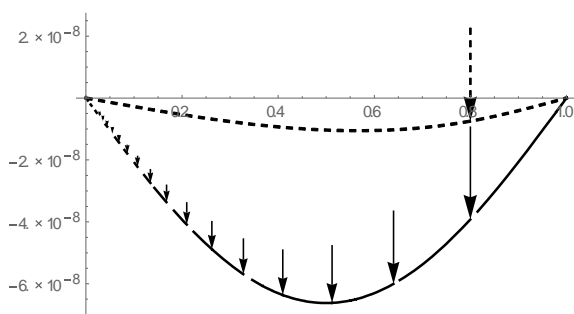


Рис. 1.1.5. Изогнутая ось балки

найдена система сил $P_k = a^{k-1}P$ ($0 < a < 1$, $k=2,3,\dots$), приложенных в точках $\zeta_k = p^k l$, ($k=2,3,\dots$) которая вместе с силой P приводит к максимальному прогибу в центре балки и в определенной степени восстанавливает симметрию изогнутой оси балки.

На Рис. 1.1.5 представлены изогнутые

оси балки под действием силы P , приложенной в точке $\zeta=0.8l$, и под действием системы сил $P_k = a^{k-1}P$ ($a=0.79, k=1, 2, \dots$).

При этом отклонение от симметрии является наибольшим у концов балки, существенно зависит от точки приложения силы P и принимает максимальное значение, причем существенно большее при жестко закрепленных концах, когда сила приложена в точке $\zeta = 0.57l$.

Отметим, что прогиб балки под действием бесконечной системы сил изменяется в пределах, соответствующих прогибу от сосредоточенной силы P , приложенной в середине балки, и прогибу от равномерно распределенной нагрузки интенсивности P .

В §1.2 рассматривается задача устойчивости консольно закрепленного стержня постоянного поперечного сечения, сжимаемого осевой силой P , при различных условиях закрепления конца и наличии точечной опоры шарнирного типа, ограничивающей поперечное смещение стержня в этой точке (Рис. 1).

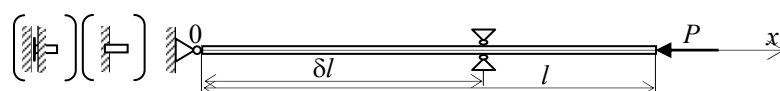


Рис.1. Схематическое представление задачи

В предельных случаях расположения опоры у одного из концов стержня для сжимающей критической силы получены значения, известные из литературы.

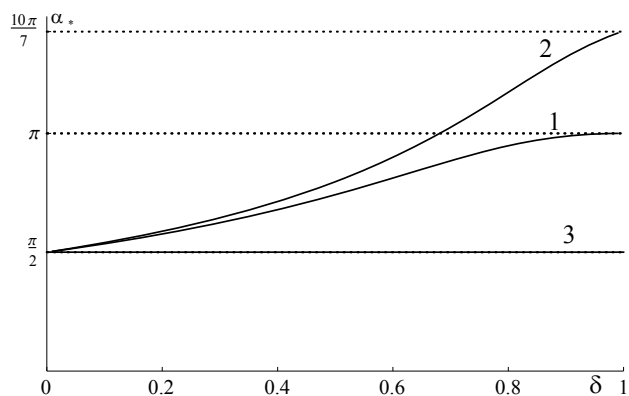


Рис. 2 Графики критической консервативной нагрузки при разных условиях закрепления конца стержня

При промежуточных положениях опоры зависимость критической консервативной силы от точки установки опоры для каждого из условий закрепления представлена графически. На рис.2 представлены графики зависимости безразмерного параметра $\alpha_* = l\sqrt{P/EJ}$ от параметра δ , указывающего место установки опоры. Кривая 1 соответствует случаю шарнирного опирания левого конца, кривая 2 – жесткого защемления, кривая 3 – скользящей заделки.

Интересным представляется случай со скользяще заделанным концом, когда наличие промежуточной опоры никак не сказывается на величине критической сжимающей силы. Это объясняется тем, что скользящая заделка, в отличие от жесткой заделки, позволяет свободное смещение левого конца в вертикальном направлении. Этим и компенсируется наличие опоры, сводя ситуацию к сдвигу точки отсчета в задаче устойчивости центрально сжатого стержня с жестко закрепленным концом.

Для следящей нагрузки зависимости критической нагрузки от расположения опоры представляются аналитически:

$\alpha_* = \pi/\delta$ – для шарнирно закрепленного конца

$\alpha_* = 4.49\dots \approx \pi/0.7\delta$ – для заземленного конца

$\alpha_* = \pi/2\delta$ – для скользящего конца.

Очевидно, что при действии следящей нагрузки наличие опоры начинает сказываться на величине критической силы только лишь с некоторого расстояния от закрепленного конца, обусловленного условием прочности стержня.

В §1.3 рассматривается та же задача, но с условием, что точечная опора является опорой типа жесткой муфты, ограничивающей поперечное смещение и поворот стержня в этой точке.

В рассматриваемом случае решения для обеих частей стержня разделяются друг от друга и единственным связующим их звеном является общая длина стержня. Это означает, что каждая из частей может терять устойчивость независимо от другой. И здесь для предельных случаев расположения опоры получены известные из литературы значения сжимающей критической силы.

