

Институт механики
Национальной академии наук Армении

Саакян Арег Аветикович

**Влияние граничных условий на изгиб и
устойчивость прямоугольных пластин**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Научный руководитель:

главный научный сотрудник, профессор
Белубекян Мэлс Вагаршакович

Ереван – 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава 1. Влияние граничных условий и наличия промежуточной опоры на прогиб и устойчивость стержня	
§ 1.1 Анализ прогиба балки под действием сосредоточенной силы при различных условиях на концах	8
§ 1.2 Устойчивость сжатого стержня при различных граничных условиях и наличии промежуточной опоры шарнирного типа	18
§ 1.3 Устойчивость сжатого стержня при различных граничных условиях и наличии промежуточной опоры типа жесткой муфты	26
Глава 2. Прогиб шарнирно опертой по двум сторонам прямоугольной пластинки под действием сосредоточенных нагрузок	
§ 2.1 Анализ прогиба пластинки под действием распределенной по параллельному шарнирно опертым сторонам отрезку нормальной нагрузки при различных условиях на двух других сторонах	35
§ 2.2 Анализ прогиба пластинки под действием распределенной по перпендикулярному к шарнирно опертым сторонам отрезку нормальной нагрузки при различных условиях на двух других сторонах	48
§ 2.3 Прогиб пластинки под действием сосредоточенной силы	57
Глава 3. Локализованная неустойчивость свободного края шарнирно-опертой по двум сторонам прямоугольной пластинки	
§ 3.1 О локализованной неустойчивости свободного края шарнирно опертой по трем сторонам прямоугольной пластинки.....	65
§ 3.2 О локализованной неустойчивости свободного края прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам и жестко защемленной по третьей стороне	77
§ 3.3 О динамической неустойчивости прямоугольной пластинки с одним свободным краем	84
Заключение	94
Литература	96

ВВЕДЕНИЕ

Изучение условий устойчивости упругих систем, нагруженных как консервативными, так и неконсервативными силами, представляет значительный интерес для современного машиностроения, авиации и ракетной техники, объектов систем автоматического регулирования, а также для объектов гражданского строительства.

На современном этапе развития расчетных методов наиболее плодотворным аппаратом для решения неконсервативных задач теории упругой устойчивости является динамический метод, основанный на рассмотрении колебаний системы вблизи положения равновесия. Это сближает теорию упругой устойчивости с общей теорией устойчивости движения, а также с ее приложениями в других областях механики и техники.

Инженерная практика ставит все новые и новые задачи по созданию новых высокопрочных композиционных материалов, тонкостенные конструкции из которых будут отличаться высокой несущей способностью при малом весе, достигаемом, главным образом, за счет уменьшения толщины конструкции, что, в свою очередь, приводит к увеличению риска потери устойчивости.

В сложившейся ситуации вопросы исследования устойчивости различных тонкостенных конструкций приобретают особую важность. Это подтверждают многочисленные публикации в этой области.

Задача устойчивости центрально сжатого упругого стержня была сформулирована и решена еще в 18-ом веке Л.Эйлером. Однако теория устойчивости Эйлера ввиду отсутствия практического применения долгое время оставалась в тени и только с введением стали, а позже и высокопрочных пластиков, в проектирование инженерных конструкций с гибкими элементами, вопросы устойчивости приобрели особую значимость и резко увеличилось число работ, посвященных этим вопросам. Особое внимание уделяется потере устойчивости от действия следящей силы. Из многих работ, опубликованных в последние

двадцать лет, можно отметить работы [34,42,47,74,85,87-89]. В работе [83], носящей обзорный характер указывается, что в последние десятилетия интерес к задаче Эйлера заново всплыл ввиду широкой ее распространенности как в инженерных конструкциях, так и в природе. Среди множества работ, в той или иной мере связанных с устойчивостью тонкого стержня, отметим, в частности, работы [55, 56] в области биомеханики, [91, 96] в микроэлектронике и [50,71,77] в инженерии.

Задачи оптимизации устойчивости сжатого упругого стержня по критерию минимального веса исследованы достаточно полно [12]. Из работ, относящихся к задачам оптимизации на основе определения места расположения опоры можно указать работы [26-28]. В работе [75] решена задача устойчивости закрепленного по концам двухкомпонентного составного стержня под действием осевой сосредоточенной силы, приложенной в точке раздела материалов, и выявлена зависимость величины критической силы от отношения изгибных жесткостей составных частей стержня.

Немалое число работ опубликовано и по исследованию изгиба прямоугольных пластин, среди них отметим [54,61,63,65,66,68,69,72,82,86,90-93]. Более пристальное внимание уделялось и продолжает уделяться вопросам устойчивости прямоугольных пластин [30,33,46,48,51-53,57-60,62,64,67,70,76,78-81,95]. Из исследований, относящихся к явлениям, локализованным в окрестности края или линии раздела материалов, в частности изгибным колебаниям, отметим работы [2,22,29,38].

Существенный вклад в развитие теории пластин и оболочек внесли представители армянской школы механики во главе с академиком С.А.Амбарцумяном. Работ армянских ученых в этой области очень и очень много, отметим лишь некоторые из них, отдавая предпочтение тем, которые в той или иной степени связаны с темой диссертации [1,3-9,11,20,25-27,31,36-37,39-40,44,49]. По аналогии с задачей распространения локализованной у свободного края прямоугольной пластины изгибной волны, решенной

Ю.К.Коненковым [33], была сформулирована задача о локализованной потере устойчивости [14]. В дальнейшем было опубликовано много работ, посвященных устойчивости тонкостенных конструкций как в плане локализованной потери устойчивости, так и глобальной ее потери. Отметим, в частности, работы [10,13,15-19,41,43,84,97-103].

Настоящая диссертационная работа относится к исследованию тонкостенных элементов типа упругого стержня и тонкой прямоугольной пластинки в двух аспектах. С одной стороны исследуется зависимость максимального прогиба указанных элементов при действии на них сосредоточенных нагрузок от различных факторов: условий закрепления концов стержня и сторон пластинки, места приложения сосредоточенной нагрузки, соотношения сторон пластинки. С другой стороны, изучаются вопросы устойчивости консольного стержня, сжатого осевой силой, при наличии промежуточной опоры в зависимости от условий закрепления конца (шарнирное опирание, жесткая заделка или скользящая заделка), характера приложенной силы (консервативная или следящая), типа промежуточной опоры (шарнир или скользящая муфта) и места ее установки, а также вопросы возможности локальной потери устойчивости свободно опертой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки со свободной кромкой, на которую действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка, в зависимости от характера приложенной нагрузки (консервативная или следящая), условий опирания четвертой стороны, отношения сторон пластинки и от коэффициента Пуассона материала пластинки.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитированной литературы.

Во введении дан краткий обзор работ, связанных с тематикой диссертационной работы. Кратко описано содержание работы, обоснована ее актуальность, представлены основные положения, выносящиеся на защиту.

В первой главе, состоящей из трех параграфов, исследуется изгиб балки под действием сосредоточенной силы, определены максимальные прогибы и

интервалы точек, в которых эти прогибы могут достигаться, в зависимости от точки приложения сосредоточенной силы при различных условиях опирания концов балки, а также исследуется устойчивость сжатого центральной осевой силой упругого стержня в условиях наличия промежуточной опоры типа шарнира или муфты при различных граничных условиях на конце стержня. Проведен сравнительный анализ.

В первых двух параграфах второй главы исследуется прогиб шарнирно опертой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки под действием нагрузки, сосредоточенной в одном направлении и синусоидально распределенной в другом направлении, при различных краевых условиях на двух других сторонах. Исследовано поведение максимального прогиба и координат точки, в которой этот прогиб достигается, в зависимости от места приложения нагрузки и отношения сторон прямоугольника. Рассмотрены предельные случаи, когда имеет место цилиндрический изгиб и становится возможным сопоставить полученные для пластинки результаты с результатами для балки, полученными в предыдущей главе. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных при различных условиях на двух других сторонах. В третьем параграфе исследован изгиб пластинки под действием сосредоточенной силы. Для пластин с определенным отношением сторон проведен сравнительный анализ максимального прогиба и координат точки достижения этого максимума от одинаковой сосредоточенной силы, приложенной в определенной точке, рассчитанных при различных граничных условиях на противоположных сторонах пластинки.

В третьей главе, также состоящей из трех параграфов, исследуются вопросы устойчивости прямоугольной пластинки, две противоположные стороны которой шарнирно оперты, третья сторона либо шарнирно оперта, либо защемлена, а на четвертую, свободную в смысле опирания, сторону действует сжимающая нагрузка. В такой ситуации потеря устойчивости носит локальный характер, будучи сосредоточенной в окрестности свободного края. Рассмотре-

ны случаи как консервативной, так и следящей сжимающей нагрузки. Показано, что в статической постановке задачи устойчивости пластинки определить критическую следящую нагрузку, приводящую к потере устойчивости невозможно. В связи с этим в третьем параграфе этой главы проводится исследование потери устойчивости в динамической постановке.

Проведен подробный численный анализ. В первых двух параграфах построены кривые зависимости приведенной критической консервативной нагрузки, приводящей к локальной потере устойчивости, от отношения сторон пластинки для различных значений коэффициента Пуассона материала пластинки. Найдены те значения отношения сторон пластинки, при которых пластинка максимально устойчива, построены формы потери устойчивости. В третьем параграфе показано, что потеря устойчивости при действии следящей нагрузки не может носить локальный характер и, как следует из построенных кривых зависимости приведенной критической следящей нагрузки от отношения сторон пластинки, возможна только при относительно небольшой разнице между сторонами пластинки.

В заключении подытожены результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в статьях [97-103].

Они докладывались и обсуждались на семинарах «Волновые процессы» и отдела «Динамика деформируемых сред и связанные поля» Института механики НАН РА, а также на международной школе-конференции молодых ученых «Механика 2016», 3-7 октября 2016, Цахкадзор, Армения и на V международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды», 3-7 октября 2017, Цахкадзор, Армения.

В окончательном виде диссертационная работа была доложена на общем семинаре Института механики НАН Республики Армения.

Пользуясь случаем выражаю благодарность моему научному руководителю профессору Мелсу Вагаршакевичу Белубекяну за постановку задач и помощь при их решении, за внимательность и чуткое отношение.

ГЛАВА 1. ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И НАЛИЧИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ОПОРЫ НА ПРОГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ.

В настоящей главе исследуется изгиб балки под действием сосредоточенной силы, определены максимальные прогибы и интервалы точек, в которых эти прогибы могут достигаться, в зависимости от точки приложения сосредоточенной силы, а также исследуется устойчивость сжатого центральной осевой силой упругого стержня в условиях наличия промежуточной опоры типа шарнира или муфты при различных граничных условиях на концах балки и стержня. Проведен сравнительный анализ.

§ 1.1 Анализ прогиба балки под действием сосредоточенной силы при различных условиях на концах.

Постановка задачи и ее решение. В рамках теории Эйлера - Бернулли рассмотрим уравнение изгиба балки

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = -q(x) \quad (1.1.1)$$

где $D = EJ_x$ - жесткость балки на изгиб, E - модуль Юнга материала балки, J_x - момент инерции поперечного сечения. Заметим, что уравнением (1.1.1) описывается также цилиндрический изгиб бесконечной пластинки, тогда $D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$, $2h$ - толщина пластинки, ν - коэффициент Пуассона. Уравнение (1.1.1) будем рассматривать именно в таком контексте, чтобы иметь возможность проведения сравнительного анализа с результатами для прямоугольных пластин, которые будут получены ниже.

Целью исследования является определение интервала точек, в которых балка, при различных условиях опирания на концах, может иметь максимальный прогиб. Поставленный вопрос будет правомочен, если каждый из концов балки либо шарнирно оперт, либо жестко защемлен.

Путем последовательного интегрирования уравнения (1.1.1) нетрудно получить общее представление прогиба $w(x)$. Оно имеет вид:

$$Dw(x) = \frac{1}{6} \int_0^x (s-x)^3 q(s) ds + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (1.1.2)$$

Постоянные интегрирования C_i ($i = \overline{1,4}$) определяются из условий на концах балки.

Параллельно рассмотрим три возможных случая: а) шарнир-шарнир, б) защемление-шарнир, в) защемление-защемление (Рис. 1.1.1.).

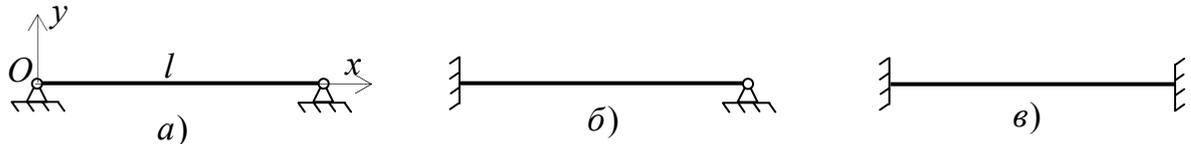


Рис. 1.1.1 Схематическое представление условий опирания балки

Случай а). Отметим, что полученные для этого случая результаты имеются и в работе [45], однако, для сохранения цельности изложения, приведем их заново.

Имеем граничные условия

$$w = 0; \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = l, \quad (1.1.3)$$

после удовлетворения которым найдем:

$$w(x) = \frac{1}{6D} \int_0^x (s-x)^3 q(s) ds + \frac{1}{6Dl} \int_0^l x(l-s)(x^2 - 2ls + s^2) q(s) ds \quad (1.1.4)$$

Полагая, что на балку приложена сосредоточенная сила $q(x) = q_0 \delta(x - \zeta)$, будем иметь

$$6Dw(x) = q_0 (\zeta - x)^3 H(x - \zeta) + \frac{q_0}{l} x(l - \zeta)(x^2 - 2l\zeta + \zeta^2) \quad (1.1.5)$$

Продифференцировав последнее по x и приравняв к нулю, получим уравнение для определения точки максимального прогиба балки

$$-3(\zeta - x)^2 H(x - \zeta) + \frac{1}{l}(l - \zeta)(3x^2 - 2l\zeta + \zeta^2) = 0 \quad (1.1.6)$$

Очевидно, что наибольший прогиб под действием силы q_0 имеет место в случае, когда сила приложена в середине, и равен

$$w_{\max} = -\frac{1}{48} \frac{q_0 l^3}{D} \quad (1.1.7)$$

Из уравнения (1.1.6) нетрудно найти, что максимальный прогиб балки будет иметь место в точке

$$x = \begin{cases} l - \sqrt{(l^2 - \zeta^2)}/3 & \text{при } \zeta < l/2 \\ \sqrt{(2l\zeta - \zeta^2)}/3 & \text{при } \zeta > l/2 \end{cases}$$

При стремлении $\zeta \rightarrow l$ найденная точка максимального прогиба стремится к значению $x_{\max} = l/\sqrt{3}$. Такое же значение для точки максимального прогиба было получено при приложении на конце балке момента [21], который является предельным случаем рассматриваемой здесь задачи, когда $\zeta \rightarrow l$ при условии постоянства произведения $q_0(\zeta)(l - \zeta)$.

Таким образом, где бы не была приложена сосредоточенная сила, максимальный прогиб балки имеет место в средней части балки, занимающей интервал

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)l \approx 0.42265l < x < \frac{\sqrt{3}}{3}l \approx 0.57735l \quad (1.1.8)$$

При этом нетрудно убедиться, что наибольший прогиб балки максимально может превосходить прогиб в средней точке на чуть более 2.5%.

Естественно ожидать, что и при любой распределенной, очевидно знакопостоянной, нагрузке, точка максимального прогиба балки будет находиться в этом же интервале.

На Рис.1.1.2 схематически приведены формы балки под действием указанных на рисунке сосредоточенных сил, приложенных в точках $\zeta/l = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 0.95$. Величины сосредоточенных сил выбраны так, чтобы во всех случаях максимальный прогиб был бы одинаковым. Из рисунка видно, что для сил, приложенных близко к концу, формы искривленной балки практически не отличаются друг от друга.

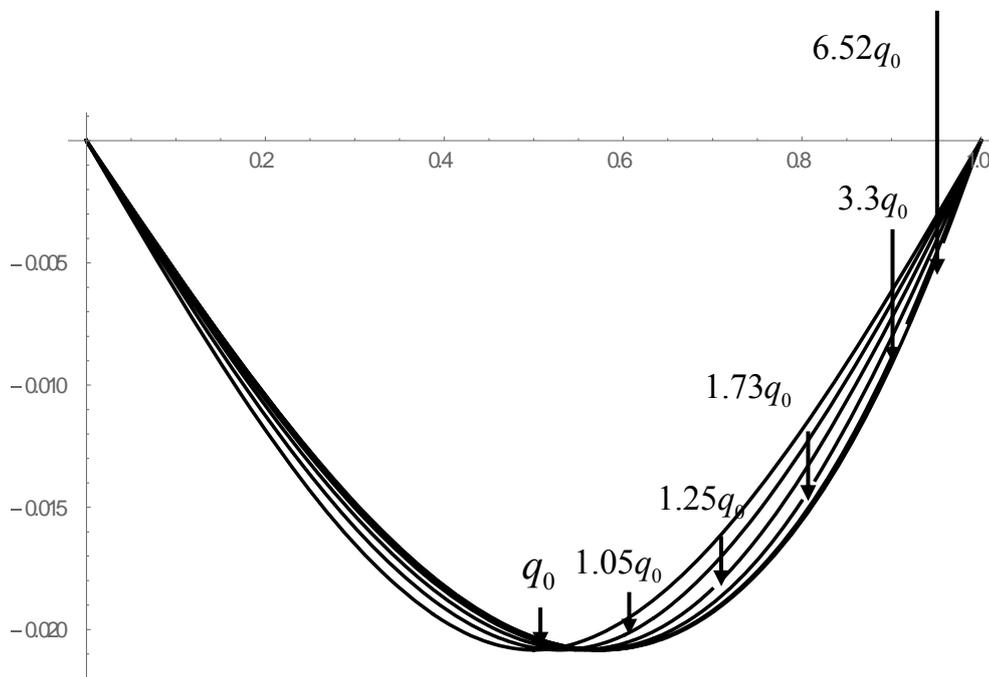


Рис. 1.1.2 Шарнир-шарнир

Случай б). Полагая, что защемленным является левый конец балки, будем иметь граничные условия:

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (1.1.9)$$

$$w = 0; \quad \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x = l \quad (1.1.10)$$

Тогда прогиб определится формулой

$$w(x) = \frac{1}{6D} \int_0^x (s-x)^3 q(s) ds + \frac{x^2}{4Dl^2} \int_0^l \left\{ lx - 2ls + s^2 - \frac{x(l-s)^2}{3l} \right\} (l-s) q(s) ds$$

Полагая, как и в предыдущем случае, $q(x) = q_0 \delta(x - \zeta)$ найдем, что в этом случае точкой максимального прогиба является

$$x = \begin{cases} \left[1 - \sqrt{\frac{l-\zeta}{3l-\zeta}} \right] l & \text{при } \zeta < (2 - \sqrt{2})l \\ \frac{2l\zeta(2l-\zeta)}{2l^2 + 2l\zeta - \zeta^2} & \text{при } \zeta \geq (2 - \sqrt{2})l \end{cases}$$

При этом наибольший прогиб под действием силы q_0 имеет место в случае, когда сила приложена в точке $\zeta = (2 - \sqrt{2})l$, и равен

$$w_{\max} = \frac{q_0 l^3}{D} \left[-5 \frac{2}{3} + 4\sqrt{2} \right] \quad (1.1.11)$$

Сравнив значения (1.1.7) и (1.1.11), замечаем, что защемление одного конца балки приводит к более чем двухкратному уменьшению наибольшего прогиба балки.

Интервалом, в котором может находиться точка максимального прогиба в этом случае, будет

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) l < x < \frac{2}{3} l \quad 0.42265 < \frac{x}{l} < 0.6666667$$

В этом случае, разница между наибольшим прогибом балки и прогибом в точке $\zeta = (2 - \sqrt{2})l$, соответствующей наибольшему прогибу (1.1.11), может достигнуть почти 11%, если сосредоточенная сила приближается к защемленному концу, и 4%, если сосредоточенная сила приближается к шарнирно опертому концу.

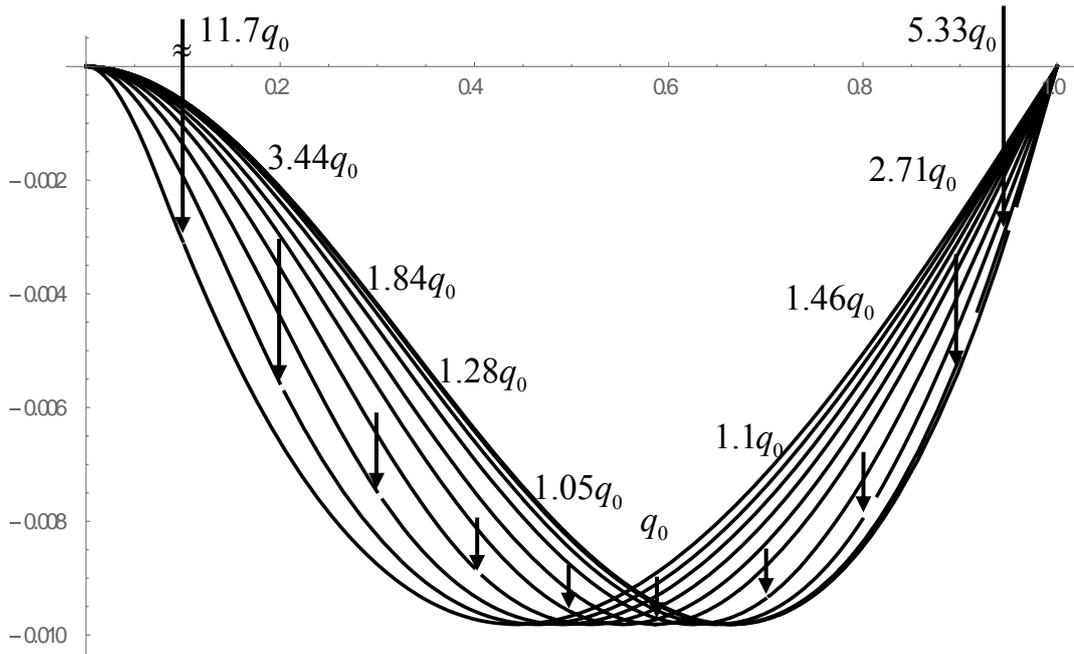


Рис. 1.1.3 Защемление - шарнир

На Рис.1.1.3 схематически приведены формы балки под действием указанных на рисунке сосредоточенных сил, приложенных в точках $\zeta/l=0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; (2-\sqrt{2}); 0.7; 0.8; 0.9; 0.95$. Величины сосредоточенных сил, как и выше, выбраны так, чтобы во всех случаях максимальный прогиб был бы одинаковым.

Случай в). Граничные условия будут:

$$w = 0; \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l, \quad (1.1.12)$$

прогиб -

$$w(x) = \frac{1}{6D} \int_0^x (s-x)^3 q(s) ds + \frac{x^2}{6Dl^3} \int_0^l (l-s)^2 [x(l+2s) - 3ls] q(s) ds \quad (1.1.13)$$

Полагая, как и ранее, $q(x) = q_0 \delta(x - \zeta)$ найдем, что в этом случае точкой максимального прогиба является

$$x = \begin{cases} l^2/(3l - 2\zeta) & \text{при } \zeta \leq l/2 \\ 2\zeta l/(l + 2\zeta) & \text{при } \zeta > l/2 \end{cases}$$

Ввиду симметрии, как и в первом случае, наибольший прогиб под действием силы q_0 имеет место в случае, когда сила приложена в середине, и равен

$$w_{\max} = -\frac{1}{192} \frac{q_0 l^3}{D} \quad (1.1.14)$$

Сравнив значения (1.1.7) и (1.1.14), замечаем, что защемление обоих концов балки приводит к четырехкратному уменьшению наибольшего прогиба балки.

В этом случае максимальный прогиб может иметь место в интервале:

$$\frac{1}{3}l < x < \frac{2}{3}l$$

а разность между наибольшим прогибом балки и прогибом в средней точке может достигнуть 15.6%.

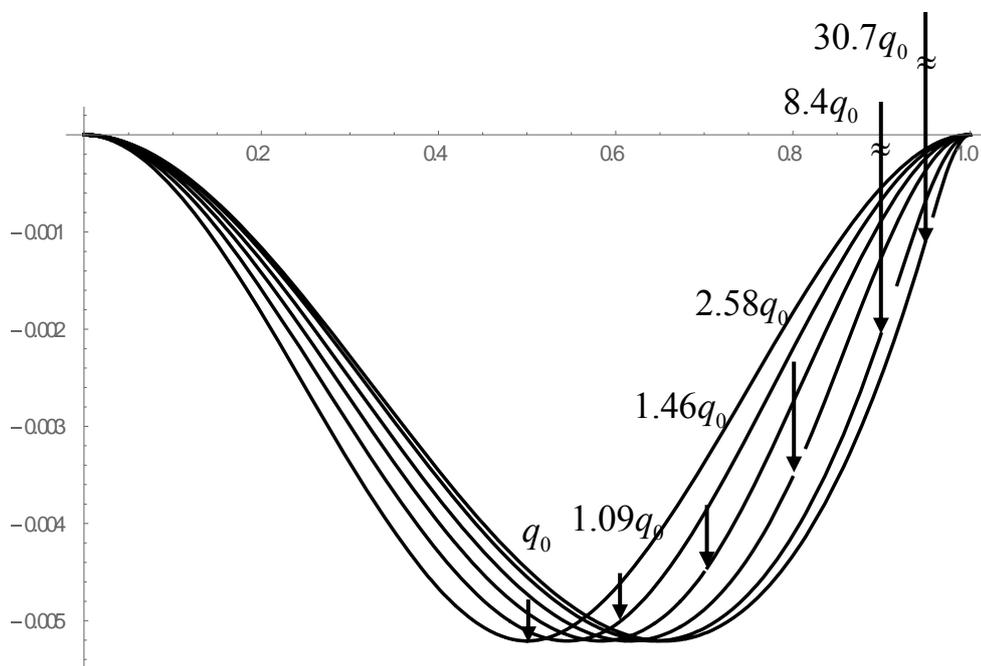


Рис. 1.1.4 Защемление - защемление

На Рис.1.1.4 схематически приведены формы балки под действием указанных на рисунке сосредоточенных сил, приложенных в точках $\zeta/l=0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 0.95$. Как и выше, величины сосредоточенных сил выбраны так, чтобы во всех случаях максимальный прогиб был бы одинаковым.

Исследуя изгиб балки под действием сосредоточенной силы, приложенной в разных точках, уместно вспомнить о такой своеобразной точке как точка золотого сечения и найти точки максимального прогиба, когда сила приложена в этой точке и, наоборот, найти те точки, куда надо приложить силу, чтобы максимальный прогиб имел место в точке золотого сечения.

Пусть сила приложена в точке золотого сечения $\frac{\zeta}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180\dots$

Тогда максимальный прогиб будет в следующих точках:

Случай а.
$$\frac{x_{\max}}{l} = \sqrt{\frac{3\sqrt{5}-5}{6}} = 0.5335\dots$$

Случай б.
$$\frac{x_{\max}}{l} = \frac{2(10-3\sqrt{5})}{11} = 0.5985\dots$$

Случай в.
$$\frac{x_{\max}}{l} = \frac{5-\sqrt{5}}{5} = 0.5527\dots$$

Теперь найдем такую точку приложения силы, чтобы максимальный прогиб имел место в точке золотого сечения $\frac{x_{\max}}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180\dots$

Случай а. нет

Случай б.
$$\frac{\zeta}{l} = \frac{5-\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} = 0.6750\dots$$

Случай в.
$$\frac{\zeta}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2(3-\sqrt{5})} = 0.8090\dots$$

Поставим такой вопрос – можно ли в случаях а) и в) асимметрию изогнутой оси балки, вызванную сосредоточенной силой, приложенной вне центра балки, свести к минимуму посредством приложения подчиняющейся определенной закономерности системы сосредоточенных сил меньшей интенсивности.