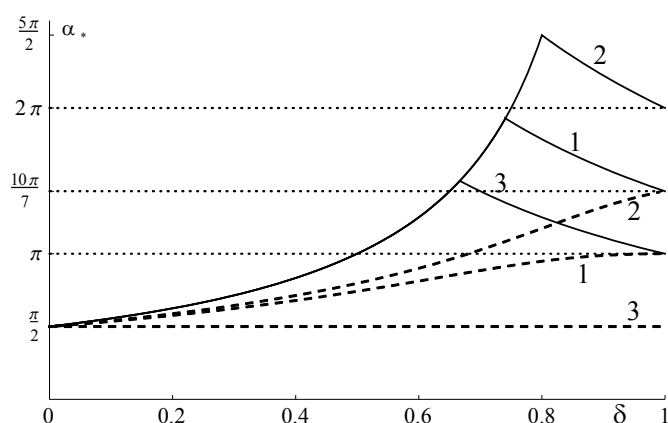


Рис. 3 Графики критической консервативной нагрузки при разных условиях закрепления конца стержня

При промежуточных расположениях опоры типа муфты зависимости критической консервативной нагрузки от расположения опоры графически представлены на рис.3. Здесь же, для сравнения, пунктирными линиями приведены графики рис. 2 с сохранением нумерации кривых.

Из графиков на рис.1.3.2 непосредственно замечаем преимущество установки опоры типа скользящей заделки (гладкой муфты), выражающееся в существенном повышении

значения критической силы. При установке, вместо опоры шарнирного типа опоры типа муфты в точке $0.74l$, в случае шарнирно закрепленного конца, и в точке $0.8l$, в случае жесткого его заземления, приводит к более чем двукратному (≈ 2.12) увеличению значения критической силы. При установке же опоры в точке $2/3 l$ при скользящей заделке конца приводит к трехкратному увеличению значения критической силы.

Вторая глава, состоящая из трех параграфов, посвящена исследованию прогиба шарнирно опертой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки под действием нагрузки, сосредоточенной в одном направлении и синусоидально распределенной в другом направлении, при различных краевых условиях на двух других сторонах.

В §2.1 рассматривается изгиб указанной пластинки под действием нагрузки, сосредоточенной на отрезке, параллельном опертым сторонам, и синусоидаль-

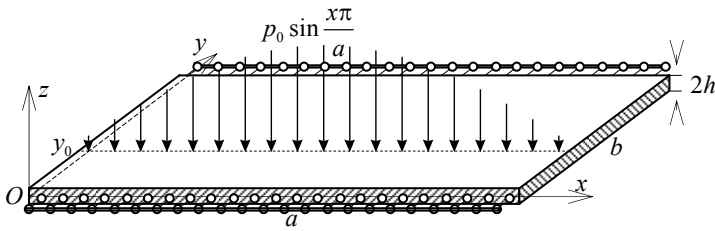


Рис. 4 Схема поставленной задачи

но распределенной по нему, при различных краевых условиях на двух других сторонах (рис. 4).

Прогиб пластинки $w(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$D\Delta^2 w = q(x, y) \quad (2)$$

где Δ - оператор Лапласа, $q(x, y)$ - заданная внешняя нагрузка, D - жесткость пластинки на изгиб. Уравнение (2) решается методом разложения в ряд Фурье по координате y .

Учитывая, что наибольший прогиб пластинка будет испытывать по линии $x = a/2$, на рис. 5 показаны формы прогиба пластинки в этом сечении для разных значений отношения сторон пластинки $a_* = a/b$, когда нагрузка действует по линии $y = 0.9b$. Пунктирные линии соответствуют случаю свободного опирания сторон $x = 0, a$, а сплошные линии - случаю их жесткого защемления.

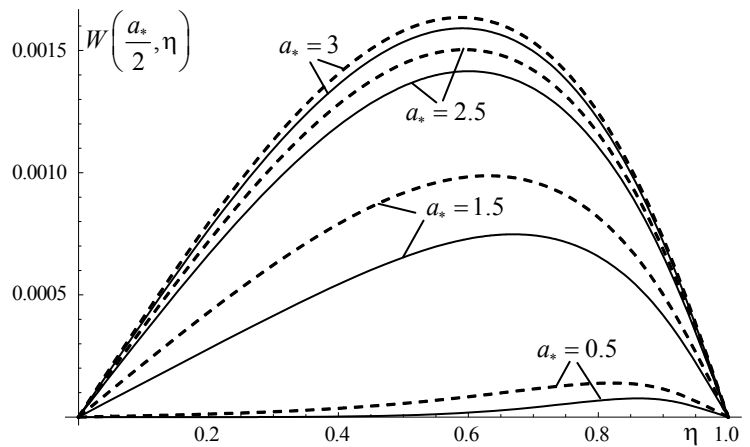


Рис.5 Формы прогиба средней линии пластинки

Графики подтверждают тот очевидный факт, что защемленная по двум краям пластинка прогибается меньше, чем свободно опертая. При этом на максимальном прогибе, имеющем место на линии $a_*/2$, это сказывается больше при малых значениях a_* , а при больших a_* максимальные прогибы для обоих случаев стремятся к одному и тому же значению, соответствующему цилиндрическому прогибу шарнирно-опертой бесконечной пластинки.