Пусть, для определенности, сосредоточенная сила P приложена в $\zeta = pl$ ($0.5 < p < 1$). Предположим, что в точках $\zeta_k = p^k l$ ($k = 2, 3, \dots$), составляющих геометрическую прогрессию со знаменателем p приложены силы $P_k = a^{k-1} P$ ($0 < a < 1, k = 2, 3, \dots$), также составляющие убывающую геометрическую прогрессию.

Прогиб балки от такой нагрузки, например для случая а), определится формулой

$$6Dw(x) = P \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1} \left[(\zeta_k - x)^3 H(x - \zeta_k) + \frac{x}{l} (l - \zeta_k) (x^2 - 2l\zeta_k + \zeta_k^2) \right]$$

Из условия нахождения наибольшего прогиба в средней точке получим уравнение для определения знаменателя a :

$$\frac{p}{4(1-ap)} - \frac{p^3}{1-ap^3} + 3 \sum_{i=1}^m a^{i-1} \left(p^k - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$$

Здесь $m = [\ln 0.5 / \ln p]$ - целая часть отношения в скобках.

В частности, если сила приложена в золотом сечении, т.е. $p = 0.6180\dots$, то $a = 0.5172\dots$. Отметим также другой интересный случай, когда сумма дополнительно приложенных сил равна величине заданной силы P . Это имеет место только при $p = 0.6087\dots$ и $a = 0.5$.

На Рис. 1.1.5 представлены изогнутые оси балки под действием силы P , приложенной в точке $\zeta = 0.8l$ ($p = 0.8$), (пунктир) и под действием системы сил $P_k = a^{k-1} P$ ($a = 0.7891\dots, k = 1, 2, \dots$) (сплошная линия).

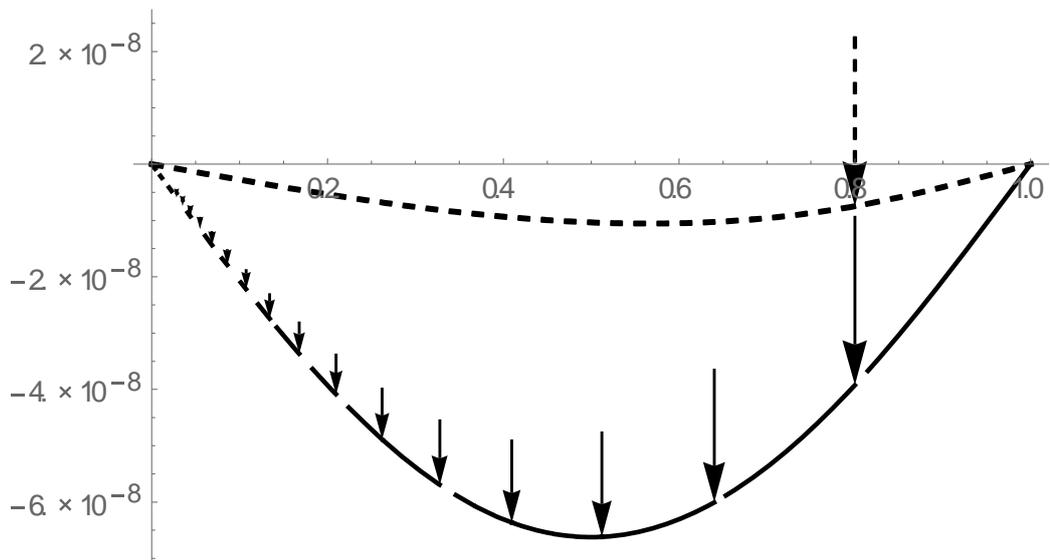


Рис. 1.1.5. Изогнутая ось балки

Наибольший прогиб под действием системы сил балка приобретает точно в средней точке, однако изогнутая ось не становится идеально симметричной относительно середины балки. При этом отклонение от симметрии является наибольшим у концов балки и в данном случае достигает всего 0.67%. Следует заметить, что величина отклонения от симметрии существенно зависит от точки приложения силы P , т.е. от точки $\zeta = pl$, и принимает максимальное значение около 3.5% при значении p около 0.57. При $p \rightarrow 1$ изогнутая ось балки становится симметричной, поскольку и $a \rightarrow 1$, т.е. бесконечная система сил стремится к равномерно распределенной нагрузке.

Аналогичный анализ для закрепленной по обоим концам балки показал, что при наибольшем прогибе в середине балки отклонение от симметрии в этом случае намного больше и достигает почти 20%, причем опять при значении p около 0.57.

Отметим, что прогиб балки под действием бесконечной системы сил изменяется в пределах, соответствующих прогибу от сосредоточенной силы P , приложенной в середине балки, и прогибу от равномерно распределенной нагрузки интенсивности P .

Сравнение полученных для шарнирно-опертой и жестко закрепленной балок результатов показало, что при действии одной и той же силы наибольший прогиб в первом случае в четыре раза превышает прогиб во втором случае. Но несмотря на это, область, в которой этот прогиб возможен, чуть более чем в два раза меньше и занимает около 15.5% длины балки. Знание этой области может помочь в вопросе эффективного подпирания балки при действии на нее нагрузки, имеющей сильно выраженную несимметричность относительно середины балки.

§ 1.2 Устойчивость сжатого стержня при различных граничных условиях и наличии промежуточной опоры шарнирного типа

Постановка задачи. Пусть стержень постоянного поперечного сечения, закрепленный на одном конце, сжимается центральной силой P . Предполагается возможность установки точечной опоры шарнирного типа, ограничивающей поперечное смещение стержня в этой точке (Рис. 1.2.1).

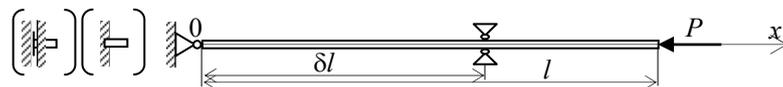


Рис.1.2.1 Схематическое представление задачи

При заданной длине стержня l требуется определить местоположение опоры, т.е. найти множитель $0 < \delta < 1$, при котором критическая нагрузка, приводящая к потере устойчивости, будет наибольшей.

Уравнение устойчивости для каждой из частей стержня имеет вид [24]

$$\frac{d^4 w_i(x)}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 w_i(x)}{dx^2} = 0, \quad \alpha^2 = \frac{P}{EJ} \quad (1.2.1)$$

где $w(x)$ – поперечное перемещение (прогиб), при $i = 1$ на отрезке $0 \leq x \leq \delta l$, а при $i = 2$ на отрезке $\delta l \leq x \leq l$, P – сжимающая нагрузка, E – модуль

упругости материала стержня, J - момент инерции поперечного сечения относительно оси Ox .

Общее решение уравнения (1.2.1), очевидно, имеет вид

$$w_i = A_i + B_i x + C_i \sin \alpha x + D_i \cos \alpha x \quad (i = 1, 2) \quad (1.2.2)$$

Предполагается, что на опоре, т.е. в точке раздела $x = \delta l$ частей стержня, выполняются условия:

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx}, \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{d^2 w_2}{dx^2} \quad (x = \delta l) \quad (1.2.3)$$

Удовлетворяя последним двум из условий (1.2.3) и условию $w_1 = w_2$, будем иметь

$$w_1 = A_1 + B_1 x + C_1 \sin \alpha x + D_1 \cos \alpha x$$

$$w_2(x) = w_1(x) + (B_2 - B_1) \left[x - \delta l - \frac{\sin \alpha (x - \delta l)}{\alpha} \right] \quad (1.2.4)$$

Конец $x = l$ полагается свободным в отношении перемещений и подвергается действию лишь осевой нагрузки, следовательно, на этом конце будем иметь условия на изгибающий момент и перерезывающую силу:

$$\frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3 w_2}{dx^3} + \kappa \frac{dw_2}{dx} = 0 \quad (x = l) \quad (1.2.5)$$

При этом при $\kappa = \alpha^2$ имеет место случай консервативной нагрузки, а при $\kappa = 0$ - следящей нагрузки.

Удовлетворив вторым из представлений (1.2.4) условиям (1.2.5), найдем

$$C_1 = \frac{1}{\alpha(\alpha^2 - \kappa)} \left[B_2 \kappa \cos \alpha l + (B_2 - B_1)(\alpha^2 - \kappa) \cos \alpha \delta l \right]$$

$$D_1 = -\frac{1}{\alpha(\alpha^2 - \kappa)} \left[B_2 \kappa \sin \alpha l + (B_2 - B_1)(\alpha^2 - \kappa) \sin \alpha \delta l \right]$$

Далее, из первого условия в (1.2.3) найдем также

$$A_1 = -B_1 \delta l - \frac{B_2 \kappa \sin \alpha (1 - \delta) l}{\alpha (\alpha^2 - \kappa)}$$

В итоге, для прогиба $w_1(x)$ левой части стержня будем иметь:

$$w_1(x) = B_1(x - \delta l) + \frac{1}{\alpha}(B_2 - B_1)\sin \alpha(x - l\delta) - B_2 \kappa \frac{\sin \alpha(l - x) - \sin \alpha l(1 - \delta)}{\alpha(\alpha^2 - \kappa)} \quad (1.2.6)$$

Таким образом получено выражение для левой части стержня, которое, вместе со вторым выражением в (1.2.4), удовлетворяет условиям как на свободном конце стержня (1.2.5), так и на опоре шарнирного типа (1.2.3). Произвольные постоянные B_1 и B_2 определяются из условий закрепления конца стержня, т.е. из граничных условий на $x = 0$.

Раздельно рассмотрим каждый из случаев закрепления конца стержня, учитывая при этом характер сжимающей силы.

Шарнирное закрепление. Удовлетворяя условиям шарнирного закрепления конца $x = 0$

$$w_1 = 0, \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0 \quad (x = 0) \quad (1.2.7)$$

получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$B_1(\alpha^2 - \kappa)(\sin \alpha \delta l - \alpha \delta l) - B_2 \left[(\alpha^2 - \kappa) \sin \alpha \delta l + \kappa \sin \alpha l - \kappa \sin \alpha l (1 - \delta) \right] = 0 \quad (1.2.8)$$

$$(\alpha^2 - \kappa) B_1 \alpha \sin \alpha \delta l + B_2 \left[\kappa \alpha \sin \alpha l - (\alpha^2 - \kappa) \alpha \sin \alpha \delta l \right] = 0$$

Приравняв детерминант матрицы полученной системы к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение для определения критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости, в зависимости от местоположения опоры

$$\kappa \left[\sin \alpha \delta l \sin \alpha (1 - \delta) l - \alpha \delta l \sin \alpha l \right] + (\alpha^2 - \kappa) \alpha \delta l \sin \alpha \delta l = 0 \quad (1.2.9)$$

В случае консервативной нагрузки ($\kappa = \alpha^2$) уравнение (1.2.9) примет вид:

$$\alpha \delta l \sin \alpha l - \sin \alpha \delta l \sin \alpha (1 - \delta) l = 0, \quad (1.2.10)$$

а в случае следящей нагрузки ($\kappa = 0$) - вид:

$$\sin \alpha \delta l = 0 \quad (1.2.11)$$

Жесткое защемление. В этом случае у конца $x = 0$ будем иметь условия

$$w_1 = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0 \quad (x = 0) \quad (1.2.12)$$

Удовлетворяя представлением (1.2.6) условиям (1.2.12), получим следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$B_1 (\alpha^2 - \kappa) (\sin \alpha \delta l - \alpha \delta l) - \\ - B_2 \left((\alpha^2 - \kappa) \sin \alpha \delta l + \kappa \sin \alpha l - \kappa \sin \alpha (1 - \delta) l \right) = 0 \quad (1.2.13)$$

$$B_1 (\alpha^2 - \kappa) (1 - \cos \alpha \delta l) + B_2 \left((\alpha^2 - \kappa) \cos \alpha \delta l + \kappa \cos \alpha l \right) = 0$$

Приравняв детерминант матрицы последней системы к нулю, придем к следующему трансцендентному уравнению:

$$\kappa \left[2\alpha \delta l \cos \alpha l - 3 \sin \alpha l - \sin \alpha (1 - 2\delta) l - 4 \cos \alpha l \sin \alpha \delta l \right] - \\ - 2(\alpha^2 - \kappa) (\sin \alpha \delta l - \alpha \delta l \cos \alpha \delta l) = 0$$

которое в случае консервативной нагрузки ($\kappa = \alpha^2$) примет вид:

$$-2\alpha \delta l \cos \alpha l + 3 \sin \alpha l + \sin \alpha (1 - 2\delta) l - 4 \sin \alpha (1 - \delta) l = 0, \quad (1.2.14)$$

а в случае следящей нагрузки ($\kappa = 0$) - вид:

$$\alpha \delta l \cos \alpha \delta l - \sin \alpha \delta l = 0 \quad (1.2.15)$$

Скользкая заделка. Для скользящей в перпендикулярном направлении заделки граничными условиями являются

$$\frac{d^3 w_1}{dx^3} = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0 \quad (x = 0) \quad (1.2.16)$$

Удовлетворяя последним, будем иметь следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} B_1(1 - \cos \alpha \delta l)(\alpha^2 - \kappa) + B_2(\kappa \cos \alpha l + (\alpha^2 - \kappa) \cos \alpha \delta l) &= 0 \\ B_1 \cos \alpha \delta l(\alpha^2 - \kappa) - B_2(\kappa \cos \alpha l + (\alpha^2 - \kappa) \cos \alpha \delta l) &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Приравняв к нулю определитель матрицы полученной однородной системы, придем к тригонометрическому уравнению

$$(\alpha^2 - \kappa) \cos \alpha \delta l + \kappa \cos \alpha l = 0. \quad (1.2.18)$$

Когда $\kappa = 0$ (следящая нагрузка), критическая нагрузка определяется из уравнения

$$\cos \alpha \delta l = 0 \quad (1.2.19)$$

Когда $\kappa = \alpha^2$ (консервативная нагрузка) критическая нагрузка определяется из уравнения

$$\cos \alpha l = 0 \quad (1.2.20)$$

Численный анализ. Учитывая обозначение в (1.2.1), численный анализ и выводы будут делаться относительно параметра α , используя при этом выражение «критическая нагрузка».

Рассмотрим крайние положения опоры. Пусть опора вплотную подходит к закрепленному концу стержня ($\delta \rightarrow 0$). Несмотря на то, что имеем опору шарнирного типа, наличие закрепления за ней, причем независимо какого типа, приводит к ситуации жесткого закрепления и, следовательно, мы должны прийти к задаче устойчивости стержня с жестко закрепленным концом, критическая консервативная нагрузка для которой известна [24] и равна

$$\alpha = \frac{\pi}{2l} \quad (1.2.21)$$

Действительно, рассмотрим уравнение (1.2.10). Прямая подстановка $\delta = 0$, результата не дает, следовательно, воспользуемся разложением $\sin \alpha \delta l$ и $\cos \alpha \delta l$ в окрестности нуля и заменим их первыми членами. Уравнение (1.2.10) примет вид

$$\alpha \delta l \sin \alpha l - \alpha \delta l (\sin \alpha l - \alpha \delta l \cos \alpha l) = 0,$$

откуда, после простейших преобразований, приходим к уравнению

$$\cos \alpha l = 0 \quad (1.2.22)$$

Совершенно аналогично подходу к уравнению (1.2.14), замечаем, что в этом случае одного члена разложения недостаточно, поскольку уравнение вырождается в нулевое тождество. Взяв и вторые члены разложения, уравнение (1.2.14) примет вид

$$\begin{aligned} & -2\alpha \delta l \cos \alpha l + 3 \sin \alpha l + \sin \alpha l - 2\alpha \delta l \cos \alpha l - 4 \sin \alpha l + 4\alpha \delta l \cos \alpha l - \\ & -4 \sin \alpha l \frac{(\alpha \delta l)^2}{2} + 8 \frac{(\alpha \delta l)^3}{6} \cos \alpha l + 4 \sin \alpha l \frac{(\alpha \delta l)^2}{2} - \frac{(\alpha \delta l)^3}{6} \cos \alpha l = 0 \end{aligned}$$

и, очевидным образом, перейдет в уравнение (1.2.22).

Уравнение (1.2.19), полученное для случая скользящей заделки, также переходит в уравнение (1.2.22), решением которого является (1.2.21).

Для следящей нагрузки уравнения (1.2.11), (1.2.15) и (1.2.20) решений не имеют, т.е. под действием следящей силы стержень устойчивость не теряет.

Пусть теперь опора вплотную подходит к свободному концу стержня ($\delta \rightarrow 1$). Очевидно, что в этом случае понятия консервативной силы и следящей силы совпадают и задача сводится к задаче об устойчивости стержня, один конец которого шарнирно оперт, а на другом конце заданы различные условия закрепления.

Непосредственной подстановкой $\delta = 1$ в соответствующие уравнения, находим, что уравнения (1.2.10) и (1.2.11) переходят в уравнение $\sin \alpha l = 0$, решением которого является

$$\alpha = \frac{\pi}{l}, \quad (1.2.23)$$

совпадающее с известным [24] результатом для шарнирно опертого по концам стержня.

Из уравнений (1.2.14) и (1.2.15) получим уравнение

$$\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l = 0, \quad (1.2.24)$$

решением которого является

$$\alpha = \frac{4.493409457\dots}{l} \approx \frac{\pi}{0.7l}, \quad (1.2.25)$$

совпадающее с известным [24] результатом для стержня, жестко закрепленного на одном конце и шарнирно опертого на другом.

Уравнения (1.2.19) и (1.2.20) переходят в уравнение $\cos \alpha l = 0$, решением которого является

$$\alpha = \frac{\pi}{2l} \quad (1.2.26)$$

При промежуточных расположениях опоры зависимости критической консервативной нагрузки от расположения опоры графически представлены на рис.1.2.2. Кривая 1 соответствует случаю шарнирного опирания левого конца, кривая 2 – жесткого защемления, кривая 3 – скользящей заделки.

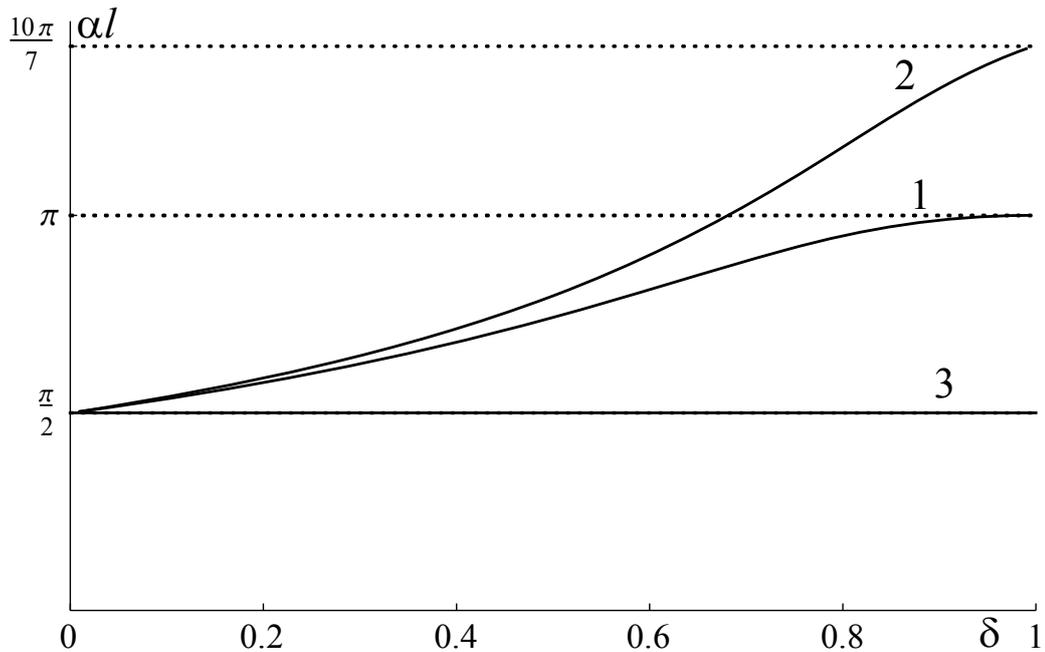


Рис. 1.2.2 Кривые зависимости критической нагрузки от местоположения опоры при разных условиях закрепления конца стержня

Интересным представляется случай со скользяще заделанным концом, когда наличие промежуточной опоры никак не сказывается на величине критической сжимающей силы. Это объясняется тем, что скользящая заделка, в отличие от жесткой заделки, позволяет свободное смещение левого конца в вертикальном направлении. Этим и компенсируется наличие опоры, сводя ситуацию к сдвигу точки отсчета в задаче устойчивости центрально сжатого стержня с жестко закрепленным концом.

Для следящей нагрузки зависимости критической нагрузки от расположения опоры представляются аналитически:

$$\alpha l = \frac{\pi}{\delta} \quad \text{— для шарнирно закрепленного конца}$$

$$\alpha l = 4.49\dots \approx \frac{\pi}{0.7\delta} \quad \text{— для защемленного конца}$$

$$\alpha l = \frac{\pi}{2\delta} \quad \text{— для скользящего конца.}$$

Очевидно, что в последних формулах, уменьшение δ ограничивается условием прочности стержня

$$\sigma = \frac{P}{S} < [\sigma]$$

где S - площадь поперечного сечения, $[\sigma]$ - допускаемое напряжение на сжатие. Следовательно, при действии следящей нагрузки наличие опоры начинает сказываться на величине критической силы только лишь с некоторого расстояния от закрепленного конца.

Таким образом, исследование влияния промежуточной точечной опоры шарнирного типа на величину критического усилия, вызывающего потерю устойчивости центрально сжатого упругого стержня, при различных условиях закрепления одного его конца, показало, что при расположении опоры близко к свободному концу стержня даже при следящей нагрузке возможна потеря устойчивости, причем величина критической следящей нагрузки всегда превосходит критическую консервативную нагрузку. Показано также, что при любом местоположении опоры критическая консервативная нагрузка для стержня с защемленным концом превосходит подобное значение для стержня с шарнирно закрепленным концом, а последнее превосходит значение для стержня со скользяще заделанным концом.

§ 1.3 Устойчивость сжатого стержня при различных граничных условиях и наличии промежуточной опоры типа жесткой муфты

Постановка задачи. Пусть стержень постоянного поперечного сечения, закрепленный на одном конце, сжимается центральной силой P . Предполагается возможность установки точечной опоры типа жесткой муфты, ограничивающей поперечное смещение и поворот стержня в этой точке (Рис. 1.3.1).

При заданной длине стержня l требуется определить местоположение опоры, т.е. найти множитель $0 < \delta < 1$, при котором критическая нагрузка, приводящая к потере устойчивости, будет наибольшей.

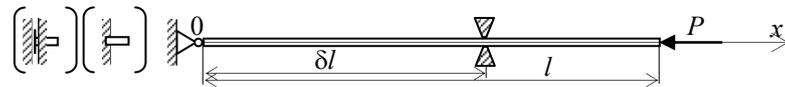


Рис.1.3.1 Схематическое представление задачи

Уравнение устойчивости для каждой из частей стержня, как и в предыдущем параграфе, имеет вид (1.2.1), а общее решение этого уравнения дается формулой (1.2.2)

$$w_i = A_i + B_i x + C_i \sin \alpha x + D_i \cos \alpha x \quad (i = 1, 2)$$

На опоре типа муфты, т.е. в точке раздела $x = \delta l$ частей стержня, выполняются условия:

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0, \quad \frac{dw_2}{dx} = 0 \quad (x = \delta l) \quad (1.3.1)$$

Структура граничных условий (1.3.1) явным образом указывают на то, что решения для обеих частей стержня разделяются друг от друга и единственным связующим их звеном является общая длина стержня.

Таким образом, для левой части стержня имеем решение

$$w_1 = A_1 + B_1 x + C_1 \sin \alpha x + D_1 \cos \alpha x, \quad (1.3.2)$$

удовлетворяющее условиям

$$w_1 = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \delta l \quad (1.3.3)$$

и различным условиям закрепления при $x = 0$, которые рассмотрим далее.

Для правой части стержня имеем

$$w_2 = A_2 + B_2 x + C_2 \sin \alpha x + D_2 \cos \alpha x \quad (1.3.4)$$

и граничные условия

$$w_2 = 0, \quad \frac{dw_2}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = \delta l \quad (1.3.5)$$

$$\frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3 w_2}{dx^3} + \kappa \frac{dw_2}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad (1.3.6)$$

Напомним, что при $\kappa = \alpha^2$ имеет место случай приложения к свободному концу консервативной нагрузки, а при $\kappa = 0$ - следящей нагрузки.

Удовлетворяя представлением решения (1.3.4) граничным условиям (1.3.5) и (1.3.6), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_2 + B_2 \delta l + C_2 \sin \alpha \delta l + D_2 \cos \alpha \delta l &= 0 \\ B_2 + \alpha C_2 \cos \alpha \delta l - \alpha D_2 \sin \alpha \delta l &= 0 \\ B_2 \kappa - \alpha (\alpha^2 - \kappa) (C_2 \cos \alpha l - D_2 \sin \alpha l) &= 0 \\ -\alpha^2 (C_2 \sin \alpha l + D_2 \cos \alpha l) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

для существования нетривиального решения которой необходимо обеспечить равенство нулю детерминанта матрицы. Это условие и приводит к уравнению для определения критической силы

$$(\alpha^2 - \kappa) + \kappa \cos \alpha (1 - \delta) l = 0 \quad (1.3.8)$$

В случае консервативной нагрузки ($\kappa = \alpha^2$) это уравнение сводится к уравнению

$$\cos \alpha (1 - \delta) l = 0, \quad (1.3.9)$$

решением которого является

$$\alpha l = \frac{\pi}{2(1 - \delta)} \quad (1.3.10)$$

В случае же следящей нагрузки ($\kappa = 0$) имеем

$$\alpha^2 = 0. \quad (1.3.11)$$

Учитывая то обстоятельство, что для левой части стержня нет понятия «консервативная» или «следящая» сила, а также уравнение (1.3.11) для правой

части, можно сделать вывод, что в случае следящей нагрузки стержень не теряет устойчивость независимо от месторасположения опоры типа муфты.

Перейдем к рассмотрению вопроса устойчивости левой части стержня при различных видах закрепления левого конца стержня.