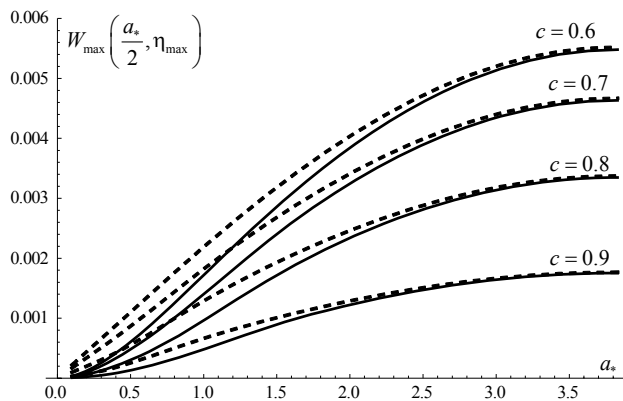


Рис.6 Зависимость максим. прогиба от a_*

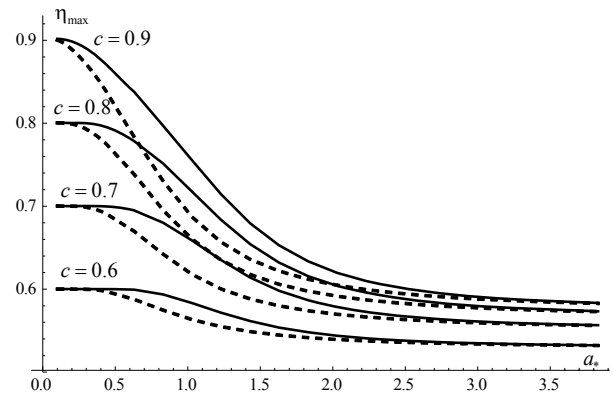


Рис.7 Зависимость координаты η_{\max} от a_*

На рис. 6 и рис. 7 представлены графики зависимости значения максимального прогиба пластинки и координаты точки его достижения от соотношения сторон пластинки a_* при различных значениях параметра c , указывающего на место приложения внешней нагрузки. Как и на рис. 5 пунктирные линии соответствуют случаю свободного опирания сторон $x=0, a$, а сплошные линии – случаю их жесткого защемления.

Исходя из рис. 6 и рис. 7, можно сделать вывод, что начиная уже со значения отношения сторон пластинки $a_* = 3.5$ граничные условия на коротких сторонах пластинки практически не влияют ни на максимальный прогиб, ни на место его достижения. При меньших же значениях a_* влияние граничных условий достаточно существенно.

В §2.2 рассматривается изгиб указанной пластинки под действием нагрузки, сосредоточенной на отрезке, перпендикулярном к открытым сторонам, и синусоидально распределенной по нему, при различных краевых условиях на двух других сторонах (рис. 8).

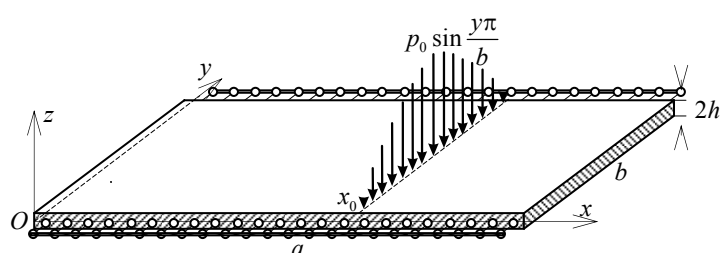


Рис.8 Схема поставленной задачи

Нетрудно заметить, что по оси η прогиб симметричен и наибольший прогиб будет при $\eta = 1/2$. На рис. 9 представлены прогибы $W(\xi, 1/2)$ в зависимости от относительной ширины пластинки a_* , когда $d = 0.7a_*$. Для возможности совместного представления графиков и проведения сравнительного анализа по оси абсцисс отложена приведенная длина пластинки. Здесь, как и выше, приводятся графики для обоих случаев закрепления одновременно.

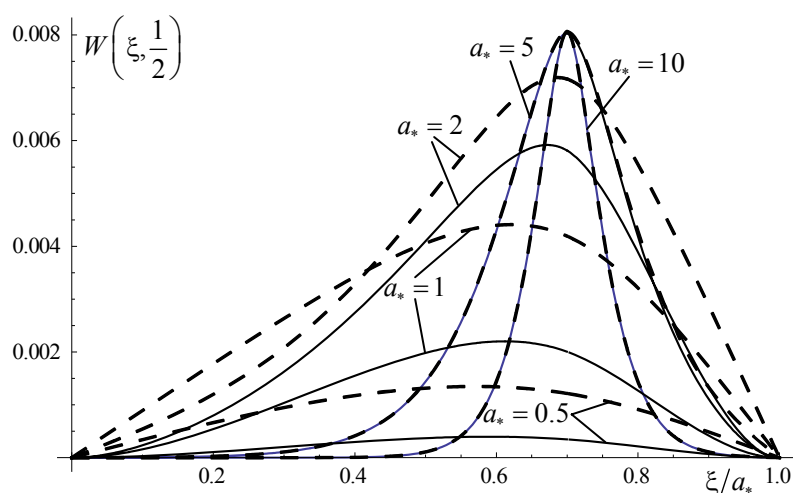


Рис.9 Сравнение прогибов защемленной (сплошные линии) и свободно опертой (пунктирные линии) по двум сторонам пластинки в сечении $\eta = 1/2$ при $a_* = 0.5, 1, 2, 5, 10$

Графики рис.9 показывают, что при малых значениях a_* пластинка прогибается по всей длине и принимает максимальное значение не под приложенной нагрузкой, а ближе к центру. При больших же значениях a_* прогиб пластинки локализуется в окрестности линии действия внешней нагрузки.

На рис. 10 представлены графики зависимости значения максимального прогиба пластинки от соотношения сторон пластинки a_* . Полагается, что при

изменении a_* относительное положение линии приложения внешней нагрузки сохраняется, то есть имеем $d = d_0 a_*$. Приведенные графики соответствуют различным значениям параметра d_0 .

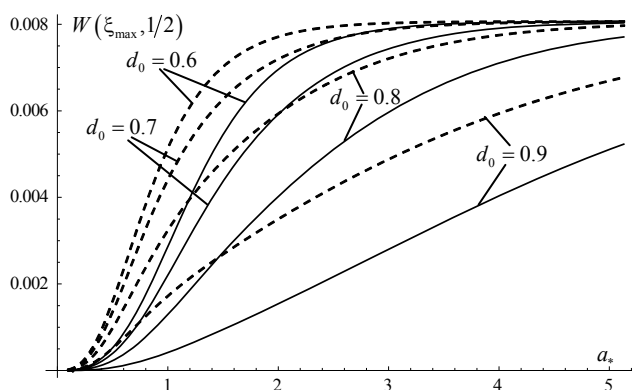


Рис.10 Зависимость максимального прогиба от a_*

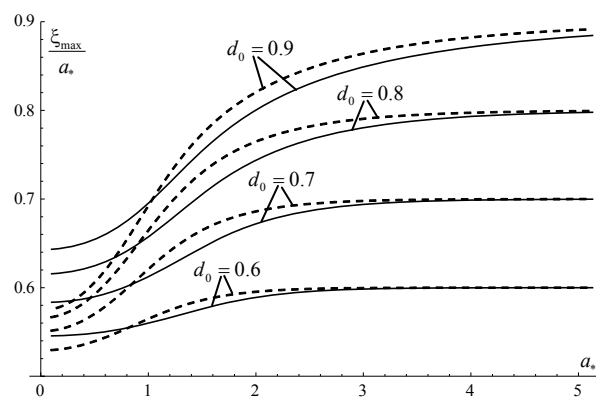


Рис.11 Зависимость координаты η_{\max} от a_*

Сравнивая эти графики, замечаем, что при $d_0 = 0.6$ начиная уже со значения отношения сторон пластинки $a_* = 4$ граничные условия на коротких сторонах пластинки практически не влияют ни на максимальный прогиб, ни на место его достижения. Очевидно, что с увеличением d_0 соответствующее значение a_* возрастает, причем для достижения одинакового прогиба намного больше (рис. 10), чем для совпадения точек максимального прогиба (рис. 11). При меньших же значениях a_* влияние граничных условий достаточно существенно.

В §2.3 рассматривается изгиб указанной пластинки под действием сосредоточенной силы при различных краевых условиях на двух других сторонах. Полагая, что $a_* = 0.5$ и сила приложена в точке $\{0.25a_*, 0.7\}$, для каждой комбинации граничных условий на этих сторонах построена форма прогиба пластинки, а также найдены величина максимального прогиба и координаты точки, в которой он достигается. Например, для случая, когда одна

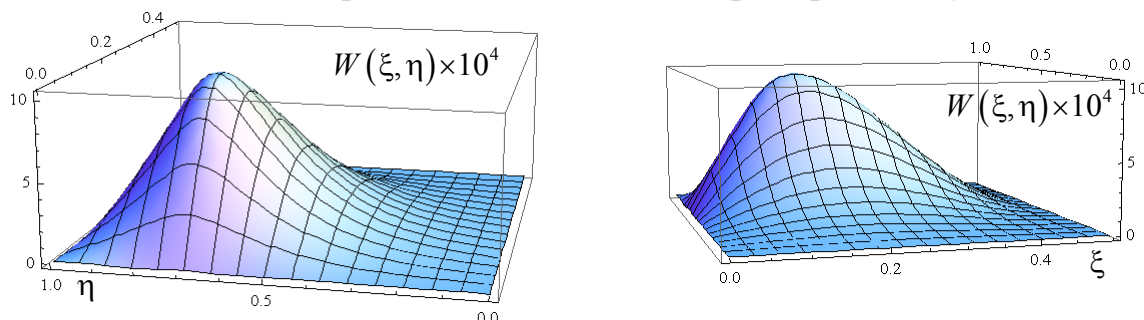


Рис.12 Форма прогиба защемленной по одной стороне пластинки при $a_* = 0.5, d = 0.25a_*, c = 0.7$

сторона заземлена, а другая шарнирно-оперта, она в двух ракурсах представлена на рис. 12.

Для наглядности результаты, полученные по максимальному прогибу, сгруппированы в таблице 1.

Таблица 1

Тип граничных условий на противоположных сторонах		$a_* = 0.5, d = 0.125, c = 0.7$		
$\xi = 0$	$\xi = a_*$	W_{\max}	x_{\max}	y_{\max}
шарнир	шарнир	0.001325	0.18	0.689
шарнир	защемление	0.001038	0.158	0.696
защемление	шарнир	0.000587	0.184	0.698
защемление	защемление	0.000512	0.166	0.6995

Исходя из данных таблицы 1 и учитывая близость точки приложения сосредоточенной силы к стороне $\xi = 0$, можно утверждать, что защемление стороны приводит к более, чем двухкратному, уменьшению прогиба. По расположению точки достижения максимального прогиба можно заметить, что по оси ξ , она располагается относительно далеко от точки приложения силы, причем больше при защемленной стороне $\xi = 0$. По оси же η она очень близка к точке приложения силы. Это объясняется тем, что при принятом значении $a_* = 0.5$ пластинка удлинена в направлении оси η .

В третьей главе, состоящей из трех параграфов, исследуются вопросы устойчивости прямоугольной пластинки, две противоположные стороны которой шарнирно оперты, третья сторона либо шарнирно оперта, либо заземлена, а на четвертую, свободную в смысле опирания, сторону действует сжимающая нагрузка. В такой ситуации потеря устойчивости носит локальный характер, будучи сосредоточенной в окрестности свободного края. Рассмотрены случаи как консервативной, так и следящей сжимающей нагрузки. Показано, что в статической постановке задачи устойчивости пластинки определить критическую следящую нагрузку, приводящую к потере устойчивости, невозможно. В связи с этим в третьем параграфе этой главы проводится исследование потери устойчивости в динамической постановке.

В §3.1 исследуется задача устойчивости шарнирно опертой по трем сторонам прямоугольной пластинки, на свободную сторону которой действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка (рис. 13).

Уравнение устойчивости пластинки имеет вид

$$\Delta^2 w + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \alpha^2 = \frac{P}{D} \quad (3)$$

где Δ - оператор Лапласа, $w(x, y)$ – поперечное перемещение (прогиб), P –

сжимающая нагрузка, $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ - жесткость пластинки на изгиб, E, ν -

модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластинки. Уравнение (3), как и уравнение (2), решается методом разложения в ряд Фурье.