Шарнирное закрепление. Удовлетворяя условиям шарнирного закрепления конца $x = 0$

$$w_1 = 0, \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0 \quad (x = 0)$$

и условиям на опоре (1.3.3) получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_1 + D_1 &= 0 \\ -\alpha^2 D_1 &= 0 \\ A_1 + B_1 \delta l + C_1 \sin \alpha \delta l + D_1 \cos \alpha \delta l &= 0 \\ B_1 + \alpha C_1 \cos \alpha \delta l + \alpha D_1 \sin \alpha \delta l &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Приравняв детерминант матрицы полученной системы к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение для определения критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости левой части стержня

$$\alpha \delta l \cos \alpha \delta l - \sin \alpha \delta l = 0 \quad (1.3.13)$$

Решение последнего уравнения, практически не отличающегося от уравнения (1.2.24), записывается в виде

$$\alpha l = \frac{4.493409457\dots}{\delta} \approx \frac{\pi}{0.7\delta} \quad (1.3.14)$$

Приравняв значения (1.3.10) и (1.3.14), найдем то значение δ , при котором обе части стержня теряют устойчивость одновременно,

$$\frac{\pi}{2(1-\delta)} \approx \frac{\pi}{0.7\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta \approx 0.74$$

При значениях δ , меньших указанного значения, устойчивость теряет правая часть стержня и критическая сила определяется из равенства

$\alpha l = \frac{\pi}{2(1-\delta)}$, а при больших значениях устойчивость теряет левая часть и

критическая сила определяется из равенства $\alpha l \approx \frac{\pi}{0.7\delta}$. Таким образом, имеем

$$\alpha l = \begin{cases} \frac{\pi}{2(1-\delta)} & (\delta \leq 0.74) \\ \frac{\pi}{0.7\delta} & (\delta > 0.74) \end{cases} \quad (1.3.15)$$

Жесткое защемление. В этом случае у конца $x = 0$ будем иметь условия (1.2.12)

$$w_1 = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0 \quad (x = 0).$$

Удовлетворяя им и условиям на опоре (1.3.3), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_1 + D_1 &= 0 \\ B_1 + \alpha C_1 &= 0 \\ A_1 + B_1 \delta l + C_1 \sin \alpha \delta l + D_1 \cos \alpha \delta l &= 0 \\ B_1 + \alpha C_1 \cos \alpha \delta l + \alpha D_1 \sin \alpha \delta l &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Приравняв детерминант матрицы последней системы к нулю, придем к следующему трансцендентному уравнению:

$$2 \cos \alpha \delta l + \alpha \delta l \sin \alpha \delta l - 2 = 0 \quad (1.3.17)$$

При помощи элементарных преобразований последнее уравнение сводится к совокупности уравнений

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha \delta l}{2} &= 0 \\ \frac{\alpha \delta l}{2} \cos \frac{\alpha \delta l}{2} - \sin \frac{\alpha \delta l}{2} &= 0 \end{aligned}$$

решениями которых являются $\frac{\alpha\delta l}{2} = \pi$ и $\frac{\alpha\delta l}{2} \approx \frac{\pi}{0.7}$. Выбрав меньшее значение, для определения критической силы, приводящей к потере устойчивости левой части стержня, будем иметь

$$\alpha l = \frac{2\pi}{\delta} \quad (1.3.18)$$

И в этом случае приравняв значения (1.3.10) и (1.3.18), найдем то значение δ , при котором обе части стержня теряют устойчивость одновременно,

$$\frac{\pi}{2(1-\delta)} = \frac{2\pi}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta = 0.8 \quad (1.3.19)$$

Следовательно,

$$\alpha l = \begin{cases} \frac{\pi}{2(1-\delta)} & (\delta \leq 0.8) \\ \frac{2\pi}{\delta} & (\delta > 0.8) \end{cases} \quad (1.3.20)$$

Скользящая заделка. Для скользящей в перпендикулярном направлении заделки граничными условиями являются условия (1.2.16)

$$\frac{d^3 w_1}{dx^3} = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0 \quad (x = 0)$$

Удовлетворяя последним и условиям (1.3.3) на опоре, получим следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} B_1 + \alpha C_1 &= 0 \\ -\alpha^3 C_1 &= 0 \\ A_1 + B_1 \delta l + C_1 \sin \alpha \delta l + D_1 \cos \alpha \delta l &= 0 \\ B_1 + \alpha C_1 \cos \alpha \delta l + \alpha D_1 \sin \alpha \delta l &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Приравняв к нулю определитель матрицы полученной однородной системы, придем к тригонометрическому уравнению

$$\sin \alpha \delta l = 0. \quad (1.3.22)$$

Решением последнего является

$$\alpha l = \frac{\pi}{\delta} \quad (1.3.23)$$

Приравняв полученное значение к значению (1.3.10), найдем то значение δ , при котором обе части стержня теряют устойчивость одновременно,

$$\frac{\pi}{2(1-\delta)} = \frac{\pi}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{2}{3} \quad (1.3.24)$$

В итоге будем иметь

$$\alpha l = \begin{cases} \frac{\pi}{2(1-\delta)} & \left(\delta \leq \frac{2}{3} \right) \\ \frac{\pi}{\delta} & \left(\delta > \frac{2}{3} \right) \end{cases} \quad (1.3.25)$$

Численный анализ. Как и выше, численный анализ и выводы будут делаться относительно параметра α , используя при этом выражение «критическая нагрузка».

Рассмотрим крайние положения опоры. Пусть опора вплотную подходит к закрепленному концу стержня ($\delta \rightarrow 0$). В отличие от предыдущего случая, здесь сам тип опоры – скользящая муфта - приводит к ситуации жесткого закрепления и, следовательно, мы должны получить известное [24] значение (1.2.21)

$$\alpha = \frac{\pi}{2l}$$

Действительно, прямая подстановка $\delta = 0$ в (1.3.15), (1.3.20) и (1.3.25) приводит к этому значению. Если же опора вплотную подходит к свободному концу стержня ($\delta \rightarrow 1$), то задача сводится к задаче об устойчивости стержня, один конец которого ограничен в вертикальном перемещении и повороте, а на другом конце заданы различные условия закрепления.

Непосредственной подстановкой $\delta = 1$ в соответствующие уравнения, находим, что, когда левый конец стержня:

шарнирно оперт

$$\alpha = \frac{\pi}{0.7l}, \quad (1.3.26)$$

жестко закреплен

$$\alpha = \frac{2\pi}{l} \quad (1.3.27)$$

скользяще заделан

$$\alpha = \frac{\pi}{l} \quad (1.3.28)$$

При промежуточных расположениях опоры типа муфты зависимости критической консервативной нагрузки от расположения опоры графически представлены на рис.1.3.2. Здесь же, для сравнения, пунктирными линиями приведены графики рис. 1.2.2, при этом кривые 1 соответствуют случаю шарнирного опирания левого конца, кривые 2 – жесткого защемления, кривые 3 – скользящей заделки.

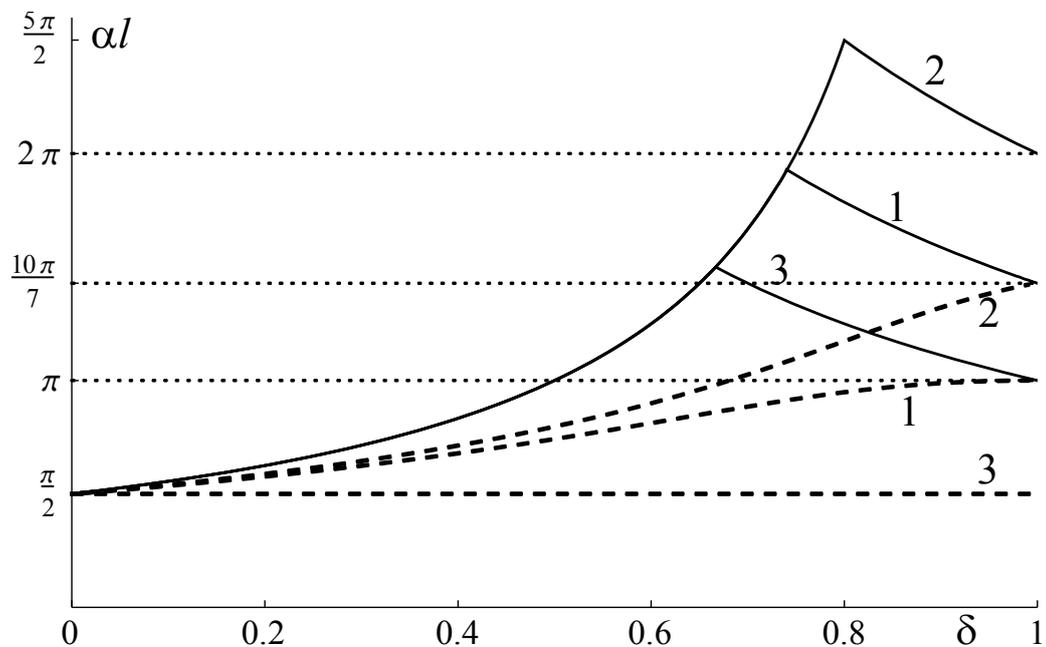


Рис. 1.3.2 Кривые зависимости критической консервативной нагрузки от местоположения опоры при разных условиях закрепления конца стержня

Из графиков на рис.1.3.2 непосредственно замечаем преимущество установки опоры типа скользящей заделки (гладкой муфты), выражающееся в существенном повышении значения критической силы. При установке, вместо опоры шарнирного типа опоры типа муфты в точке $0.74l$, в случае шарнирно закрепленного конца, и в точке $0.8l$, в случае жесткого его защемления, приводит к более чем двукратному (≈ 2.12) увеличению значения критической силы. При установке же опоры в точке $2/3 l$ при скользящей заделке конца приводит к трехкратному увеличению значения критической силы.

ГЛАВА 2 ПРОГИБ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ПО ДВУМ СТОРОНАМ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК

В настоящей главе исследуется прогиб шарнирно опертой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки под действием нагрузки, сосредоточенной в одном направлении и синусоидально распределенной в другом направлении, при различных краевых условиях на двух других сторонах. Исследовано поведение максимального прогиба и координат точки, в которой этот прогиб достигается, в зависимости от места приложения нагрузки и отношения сторон прямоугольника. Рассмотрены предельные случаи, когда имеет место цилиндрический изгиб и становится возможным сопоставить полученные для пластинки результаты с результатами для балки, полученными в предыдущей главе. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных при различных условиях на двух других сторонах.

§ 2.1 Анализ прогиба пластинки под действием распределенной по параллельному шарнирно опертым сторонам отрезку нормальной нагрузки при различных условиях на двух других сторонах.

Рассмотрим прямоугольную пластинку толщиной $2h$ со сторонами a и b , в прямоугольной системе координат $Oxyz$ занимающую область $\Omega = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, h \ll \min(a, b)\}$ и шарнирно опертую по сторонам $y = 0$ и $y = b$. Предположим, что пластинка прогибается под действием нагрузки, синусоидально распределенной по отрезку $\{0 \leq x \leq a, y = y_0\}$ (Рис.2.1.1). Задача будет решена при различных краевых условиях на сторонах $x = 0$ и $x = a$, которые будут рассмотрены отдельно.

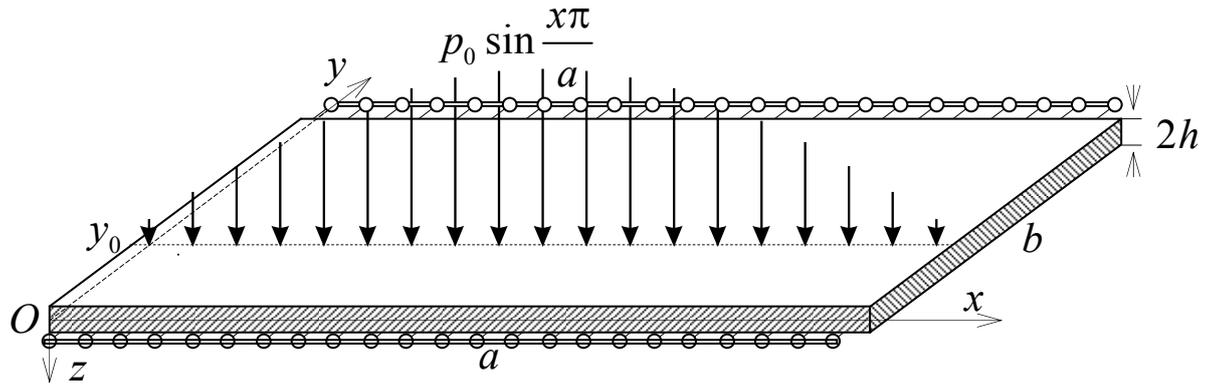


Рис. 2.1.1 Схематическое представление поставленной задачи

Известно [45], что прогиб пластинки $w(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$D\Delta^2 w = q(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \quad (2.1.1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа, $q(x, y)$ - заданная внешняя нагрузка,

$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ - жесткость пластинки на изгиб, E, ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластинки.

Шарнирное опирание сторон $y = 0$ и $y = b$ приводит к выполнению граничных условий

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad \text{и } y = b \quad (2.1.2)$$

С целью исследования максимального прогиба в зависимости от граничных условий на остальных двух краях пластинки найдем общее решение уравнения (2.1.1), удовлетворяющее условиям (2.1.2).

Перейдем к безразмерным величинам, приняв b в качестве базы для линейных размеров :

$$a_* = \frac{a}{b}; \quad \xi = \frac{x}{b} \quad (0 \leq \xi \leq a_*); \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (0 \leq \eta \leq 1);$$

$$W(\xi, \eta) = \frac{w(x, y)}{b}; \quad Q(\xi, \eta) = \frac{b^3}{D} q(x, y) \quad (2.1.3)$$

Тогда уравнение (2.1.1) и условия (2.1.2) запишутся в виде:

$$\Delta^2 W = -Q(\xi, \eta), \quad 0 \leq \xi \leq a_*, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (2.1.4)$$

$$W(\xi, \eta) = 0, \quad \frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0 \quad \text{и} \quad \eta = 1 \quad (2.1.5)$$

Если решение уравнения (2.1.4) представить в виде

$$W(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\xi) \sin \pi n \eta, \quad (2.1.6)$$

то граничные условия (2.1.5) будут тождественно удовлетворены.

Внешнюю нагрузку, показанную на рис.2.1.1, можно представить функцией

$$Q(\xi, \eta) = q_0 \delta(\eta - c) \sin \frac{\pi \xi}{a_*} \quad 0 < c < 1 \quad (2.1.7)$$

где $q_0 = p_0/b$, $c = y_0/b$.

Внешнюю нагрузку $Q(\xi, \eta)$ можно представить в виде:

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\xi) \sin \pi n \eta \quad (2.1.8)$$

где

$$q_n(\xi) = 2q_0 \sin \frac{\pi \xi}{a_*} \sin \pi n c \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.1.9)$$

Подставляя (2.1.6) и (2.1.8) в уравнение (2.1.4), будем иметь:

$$\frac{d^4 w_n(\xi)}{d\xi^4} - 2\pi^2 n^2 \frac{d^2 w_n(\xi)}{d\xi^2} + \pi^4 n^4 w_n(\xi) = q_n(\xi) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.1.10)$$

Общее решение этого уравнения можно выписать в виде:

$$w_n(\xi) = A_n e^{\pi n \xi} + B_n \xi e^{\pi n \xi} + C_n e^{-\pi n \xi} + D_n \xi e^{-\pi n \xi} - \frac{1}{2\pi^3 n^3} \int_0^{\xi} q_n(t) [\operatorname{sh} \pi n(\xi - t) - \pi n(\xi - t) \operatorname{ch} \pi n(\xi - t)] dt \quad (2.1.11)$$

Подставляя (2.1.9) в (2.1.11), получим

$$\begin{aligned}
 w_n(\xi) = & A_n e^{\pi n \xi} + B_n \xi e^{\pi n \xi} + C_n e^{-\pi n \xi} + D_n \xi e^{-\pi n \xi} + \\
 & + \frac{a_* q_0 \sin \pi n c}{\pi^4 n^3 (1 + a_*^2 n^2)^2} \left\{ \pi n \xi (1 + a_*^2 n^2) \operatorname{ch} \pi n \xi + \right. \\
 & \left. + 2 a_*^3 n^3 \sin \frac{\pi \xi}{a_*} - (1 + 3 a_*^2 n^2) \operatorname{sh} \pi n \xi \right\}
 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Постоянные интегрирования A_n, B_n, C_n, D_n определяются из граничных условий на сторонах $x = 0$ и $x = a$. Варианты граничных условий на этих сторонах рассмотрим в отдельности.

1. На обеих сторонах заданы условия шарнирного опирания. Тогда на сторонах $x = 0$ ($\xi = 0$) и $x = a$ ($\xi = a_*$) будем иметь условия равенства нулю прогиба и изгибающего момента, которые сводятся к условиям:

$$w_n(\xi) \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \xi=a_*}} = 0, \quad \frac{d^2 w_n(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \xi=a_*}} = 0 \quad (2.1.13)$$

Удовлетворяя этим условиям, получим систему

$$A_n + C_n = 0$$

$$\pi^2 n^2 (A_n + C_n) + 2\pi n (B_n - D_n) = 0$$

$$\begin{aligned}
 & (A_n + a_* B_n) e^{\pi n a_*} + (C_n + a_* D_n) e^{-\pi n a_*} + \\
 & + \frac{a_* q_0 \sin \pi n c}{\pi^4 n^3 (1 + a_*^2 n^2)^2} \left[a_* n \pi (1 + a_*^2 n^2) \operatorname{ch} \pi n a_* - (1 + 3 a_*^2 n^2) \operatorname{sh} \pi n a_* \right] = 0 \quad (2.1.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\pi n A_n + (2 + \pi n a_*) B_n) e^{\pi n a_*} + (\pi n C_n - (2 - \pi n a_*) D_n) e^{-\pi n a_*} + \\
 & + \frac{a_* q_0 \sin \pi n c}{\pi^3 n^2 (1 + a_*^2 n^2)^2} \left[a_* n \pi (1 + a_*^2 n^2) \operatorname{ch} \pi n a_* + (1 - a_*^2 n^2) \operatorname{sh} \pi n a_* \right] = 0
 \end{aligned}$$

откуда найдем

$$A_n = -C_n = \frac{q_0 a_* \sin \pi n c (1 + 3a_*^2 n^2)}{2\pi^4 n^3 (1 + a_*^2 n^2)^2}; \quad B_n = D_n = -\frac{q_0 a_* \sin \pi n c}{2\pi^3 n^2 (1 + a_*^2 n^2)^2} \quad (2.1.15)$$

В итоге для $w_n(\xi)$ будем иметь

$$w_n(\xi) = \frac{2a_*^4 q_0 \sin \pi n c \sin \frac{\pi \xi}{a_*}}{\pi^4 (1 + a_*^2 n^2)^2} \quad (2.1.16)$$

а для безразмерного прогиба $W(\xi, \eta)$

$$W(\xi, \eta) = \frac{2a_*^4 q_0 \sin \frac{\pi \xi}{a_*}}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n c}{(1 + a_*^2 n^2)^2} \sin \pi n \eta \quad (2.1.17)$$

Нетрудно заметить, что по оси ξ прогиб симметричен и наибольший прогиб будет при $\xi = a_*/2$.

На рис. 2.1.2 представлены прогибы $W(a_*/2, \eta)$ при $q_0 = 1/\pi$ в зависимости от относительной ширины пластинки a_* , когда $c = 0.9$.

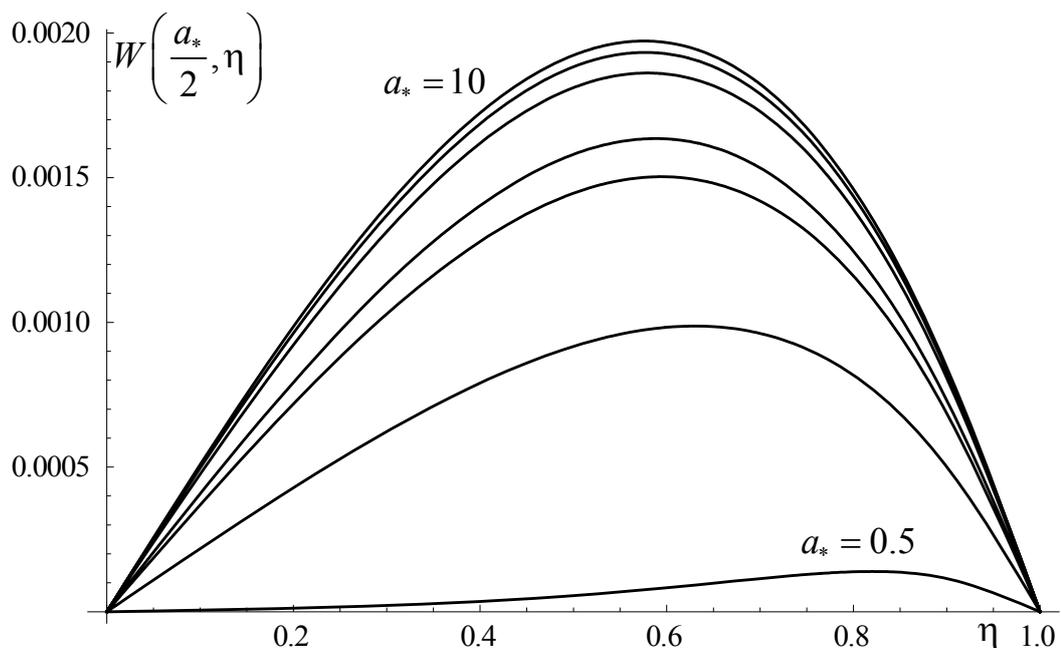


Рис. 2.1.2. Прогиб пластинки в сечении $\xi = a_*/2$ при $a_* = 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 7, 10$

Как нетрудно заметить из рис.2.1.2 значение максимального прогиба пластинки $W_{\max} \left(a_*/2, \eta_{\max} \right)$, как и координата η_{\max} точки, в которой он достигается, существенно зависят от соотношения сторон пластинки a_* .

На рис. 2.1.3 представлены графики зависимости значения максимального прогиба пластинки от соотношения сторон пластинки a_* при различных значениях параметра c , указывающего на место приложения внешней нагрузки.

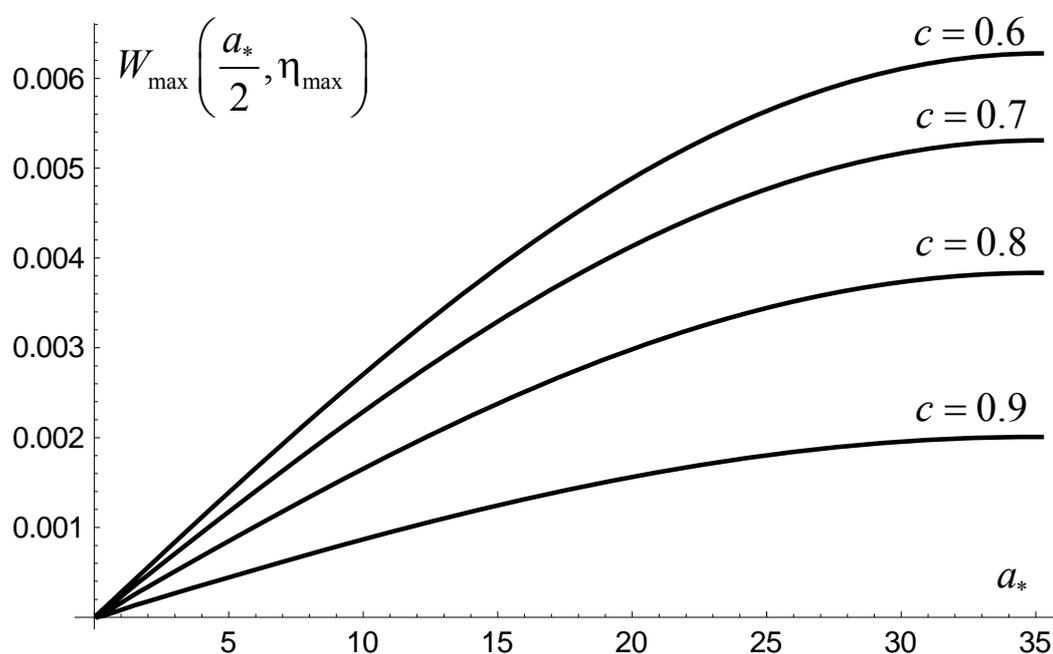


Рис. 2.1.3 Зависимость максимального прогиба от a_* при разных c

На рис. 2.1.4 представлены графики зависимости координаты точки максимального прогиба пластинки от соотношения сторон пластинки a_* .

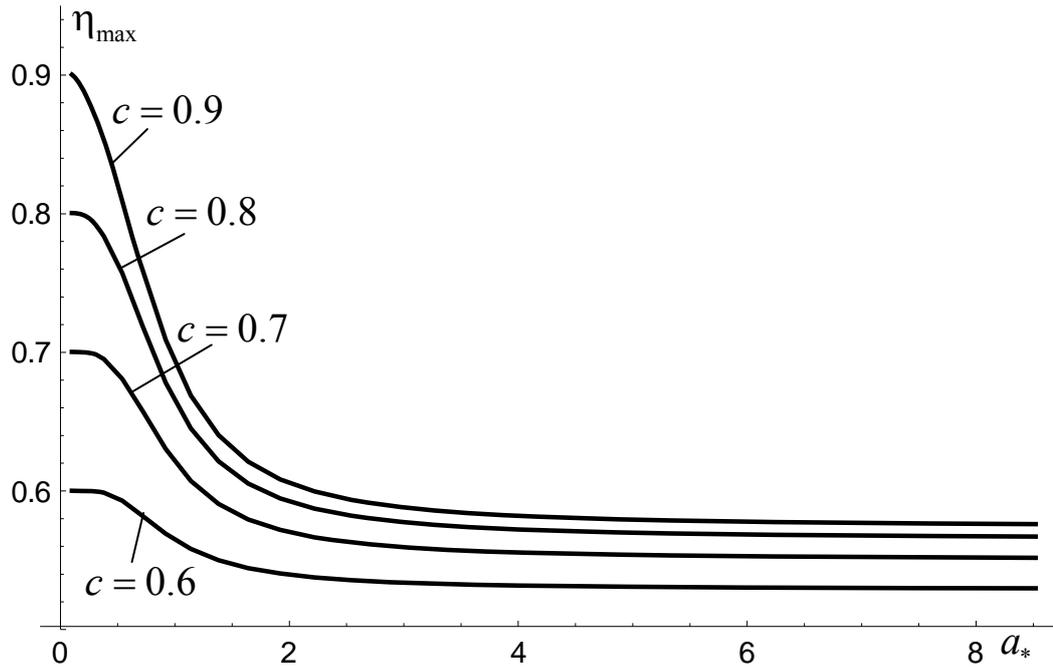


Рис. 2.1.4 Зависимость координаты η_{\max} от a_* при разных c

Очевидно, что при увеличении соотношения a_* все представленные на графиках величины, в пределе при $a_* \rightarrow \infty$, должны стремиться к значениям, принимаемым при цилиндрическом изгибе пластинки, то есть балки. Сравнив полученные значения с соответствующими значениями, полученными в главе 1 для шарнирно опертой по концам балки, нетрудно убедиться, что это действительно имеет место.

Как замечаем из рис.2.1.3 и рис.2.1.4 выход на предельные значения намного быстрее происходит у координаты η_{\max} , чем у максимального прогиба $W_{\max}(a_*/2, \eta_{\max})$.