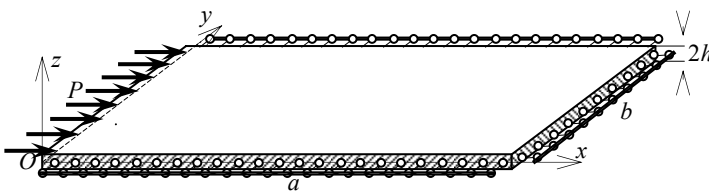


Рис. 13 Схема поставленной задачи

Показано, что в случае, когда противоположная свободному краю сторона пластины шарнирно-оперта, при действии на свободный край консервативной нагрузки локализованная неустойчивость всегда, т.е. независимо от отношения $a_*=a/b$,

имеет место и критическая нагрузка определяется из уравнения

$$s_2 \left[4s_1^2 - (1 + \nu)^2 \right] \text{sh } 2\pi n a_* s_1 + s_1 \left[(1 - \nu)^2 - 4s_2^2 \right] \sin 2\pi n a_* s_2 = 0 \quad (4)$$

где $s_1 = \sqrt{1 - s_2^2}$, $s_2 = \alpha_n / \sqrt{2}$, а при действии следящей нагрузки возможность возникновения локализованной неустойчивости отсутствует.

В общем случае, при заданном значении a_* для каждого n существует свой корень уравнения (4) α_n . Численный анализ этих корней, с учетом связи внешней нагрузки с корнями α_n , определяемую не самим корнем, а произведением $n\alpha_n$, показал, что при любом значении a_* наименьшая критическая нагрузка, приводящая к потере устойчивости по первой форме, определяется корнем

$$\alpha_1 = \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{P}{2D}}.$$

На рис.14 показаны кривые зависимости приведенной критической нагрузки α_1 от параметра a_* , определяющего геометрию пластинки, для различных значений коэффициента Пуассона материала пластинки.

На графиках рис. 14 замечаем горбинки, указывающие на то, что при определенной геометрии пластинка максимально устойчива. При этом они более выражены при малых значениях

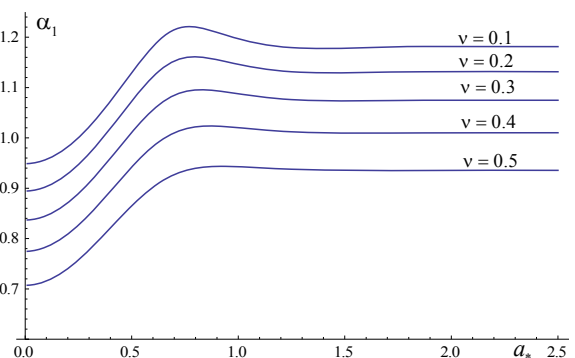


Рис.14 Зависимость критической нагрузки от a_*

коэффициента Пуассона.

В таблице 1 для разных значений этого коэффициента приведены значения параметров a_* и α_1 , а также процентное превышение α_1 по отношению к α_∞ , соответствующего предельному значению при $a_* \rightarrow \infty$ и определяемому формулой $\alpha_\infty = \sqrt{(1-\nu)(3+\nu)}/2$.

Таблица 1

ν	a_*	α_1	$(\alpha_1 - \alpha_\infty)/\alpha_\infty$ %
0.0	0.75	1.28	4.22
0.1	0.77	1.22	3.37
0.2	0.8	1.16	2.61
0.3	0.83	1.09	1.94
0.4	0.87	1.02	1.35
0.5	0.92	0.94	0.86

Исходя из данных таблицы и учитывая, что многие из материалов, пригодных для изготовления тонкостенных конструкций, имеют коэффициент Пуассона в пределах 0.25 – 0.35, для шарнирно опертой по трем сторонам прямоугольной пластинки можно рекомендовать придерживаться отношения свободной стороны к опертой, равного 0.83.

На рис. 15 и рис. 16 показаны первая и вторая формы локальной потери устойчивости квадратной пластинки ($a_* = 1$) с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$.

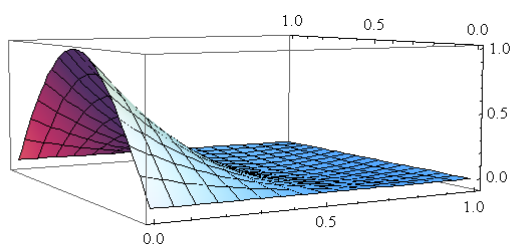


Рис. 15 Первая форма ($a_* = 1$)

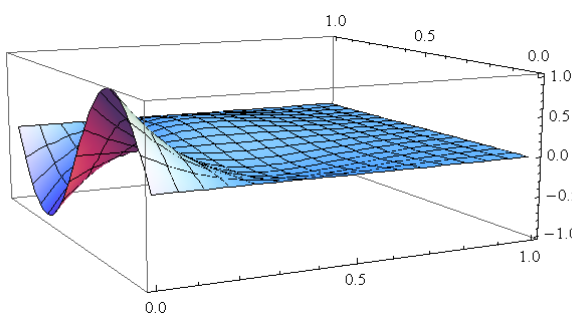


Рис. 16 Вторая форма ($a_* = 1$)

В §3.2 исследуется вопрос о локализованной неустойчивости свободного края прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам и жестко защемленной по третьей стороне.

Рассматривая предельные случаи $a_* \rightarrow \infty$ и $a_* \rightarrow 0$ приходим к выводу, что в случае консервативной нагрузки появление локализованной неустойчивости существенно зависит от отношения сторон пластинки $a_* = a/b$.

Получено уравнение

$$4 + (1 - \nu)^2 - 2\pi^2 n^2 a_*^2 (1 + \nu)^2 + (1 + \nu)(3 - \nu) \cos 2\pi n a_* = 0, \quad (5)$$

которое позволяет найти минимальное значение a_* , после которого возможна потеря устойчивости в окрестности свободного края. Очевидно, что для определенного значения коэффициента Пуассона мы будем иметь решение $n a_* = const$, то есть для каждого n , представляющего определенную форму потери устойчивости, мы будем иметь свое значение a_* . При этом чем меньше a_* , тем сложнее будет форма потери устойчивости, а это, в свою очередь, приводит к выходу за рамки применимости принятой изначально классической теории Кирхгоффа-Лява. Учитывая сказанное, ограничимся только первой формой потери устойчивости.

В табл. 2 приводятся численные значения для a_* , найденные из уравнения (5) при $n = 1$, начиная с которых, в зависимости от коэффициента Пуассона ν , появляется локализованная неустойчивость.

Таблица 2

ν	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$a_* = a/b$	0.379	0.350	0.328	0.310	0.294	0.281

Таким образом, выяснено, что при действии на свободный край равномерно распределенной следящей нагрузки, как и в предыдущем случае, пластинка не теряет устойчивость. При действии же на свободный край равномерно распределенной консервативной нагрузки, в отличие от случая шарнирно опертой противоположной стороны, локализованная неустойчивость имеет место только начиная с определенного значения отношения сторон пластинки a_* , зависящего от величины коэффициента Пуассона материала пластины.

На рис.17 показаны кривые, аналогичные кривым рис. 14. Здесь, в отличие от рис. 14, приблизительно на том же месте, что и горбинки рис. 14, имеются

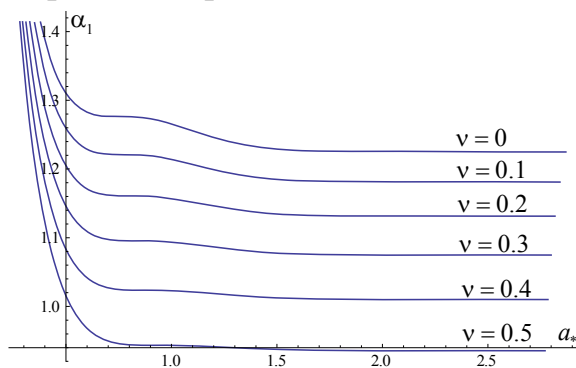


Рис.17 Зависимость критической нагрузки от a_*

площадки, указывающие на существование интервала, хоть и небольшого, изменения отношения a_* , в котором критическая нагрузка не меняется.

В табл. 3 для разных значений коэффициента Пуассона приведены интервалы (a_*^0, a_*^1) изменения параметра a_* , в которых изменение параметра α_1 не превосходит 0.1%.

Таблица 3

ν	a_*^0	a_*^1	$(\alpha_1^0 - \alpha_1^1)/\alpha_1^1 \%$
0.0	0.68	0.83	0.09
0.1	0.69	0.85	0.095
0.2	0.71	0.88	0.094
0.3	0.74	0.93	0.095
0.4	0.77	0.98	0.098
0.5	0.81	1.05	0.097

Из таблицы замечаем, что с увеличением коэффициента Пуассона ширина интервала возрастает от 0.15 до 0.24.

В §3.3 рассматривается та же задача, что и в предыдущих параграфах, но при предположении, что сжимающая нагрузка является следящей, и исследуется возможность появления динамической неустойчивости упругой прямоугольной пластинки в постановке В.В.Болотина.

Для рассмотрения задачи в динамической постановке необходимо иметь инерционные члены, в связи с чем полагаем, что на свободной стороне пластины имеется равномерно распределенная по ней масса с плотностью распределения m . Согласно В.В.Болотину динамическое уравнение устойчивости пластинки имеет вид, схожий с уравнением (3) в статической постановке, но предполагающий зависимость прогиба $w(x, y, t)$ от времени, которая проявляется лишь в граничных условиях на свободной стороне пластины $x = 0$

$$\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right] = -\frac{m}{D} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

Показано, что, независимо от условий на стороне, противоположащей свободной, потеря устойчивости прямоугольной пластинки от следящей нагрузки в динамической постановке возможна, но она не носит локальный характер.

Графики зависимости безразмерного параметра $\delta = \alpha_1 / \sqrt{2}$, характеризующего внешнюю нагрузку, от параметра a_* для разных условий опирания стороны $x = a$ представлены на рис. 18.

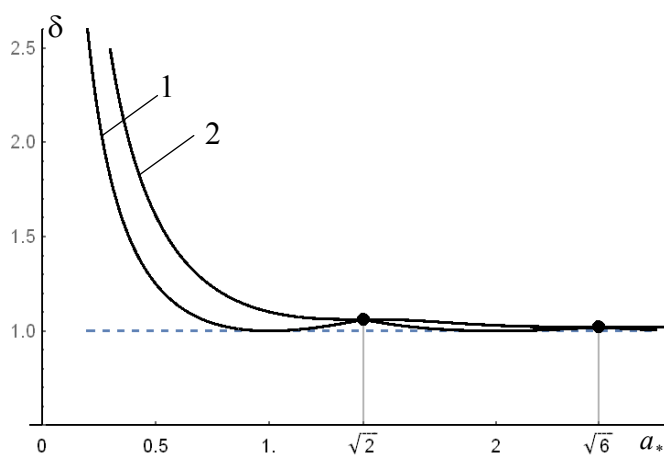


Рис. 18 Зависимость критической следящей нагрузки от относительной длины пластинки: кривая 1 соответствует шарнирному опиранию, а кривая 2 – жесткому защемлению края $x = a$.

Как видно из графиков на рис.18 критическое значение сжимающей нагрузки при защемленной стороне, как и следовало ожидать, превосходит аналогичное значение при свободно опертой стороне, причем это превосходство наиболее существенно при малых значениях относительной длины. Особый интерес представляют значения относительной длины a_* , равные среднему геометрическому двух последовательных натуральных чисел, когда независимо от условия закрепления четвертой стороны критические значения сжимающей нагрузки совпадают.