2. На стороне $x = 0 (\xi = 0)$ - шарнирное опирание, а сторона $x = a (\xi = a_*)$ жестко закреплена. На стороне $x = 0 (\xi = 0)$ будем иметь те же условия, что и выше, а на стороне $x = a (\xi = a_*)$ будут равны нулю прогиб и угол наклона. В итоге будем иметь условия

$$\begin{aligned}
w_n(\xi) \Big|_{\xi=0} &= 0, & \frac{d^2 w_n(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} &= 0 \\
w_n(\xi) \Big|_{\xi=a_*} &= 0, & \frac{dw_n(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=a_*} &= 0
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Системой для определения постоянных интегрирования будет

$$A_n + C_n = 0$$

$$\pi^2 n^2 (A_n + C_n) + 2\pi n (B_n - D_n) = 0$$

$$\begin{aligned}
&(A_n + a_* B_n) e^{\pi n a_*} + (C_n + a_* D_n) e^{-\pi n a_*} + \\
&+ \frac{a_* q_0 \sin \pi n c}{\pi^4 n^3 (1 + a_*^2 n^2)^2} \left[a_* n \pi (1 + a_*^2 n^2) \operatorname{ch} \pi n a_* - (1 + 3a_*^2 n^2) \operatorname{sh} \pi n a_* \right] = 0 \tag{2.1.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\pi n A_n + (1 + \pi n a_*) B_n) e^{\pi n a_*} - (\pi n C_n - (1 - \pi n a_*) D_n) e^{-\pi n a_*} + \\
&+ \frac{a_*^2 q_0 \sin \pi n c}{\pi^3 n (1 + a_*^2 n^2)^2} \left[-a_* n (1 + \operatorname{ch} \pi n a_*) + \pi (1 + a_*^2 n^2) \operatorname{sh} \pi n a_* \right] = 0
\end{aligned}$$

откуда найдем

$$\begin{aligned}
A_n = -C_n &= \frac{q_0 a_* \sin \pi n c}{2\pi^4 n^3 (1 + a_*^2 n^2)^2} \left[(1 + 3a_*^2 n^2) + \frac{4a_*^3 n^3 \pi \operatorname{ch} \pi a_* n}{2a_* \pi n - \operatorname{sh} 2\pi a_* n} \right] \\
B_n = D_n &= -\frac{q_0 a_* \sin \pi n c}{2\pi^3 n^2 (1 + a_*^2 n^2)^2} \left[(1 + a_*^2 n^2) + \frac{4a_*^2 n^2 \operatorname{sh} \pi a_* n}{2a_* \pi n - \operatorname{sh} 2\pi a_* n} \right]
\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

Для $w_n(\xi)$ будем иметь

$$w_n(\xi) = \frac{2a_*^3 q_0 \sin \pi n c}{\pi^4 (1 + a_*^2 n^2)^2} \left[a_* \sin \frac{\pi \xi}{a_*} - \frac{\pi \xi \frac{\operatorname{ch} \pi n \xi}{\operatorname{ch} \pi n a_*} - \pi a_* \frac{\operatorname{sh} \pi n \xi}{\operatorname{sh} \pi n a_*}}{\frac{2\pi n a_*}{\operatorname{sh} 2\pi n a_*} - 1} \right] \tag{2.1.21}$$

Очевидно, что в этом случае нет симметрии по оси ξ и графиков, подобных предыдущему случаю, привести невозможно. Для общего

представления о прогибе $W(\xi, \eta)$ на рис.2.1.5 представлены пространственные картинки формы прогиба пластинки при значениях $a_* = 0.5, c = 0.7$ с двух точек зрения.

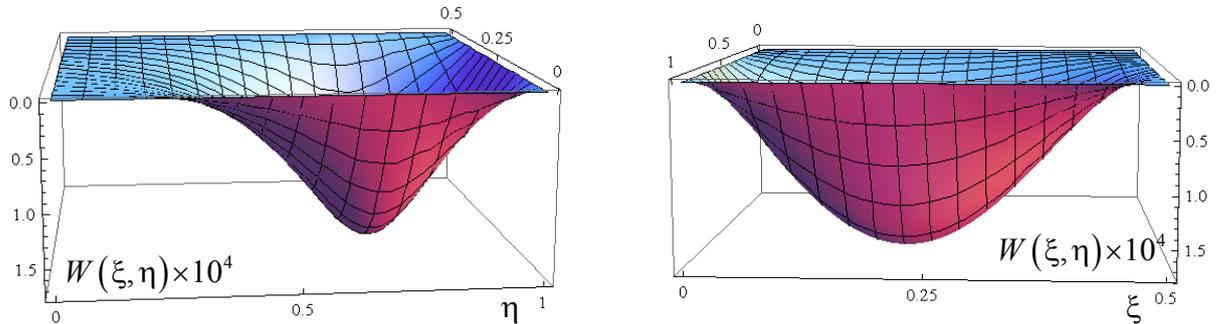


Рис. 2.1.5 Форма прогиба пластинки при $a_* = 0.5, c = 0.7$

На рис. 2.1.6 показаны точки, в которых достигается максимальный прогиб. В каждой группе точек, соответствующих пластинке определенных размеров, имеется 17 точек, которые соответствуют значениям c от 0.1 до 0.9 с шагом 0.05.

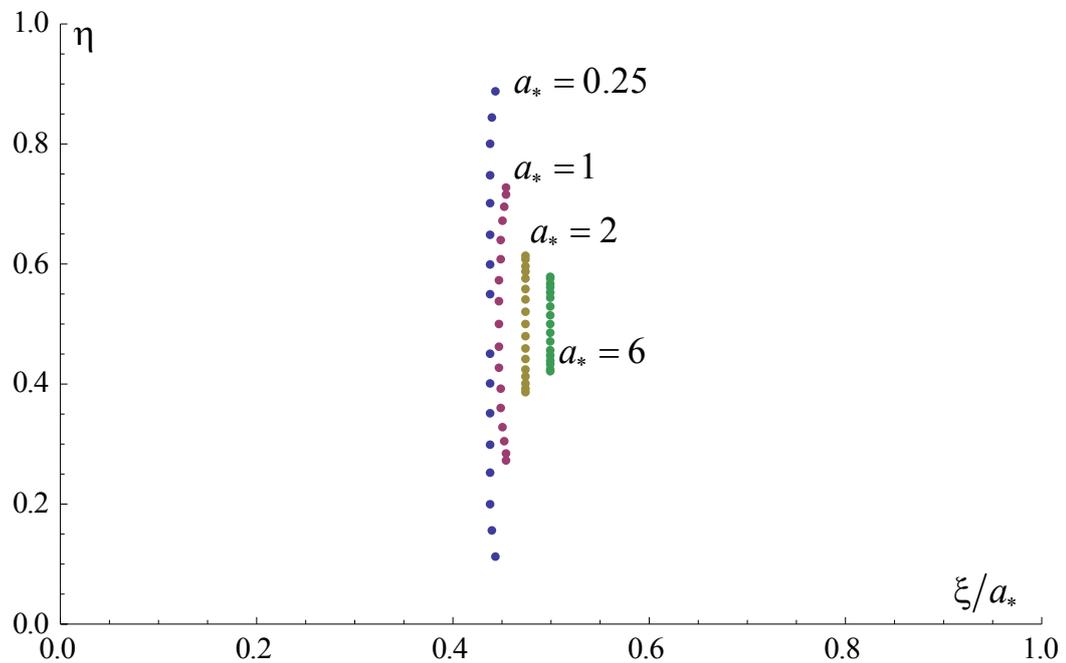


Рис. 2.1.6 Точки максимального прогиба для различных значений a_* и c

Величина максимального прогиба в этом случае меньше, чем в предыдущем случае, а разница тем больше, чем меньше значение a_* , и стремится к нулю при $a_* \rightarrow \infty$.

3. На обеих сторонах заданы условия жесткого защемления. Тогда на сторонах $x = 0$ ($\xi = 0$) и $x = a$ ($\xi = a_*$) будем иметь условия равенства нулю прогиба и угла поворота, которые сводятся к условиям:

$$w_n(\xi) \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \xi=a_*}} = 0, \quad \frac{dw_n(\xi)}{d\xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \xi=a_*}} = 0 \quad (2.1.22)$$

После удовлетворения этим условиям приходим к следующей системе

$$A_n + C_n = 0$$

$$\pi n (A_n - C_n) + B_n + D_n = 0$$

$$\begin{aligned} & (A_n + a_* B_n) e^{\pi n a_*} + (C_n + a_* D_n) e^{-\pi n a_*} + \\ & + \frac{a_* q_0 \sin \pi n c}{\pi^4 n^3 (1 + a_*^2 n^2)^2} \left[a_* n \pi (1 + a_*^2 n^2) \operatorname{ch} \pi n a_* - (1 + 3a_*^2 n^2) \operatorname{sh} \pi n a_* \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

$$\begin{aligned} & (\pi n A_n + (1 + \pi n a_*) B_n) e^{\pi n a_*} - (\pi n C_n - (1 - \pi n a_*) D_n) e^{-\pi n a_*} + \\ & + \frac{a_*^2 q_0 \sin \pi n c}{\pi^3 n (1 + a_*^2 n^2)^2} \left[-a_* n (1 + \operatorname{ch} \pi n a_*) + \pi (1 + a_*^2 n^2) \operatorname{sh} \pi n a_* \right] = 0 \end{aligned}$$

откуда

$$A_n = -C_n = \frac{a_* q_0 \sin \pi n c}{2\pi^4 n^3 (1 + a_*^2 n^2)^2} \frac{\pi n a_* (1 + a_*^2 n^2) + (1 + 3a_*^2 n^2) \operatorname{sh} \pi n a_*}{\pi n a_* + \operatorname{sh} \pi n a_*}$$

$$B_n = \frac{a_* q_0 \sin \pi n c}{2\pi^3 n^2 (1 + a_*^2 n^2)^2} \left[-1 - a_*^2 n^2 + \frac{2a_*^2 n^2 (1 + e^{-\pi n a_*})}{\pi n a_* + \operatorname{sh} \pi n a_*} \right] \quad (2.1.24)$$

$$D_n = -\frac{a_* q_0 \sin \pi n c}{2\pi^3 n^2 (1 + a_*^2 n^2)^2} \times \\ \times \frac{\pi n a_* (1 + a_*^2 n^2) + 2a_*^2 n^2 (1 + \operatorname{ch} \pi n a_*) + (1 + 3a_*^2 n^2) \operatorname{sh} \pi n a_*}{\pi n a_* + \operatorname{sh} \pi n a_*}$$

После этого, выражение (2.1.12) примет вид

$$w_n(\xi) = \frac{2a_*^3 q_0 \sin \pi n c}{\pi^4 (1 + a_*^2 n^2)^2 (\pi n a_* + \operatorname{sh} \pi n a_*)} \left[a_* \sin \frac{\pi \xi}{a_*} (\pi n a_* + \operatorname{sh} \pi n a_*) - \right. \\ \left. - \pi \xi \operatorname{sh} \pi n (a_* - \xi) - \pi (a_* - \xi) \operatorname{sh} \pi n \xi \right] \quad (2.1.25)$$

Очевидно, что и здесь прогиб пластинки будет симметричен относительно линии $\xi = a_*/2$ и, следовательно, максимальный прогиб будет именно на этой линии.

Прогибы $W(a_*/2, \eta)$ в зависимости от относительной ширины пластинки a_* , когда $c = 0.9$, только лишь количественно отличаются от графиков на рис.2.1.2. Для иллюстрации этой разницы, которая существенна только при малых значениях a_* , на рис.2.1.7 сплошными линиями показаны прогибы в рассматриваемом случае, а пунктирными линиями – соответствующие прогибы в первом случае.

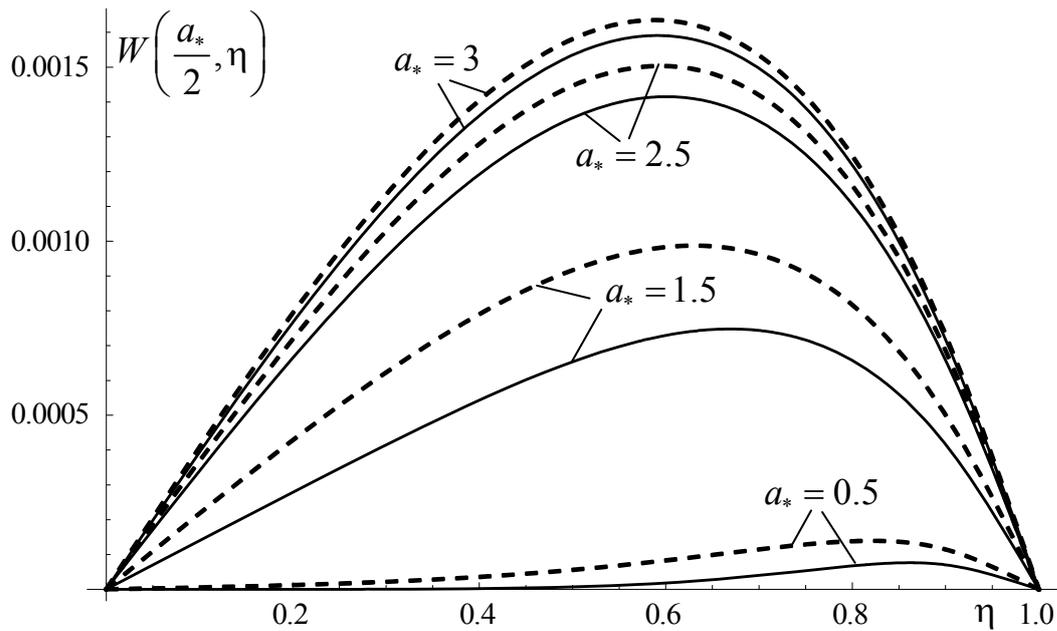


Рис. 2.1.7 Сравнение прогибов защемленной (сплошные линии) и свободно опертой (пунктирные линии) по двум сторонам пластинки.

Графики подтверждают тот очевидный факт, что защемленная по двум кромкам пластинка прогибается меньше, чем свободно опертая. При этом на максимальном прогибе, имеющем место на линии $a_*/2$, это сказывается больше при малых значениях a_* , а при больших a_* максимальные прогибы для обоих случаев стремятся к одному и тому же значению, соответствующему цилиндрическому прогибу шарнирно-опертой бесконечной пластинки.

На рис. 2.1.8 и 2.1.9 сплошными линиями представлены графики, подобные графикам рис. 2.1.3 и рис. 2.1.4. Для наглядной иллюстрации разницы между указанными графиками пунктирными линиями приведены также графики рис. 2.1.3 и рис. 2.1.4.

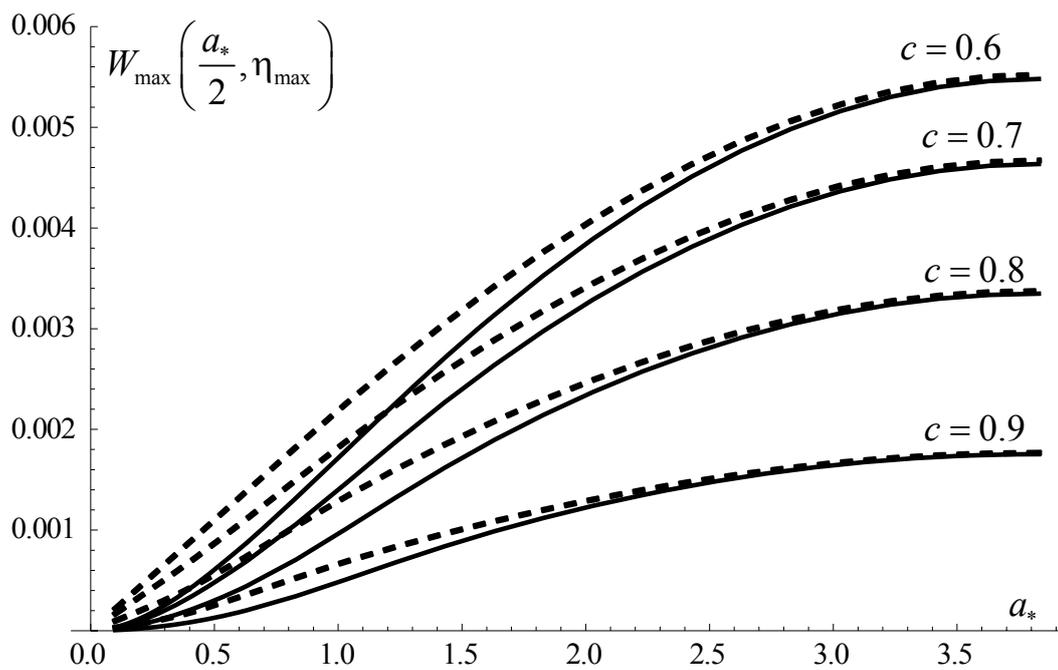


Рис. 2.1.8 Зависимость максимального прогиба от a_* при разных c
(пунктирные линии – графики рис.2.1.3)

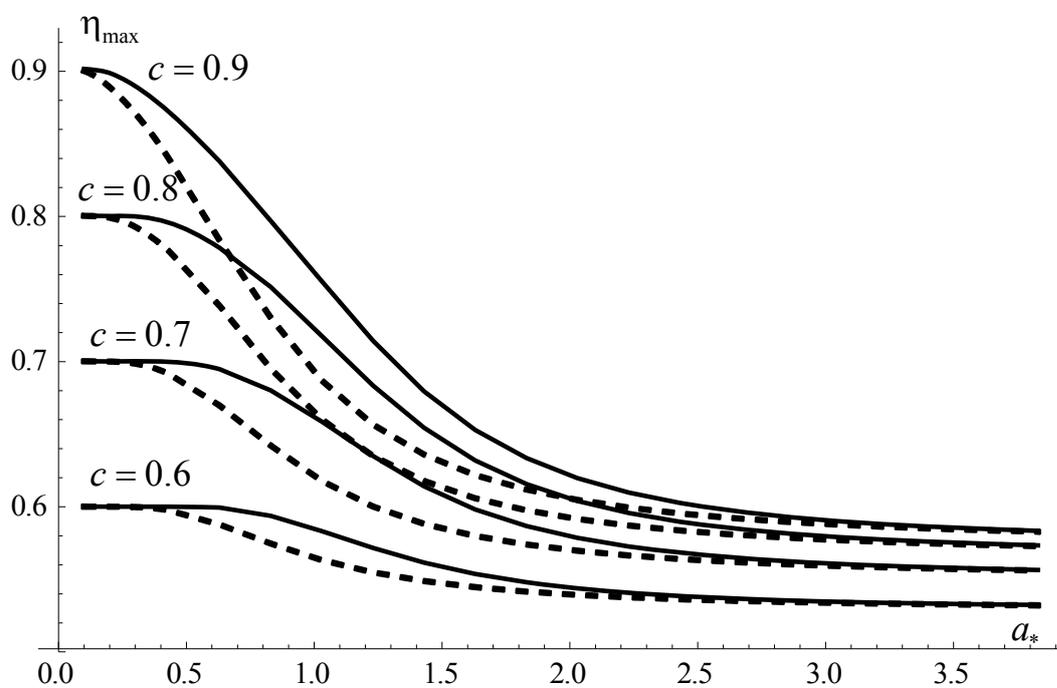


Рис. 2.1.9 Зависимость координаты η_{\max} от a_* при разных c (пунктирные
линии – графики рис.2.1.4)

Исходя из рис. 2.1.8 и рис. 2.1.9, можно сделать вывод, что начиная уже со значения отношения сторон пластинки $a_* = 3.5$ граничные условия на коротких сторонах пластинки практически не влияют ни на максимальный прогиб, ни на место его достижения. При меньших же значениях a_* влияние граничных условий достаточно существенно.

§ 2.2 Анализ прогиба пластинки под действием распределенной по перпендикулярному к шарнирно опертым сторонам отрезку нормальной нагрузки при различных условиях на двух других сторонах.

Рассмотрим ту же пластинку, что и в предыдущем параграфе, но при условии, что внешняя нормальная нагрузка распределена синусоидально по отрезку $\{x = x_0, 0 \leq y \leq b\}$ (Рис.2.2.1). Задача, опять-таки, будет решена при различных краевых условиях на сторонах $x=0$ и $x=a$, которые будут рассмотрены отдельно.

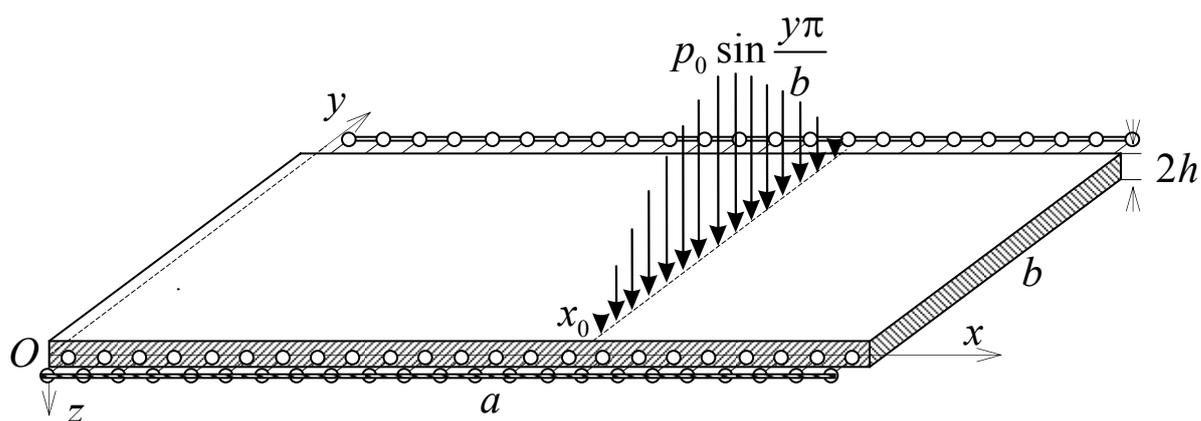


Рис. 2.2.1 Схематическое представление поставленной задачи

Очевидно, что постановка рассматриваемой задачи отличается от предыдущей только лишь внешней нагрузкой. Поэтому, формулы (2.1.1)-(2.1.6), которые полностью применимы и в этом случае, здесь повторять не

будем и описание решения задачи продолжим с момента обращения к внешней нагрузке.

Пусть внешняя нагрузка представляется функцией

$$Q(\xi, \eta) = q_0 \delta(\xi - d) \sin \pi \eta \quad 0 < d < a_* \quad (2.2.1)$$

то есть, имеем нагрузку, синусоидально распределенную по отрезку, параллельному оси y . Выбор синусоидального распределения обусловлен лишь стремлением упрощения выкладок.

Действительно, в этом случае в общем представлении для $Q(\xi, \eta)$

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\xi) \sin \pi n \eta$$

будем иметь

$$q_1(\xi) = q_0 \delta(\xi - d); \quad q_n(\xi) \equiv 0 \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (2.2.2)$$

Следовательно, из уравнения (2.1.10) предыдущего параграфа, будем иметь:

$$\frac{d^4 w_1(\xi)}{d\xi^4} - 2\pi^2 \frac{d^2 w_1(\xi)}{d\xi^2} + \pi^4 w_1(\xi) = q_0 \delta(\xi - d) \quad (2.2.3)$$

$$\frac{d^4 w_n(\xi)}{d\xi^4} - 2\pi^2 n^2 \frac{d^2 w_n(\xi)}{d\xi^2} + \pi^4 n^4 w_n(\xi) = 0 \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (2.2.4)$$

Общие решения этих уравнений можно выписать в виде:

$$w_1(\xi) = A_1 e^{\pi \xi} + B_1 \xi e^{\pi \xi} + C_1 e^{-\pi \xi} + D_1 \xi e^{-\pi \xi} - \frac{q_0}{2\pi^3} H(\xi - d) [\operatorname{sh} \pi(\xi - d) - \pi(\xi - d) \operatorname{ch} \pi(\xi - d)] \quad (2.2.5)$$

$$w_n(\xi) = A_n e^{\pi n \xi} + B_n \xi e^{\pi n \xi} + C_n e^{-\pi n \xi} + D_n \xi e^{-\pi n \xi} \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (2.2.6)$$

Учитывая, что оба рассматриваемых граничных условия: шарнирное опирание и жесткая заделка, являются однородными условиями, можно утверждать, что решением однородных уравнений (2.2.4) будет только нулевое решение. Следовательно, общим решением уравнения (2.1.10) будет

$$W(\xi, \eta) = w_1(\xi) \sin \pi \eta \quad (2.2.7)$$

1. **На обеих сторонах заданы условия шарнирного опирания.** Тогда на сторонах $x = 0$ ($\xi = 0$) и $x = a$ ($\xi = a_*$) будем иметь условия равенства нулю прогиба и изгибающего момента, которые сводятся к условиям (2.1.13)

$$w_n(\xi) \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \xi=a_*}} = 0, \quad \frac{d^2 w_n(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \xi=a_*}} = 0$$

Удовлетворяя этим условиям, получим систему

$$A_1 + C_1 = 0$$

$$\pi^2 (A_1 + C_1) + 2\pi (B_1 - D_1) = 0$$

$$(A_1 + a_* B_1) e^{\pi a_*} + (C_1 + a_* D_1) e^{-\pi a_*} + \frac{q_0}{2\pi^3} [\pi (a_* - d) \operatorname{ch} \pi (a_* - d) - \operatorname{sh} \pi (a_* - d)] = 0 \quad (2.2.8)$$

$$(\pi A_1 + (2 + \pi a_*) B_1) e^{\pi a_*} + (\pi C_1 - (2 - \pi a_*) D_1) e^{-\pi a_*} + \frac{q_0}{2\pi^2} [\pi (a_* - d) \operatorname{ch} \pi (a_* - d) + \operatorname{sh} \pi (a_* - d)] = 0$$

откуда найдем

$$A_1 = -C_1 = \frac{q_0 \operatorname{ch} (a_* - d) \pi}{4\pi^3 \operatorname{sh} a_* \pi} [-(a_* - d) \pi + (1 + a_* \pi \operatorname{cth} a_* \pi) \operatorname{th} (a_* - d) \pi] \quad (2.2.9)$$

$$B_1 = D_1 = -\frac{q_0}{4\pi^2 \operatorname{sh} a_* \pi} \operatorname{sh} (a_* - d) \pi$$

В итоге для безразмерного прогиба $W(\xi, \eta)$ будем иметь

$$W(\xi, \eta) = -\frac{q_0 e^{-\pi \xi} \sin \pi \eta}{4\pi^3 \operatorname{sh} a_* \pi} \left\{ -(a_* - d) (1 - e^{2\pi \xi}) \pi \operatorname{ch} (a_* - d) \pi + \right. \\ \left. + (1 + \pi \xi + a_* \pi \operatorname{cth} a_* \pi + e^{2\pi \xi} (-1 + \pi \xi - a_* \pi \operatorname{cth} a_* \pi)) \operatorname{sh} (a_* - d) \pi - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{sh} a_* \pi e^{\pi \xi} H(\xi - d) [\pi (\xi - d) \operatorname{ch} \pi (\xi - d) - \operatorname{sh} \pi (\xi - d)] \right\} \quad (2.2.10)$$

Нетрудно заметить, что по оси η прогиб симметричен и наибольший прогиб будет при $\eta = 1/2$.

На рис. 2.2.2 представлены прогибы $W(\xi, 1/2)$ при $q_0 = 1$ в зависимости от относительной ширины пластинки a_* , когда $d = 0.7a_*$. Для возможности совместного представления графиков и проведения сравнительного анализа по оси абсцисс отложена приведенная длина пластинки.