Таким образом, показано, что в динамической постановке задачи при действии на свободный край равномерно распределенной сжимающей следящей нагрузки в обоих случаях происходит потеря устойчивости, при этом критическое значение сжимающей нагрузки во втором случае превосходит соответствующее значение для первого случая и только при определенных значениях относительной длины эти значения совпадают. Минимальные значения относительной длины пластинки, начиная с которых может наступить потеря устойчивости, определяются условиями прочности материала пластинки.

В заключении отмечено, что диссертационная работа относится к исследованию прогиба тонкостенных элементов типа упругого стержня и тонкой прямоугольной пластинки от сосредоточенных нагрузок и их устойчивости от сжимающей нагрузки и получены следующие результаты:

- построена система сосредоточенных сил меньшей интенсивности, которая вместе с сосредоточенной силой, приложенной вне центра балки и вызывающей асимметрию при ее изгибе, максимально приближает изогнутую ось балки к симметричной кривой;
- исследовано влияние промежуточной точечной опоры шарнирного или скользящего типа на величину критического усилия, вызывающего потерю устойчивости центрально сжатого упругого стержня, при различных условиях закрепления одного его конца. Показано, что при установке, вместо опоры шарнирного типа опоры типа муфты в точке $0.74l$, в случае шарнирно закрепленного конца, и в точке $0.8l$, в случае жесткого его защемления, приводит к более чем двукратному (≈ 2.12) увеличению значения критической силы;

- найдена зависимость максимального прогиба и точки его достижения шарнирно опертой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластины при действии на нее распределенной по линии, параллельной или перпендикулярной к шарнирно опертым сторонам, нагрузки от отношения сторон прямоугольника и координаты линии приложения нагрузки. Сравнение результатов, полученных при различных граничных условиях на двух других сторонах, показало, что влияние этих условий существенно лишь когда длина этих сторон больше четверти длины шарнирно опертых сторон. Рассмотрен также случай действия сосредоточенной силы;
- построены графики зависимости критической консервативной нагрузки, вызывающей локализованную потерю устойчивости шарнирно опертой по трем сторонам прямоугольной пластинки, от отношения сторон пластинки при различных значениях коэффициента Пуассона ее материала;
- найден интервал изменения, в зависимости от коэффициента Пуассона, отношения сторон шарнирно опертой по трем сторонам прямоугольной пластинки, обеспечивающего ее максимальную устойчивость при действии на свободную сторону сжимающей консервативной нагрузки;
- для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум сторонам и жестко защемленной по третьей, противостоящей к свободной, стороне, найдено минимальное значение отношения сторон пластинки, после которого может иметь место локализованная потеря устойчивости от действия сжимающей консервативной нагрузки;
- показано, что с увеличением отношения сторон пластинки значение критической силы достаточно резко уменьшается, выходя на предельное значение для удлиненных пластинок, но при этом имеется интервал, на котором изменение значения критической силы не превосходит десятой доли процента. С изменением коэффициента Пуассона от 0 до 0.5 ширина этого интервала возрастает от 0.15 до 0.24.
- показано, что в динамической постановке задачи при действии на свободный край равномерно распределенной сжимающей следящей нагрузки, в обоих случаях закрепления противостоящей стороны, происходит потеря устойчивости, но она не носит локальный характер.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЕ

1. **Саакян А.А.** Анализ прогиба балки под действием сосредоточенной силы при различных условиях на концах Известия НАН РА , Механика, 2016, т.69, №2, сс. 46-54
2. **Белубекян М.В., Саакян А.А.** Локализованная неустойчивость прямоугольной пластинки при действии сжимающей нагрузки на свободном крае. Труды межд. школы-конференции молодых ученых «Механика 2016», 3-7 октября 2016, Цахкадзор, Армения, сс. 43-46.
3. **Саакян А.А.** Влияние места расположения опоры на величину критической нагрузки сжатого стержня. Известия НАН РА и НПУА. Серия технических наук. 2017, №3, сс. 272-279.
4. **Саакян А.А.** Влияние места расположения и типа опоры на величину критической нагрузки сжатого стержня. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 4, сс.65-74.
5. **Геворгян Г.З., Саакян А.А.** О динамической неустойчивости прямоугольной пластинки с одним свободным краем Труды V международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды», , 3-7 октября 2017, Цахкадзор, Армения, сс. 59-60.
6. **Gevorgyan G.Z. and Sahakyan A.A.** On the dynamic instability of a rectangular plate with one free edge Journal of Physic. Conference Series. 2018, Ser. 991 012024. DOI: /10.1088/1742-6596/991/1/012024
7. **Белубекян М.В., Саакян А.А.** О локализованной неустойчивости свободного края опертой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки при различных условиях закрепления четвертой стороны. МГТТ, 2018, №3,61-66.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ատենախոսական աշխատանքը վերաբերվում է կենտրոնացած բեռերից առաձգական ձողի և բարակ ուղղանկյուն սալի տիպի բարակապատ տարրերի ճկվածքի և սեղմող բեռից դրանց կայունության ուսումնասիրությանը:

Ստացվել են հետևյալ արդյունքները՝

- կառուցված է ավելի փոքր ինտենսիվության կենտրոնացած ուժերի համակարգ, որը հեծանի կենտրոնից դուրս կիրառված և անհամաչափ ճկվածք առաջացնող կենտրոնացած ուժի հետ միասին հեծանի ճկված առանցքը առավելապես մոտեցնում է համաչափ կորի;
- հետազոտված է հողակապի կամ օղակագոտու տիպի կետային հենարանի ազդեցությունը կենտրոնական սեղմված առաձգական ձողի կայունության կորուստի բերող կրիտիկական ուժի արժեքի վրա՝ ձողի ծայրի ամրակցման տարբեր պայմանների դեպքում: Ցույց է տրված, որ ձողի ծայրի հողակապային ամրակցման դեպքում 0.74/ կետում, իսկ կոշտ ամրակցված ծայրի դեպքում 0.8/ կետում հողակապային հենարանի փոխարեն օղակագոտու տեղադրումը բերում է կրիտիկական ուժի արժեքի ավելի քան կրկնակի (≈ 2.12) մեծացմանը;
- ստացված է երկու հանդիպակաց կողմերով ազատ հենված ուղղանկյուն սալի, որի վրա ազդում է այդ կողմերին զուգահեռ կամ ուղղահայաց հատվածներով բաշխված բեռ, մաքսիմալ ճկվածքի և դրան հասնելու կետի կախվածությունը սալի կողմերի հարաբերությունից և բեռի ազդման հատվածի դիրքից: Մյուս երկու կողմերի վրա տարբեր եզրային պայմանների համար ստացված արդյունքների համեմատությունը ցույց տվեց, որ այդ պայմանների ազդեցությունը էական է միայն երբ այդ կողմերի երկարությունը մեծ է ազատ հենված կողմերի երկարության քարորդից: Դիտարկված է նաև կենտրոնացած ուժի դեպքը;
- կառուցված են երեք կողմով ազատ հենված ուղղանկյուն սալի կայունության տեղայնացված կորուստի բերող կրիտիկական կոնսերվատիվ բեռի և սալի կողմերի հարաբերության միջև կախվածության կորերը սալի նյութի Պուասոնի գործակցի տարբեր արժեքների համար;

- գտնված է երեք կողմով ազատ հենված ուղղանկյուն սալի կողմերի հարաբերության այն արժեքների փոփոխության՝ Պուասոնի գործակցից կախված, տիրույթը, որոնք ապահովում են սալի առավելագույն կայունությունը ազատ եզրին սեղմող կոնսերվատիվ բեռի ազդեցության ժամանակ;
- երկու կողմով ազատ հենված և ազատ կողմին հանդիպակաց կոշտ ամրացված կողմով ուղղանկյուն սալի համար գտնված է կողմերի հարաբերության փոքրագույն արժեքը, երբ սեղմող կոնսերվատիվ բեռի ազդեցությունից հնարավոր է կայունության տեղայնացված կորուստ;
- ցույց է տրված, որ կողմերի հարաբերության աճի հետ կրիտիկական բեռի արժեքը բավական արագ նվազում է ձգտելով երկարացված սալերի համար սահմանային արժեքին, բայց այդ ընթացքում կա մի ինտերվալ, որտեղ կրիտիկական բեռի արժեքի փոփոխությունը չի գերազանցում տոկոսի մեկ տասնորդականը: Պուասոնի գործակցի 0-ից մինչև 0.5-ը փոփոխմանը զուգընթաց այդ ինտերվալի լայնությունը աճում է 0.15-ից մինչև 0.24:
- ցույց է տրվել, որ դինամիկ դրվածքով ուղղանկյուն սալի ազատ եզրին հավասարաչափ բաշխված սեղմող հետևող բեռի ազդեցության տակ՝ հանդիպակաց եզրի ամրակցման երկու դեպքում էլ, տեղի է ունենում կայունության կորուստ, բայց նա չի կրում տեղային բնույթ:

ABSTRACT

of the dissertation

“Influence of boundary conditions on bending and stability of rectangular plates”

A.A.Sahakyan

The dissertation is devoted to the study of the deflection of thin-walled elements such as an elastic rod and a thin rectangular plate from concentrated loads and their stability against a compressive load. The following results were obtained:

- for a concentrated force applied outside the center of the beam and causing an asymmetry in its bending, a system of concentrated forces of lower intensity is constructed which, together with the concentrated force, maximally approximates the curved axis of the beam to a symmetrical curve;
- The effect of a point support, of hinged or sliding type, on the value of the critical force causing the loss of stability of a centrally compressed elastic beam is investigated under different conditions on one of its ends. It is shown that when using sliding instead of hinged support, (at the point for a beam with hinged end, and for a beam with clamped end) more than twofold increase in the value of the critical force occurs;
- For a rectangular plate hinged on two opposite sides, under load distributed along a line parallel or perpendicular to the hinged sides, the dependence of the maximal deflection and the point of its achievement from the ratio of the sides of the rectangle and the position of the line of application of the load is investigated. A comparison of the results obtained under different boundary conditions on the other two sides showed that the effect of these conditions is significant only when the length of these sides is greater than a quarter of the length of the hinge-supported sides;
- graphs of the dependence of the critical conservative load, causing localized loss of stability of a rectangular plate hinged on three sides, are plotted against the ratio of the sides of the plate for different values of the Poisson's ratio of its material;
- the interval of variation of the ratio of the sides of a rectangular plate hinged on three sides, ensuring maximal stability of the plate under compressive conservative load acting on the free side, is found, depending on the Poisson ratio;

- for a rectangular plate hinged on two sides and rigidly clamped on the third, opposing to the free side, the minimum value of the ratio of the sides of the plate is found, after which there may be localized loss of stability from the action of a compressive conservative load;
- It is shown that with an increase in the ratio of the sides of the plate, the value of the critical force decreases quite sharply, reaching a limiting value for elongated plates, but there is an interval at which the change in the value of the critical force does not exceed a tenth of a percent. With a change in the Poisson's ratio from 0 to 0.5, the width of this interval increases from 0.15 to 0.24.
- it is shown that in the dynamic formulation of the problem, when a uniformly distributed compressive tracking load acts on the free edge, in both cases of fastening of the opposite edge of the plate, a loss of stability occurs, but it is not localized.