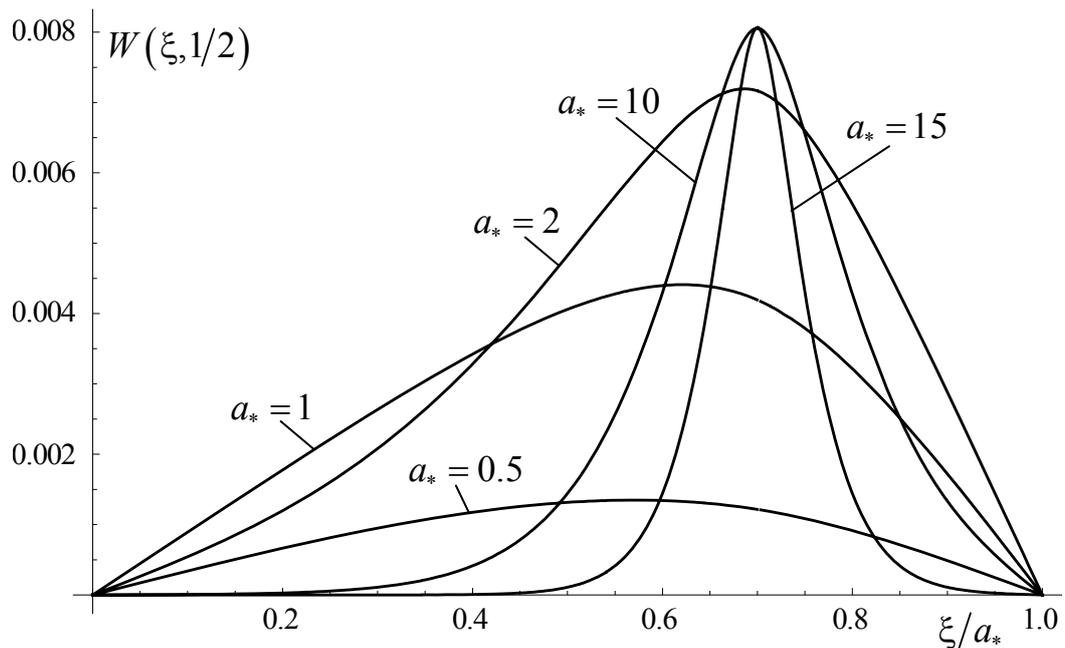


Рис. 2.2.2. Прогиб пластинки в сечении $\eta = 1/2$ при $a_* = 0.5, 1, 2, 5, 10$

Графики рис.2.2.2. показывают, что при малых значениях a_* пластинка прогибается по всей длине и принимает максимальное значение не под приложенной нагрузкой, а ближе к центру. При больших же значениях a_* прогиб пластинки локализуется в окрестности линии действия внешней нагрузки.

На рис. 2.2.3 представлены графики зависимости значения максимального прогиба пластинки от соотношения сторон пластинки a_* . Полагается, что при изменении a_* относительное положение линии приложения внешней нагрузки сохраняется, то есть имеем $d = d_0 a_*$. Приведенные графики соответствуют различным значениям параметра d_0 .

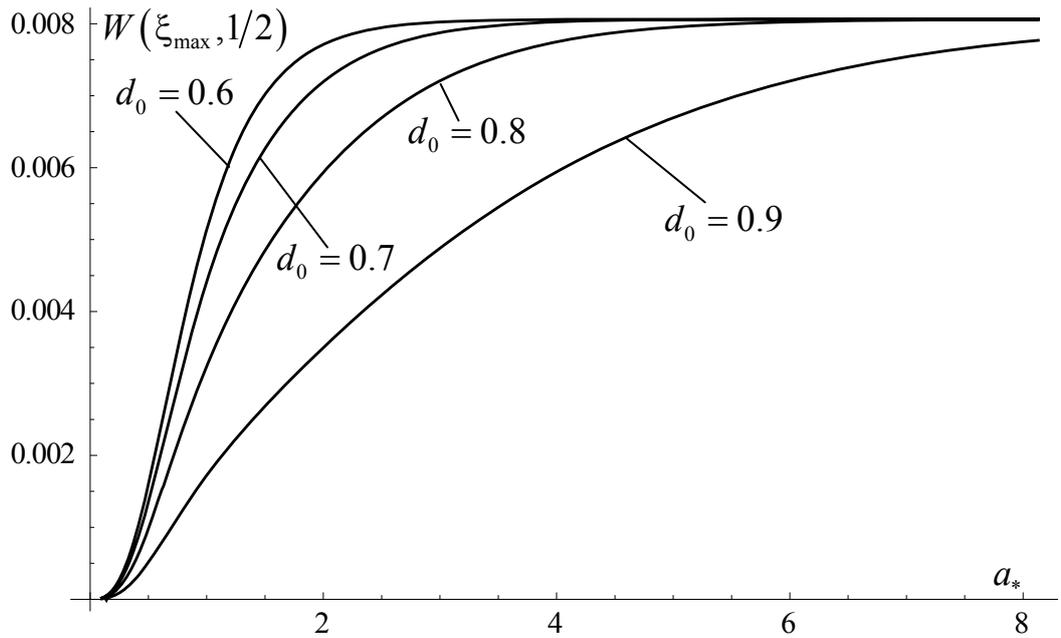


Рис. 2.2.3 Зависимость максимального прогиба от a_* при разных d_0

На рис. 2.2.4 представлены графики зависимости координаты точки максимального прогиба пластинки, отнесенной к длине пластинки, от соотношения сторон пластинки a_* .

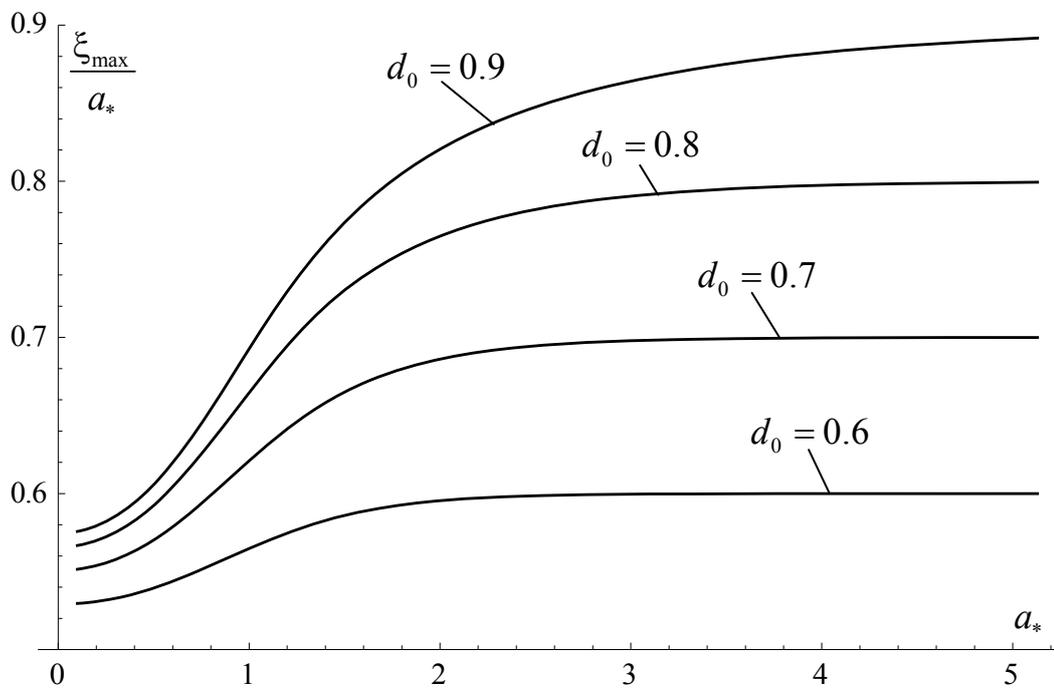


Рис. 2.2.4 Зависимость координаты ξ_{\max} от a_* при разных d_0

При увеличении соотношения a_* поставленная задача приближается к задаче изгиба шарнирно-опертой по сторонам бесконечной пластины под действием нормальной нагрузки, распределенной по поперечному сечению. Очевидно, что прогиб пластинки будет локализованным в окрестности линии действия нагрузки, а максимальный прогиб будет иметь место под нагрузкой. Это подтверждается графиками рис.2.2.2. Графики рис.2.2.3 и рис.2.2.4 показывают скорость выхода соответствующих величин на предельные значения. Замечаем, что при больших значениях d_0 этот выход происходит при больших a_* . Это объясняется тем, что при больших значениях d_0 имеем относительную близость линии приложения внешней нагрузки к кромке $\xi = a_*$ и только лишь при больших a_* эта относительная близость в абсолютном смысле становится удаленной и влияние кромки на прогиб пластинки уменьшается.

2. На обеих сторонах заданы условия жесткого защемления. Тогда на сторонах $x = 0$ ($\xi = 0$) и $x = a$ ($\xi = a_*$) будем иметь условия равенства нулю прогиба и угла поворота, которые сводятся к условиям (2.1.22):

$$w_n(\xi) \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \xi=a_*}} = 0, \quad \frac{dw_n(\xi)}{d\xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ \xi=a_*}} = 0$$

После удовлетворения этим условиям приходим к следующей системе

$$A_1 + C_1 = 0$$

$$\pi(A_1 - C_1) + B_1 + D_1 = 0$$

$$(A_1 + a_*B_1)e^{\pi a_*} + (C_1 + a_*D_1)e^{-\pi a_*} + \frac{q_0 \operatorname{ch}(a_* - d)\pi}{2\pi^3} [(a_* - d)\pi - \operatorname{th}(a_* - d)\pi] = 0 \quad (2.2.11)$$

$$\pi A_1 + (1 + \pi a_*) B_1 - (\pi C_1 - (1 - \pi a_*) D_1) e^{-2\pi a_*} + \frac{q_0 e^{-\pi a_*}}{2\pi} (a_* - d) \operatorname{sh}(a_* - d) \pi = 0$$

откуда

$$A_1 = -C_1 = \frac{q_0 \operatorname{sh} \pi a_* \operatorname{sh}(a_* - d) \pi}{2\pi^3} \Delta$$

$$B_1 = \frac{q_0 \operatorname{sh}(a_* - d) \pi}{4a_* \pi^3 \operatorname{sh} \pi a_*} \left\{ 1 - \pi(a_* - d) \operatorname{cth} \pi(a_* - d) - \left[2 \operatorname{sh}^2 \pi a_* - a_* \pi (1 - e^{-2\pi a_*}) \right] \Delta \right\}$$

$$D_1 = \frac{q_0 \operatorname{sh}(a_* - d) \pi}{4a_* \pi^3 \operatorname{sh} \pi a_*} \left\{ \Delta \left[2(1 - 2a_* \pi) \operatorname{sh}^2 \pi a_* - a_* \pi (1 - e^{-2\pi a_*}) \right] - \right. \\ \left. - 1 + \pi(a_* - d) \operatorname{cth} \pi(a_* - d) \right\}$$

где

$$\Delta = \frac{(\pi a_* \operatorname{cth} \pi a_* + 1)(\pi(a_* - d) \operatorname{cth} \pi(a_* - d) - 1) - a_* \pi^2 (a_* - d)}{1 - \operatorname{ch} 2\pi a_* + 2a_*^2 \pi^2}$$

После этого для безразмерного прогиба $W(\xi, \eta)$ будем иметь

$$W(\xi, \eta) = \frac{q_0 \operatorname{sh} \pi(a_* - d) \sin \pi \eta}{2a_* \pi^3} \left\{ 2\Delta \operatorname{sh} \pi \xi \left[\pi a_* \xi e^{-\pi a_*} + (a_* - \xi) \operatorname{sh} \pi a_* \right] + \right. \\ \left. + \frac{\xi \operatorname{sh} \pi \xi}{\operatorname{sh} \pi a_*} \left[1 - \pi(a_* - d) \operatorname{cth} \pi(a_* - d) \right] - 2\Delta \pi a_* \xi e^{-\pi \xi} \operatorname{sh} \pi a_* \right\}$$

или, после подстановки выражения Δ ,

$$W(\xi, \eta) = \frac{q_0 \sin \pi \eta}{4\pi^2 (1 - \operatorname{ch} 2\pi a_* + 2a_*^2 \pi^2)} \left\{ -\frac{2 \operatorname{sh} \pi \xi \operatorname{ch} \pi(2a_* - d) + \operatorname{sh} \pi(d + \xi)}{\pi} + \right. \\ + \left[4\pi^2 a_* \xi (d - a_*) - 2a_* + d - \xi \right] \operatorname{ch} \pi(d - \xi) + (d + \xi) \operatorname{ch} \pi(2a_* - d - \xi) + \\ + 2\pi \left[d \xi \operatorname{sh} \pi(2a_* - d - \xi) - a_* (a_* - d + \xi) \operatorname{sh} \pi(d - \xi) \right] + \\ + 2\pi(a_* - d)(a_* - \xi) \operatorname{sh} \pi(d + \xi) + \\ + (\xi - d) \operatorname{ch} \pi(2a_* - d + \xi) + (2a_* - d + \xi) \operatorname{ch} \pi(d + \xi) - \\ \left. - \frac{2}{\pi} H(\xi - d) (1 - \operatorname{ch} 2\pi a_* + 2a_*^2 \pi^2) \left[\operatorname{sh} \pi(\xi - d) - \pi(\xi - d) \operatorname{ch} \pi(\xi - d) \right] \right\}$$

Очевидно, что и здесь прогиб пластинки будет симметричен относительно линии $\eta = 1/2$ и, следовательно, максимальный прогиб будет именно на этой линии.

Прогибы $W(\xi, 1/2)$ в зависимости от относительной длины пластинки a_* , когда $d = 0.7$, только количественно отличаются от графиков на рис.2.2.2. Для иллюстрации этой разницы, которая существенна только при малых значениях a_* , на рис.2.2.5 сплошными линиями показаны прогибы в рассматриваемом случае, а пунктирными линиями – соответствующие прогибы в первом случае. Из рисунка замечаем, что при значениях $a_* > 5$ графики практически сливаются. Этого следовало ожидать, так как при больших a_* прогиб пластинки носит локальный характер.

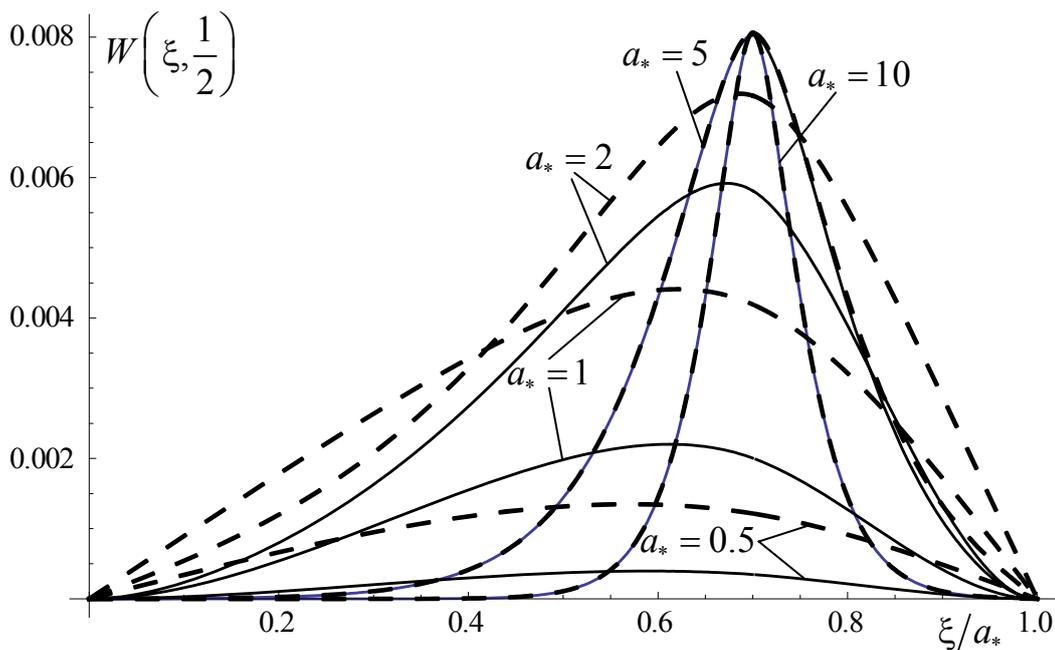


Рис. 2.2.5 Сравнение прогибов защемленной (сплошные линии) и свободно опертой (пунктирные линии) по двум сторонам пластинки.

Как и в предыдущем параграфе, графики подтверждают тот очевидный факт, что защемленная по двум кромкам пластинка прогибается меньше, чем свободно опертая. При этом разница больше проявляется при малых значениях a_* , а при больших a_* максимальные прогибы для обоих случаев стремятся к

одному и тому же значению, соответствующему локальному прогибу шарнирно-опертой по краям бесконечной пластинки под действием синусоидально распределенной по поперечному сечению нормальной нагрузки.

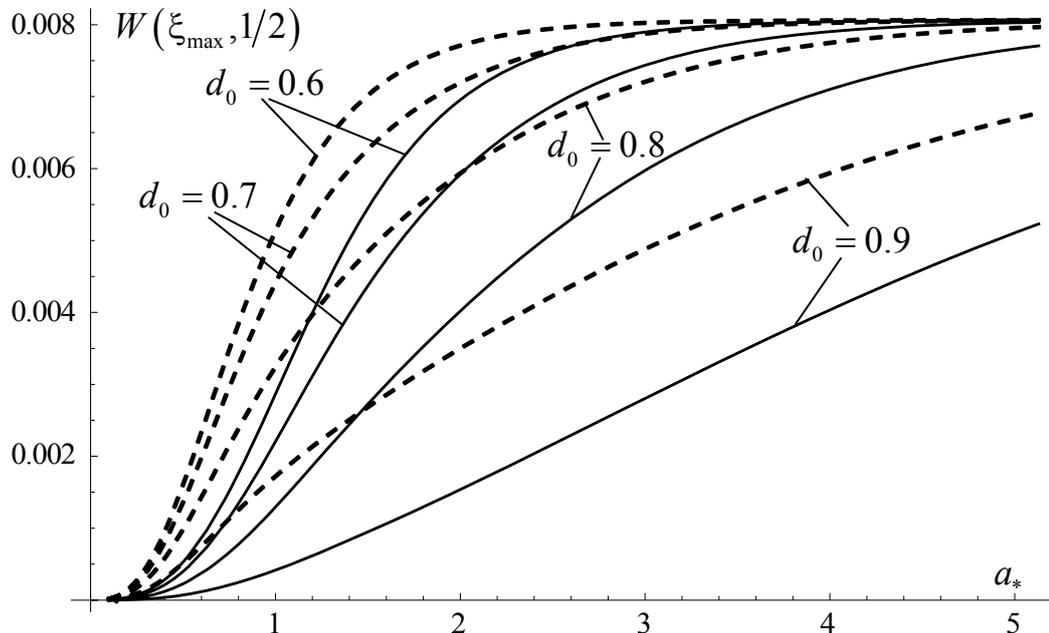


Рис. 2.2.6 Зависимость максимального прогиба от a_* при разных d_0 (пунктирные линии – графики рис.2.2.3)

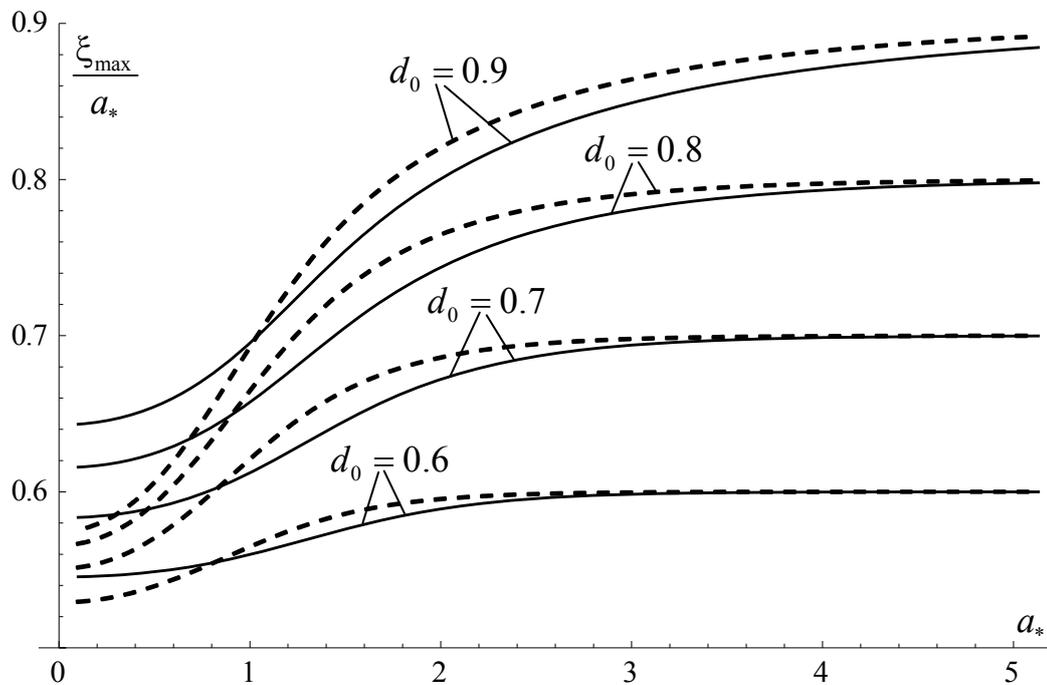


Рис. 2.2.7 Зависимость координаты η_{\max} от a_* при разных c (пунктирные линии – графики рис.3)

На рис. 2.2.6 и 2.2.7 сплошными линиями представлены графики, подобные графикам рис. 2.2.3 и 2.2.4, которые, для наглядной иллюстрации разницы между указанными графиками, приведены здесь пунктирными линиями.

Сравнивая эти графики, замечаем, что при $d_0 = 0.6$ начиная уже со значения отношения сторон пластинки $a_* = 4$ граничные условия на коротких сторонах пластинки практически не влияют ни на максимальный прогиб, ни на место его достижения. Очевидно, что с увеличением d_0 соответствующее значение a_* возрастает, причем для достижения одинакового прогиба намного больше (рис. 2.2.6), чем для совпадения точек максимального прогиба (рис. 2.2.7). При меньших же значениях a_* влияние граничных условий достаточно существенно.

§ 2.3 Анализ прогиба пластинки под действием сосредоточенной нормальной силы при различных условиях на двух других сторонах.

Рассмотрим ту же пластинку, что и в предыдущих параграфах, но при условии, что внешней нагрузкой является, приложенная в точке $\{x = x_0, y = y_0\}$ (Рис.2.3.1). Задача, опять-таки, будет решена при различных краевых условиях на сторонах $x = 0$ и $x = a$, которые будут рассмотрены отдельно.

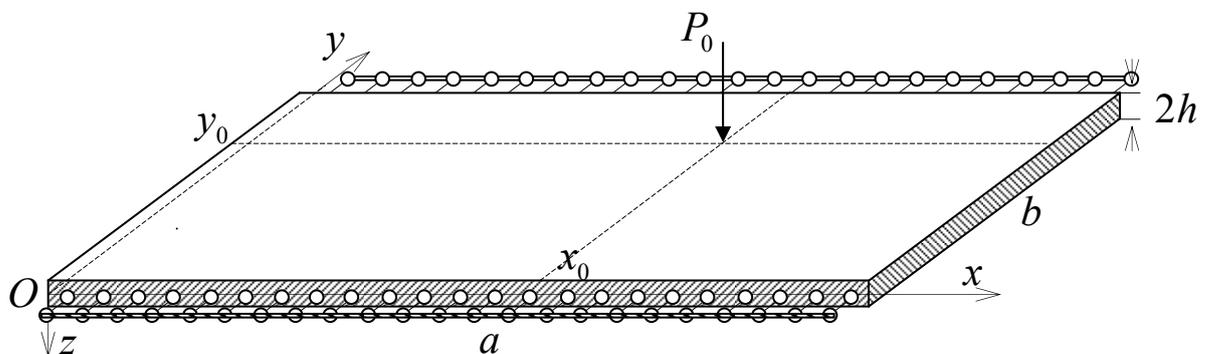


Рис. 2.3.1 Схематическое представление поставленной задачи

Постановка рассматриваемой задачи опять-таки отличается от предыдущих только лишь внешней нагрузкой. Поэтому, формулы (2.1.1)-(2.1.6), которые полностью применимы и в этом случае, здесь повторять не будем и описание решения задачи продолжим с момента обращения к внешней нагрузке.

Сосредоточенную нормальную силу представим в виде

$$Q(\xi, \eta) = q_0 \delta(\xi - d) \delta(\eta - c) \quad (0 < d < a_*, 0 < c < 1) \quad (2.3.1)$$

где $q_0 = P_0/b^2$, $d = x_0/b$, $c = y_0/b$.

Внешнюю нагрузку $Q(\xi, \eta)$ можно представить в виде:

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\xi) \sin \pi n \eta \quad (2.3.2)$$

где

$$q_n(\xi) = 2q_0 \delta(\xi - d) \sin \pi n c \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.3.3)$$

Уравнение (2.1.10) параграфа 2.1 примет вид:

$$\frac{d^4 w_n(\xi)}{d\xi^4} - 2\pi^2 n^2 \frac{d^2 w_n(\xi)}{d\xi^2} + \pi^4 n^4 w_n(\xi) = 2q_0 \delta(\xi - d) \sin \pi n c \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Общее решение этого уравнения можно выписать в виде:

$$w_n(\xi) = A_n e^{\pi n \xi} + B_n \xi e^{\pi n \xi} + C_n e^{-\pi n \xi} + D_n \xi e^{-\pi n \xi} - \frac{q_0 \sin \pi n c}{\pi^3 n^3} H(\xi - d) [\operatorname{sh} \pi n (\xi - d) - \pi n (\xi - d) \operatorname{ch} \pi n (\xi - d)] \quad (2.3.4)$$

1. На обеих сторонах заданы условия шарнирного опирания.

Не повторяя выкладки по определению постоянных интегрирования из граничных условий, сразу выпишем выражение для $w_n(\xi)$

$$w_n(\xi) = \frac{q_0 \sin \pi n c}{\pi^3 n^3 \operatorname{sh} \pi n a_*} \left\{ \operatorname{sh} \pi n a_* H(\xi - d) \left[\pi n (\xi - d) \operatorname{ch} \pi n (\xi - d) - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{sh} \pi n (\xi - d) \right] - \operatorname{sh} \pi n (a_* - d) \operatorname{sh} \pi n \xi \left[\pi n \xi \operatorname{cth} \pi n \xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi n (a_* - d) \operatorname{cth} \pi n (a_* - d) - 1 - \pi n a_* \operatorname{cth} \pi n a_* \right] \right\} \quad (2.3.5)$$

Прогиб $W(\xi, \eta)$ в произвольной точке пластинки определится по формуле (2.1.6). Следует заметить, что ряд в (2.1.6) хорошо сходится, поскольку при $n \rightarrow \infty$ общий член убывает экспоненциально:

$$w_n(\xi) = O\left(\frac{1}{n^3} e^{-\pi n |\xi - d|}\right) \quad (2.3.6)$$

Однако, особенно при $a_* > 1$, прямое использование формулы (2.3.5) в численных расчетах не всегда обеспечивает указанный порядок убывания и приводит к обратному эффекту – экспоненциальному росту, что происходит вследствие накопления вычислительной погрешности. Во избежание этого, при вычислении $W(\xi, \eta)$ используем формулу:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^M w_n(\xi) \sin \pi n \eta + \sum_{n=M+1}^{\infty} w_n^*(\xi) \sin \pi n \eta \quad (2.3.7)$$

где $w_n^*(\xi)$ является асимптотическим представлением $w_n(\xi)$ при больших значениях аргумента гиперболических функций и выражается формулой:

$$w_n^*(\xi) = \frac{q_0 \sin \pi n c}{2\pi^3 n^3} e^{-\pi n |d - \xi|} \left[1 + \pi n |d - \xi| \right] \operatorname{sgn}(\xi - d) \quad (2.3.8)$$

Число M подбирается так, чтобы обеспечить непрерывность прогиба в точке приложения силы. В зависимости от величины a_* число M разное и чем больше a_* , тем оно меньше.

На рис.2.3.2 представлены пространственные картинки формы прогиба прямоугольной пластинки с отношением сторон $a_* = 0.5$ при действии сосредоточенной силы в точке $d = 0.25a_*$, $c = 0.7$ с двух точек зрения.

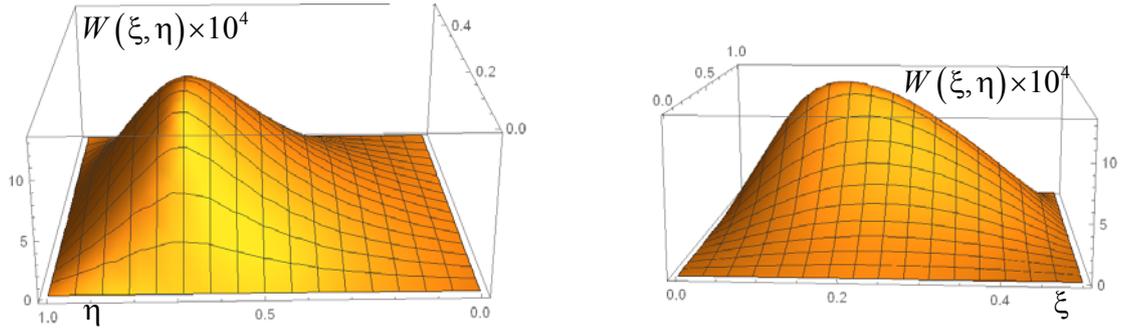


Рис. 2.3.2 Форма прогиба шарнирно-опертой по всем сторонам пластинки при $a_* = 0.5$, $d = 0.25a_*$, $c = 0.7$

Максимальный прогиб достигается в точке $x_{\max} = 0.18$, $y_{\max} = 0.689$ и равен

$$W_{\max} = 0.001325 \quad (2.3.9)$$

2. На стороне $x = 0$ ($\xi = 0$) - шарнирное опирание, а сторона $x = a$ ($\xi = a_*$) жестко закреплена.

В этом случае для $w_n(\xi)$ будем иметь

$$w_n(\xi) = -\frac{q_0 \sin \pi n c}{\pi^3 n^3 (2a_* \pi n - \text{sh } 2\pi a_* n)} \left\{ \left[\pi n d \text{ch}(2a_* - d) \pi n + \text{sh}(2a_* - d) \pi n - \right. \right. \\ \left. \left. - (2a_* - d) \pi n \text{ch } \pi n d - (1 + 2a_*(a_* - d) \pi^2 n^2) \text{sh } \pi n d \right] \text{sh } \pi n \xi + \quad (2.3.10) \right. \\ \left. + 2\pi n \xi \left[(a_* - d) \pi n \text{ch } \pi n d - \text{sh}(a_* - d) \pi n \text{ch } \pi a_* n \right] \text{ch } \pi n \xi + \right. \\ \left. + H(\xi - d) (2a_* \pi n - \text{sh } 2\pi a_* n) \left[\text{sh } \pi n (\xi - d) - \pi n (\xi - d) \text{ch } \pi n (\xi - d) \right] \right\}$$

При больших значениях n имеем

$$w_n(\xi) \approx w_n^*(\xi) = \frac{q_0 \sin \pi n c}{2\pi^3 n^3} e^{-\pi n |d - \xi|} \left[\pi n |d - \xi| + 1 \right] \quad (2.3.11)$$

Следовательно, как и выше, для вычисления прогиба $W(\xi, \eta)$ можно использовать формулу (2.3.7) с $w_n(\xi)$ и $w_n^*(\xi)$, определяемыми формулами (2.3.10) и (2.3.11).

На рис.2.3.3, подобно рис.2.3.2, представлены пространственные картинки формы прогиба такой же прямоугольной пластинки, что и выше, но с одной заземленной стороной. Для возможности проведения сравнения полагается, что и сосредоточенная сила действует в той же точке $d = 0.25a_*$, $c = 0.7$.

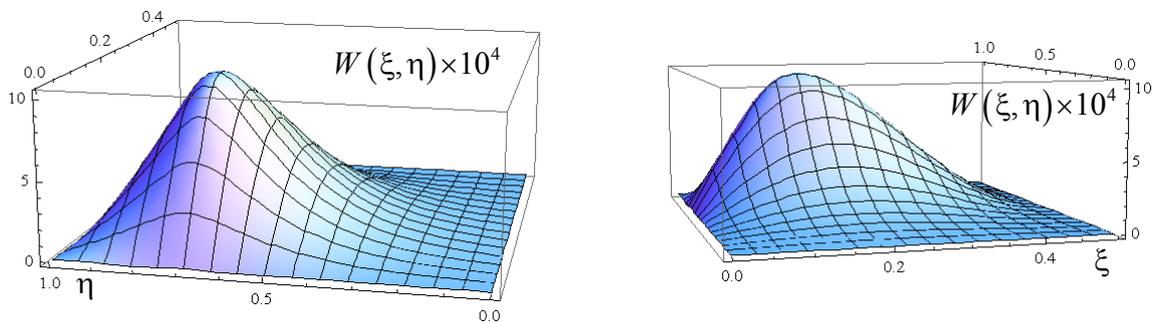


Рис. 2.3.3 Форма прогиба заземленной по одной стороне пластинки при $a_* = 0.5$, $d = 0.25a_*$, $c = 0.7$

Максимальный прогиб достигается в точке $x_{\max} = 0.158$, $y_{\max} = 0.696$ и равен

$$W_{\max} = 0.001038 \quad (2.3.12)$$

В случае, когда на стороне $x = a(\xi = a_*)$ - шарнирное опирание, а сторона $x = 0(\xi = 0)$ жестко заземлена, максимальный прогиб достигается в точке $x_{\max} = 0.184$, $y_{\max} = 0.698$ и равен

$$W_{\max} = 0.000587 \quad (2.3.13)$$

3. На обеих сторонах заданы условия жесткого защемления.

В этом случае для $w_n(\xi)$ будем иметь выражение

$$\begin{aligned}
 w_n(\xi) = & \frac{q_0 \sin \pi n c}{2\pi^3 n^3 (1 + 2a_*^2 \pi^2 n^2 - \operatorname{ch} 2\pi a_* n)} \left\{ \pi n (d + \xi) \operatorname{ch} (2a_* - d - \xi) \pi n + \right. \\
 & + \pi n (-2a_* + d - \xi - 4a_* \xi (a_* - d) \pi^2 n^2) \operatorname{ch} (d - \xi) \pi n + \operatorname{sh} (2a_* - d - \xi) \pi n - \\
 & - \operatorname{sh} (d - \xi) \pi n - \operatorname{sh} (2a_* - d + \xi) \pi n + \operatorname{sh} (d + \xi) \pi n + \\
 & + \pi n \left[(\xi - d) \operatorname{ch} (2a_* - d + \xi) \pi n + (2a_* - d - \xi) \operatorname{ch} (d + \xi) \pi n + \right. \\
 & + 2\pi n (d \xi \operatorname{sh} (2a_* - d - \xi) \pi n - a_* (a_* - d + \xi) \operatorname{sh} (d - \xi) \pi n) + \\
 & + 2(a_* - d) \pi n (a_* - \xi) \operatorname{sh} (d + \xi) \pi n \left. \right] - \\
 & - 2H(\xi - d) (1 + 2a_*^2 \pi^2 n^2 - \operatorname{ch} 2\pi a_* n) \left[\operatorname{sh} \pi n (\xi - d) - \pi n (\xi - d) \operatorname{ch} \pi n (\xi - d) \right] \left. \right\}
 \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

а при больших значениях n следующие асимптотические представления

при $\xi < d$

$$w_n^*(\xi) = \frac{q_0 \sin \pi n c}{2\pi^3 n^3} e^{-\pi n (d - \xi)} \left[\pi n (d - \xi) + 1 \right] \tag{2.3.15}$$

при $\xi > d$

$$w_n^*(\xi) = -\frac{q_0 \sin \pi n c}{2\pi^3 n^3} e^{-\pi n (d + \xi)} \left[\pi n d (1 + \pi n \xi) + \pi n \xi (1 + \pi n d) + 1 \right] \tag{2.3.16}$$

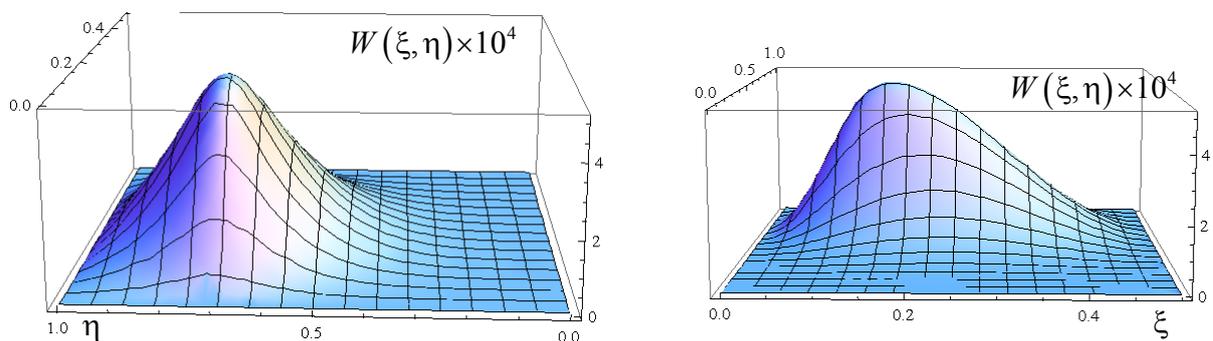


Рис. 2.3.4 Форма прогиба защемленной по двум сторонам пластинки при

$$a_* = 0.5, d = 0.25a_*, c = 0.7$$

Здесь также для вычисления прогиба $W(\xi, \eta)$ можно использовать формулу (2.3.7) с $w_n(\xi)$ и $w_n^*(\xi)$, определяемыми формулами (2.3.14)–(2.3.16).

На рис.2.3.4, как и выше, представлены пространственные картинки формы прогиба такой же прямоугольной пластинки, что и выше, но с двумя защемленными сторонами. Для возможности проведения сравнения опять полагается, что и сосредоточенная сила действует в той же точке $d = 0.25a_*$, $c = 0.7$.

Максимальный прогиб достигается в точке $x_{\max} = 0.166$, $y_{\max} = 0.6995$ и равен

$$W_{\max} = 0.000512 \quad (2.3.17)$$

Для наглядности результаты, полученные по максимальному прогибу, сгруппируем в таблицу 2.3.1.

Таблица 2.3.1

Тип граничных условий на противоположных сторонах		$a_* = 0.5, d = 0.125, c = 0.7$		
$\xi = 0$	$\xi = 0.5$	W_{\max}	x_{\max}	y_{\max}
шарнир	шарнир	0.001325	0.18	0.689
шарнир	защемление	0.001038	0.158	0.696
защемление	шарнир	0.000587	0.184	0.698
защемление	защемление	0.000512	0.166	0.6995

Исходя из данных таблицы 2.3.1 и учитывая близость точки приложения сосредоточенной силы к стороне $\xi = 0$, можно утверждать, что защемление стороны приводит к более, чем двухкратному, уменьшению прогиба. По расположению точки достижения максимального прогиба можно заметить, что

по оси ξ , она располагается относительно далеко от точки приложения силы, причем больше при заземленной стороне $\xi = 0$. По оси же η она очень близка к точке приложения силы. Это объясняется тем, что при принятом значении $a_* = 0.5$ пластинка удлинена в направлении оси η .

ГЛАВА 3 ЛОКАЛИЗОВАННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНОГО КРАЯ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ ПО ДВУМ СТОРОНАМ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

В настоящей главе исследуются вопросы устойчивости прямоугольной пластинки, две противоположные стороны которой шарнирно оперты, третья сторона либо шарнирно оперта, либо закреплена, а на четвертую, свободную в смысле опирания, сторону действует сжимающая нагрузка. В такой ситуации потеря устойчивости носит локальный характер, будучи сосредоточенной в окрестности свободного края. Рассмотрены случаи как консервативной, так и следящей сжимающей нагрузки. Показано, что в статической постановке задачи устойчивости пластинки определить критическую следящую нагрузку, приводящую к потере устойчивости невозможно. В связи с этим в третьем параграфе этой главы проводится исследование потери устойчивости в динамической постановке

§ 3.1 О локализованной неустойчивости свободного края шарнирно опертой по трем сторонам прямоугольной пластинки

Рассмотрим прямоугольную пластинку толщиной $2h$ со сторонами a и b , в прямоугольной системе координат $Oxyz$ занимающую область $\Omega = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, h \ll \min(a, b)\}$ и шарнирно опертую по сторонам $y = 0$, $y = b$ и $x = a$. На стороне $x = 0$ действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка (Рис. 3.1.1)

Уравнение устойчивости пластинки имеет вид [24]

$$\Delta^2 w + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \alpha^2 = \frac{P}{D} \quad (3.1.1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа, $w(x, y)$ - поперечное перемещение

(прогиб), P - сжимающая нагрузка, $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ - жесткость пластинки на

изгиб, E, ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластинки.

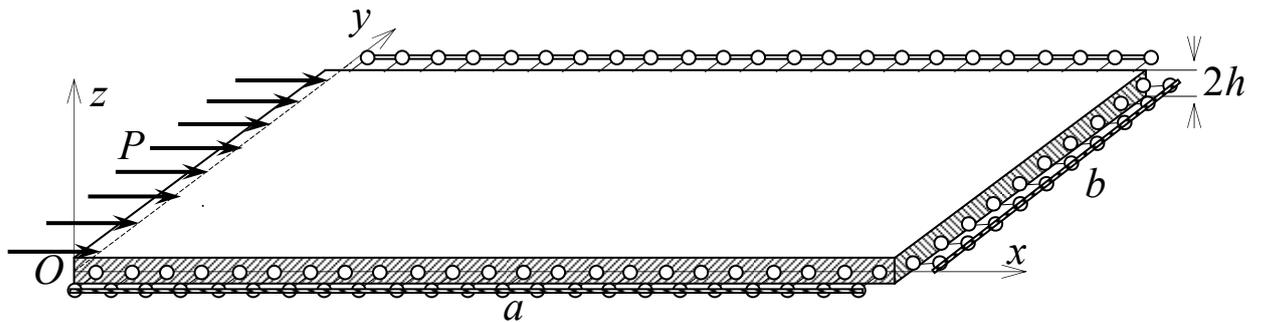


Рис. 3.1.1 Схематическое представление поставленной задачи

Условия свободного опирания краев пластинки $y = 0, b$ и $x = a$ записываются в виде

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b \quad (3.1.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = a \quad (3.1.3)$$

Край пластинки $x = 0$ считается свободным от опирания, следовательно, должны быть удовлетворены условия равенства нулю изгибающего момента:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (3.1.4)$$

и перерезывающей силы. Последнее в случае консервативной нагрузки имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (3.1.5)$$

а, в случае следящей нагрузки, - вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (3.1.6)$$

Для удобства, последние два условия запишем в виде одного условия с параметром κ , соответствующей заменой которого можно получить и случай консервативной нагрузки ($\kappa = \alpha^2$), и случай следящей нагрузки ($\kappa = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \kappa \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (3.1.7)$$

Таким образом, необходимо решить уравнение (3.1.1) при граничных условиях (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4) и (3.1.7).

Исходя из граничных условий (3.1.2), решение уравнения (3.1.1) можно представить в виде разложения

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = n\pi / b \quad (3.1.8)$$

поскольку указанные граничные условия будут выполняться тождественно.

Подстановка (3.1.8) в уравнение (3.1.1) приводит к решению последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_n^{(4)} - 2\lambda_n^2 (1 - \alpha_n^2) f_n^{(2)} + \lambda_n^4 f_n = 0 \quad (3.1.9)$$

где

$$\alpha_n^2 = \alpha^2 / (2\lambda_n^2) \quad (3.1.10)$$

Решение уравнения (3.1.9) представим в виде

$$f_n(x) = A_n \exp \lambda_n p x \quad (3.1.11)$$

Тогда для определения параметра p получаем характеристическое уравнение

$$p^4 - 2(1 - \alpha_n^2) p^2 + 1 = 0. \quad (3.1.12)$$

В статье [48], для общего решения уравнений (3.1.9) используются корни биквадратного уравнения (3.1.12) в виде

$$p = \pm \left[1 - \alpha_n^2 \pm i \alpha_n \sqrt{2 - \alpha_n^2} \right]^{1/2}. \quad (3.1.13)$$

Однако, как показано в [84], более удобно использовать корни (3.1.13) в преобразованном виде:

$$p_{1,2} = s_1 \pm i s_2; \quad p_{3,4} = \pm p_{1,2} \quad (3.1.14)$$

где

$$s_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha_n^2}{2}}, \quad s_2 = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2}} \quad (3.1.15)$$

Используя представления (3.1.14) для p и (3.1.11) для $f_n(x)$, общее решение уравнения (3.1.1) можно записать следующим образом:

$$f_n(x) = A_n \operatorname{sh} \lambda_n s_1 x \sin \lambda_n s_2 x + B_n \operatorname{sh} \lambda_n s_1 x \cos \lambda_n s_2 x + \\ + D_n \operatorname{ch} \lambda_n s_1 x \sin \lambda_n s_2 x + C_n \operatorname{ch} \lambda_n s_1 x \cos \lambda_n s_2 x \quad (3.1.16)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n - константы, подлежащие определению из граничных условий.

Граничные условия (3.1.3), (3.1.4) и (3.1.7), с учетом (3.1.8), переходят в следующие условия для $f_n(x)$

$$f_n(a) = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0; \\ \left. \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial x^2} - \nu \lambda_n^2 f_n(x) \right|_{x=0} = 0; \quad (3.1.17) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial x^2} - (2 - \nu) \lambda_n^2 f_n(x) \right] + \kappa \left. \frac{\partial f_n(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

Удовлетворяя последним двум условиям в (3.1.17), найдем

$$A_n = \frac{-1 + \nu + 2s_2^2}{2s_1s_2} C_n$$

$$D_n = -\frac{s_1(\kappa - \lambda_n^2 + \nu\lambda_n^2 - 4s_2^2\lambda_n^2)}{s_2(\kappa + \lambda_n^2 + \nu\lambda_n^2 - 4s_2^2\lambda_n^2)} B_n$$
(3.1.18)

Исходя из сущности введенного выше параметра κ , можно заменить его на другой аналогичный параметр β , определяемый формулой:

$$\beta = \frac{4s_2^2\lambda_n^2 - \kappa}{\lambda_n^2}$$
(3.1.19)

При $\kappa = 0$, очевидно, будем иметь $\beta = 4s_2^2$, а при $\kappa = \alpha^2$, с учетом (3.1.15) и (3.1.10), нетрудно проверить, что будем иметь $\beta = 0$. Таким образом, $\beta = 0$ будет соответствовать случаю консервативной нагрузки, в $\beta = 4s_2^2$ - случаю следящей нагрузки.

Используя (3.1.19), выражения (3.1.18) упростятся и примут вид

$$A_n = \frac{-1 + \nu + 2s_2^2}{2s_1s_2} C_n; \quad D_n = \frac{s_1(1 - \nu + \beta)}{s_2(1 + \nu - \beta)} B_n$$
(3.1.20)

Подставляя (3.1.20) в (3.1.16) и удовлетворяя оставшимся двум условиям в (3.1.17), получим следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$B_n \left[\operatorname{sh} \zeta_1 \cos \zeta_2 + \frac{s_1(1 - \nu + \beta)}{s_2(1 + \nu - \beta)} \operatorname{ch} \zeta_1 \sin \zeta_2 \right] +$$

$$+ C_n \left[\operatorname{ch} \zeta_1 \cos \zeta_2 + \frac{-1 + \nu + 2s_2^2}{2s_1s_2} \operatorname{sh} \zeta_1 \sin \zeta_2 \right] = 0$$
(3.1.21)

$$B_n \left[\frac{s_1}{s_2} (1 - \nu + \beta - 4s_2^2) \operatorname{ch} \zeta_1 \sin \zeta_2 + (3 - \nu + \beta - 4s_2^2) \operatorname{sh} \zeta_1 \cos \zeta_2 \right] +$$

$$+ C_n \frac{1 + \nu - \beta}{2s_1s_2} \left[2\nu s_1s_2 \operatorname{ch} \zeta_1 \cos \zeta_2 + (-1 + \nu - 2\nu s_2^2) \operatorname{sh} \zeta_1 \sin \zeta_2 \right] = 0$$

где введены обозначения

$$\zeta_1 = \lambda_n s_1 a, \quad \zeta_2 = \lambda_n s_2 a. \quad (3.1.22)$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы системы (3.1.21), необходимого для существования нетривиального решения, т.е. ненулевых значений постоянных B_n и C_n , получим уравнение для определения параметра α_n , характеризующего критическую нагрузку,

$$s_2 \left[3 + \beta + (-2 + \beta)v - v^2 - 4s_2^2 \right] \text{sh } 2\zeta_1 + \\ + s_1 \left[1 + \beta - (2 + \beta)v + v^2 - 4s_2^2 \right] \sin 2\zeta_2 = 0 \quad (3.1.23)$$

Отметим, что рассматриваемая задача была доложена на международной школе-конференции «Механика-2016», 3-7 октября 2016 и включена в сборник ее трудов [98]. Позже в работе [98] была замечена неточность, допущенная при выводе дисперсионного уравнения и повлекшая к ошибочному заключению. В работе [98] последнее уравнение было получено со знаком минус между слагаемыми.

Если полученное уравнение имеет решение, удовлетворяющее условию

$$0 < \alpha_n^2 < 2, \quad (3.1.24)$$

то s_1 из (3.1.15) будет вещественным числом и, следовательно, уравнение (3.1.9) будет иметь решение, затухающее от свободного края по координате x . Такие решения принято считать локализованными в окрестности свободного края.

Рассмотрим предельные случаи, когда $a/b \rightarrow \infty$ и когда $a/b \rightarrow 0$.

В первом случае из уравнения (3.1.23) непосредственно замечаем, что первое слагаемое, содержащее гиперболический синус, будет стремиться к бесконечности, и, поэтому, его коэффициент должен быть равен нулю

$$3 + \beta + (-2 + \beta)v - v^2 - 4s_2^2 = 0$$

Подставив сюда выражение s_2 из (3.1.15), получим уравнение для определения параметра α_n , связанного с внешней нагрузкой соотношением

$$\alpha_n = \frac{b}{\pi n} \sqrt{\frac{P}{2D}},$$

$$2\alpha_n^2 = 3 + \beta + (-2 + \beta)v - v^2 \quad (3.1.25)$$

В случае консервативной нагрузки ($\beta = 0$) полученное уравнение преобразуется к виду

$$2\alpha_n^2 = (1 - v)(3 + v) < 4 \quad (3.1.26)$$

и для произвольного значения коэффициента Пуассона имеет решение, удовлетворяющее условию (3.1.24).

В случае следящей нагрузки ($\beta = 4s_2^2 = 2\alpha_n^2$) оно принимает вид

$$2\alpha_n^2 v = -(1 - v)(3 + v) < 0 \quad (3.1.27)$$

и ни при каком значении коэффициента Пуассона не имеет решения, удовлетворяющего условию (3.1.24).

Заметим, что последнее утверждение очевидно при общепринятом предположении, что коэффициент Пуассона изменяется в пределах $[0, 0.5]$.

Но, согласно известному соотношению теории упругости изотропных тел [35]

$$v = \frac{3K - 2\mu}{6K + 2\mu}$$

где K, μ – модули объемной деформации и сдвига, положительные для стабильных материалов, существование материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона теоретически не исключено. В обзорной статье [32] достаточно широко представлены работы в этой области. В частности, отмечено, что в 1987 году К.Войцеховски [94] предложил первую двумерную модель термодинамически стабильной изотропной системы с $v < 0$, а также,

что в том же году Р.Лэйксом были опубликованы результаты испытаний синтезированного пенополиэфира с $\nu = -0.7$ [73].

Исходя из вышесказанного, уравнение (3.1.27) было исследовано на наличие корня α_n , удовлетворяющего условию (3.1.24), и для отрицательных коэффициентов Пуассона. И в этом случае, такого корня не оказалось.

Во втором случае ($a/b \rightarrow 0$) непосредственной подстановкой убеждаемся, что оба слагаемых уравнения (3.1.23) обращаются в ноль. Поэтому, заменив синусы первыми членами их разложения в ряд в окрестности нуля, получаем

$$s_2 \left[3 + \beta + (-2 + \beta)\nu - \nu^2 - 4s_2^2 \right] 2\zeta_1 + \\ + s_1 \left[1 + \beta - (2 + \beta)\nu + \nu^2 - 4s_2^2 \right] 2\zeta_2 = 0$$

откуда, учитывая (3.1.22), получаем:

$$4s_2^2 - \beta = 2(1 - \nu) \quad (3.1.28)$$

Последнее уравнение в случае консервативной нагрузки ($\beta = 0$) преобразуется к виду

$$\alpha_n^2 = 1 - \nu \quad (3.1.29)$$

и, очевидно, при любом значении коэффициента Пуассона имеет решение, удовлетворяющее условию (3.1.24), а в случае следящей нагрузки ($\beta = 4s_2^2 = 2\alpha_n^2$) оно просто теряет смысл.

В итоге можно сделать вывод, что в случае, когда противоположная свободному краю сторона пластины шарнирно-оперта, при действии на свободный край консервативной нагрузки локализованная неустойчивость всегда, т.е. независимо от отношения a/b , имеет место и критическая нагрузка определяется из уравнения, получаемого из (3.1.23) подстановкой ($\beta = 0$), а при действии следящей нагрузки возможность возникновения локализованной неустойчивости отсутствует.

Численный анализ. Поскольку локализованная неустойчивость возможна только при консервативной нагрузке, то выпишем уравнение (3.1.23) для этого случая в виде:

$$s_2 \left[4s_1^2 - (1 + \nu)^2 \right] \operatorname{sh} 2\pi n a_* s_1 + s_1 \left[(1 - \nu)^2 - 4s_2^2 \right] \sin 2\pi n a_* s_2 = 0 \quad (3.1.30)$$

где $a_* = a/b$.

В общем случае, при заданном значении a_* для каждого n существует свой корень уравнения (3.1.30) α_n . Численный анализ этих корней, с учетом связи внешней нагрузки с корнями α_n , определяемую не самим корнем, а произведением $n\alpha_n$, показал, что при любом значении a_* наименьшая критическая нагрузка, приводящая к потере устойчивости по первой форме,

определяется корнем $\alpha_1 = \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{P}{2D}}$.

На рис.3.1.2 показаны кривые зависимости приведенной критической нагрузки α_1 от параметра a_* , определяющего геометрию пластинки, для различных значений коэффициента Пуассона материала пластинки.

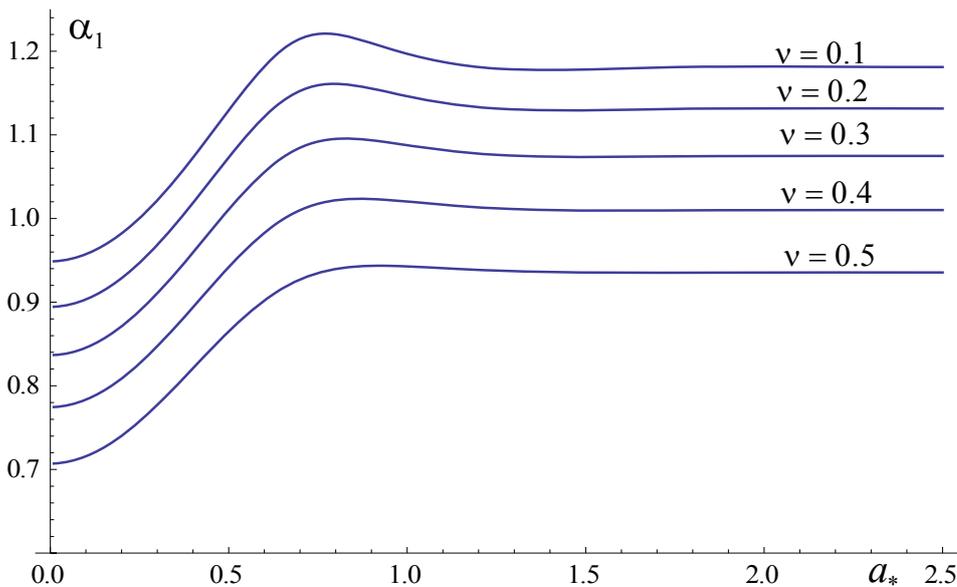


Рис.3.1.2 Зависимость критической нагрузки от отношения сторон пластинки

На графиках рис. 3.1.2 замечаем горбинки, указывающие на то, что при определенной геометрии пластинка максимально устойчива. При этом более выраженные при малых значениях коэффициента Пуассона.

В таблице 3.1.1 для разных значений этого коэффициента приведены значения параметров a_* и α_1 , а также процентное превышение α_1 по отношению к α_∞ , соответствующего предельному значению при $a_* \rightarrow \infty$ и определяемому формулой

$$\alpha_\infty = \sqrt{\frac{(1-\nu)(3+\nu)}{2}} \quad (3.1.31)$$

Таблица 3.1.1

ν	a_*	α_1	$(\alpha_1 - \alpha_\infty)/\alpha_\infty$ %
0.0	0.75	1.28	4.22
0.1	0.77	1.22	3.37
0.2	0.8	1.16	2.61
0.3	0.83	1.09	1.94
0.4	0.87	1.02	1.35
0.5	0.92	0.94	0.86

Исходя из данных таблицы и учитывая, что многие из материалов, пригодных для изготовления тонкостенных конструкций, имеют коэффициент Пуассона в пределах 0.25 – 0.35, для шарнирно опертой по трем сторонам прямоугольной пластинки можно рекомендовать придерживаться отношения свободной стороны к опертой, равного 0.83.

Перейдем к построению форм потери устойчивости. Полагая, что α_n является корнем уравнения (3.1.30), одно из уравнений (3.1.21), например первое, и формулы (3.1.20) позволяют выразить все постоянные интегрирования через одну и выписать представление (3.1.16) в виде:

$$f_n(x) = C_n \left\{ \frac{-1 + \nu + 2s_2^2}{2s_1s_2} \operatorname{sh} \lambda_n s_1 x \sin \lambda_n s_2 x + \operatorname{ch} \lambda_n s_1 x \cos \lambda_n s_2 x - \right. \\ \left. - \Delta \left[\operatorname{sh} \lambda_n s_1 x \cos \lambda_n s_2 x + \frac{s_1(1-\nu)}{s_2(1+\nu)} \operatorname{ch} \lambda_n s_1 x \sin \lambda_n s_2 x \right] \right\} \quad (3.1.32)$$

где

$$\Delta = \frac{\operatorname{ch} \zeta_1 \cos \zeta_2 + \frac{-1 + \nu + 2s_2^2}{2s_1s_2} \operatorname{sh} \zeta_1 \sin \zeta_2}{\operatorname{sh} \zeta_1 \cos \zeta_2 + \frac{s_1(1-\nu)}{s_2(1+\nu)} \operatorname{ch} \zeta_1 \sin \zeta_2} \quad (3.1.33)$$

На рис. 3.1.3 и рис. 3.1.4 показаны первая и вторая формы локальной потери устойчивости квадратной пластинки ($a_* = 1$) с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$, а на рис. 3.1.5 и рис. 3.1.6 - те же формы для узкой полосы ($a_* = 0.1$).

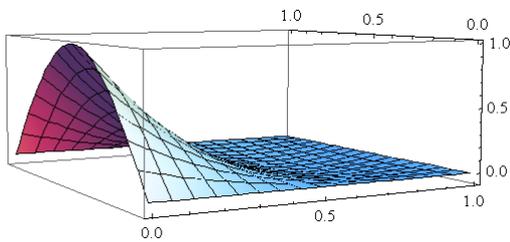


Рис. 3.1.3 Первая форма ($a_* = 1$)

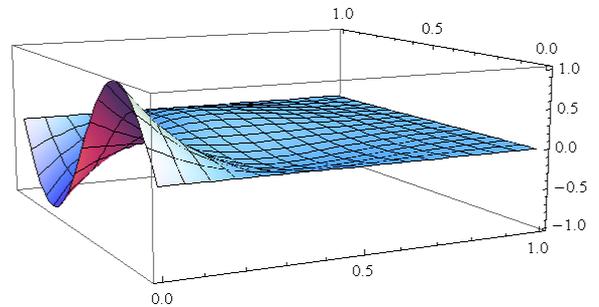


Рис. 3.1.4 Вторая форма ($a_* = 1$)

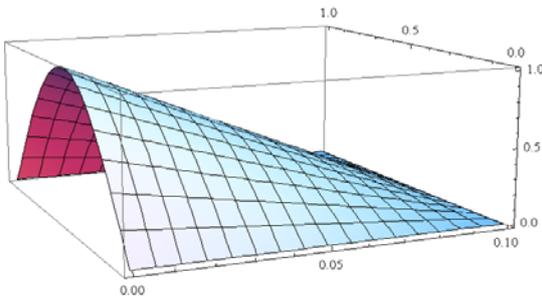


Рис. 3.1.5 Первая форма ($a_* = 0.1$)

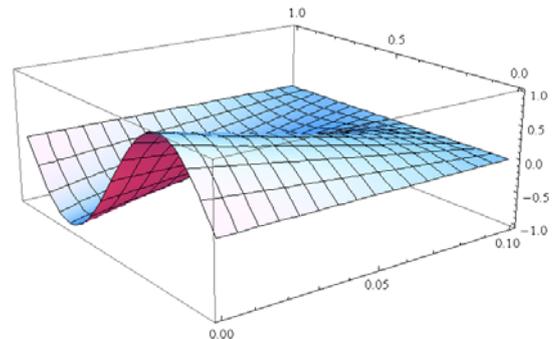


Рис. 3.1.6 Вторая форма ($a_* = 0.1$)

Если на рис. 3.1.5 и рис. 3.1.6 трудно заметить локальный характер потери неустойчивости, то рис. 3.1.3 и рис. 3.1.4 это явно демонстрируют уже для квадратной пластинки.

Для выяснения влияния коэффициента Пуассона ν на прогиб пластинки, на рис. 3.1.7 показано сечение $y = 0.5b$ квадратной $a_* = 1$ пластинки, потерявшей устойчивость по первой форме, а на рис. 3.1.8 – сечение $y = 0.75b$ той же пластинки при потере устойчивости по второй форме для разных значений коэффициента Пуассона $\nu = 0.1; 0.3; 0.5$.

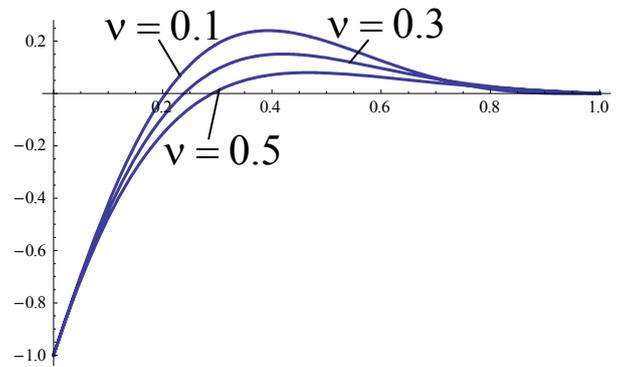
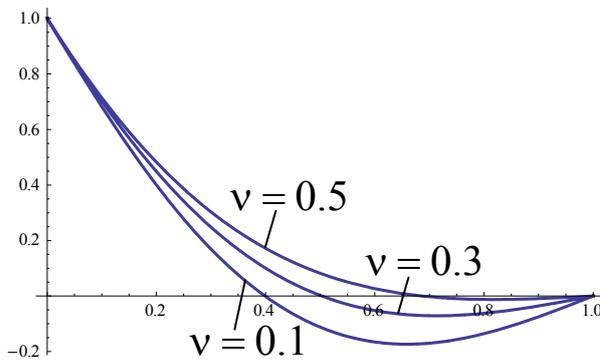


Рис. 3.1.7 Первая форма ($y = 0.5b$)

Рис. 3.1.8 Вторая форма ($y = 0.75b$)

Из рисунков непосредственно видно, что прогиб у пластинок с меньшим коэффициентом Пуассона больше. Кроме того замечаем, что у первой формы зона явно выраженного искажения первоначально плоской формы пластинки у свободного ее края шире, чем у второй формы. Численные расчеты для больших значений a_* подтверждают тот факт, что чем больше номер формы, тем она более локализована. На степень локализации определенную роль оказывает и коэффициент Пуассона, но это влияние не настолько существенно.

§ 3.2 О локализованной неустойчивости свободного края прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам и жестко защемленной по третьей стороне.

Рассмотрим прямоугольную пластинку толщиной $2h$ со сторонами a и b , в прямоугольной системе координат $Oxyz$ занимающую область $\Omega = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, h \ll \min(a, b)\}$ и шарнирно опертую по сторонам $y = 0$ и $y = b$, и жестко защемленную по стороне $x = a$. На стороне $x = 0$ действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка (Рис. 3.1.2)

Уравнение устойчивости пластинки имеет вид [24] (3.1.1). Все обозначения сохраняются.

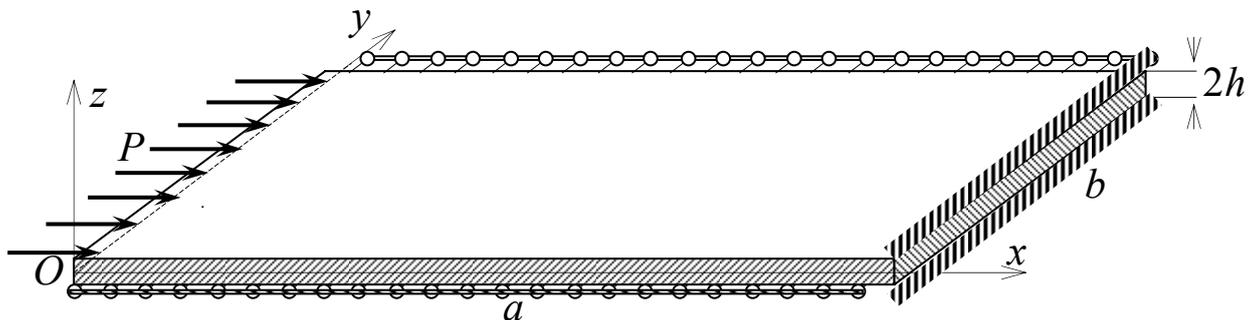


Рис. 3.2.1 Схематическое представление поставленной задачи

Условия свободного опирания краев пластинки $y = 0, b$ даются формулами (3.1.2), а условия жесткого защемления стороны $x = a$ записываются в виде

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = a \quad (3.2.1)$$

Край пластинки $x = 0$ считается свободным от опирания, следовательно, как и в предыдущем параграфе, должны быть удовлетворены условия равенства

нулю изгибающего момента (3.1.4) и перерезывающей силы (3.1.7), которое записано в общем, для консервативной и следящей нагрузок, виде.

Таким образом, необходимо решить уравнение (3.1.1) при граничных условиях (3.1.2), (3.2.1), (3.1.4) и (3.1.7).

Как и выше, решение уравнения (3.1.1) представляется в виде разложения (3.1.8)

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = n\pi / b$$

Тогда граничные условия (3.1.2) будут выполняться тождественно.

Далее процедуру решения описывать не будем, потому что вплоть до формул (3.1.20) пришлось бы повторить.

Удовлетворяя условиям жесткого защемления стороны $x = a$ (3.2.1), которыми и отличается рассматриваемая задача от предыдущей, получим следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} B_n \left[\operatorname{sh} \zeta_1 \cos \zeta_2 + \frac{s_1}{s_2} \frac{1 - \nu + \beta}{1 + \nu - \beta} \operatorname{ch} \zeta_1 \sin \zeta_2 \right] + \\ + C_n \left[\operatorname{ch} \zeta_1 \cos \zeta_2 - \frac{1 - \nu - 2s_2^2}{2s_1 s_2} \operatorname{sh} \zeta_1 \sin \zeta_2 \right] = 0 \\ B_n \left[\frac{4s_1^2 s_2}{1 - \beta + \nu} \operatorname{ch} \zeta_1 \cos \zeta_2 + \frac{2s_1 (1 + \beta - \nu - 2s_2^2)}{1 - \beta + \nu} \operatorname{sh} \zeta_1 \sin \zeta_2 \right] + \\ + C_n \left[-(1 - \nu) s_1 \operatorname{ch} \zeta_1 \sin \zeta_2 + (1 + \nu) s_2 \operatorname{sh} \zeta_1 \cos \zeta_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы этой системы, подобно (3.1.23), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} (1 - \nu)(\beta + 1 - \nu) + 2s_2^2 (2\nu - \beta) + s_2^2 [3 + \beta + (-2 + \beta)\nu - \\ - \nu^2 - 4s_2^2] \operatorname{ch} 2\zeta_1 - s_1^2 [1 + \beta - (2 + \beta)\nu + \nu^2 - 4s_2^2] \cos 2\zeta_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Рассматривая, как и в предыдущем случае, предельные случаи, в первом случае, т.е. когда $a/b \rightarrow \infty$, как и следовало ожидать, приходим к уравнению

(3.1.25). Во втором же случае, при предельном переходе $a/b \rightarrow 0$, приходим к уравнению

$$8s_1^2 s_2^2 = 0, \quad (3.2.4)$$

не допускающему решения, удовлетворяющего условию (3.1.24), как в случае консервативной, так и в случае следящей нагрузки.

В случае консервативной нагрузки ($\beta = 0$) последний факт очевидным образом указывает на то, что появление локализованной неустойчивости, т.е. существование решения задачи, удовлетворяющего условию (3.1.24), существенно зависит от отношения сторон пластинки $a_* = a/b$. Перейдем к определению этого отношения.

В случае консервативной нагрузки уравнение (3.2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} (1-\nu)^2 + 4\nu s_2^2 + s_2^2 \left[4s_1^2 - (1+\nu)^2 \right] \operatorname{ch} 2\zeta_1 - \\ - s_1^2 \left[(1-\nu)^2 - 4s_2^2 \right] \cos 2\zeta_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Для получения условия появления локализованной неустойчивости необходимо исследовать уравнение (3.2.5) в граничных значениях условия (3.1.24). Нетрудно проверить, что оба граничных значения $\alpha_n^2 = 0$ ($s_2 \rightarrow 0, s_1 \rightarrow 1$) и $\alpha_n^2 = 2$ ($s_1 \rightarrow 0, s_2 \rightarrow 1$) являются корнями уравнения (3.2.5). Для исключения их из рассмотрения в уравнении (3.2.5) заменим соответствующую тригонометрическую функцию двумя членами их разложения в ряд в окрестности нуля.

В первом случае $\alpha_n^2 = 0$ ($s_2 \rightarrow 0, s_1 \rightarrow 1$) будем иметь

$$\begin{aligned} (1-\nu)^2 + 4\nu s_2^2 + s_2^2 \left[4s_1^2 - (1+\nu)^2 \right] \operatorname{ch} 2\pi n a_* s_1 - \\ - s_1^2 \left[(1-\nu)^2 - 4s_2^2 \right] \left[1 - \frac{(2\pi n a_* s_2)^2}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

После простых преобразований и подстановки $s_2 = 0, s_1 = 1$ получим

$$(1+\nu)^2 + 4 + (1-\nu)(3+\nu) \operatorname{ch} 2\pi n a_* + 2(1-\nu)^2 (\pi n a_*)^2 = 0 \quad (3.2.7)$$

Уравнение (3.2.7), будучи суммой положительных величин, вещественных корней иметь не может.

Во втором случае $\alpha_n^2 = 2 (s_1 \rightarrow 0, s_2 \rightarrow 1)$ уравнение (3.2.5) запишем в виде

$$(1-\nu)^2 + 4\nu s_2^2 + s_2^2 \left[4s_1^2 - (1+\nu)^2 \right] \left[1 + \frac{(2\pi n a_* s_1)^2}{2} \right] - s_1^2 \left[(1-\nu)^2 - 4s_2^2 \right] \cos 2\pi n a_* s_2 = 0 \quad (3.2.8)$$

Аналогично предыдущему придем к следующему уравнению

$$4 + (1-\nu)^2 - 2\pi^2 n^2 a_*^2 (1+\nu)^2 + (1+\nu)(3-\nu) \cos 2\pi n a_* = 0 \quad (3.2.9)$$

Это уравнение позволяет найти минимальное значение a_* , после которого уравнение (3.2.3) будет иметь корень α_n , удовлетворяющий условию (3.1.24), что означает потерю устойчивости в окрестности свободного края. Очевидно, что для определенного значения коэффициента Пуассона мы будем иметь решение $n a_* = \text{const}$, то есть для каждого n , представляющего определенную форму потери устойчивости, мы будем иметь свое значение a_* . При этом чем меньше a_* , тем сложнее будет форма потери устойчивости, а это, в свою очередь, приводит к выходу за рамки применимости принятой изначально классической теории Кирхгоффа-Лява. Учитывая сказанное, ограничимся только первой формой потери устойчивости.

В табл. 3.2.1 приводятся численные значения для a_* , найденные из уравнения (3.2.9) при $n=1$, начиная с которых, в зависимости от коэффициента Пуассона ν , появляется локализованная неустойчивость.

Таблица 3.2.1

ν	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$a_* = a/b$	0.379	0.350	0.328	0.310	0.294	0.281

Таким образом, выяснено, что при действии на свободный край равномерно распределенной следящей нагрузки, как и в предыдущем случае, пластинка не теряет устойчивость. При действии же на свободный край равномерно распределенной консервативной нагрузки, в отличие от случая шарнирно опертой противоположной стороны, локализованная неустойчивость имеет место только начиная с определенного значения отношения сторон пластинки $a_* = a/b$, зависящего от величины коэффициента Пуассона материала пластины.

Численный анализ. Учитывая, что потеря устойчивости возможна лишь при консервативной нагрузке, выпишем уравнение (3.2.3), подставив в нем $\beta = 0$

$$(1-\nu)^2 + 4\nu s_2^2 + s_2^2 \left[4s_1^2 - (1+\nu)^2 \right] \operatorname{ch} 2\pi n s_1 a_* - s_1^2 \left[(1-\nu)^2 - 4s_2^2 \right] \cos 2\pi n s_2 a_* = 0 \quad (3.2.10)$$

Не повторяя объяснения, приведенные выше, после уравнения (3.1.30), определим корень $\alpha_1 = \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{P}{2D}}$.

На рис.3.2.2 показаны кривые, аналогичные кривым рис. 3.1.2.

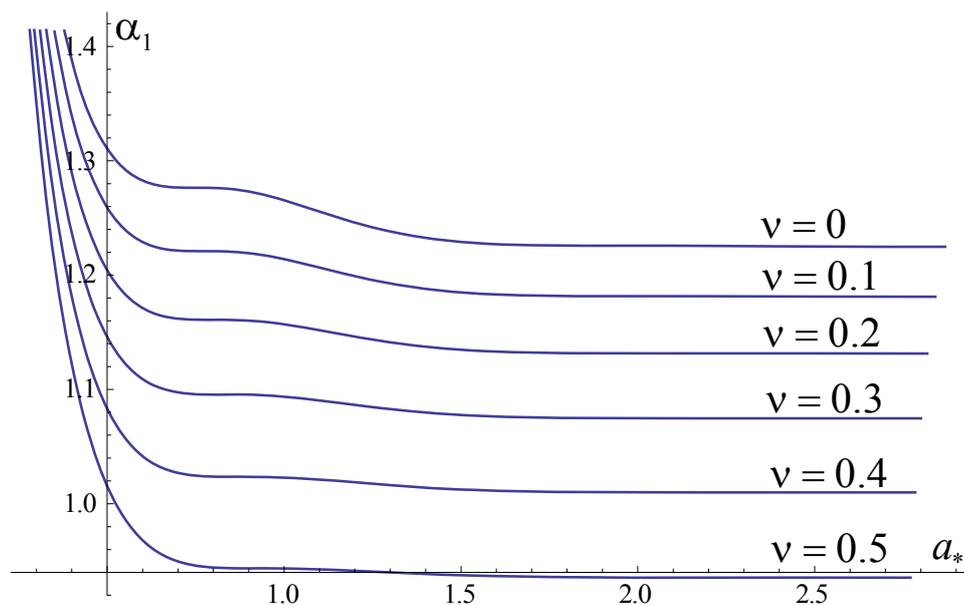


Рис.3.2.2 Зависимость критической нагрузки от отношения сторон пластинки

Здесь, в отличие от рис. 3.1.2, приблизительно на том же месте, что и горбинки рис. 3.1.2, имеются площадки, указывающие на существование интервала, хоть и небольшого, изменения отношения a_* , в котором критическая нагрузка не меняется.

В таблице 3.2.2 для разных значений коэффициента Пуассона приведены интервалы (a_*^0, a_*^1) изменения параметра a_* , в которых изменение параметра α_1 не превосходит 0.1%.

Таблица 3.2.2

ν	a_*^0	a_*^1	$(\alpha_1^0 - \alpha_1^1) / \alpha_1^1 \%$
0.0	0.68	0.83	0.09
0.1	0.69	0.85	0.095
0.2	0.71	0.88	0.094
0.3	0.74	0.93	0.095
0.4	0.77	0.98	0.098
0.5	0.81	1.05	0.097

Из таблицы замечаем, что с увеличением коэффициента Пуассона ширина интервала возрастает от 0.15 до 0.24.

И здесь построим формы потери устойчивости. Полагая, что α_n является корнем уравнения (3.2.10) и выбрав первое из уравнений (3.2.2), которое совпадает с первым уравнением (3.1.21), а также учитывая, что формулы (3.1.20) применимы и здесь, нетрудно проверить, что $f_n(x)$ и в этом случае имеет представление (3.1.32).

На рис. 3.2.3 и рис.3.2.4 показаны формы потери устойчивости пластинки с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ и отношением сторон $a_* = 0.31$, очень близким, с учетом округления в таблице, к соответствующему критическому значению.

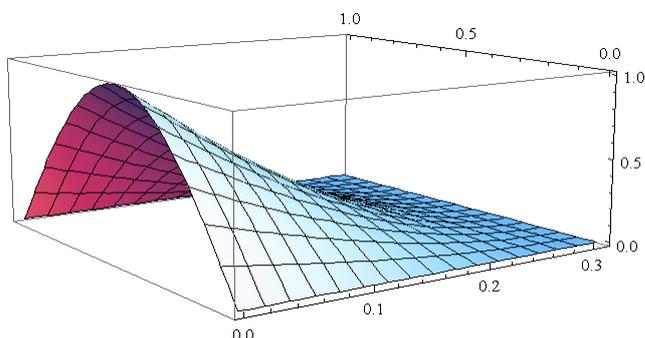


Рис. 3.2.3 Первая форма ($a_* = 0.31$)

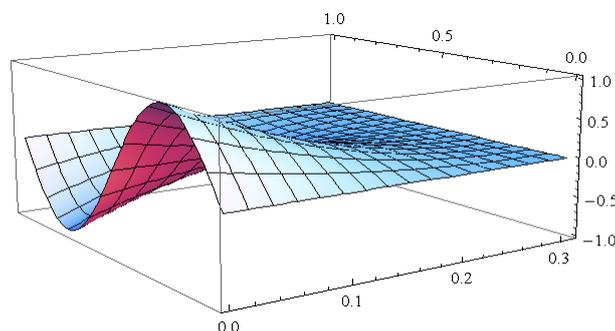


Рис. 3.2.4 Вторая форма ($a_* = 0.31$)

Нетрудно заметить, что приведенные формы практически повторяют формы, приведенные в предыдущем параграфе. Это объясняется тем, что уже при минимальном значении отношения a_* , допускающем потерю устойчивости, начинает проявляться локальный характер потери устойчивости и влияние условий опирания противоположной стороны практически не сказывается.

§ 3.3 О динамической неустойчивости прямоугольной пластинки с одним свободным краем.

В первых двух параграфах этой главы рассматривалась устойчивость пластинки в статической постановке и было показано, что в такой постановке при действии на свободный край равномерно распределенной следящей нагрузки ни в одном из рассмотренных случаев локализованная неустойчивость не возникает.

В настоящем параграфе рассматривается та же задача, но при предположении, что сжимающая нагрузка является следящей, и исследуется возможность появления динамической неустойчивости упругой прямоугольной пластинки в постановке В.В.Болотина [22].

Пусть тонкая упругая пластинка в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Принимаем, что ее стороны $y = 0$ и $y = b$ шарнирно оперты, сторона $x = 0$ свободна от опирания, а сторона $x = a$ или шарнирно оперта, или жестко закреплена. Эти случаи будут рассмотрены ниже отдельно. Для рассмотрения задачи в динамической постановке необходимо иметь инерционные члены, в связи с чем полагаем, что на свободной стороне пластины имеется равномерно распределенная по ней масса с плотностью распределения m . Согласно [22] уравнение устойчивости пластинки имеет вид, схожий с уравнением (3.1.1) в статической постановке, но предполагающий зависимость прогиба $w(x, y, t)$ от времени, которая проявляется лишь в граничных условиях на свободной стороне пластины:

$$\Delta^2 w(x, y, t) + \alpha^2 \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \alpha^2 = \frac{P}{D} \quad (3.3.1)$$

где P - интенсивность равномерно распределенной сжимающей нагрузки, D - изгибная жесткость пластинки.

На свободно опертых краях пластинки имеем граничные условия, схожие с условиями (3.1.2):

$$w(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \text{ и } y = b, \quad (3.3.2)$$

На свободном крае ($x = 0$), где предполагается наличие равномерно распределенной по нему массы m , будем иметь условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial y^2} \right] &= -\frac{m}{D} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

При этом последнее условие является аналогом условия (3.1.6), выписанного для случая, когда внешняя нагрузка является следящей, с добавлением инерционного члена.

Условия на крае $x = a$ будут заданы ниже.

Решение уравнения (3.3.1), удовлетворяющее условиям (3.3.2) и учитывающее наличие инерционного члена в (3.3.3), можно выписать в виде

$$w(x, y, t) = e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \lambda_n y, \quad \lambda_n = n\pi / b \quad (3.3.4)$$

Подставив (3.3.4) в уравнение (3.3.1) приходим к решению последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $f_n(x)$, идентичных уравнениям (3.1.9). Очевидно, что их решения будут иметь вид (3.1.16):

$$\begin{aligned} f_n(x) = & (A_n \sin \lambda_n s_2 x + B_n \cos \lambda_n s_2 x) \operatorname{sh} \lambda_n s_1 x + \\ & + (D_n \sin \lambda_n s_2 x + C_n \cos \lambda_n s_2 x) \operatorname{ch} \lambda_n s_1 x \end{aligned}$$

где A_n, B_n, C_n, D_n – произвольные постоянные,

$$s_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha_n^2}{2}}, \quad s_2 = \frac{\alpha_n}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_n^2 = \frac{P}{2D\lambda_n^2}$$

Условия (3.3.3) посредством функций $f_n(x)$ запишутся в виде:

$$\begin{aligned} f_n''(x) - \nu \lambda_n^2 f_n(x) &= 0 \\ f_n'''(x) - (2 - \nu) \lambda_n^2 f_n'(x) - \frac{m\omega^2}{D} f_n(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Подставляя в эти условия представление функций $f_n(x)$, получим систему

$$\begin{aligned} \lambda_n^2 (C_n (s_1^2 - s_2^2) + 2A_n s_1 s_2) - \nu \lambda_n^2 C_n &= 0 \\ B_n s_1 (s_1^2 - 3s_2^2) - D_n s_2 (s_2^2 - 3s_1^2) - (2 - \nu)(B_n s_1 + D_n s_2) - \eta C_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

где

$$\eta = \frac{m\omega^2}{D\lambda_n^3} \quad (3.3.7)$$

Выразив из полученной системы A_n и D_n через B_n и C_n , искомую функцию запишем в виде:

$$\begin{aligned} f_n(x) = B_n \left\{ \cos \lambda_n s_2 x \operatorname{sh} \lambda_n s_1 x + \frac{s_1 (1 - \nu + 4s_2^2)}{s_2 (1 + \nu - 4s_2^2)} \sin \lambda_n s_2 x \operatorname{ch} \lambda_n s_1 x \right\} + \\ + C_n \left\{ -\frac{1 - \nu - 2s_2^2}{2s_1 s_2} \sin \lambda_n s_2 x \operatorname{sh} \lambda_n s_1 x + \right. \\ \left. + \left[\frac{\eta}{s_2 (1 + \nu - 4s_2^2)} \sin \lambda_n s_2 x + \cos \lambda_n s_2 x \right] \operatorname{ch} \lambda_n s_1 x \right\} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Таким образом, получено общее решение, удовлетворяющее граничным условиям на трех краях пластинки и содержащее две произвольные постоянные, выбором которых будут удовлетворены условия на четвертой стороне. В связи с тем, что, согласно сказанному выше, на этой стороне будут рассмотрены различные граничные условия, рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Свободно опертый край. В этом случае на крае $x = a$ будем иметь условия, которые сводятся к первым двум условиям (3.1.17):

$$f_n(a) = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0;$$

Подставляя выражение (3.3.8) в последние условия, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$B_n \left[\operatorname{sh} \zeta_1 \cos \zeta_2 + \frac{s_1(1-\nu+\beta)}{s_2(1+\nu-\beta)} \operatorname{ch} \zeta_1 \sin \zeta_2 \right] +$$

$$+ C_n \left[\operatorname{ch} \zeta_1 \cos \zeta_2 + \frac{-1+\nu+2s_2^2}{2s_1s_2} \operatorname{sh} \zeta_1 \sin \zeta_2 + \eta \frac{\operatorname{ch} \zeta_1 \sin \zeta_2}{1+\nu-4s_2^2} \right] = 0$$

(3.3.9)

$$B_n \left[\frac{s_1}{s_2} (1-\nu) \operatorname{ch} \zeta_1 \sin \zeta_2 + (3-\nu) \operatorname{sh} \zeta_1 \cos \zeta_2 \right] +$$

$$+ C_n \frac{1+\nu-4s_2^2}{2s_1s_2} \left[2\nu s_1s_2 \operatorname{ch} \zeta_1 \cos \zeta_2 + (-1+\nu-2\nu s_2^2) \operatorname{sh} \zeta_1 \sin \zeta_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2s_1\eta}{1+\nu-4s_2^2} (2s_1s_2 \operatorname{sh} \zeta_1 \cos \zeta_2 + (1-2s_2^2) \operatorname{ch} \zeta_1 \sin \zeta_2) \right] = 0$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы полученной системы, необходимого для существования нетривиального решения, т.е. ненулевых значений постоянных B_n и C_n , получим уравнение

$$-s_1 \left(1 - (2 + 4s_2^2)\nu + \nu^2 \right) \sin 2\zeta_2 - s_2 \left(3 - (2 - 4s_2^2)\nu - \nu^2 \right) \operatorname{sh} 2\zeta_1 +$$

$$+ \eta \left[2s_1s_2 (\operatorname{ch} 2\zeta_1 - \cos 2\zeta_2) \right] = 0$$

где, как и выше, использованы обозначения (3.1.22)

$$\zeta_1 = \lambda_n s_1 a, \quad \zeta_2 = \lambda_n s_2 a.$$

Отсюда

$$\eta = \frac{s_1 \left((1-\nu)^2 - 4s_2^2\nu \right) \sin 2\zeta_2 - s_2 \left((1+\nu)^2 - 4 - 4s_2^2\nu \right) \operatorname{sh} 2\zeta_1}{2s_1 s_2 (\operatorname{ch} 2\zeta_1 - \cos 2\zeta_2)} \quad (3.3.10)$$

Учитывая представление $\eta = \frac{m\omega^2}{D\lambda_n^3}$, для динамической устойчивости пластины необходимо выполнение условия $\eta > 0$. Очевидно, что при отсутствии нагрузки, т.е. при $\alpha_n = 0$, пластинка устойчива, и, следовательно, с возрастанием α_n потеря устойчивости может произойти при первом обращении в ноль либо числителя, либо знаменателя выражения (3.3.10). При этом условие обращения в ноль числителя является уравнением для определения критической следящей нагрузки, приводящей к потере статической устойчивости, получаемым из уравнения (3.1.23) после подстановки $\beta = 4s_2^2$.

Приравняв числитель и знаменатель выражения (3.3.10) к нулю, для определения критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости, получим совокупность уравнений

$$s_1 \left((1-\nu)^2 - 4s_2^2\nu \right) \sin 2\zeta_2 + s_2 \left(4 - (1+\nu)^2 + 4s_2^2\nu \right) \operatorname{sh} 2\zeta_1 = 0 \quad (3.3.11)$$

$$\operatorname{ch} 2\zeta_1 - \cos 2\zeta_2 = 0 \quad (3.3.12)$$

Уравнение (3.3.11), как было показано в первом параграфе этой главы, не имеет корней, удовлетворяющих условию $\alpha_n^2 < 2$. Нетрудно проверить, что и уравнение (3.3.12) не имеет таких корней. Следовательно, локализованная неустойчивость не может иметь места.

При $\alpha_n^2 > 2$ уравнения (3.3.11) и (3.3.12) примут вид

$$\sqrt{\frac{\alpha_n^2}{2}-1}\left((1-\nu)^2-2\alpha_n^2\nu\right)\sin\left(\sqrt{2}\pi n a_*\alpha_n\right)+$$

$$+\frac{\alpha_n}{\sqrt{2}}\left(4-(1+\nu)^2+2\alpha_n^2\nu\right)\sin\left(2\pi n a_*\sqrt{\frac{\alpha_n^2}{2}-1}\right)=0 \quad (3.3.13)$$

$$\cos\left(2\pi n a_*\sqrt{\frac{\alpha_n^2}{2}-1}\right)-\cos\left(\sqrt{2}\pi n a_*\alpha_n\right)=0 \quad (3.3.14)$$

где $a_* = a/b$.

Решением уравнения (3.3.14) является последовательность

$$\frac{\alpha_n}{\sqrt{2}} = \frac{k^2 + (a_*n)^2}{2a_*nk} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.3.15)$$

которая не является упорядоченной и порядковый номер наименьшего ее члена существенно зависит от параметра a_* .

Корни же уравнения (3.3.13) превосходят корни (3.3.15).

Введем в рассмотрение безразмерный параметр $\delta \equiv \sqrt{\frac{Pb^2}{4\pi^2 D}} = \frac{\alpha_n n}{\sqrt{2}}$,

характеризующий внешнюю нагрузку. Тогда, из (3.3.15), для каждой формы ($n = 1, 2, 3, \dots$) будем иметь

$$\delta = \min_k \frac{k^2 + (a_*n)^2}{2a_*k} \quad (3.3.16)$$

Очевидно, что наименьшую критическую нагрузку мы будем иметь при $n = 1$, но, в зависимости от a_* , при различных значениях параметра k .

Графики зависимости δ от параметра a_* для первых двух форм потери устойчивости представлены на рис. 3.3.1

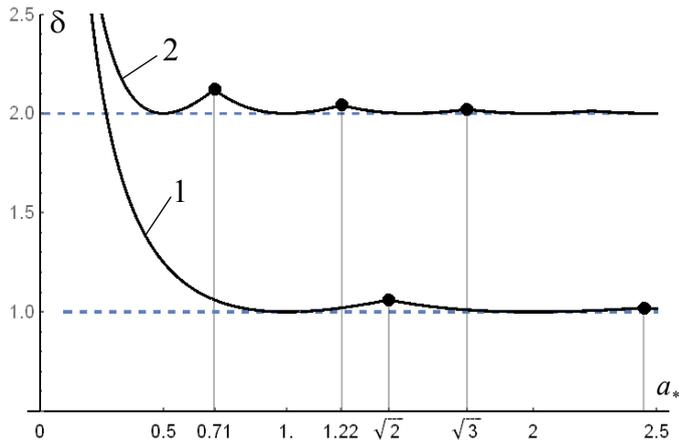


Рис.3.3.1. Зависимость критической следящей нагрузки от относительной длины пластинки: кривая 1 – первая форма потери устойчивости, кривая 2 – вторая форма

Нетрудно проверить, что переход с кривой k на кривую $k + 1$ происходит при значениях

$$a_* = \frac{\sqrt{k(k+1)}}{n} \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots)$$

и в этих точках имеем

$$\delta = \frac{2k+1}{2\sqrt{k(k+1)}} n .$$

Интересно заметить, что при $n = 1$ значение a_* является средним геометрическим двух последовательных натуральных чисел, а значение δ - отношением их среднего арифметического к среднему геометрическому.

Защемленный край. В этом случае на крае $x = a$ имеем условия (3.2.1), которые, с учетом разложения (3.1.8), сводятся к условиям

$$f_n(a) = 0; \quad \left. \frac{\partial f_n(x)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0; \quad (3.3.17)$$

Удовлетворяя этим условиям, получим следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
& B_n \left[\operatorname{sh} \zeta_1 \cos \zeta_2 + \frac{s_1}{s_2} \frac{1-\nu + 4s_2^2}{1+\nu - 4s_2^2} \operatorname{ch} \zeta_1 \sin \zeta_2 \right] + \\
& + C_n \left[\eta \frac{\operatorname{ch} \zeta_1 \sin \zeta_2}{s_2 (1+\nu - 4s_2^2)} + \operatorname{ch} \zeta_1 \cos \zeta_2 - \frac{1-\nu - 2s_2^2}{2s_1 s_2} \operatorname{sh} \zeta_1 \sin \zeta_2 \right] = 0 \\
& B_n \left\{ \frac{2(1-\nu + 2s_2^2)}{(1+\nu - 4s_2^2)} \sin \zeta_2 \operatorname{sh} \zeta_1 + \frac{4s_1 s_2}{(1+\nu - 4s_2^2)} \cos \zeta_2 \operatorname{ch} \zeta_1 \right\} + \\
& + C_n \left\{ (1+\nu) \frac{s_2}{s_1} \cos \zeta_2 \operatorname{sh} \zeta_1 - (1-\nu) \sin \zeta_2 \operatorname{ch} \zeta_1 + \right. \\
& \left. + \frac{2\eta s_2}{(1+\nu - 4s_2^2)} \left(\cos \zeta_2 \operatorname{ch} \zeta_1 + \frac{s_1}{s_2} \sin \zeta_2 \operatorname{sh} \zeta_1 \right) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Из условия равенства нулю детерминанта матрицы этой системы, подобно (3.3.9), получим уравнение, откуда найдем:

$$\begin{aligned}
\eta = \frac{1}{2s_1 s_2^3 (s_2 \operatorname{sh} 2\zeta_1 - s_1 \sin 2\zeta_2)} \left\{ (1-\nu)^2 + 4s_2^2 (1-2s_2^2) - \right. \\
\left. - s_1^2 \left[(1-\nu)^2 - 4s_2^2 \nu \right] \cos 2\zeta_2 - s_2^2 \left[(1+\nu)^2 - 4 - 4\nu s_2^2 \right] \operatorname{ch} 2\zeta_1 \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Как и в предыдущем случае, для определения критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости, получим совокупность уравнений

$$\begin{aligned}
(1-\nu)^2 + 4s_2^2 (1-2s_2^2) - s_1^2 \left[(1-\nu)^2 - 4s_2^2 \nu \right] \cos 2\zeta_2 - \\
- s_2^2 \left[(1+\nu)^2 - 4 - 4\nu s_2^2 \right] \operatorname{ch} 2\zeta_1 = 0 \\
s_2 \operatorname{sh} 2\zeta_1 - s_1 \sin 2\zeta_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Первое из уравнений (3.3.20) является дисперсионным уравнением в статической постановке и имеет единственный положительный корень $\alpha_n = \sqrt{2}$, который, как нетрудно проверить, приводит лишь к тривиальному, нулевому решению поставленной задачи. Второе из уравнений (3.3.20) не имеет

корней, удовлетворяющих условию $\alpha_n^2 < 2$, полагая же $\alpha_n^2 > 2$, оно переходит в уравнение, которое в выражении через введенный выше параметр δ имеет вид

$$\delta \sin 2\pi a_* \sqrt{\delta^2 - n^2} - \sqrt{\delta^2 - n^2} \sin 2\pi a_* \delta = 0 \quad (3.3.21)$$

На основе численного решения этого уравнения найдена зависимость параметра δ от относительной длины a_* . Для сравнительного анализа на рис.3.3.6 эта зависимость для первой формы показана вместе с аналогичной кривой для случая шарнирного опирания края $x = a$,

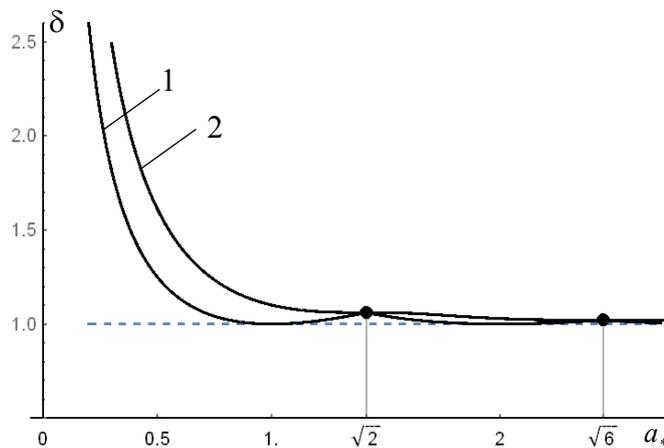


Рис. 3.3.6. Зависимость критической следящей нагрузки от относительной длины пластинки: кривая 1 соответствует шарнирному опиранию, а кривая 2 – жесткому защемлению края $x = a$.

Как видно из графиков на рис.3.3.6 критическое значение сжимающей нагрузки при защемленной стороне, как и следовало ожидать, превосходит аналогичное значение при свободно опертой стороне, причем это превосходство наиболее существенно при малых значениях относительной длины. Особый интерес представляют значения относительной длины a_* , равные среднему геометрическому двух последовательных натуральных чисел, когда независимо от условия закрепления четвертой стороны критические значения сжимающей нагрузки совпадают.

Таким образом, показано, что в динамической постановке задачи при действии на свободный край равномерно распределенной сжимающей следящей нагрузки в обоих случаях происходит потеря устойчивости, при этом критическое значение сжимающей нагрузки во втором случае превосходит соответствующее значение для первого случая и только при определенных значениях относительной длины эти значения совпадают. Минимальные значения относительной длины пластинки, начиная с которых может наступить потеря устойчивости, определяются условиями прочности материала пластинки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа относится к исследованию тонкостенных элементов типа упругого стержня и тонкой прямоугольной пластинки в плане прогиба от сосредоточенных нагрузок и устойчивости от сжимающей нагрузки.

В работе получены следующие результаты:

- построена система сосредоточенных сил меньшей интенсивности, которая вместе с сосредоточенной силой, приложенной вне центра балки и вызывающей асимметрию при ее изгибе, максимально приближает изогнутую ось балки к симметричной кривой;
- исследовано влияние промежуточной точечной опоры шарнирного или скользящего типа на величину критического усилия, вызывающего потерю устойчивости центрально сжатого упругого стержня, при различных условиях закрепления одного его конца. Показано, что при установке, вместо опоры шарнирного типа опоры типа муфты в точке $0.74l$, в случае шарнирно закрепленного конца, и в точке $0.8l$, в случае жесткого его защемления, приводит к более чем двукратному (≈ 2.12) увеличению значения критической силы;
- найдена зависимость максимального прогиба и точки его достижения шарнирно опертой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластины при действии на нее распределенной по линии, параллельной или перпендикулярной к шарнирно опертым сторонам, нагрузки от отношения сторон прямоугольника и координаты линии приложения нагрузки. Сравнение результатов, полученных при различных граничных условиях на двух других сторонах, показало, что влияние этих условий существенно лишь когда длина этих сторон больше четверти длины шарнирно опертых сторон. Рассмотрен также случай действия сосредоточенной силы;
- построены графики зависимости критической консервативной нагрузки, вызывающей локализованную потерю устойчивости шарнирно опертой по трем сторонам прямоугольной пластинки, от отношения сторон пластинки при различных значениях коэффициента Пуассона ее материала;

- найден интервал изменения, в зависимости от коэффициента Пуассона, отношения сторон шарнирно опертой по трем сторонам прямоугольной пластинки, обеспечивающего ее максимальную устойчивость при действии на свободную сторону сжимающей консервативной нагрузки;
- для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум сторонам и жестко защемленной по третьей, противостоящей к свободной, стороне, найдено минимальное значение отношения сторон пластинки, после которого может иметь место локализованная потеря устойчивости от действия сжимающей консервативной нагрузки;
- показано, что с увеличением отношения сторон пластинки значение критической силы достаточно резко уменьшается, выходя на предельное значение для удлиненных пластинок, но при этом имеется интервал, на котором изменение значения критической силы не превосходит десятой доли процента. С изменением коэффициента Пуассона от 0 до 0.5 ширина этого интервала возрастает от 0.15 до 0.24.
- показано, что в динамической постановке задачи при действии на свободный край равномерно распределенной сжимающей следящей нагрузки, в обоих случаях закрепления противостоящей стороны, происходит потеря устойчивости, но она не носит локальный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997 – 414 с.
2. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991, 336 с.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.-М.: Наука, 1987.-360 с.
4. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластинки. //Прикладная механика, 1994, т. 30, №2, сс. 61-68
5. Амбарцумян С.А., Гнуни В.Ц. О вынужденных колебаниях и динамической устойчивости трехслойных ортотропных пластинок. Изв. АН СССР., Мех. и Машиностр.-1961-N3, сс.117-123
6. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок. Изв. АН АрмССР., Механика,-1959,т. 29, №4, сс. 159-166.
7. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Изд. ЕГУ, Ереван 1999, 440с.
8. Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Колебания и динамическая устойчивость цилиндрической оболочки в магнитном поле. Доклады АН АрмССР, 1972, т. 54. №4, сс. 210 – 216.
9. Багдасарян Г.Е. Устойчивость магнитоэластичных прямоугольных пластин. Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології 2006, вип. 3, сс. 9-19
10. Багдасарян З.Р. Изгиб прямоугольной пластинки равномерно распределенной нормальной нагрузкой. Ученые записки, Ереван, 2007, N3, с. 52-61.
11. Багдасарян Р.А., Казарян К.Б. Изгибные поверхностные волны в ортотропной пластинке. Докл. АН Арм. ССР, 1986, т. 83, №2, с. 69 – 72.
12. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М., Наука, 1980, 256с.
13. Белубекян В.М. К задаче устойчивости пластин с учётом поперечных сдвигов //Изв. РАН. МТТ. 2004. №2. С.126-131.
14. Белубекян В.М. Локализованная неустойчивость равномерно сжатой пластинки. // Изв. НАН РА. Механика. Ереван, 2007. Т.60. №1, сс.33-37.
15. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Устойчивость прямоугольной пластинки при действии “следающей” нагрузки, приложенной на свободной кромке. // Изв. НАН РА. Механика. Ереван, 2008. Т.61. №2, сс.23-32.

16. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки //В сб.: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем». Ереван: Изд.ЕГУ, 1997.С.95-99.
17. Белубекян М.В., Гараков В.Г. Задача С.А.Амбарцумяна о выборе места расположения опор балки. В сб. «Седьмая годовичная научная конференция РАУ», Ереван, Изд-во РАУ, 2013, с. 19-22.
18. Белубекян М.В., Казарян К.Б., Мартиросян С.Р. Модельные задачи учета трения для консольной балки со следящей нагрузкой. Доклады НАН Армении, 2007, т. 107, № 2, сс. 167-172
19. Белубекян М.В., Чил-Акопян Э.О. Задачи локализованной неустойчивости пластинки со свободным краем //Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. сс.34-39.
20. Белубекян Э.В., Дарбинян А.З., Саакян А.А. Термоупругая задача изгиба слоистой композитной ребристой пластинки. Доклады НАН РА, 2017, т. 117, №1, сс. 44-51.
21. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М.-Л., Гостехиздат, 1949, 772с.
22. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости М.: "Гос. Изд-во физико-математической литературы", 1961 г., 340с.
23. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М, Наука, 1967, 984с.
24. Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М., Физматлит, 2010. - 279 с.
25. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. К геометрически нелинейной уточненной теории ортотропных пластин переменной толщины. Изв. НАН Армении, Механика, 2007, т.60, N4, сс. 43-52.
26. Гнуни В.Ц. Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки //В сб. «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем», Ереван, Изд. ЕГУ, 1997, сс.115-120.
27. Гнуни В.Ц. Устойчивость балки с двумя произвольно, но симметрично расположенными опорами при действии следящей нагрузки. // Изв. НАН РА. Механика. Ереван, 2006. Т.59. №1, сс.25-30.
28. Гнуни В.Ц., Элоян А.В. Оптимальный выбор расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки // Изв. НАН РА. Механика. Ереван, 2001. Т.54. №3, сс.14-17.
29. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Р.Г., Михасев Г.И. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонких упругих полубесконечных круговых цилиндри-

ческих оболочек со свободным торцом// Механика машин и механизмов и материалов. 2016. N2 (35). С.34-46.

30. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин//ДАН СССР. 1954. Т.ХСV. №3. С.477-479.

31. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Изд. "Гитутюн" НАН РА, Ереван 2000,-122 с.

32. Конёк Д.А., Войцеховски К.В., Плескачевский Ю.М., Шилько С.В. Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (обзор), Механика композитных материалов и конструкций, 2004, т.10, №1, сс. 35-69.

33. Коненков Ю.К. Об изгибной волне релеевского типа //Акустич. журнал. 1960. Т.6. №1. сс.124-126.

34. Лагозинский С.А., Соколов А.И. Устойчивость прямолинейных стержней, нагруженных следящими силами. //Сб. статей «Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин», Под редакцией В.А. Светлицкого, О.С. Нарайкина, М., Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2005, сс. 244-259.

35. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. М., Наука, 1965, 204 с.

36. Мартиросян С.Р. Об одной неконсервативной задаче устойчивости консольной балки. Изв. НАН РА. Механика, 2009, т. 62, № 2. сс. 10-13

37. Минасян М.М. Нелинейные волны и колебания в физически активных деформируемых средах. Ер., Изд-во ЕГУ, 2007, 256 с.

38. Михасев Г.И., Товстик П.Е. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы, М., Физматлит, 2009, 282 с.

39. Мовсисян Л.А. К устойчивости цилиндрических оболочек с наполнителем со смешанными граничными условиями. // Изв. НАН РА. Механика, 2016, т. 69, № 2. сс. 40-46

40. Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г. К устойчивости консольного стержня при следящей нагрузке. // Изв. НАН РА. Механика, 2006, т. 59, № 1. сс. 31-36

41. Погосян Д.М. Неконсервативная задача устойчивости сжатой прямоугольной пластинки //Изв. НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №2. сс.40-48.

42. Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В. Устойчивость стержня на упругом основании при непотенциальном нагружении. // Строительная механика и расчет сооружений. 2008, № 5, сс. 5-11.

43. Самвелян Л.А. Волны локализованные вдоль кромки предварительно напряженной тонкой пластинки. // Изв. НАН РА. Механика. Ереван, 1996. Т.49. №4, сс.96-100.

44. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван, Изд. АН Армении, 1992, 235 с.
45. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. Т.1, М., Наука, 1965, 365с.
46. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек (Асимптотические методы). М.: Наука, 1995. 320 с.
47. Цатурян А.Е. Поперечные колебания вертикального стержня под воздействием следящей нагрузки. Изв. НАН РА. Механика, 2010, т. 64, № 2. сс. 78-81.
48. Adali S. Stability of a Rectangular Plate under Nonconservative and Compressive forces. //Int.J.Solunds and ctruct. 1982, 18(12), p.1043-1052.
49. Avetisyan A.S., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. Stability of a beam with periodic supports. //Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 2015, 68 (3). pp. 16-21.
50. Auciello N.M. Stability and Vibration of Rods under Follower Forces; the Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials (BCOP) method // Proc. of AIMETA2009 XIX International Congress of the Italian Association for Theoretical and Applied Mechanics, Ancona, September 14-17, 2009, Italy. ARAS Edizioni, ISBN/ISSN. 9788896378083.
51. Baker G., Pavlovic M.N., Elastic stability of simply supported rectangular plates under locally edge forces, ASME Transaction, Journal of Applied Mechanics, 1982, 49: pp. 177-179.
52. Banichuk N.V., Barsuk A.A. Localization of eigenforms and limit transitions in problems of stability of rectangular plates // J.Appl.Math. and Mech. 2008. V.72(2). P.302-307.
53. Banichuk N.V., Ishlinskii A.Yu. Some special features of problems of the stability and vibrations of rectangular plate //J. Appl.Math. and Mech. 1995. 59(4). P.593-597.
54. Bert C.W., Devarakonda K.K., Buckling of rectangular plate subjected to nonlinearly distributed in-plane loading, International Journal of Solids and Structures, 2003, 40: pp. 4097-4106.
55. Brangwynne C.P., MacKintosh F.C., Kumar S, Geisse N.A., Talbot J, Mahadevan L, Parker K.K., Ingber D.E., Weitz D.A. Microtubules can bear enhanced compressive loads in living cells because of lateral reinforcement // JCB, The Journal of Cell Biology. 2006 Jun 5, 173(5), pp.733-741.
56. Das M., Levine A.J. and MacKintosh F.C. Buckling and force propagation along intracellular microtubules //Europhysics Letters 2008, Vol.84, 18003. DOI 10.1209/0295-5075/84/18003

57. Ding, Z. Natural Frequency of Rectangular Plates Using a Set of Static Beam Functions in Rayleigh-Ritz Method. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 189(1):81–87.
58. Eftekhari S.A., Jafari A.A., Accurate variational approach for free vibration of simply supported anisotropic rectangular plates, *Archived of Applied Mechanics*, 84 (2014), 607-614.
59. Eftekhari S.A., Jafari A.A., Vibration of an initially stressed rectangular plate due to an accelerated traveling mass, *Scientia Iranica*, 2012, 19, 5, 1195-1213
60. Farag, N. H. and Pan, J. Free and Forced In-Plane Vibration of Rectangular Plates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1998, 103(1):408–413.
61. Hosseini-Hashemi, S., Khorshidi, K., Amabili, M.: Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin plates. *J. Sound Vib.* 315, 318–342 (2008)
62. Ilanko S. Vibration and post-buckling of in-plane loaded rectangular plates using a multi-term Galerkin's method. *Jour. of Applied Mechanics* 2002, 69, pp.589–592.
63. Jafari A.A, Eftekhari S.A. An efficient mixed methodology for free vibration and buckling analysis of orthotropic rectangular plates. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 218: pp. 2670–2692, doi: 10.1016/j.amc.2011.08.008
64. Jana P, Bhaskar K. Stability analysis of simply-supported rectangular plates under non uniform uniaxial compression using rigorous and approximate plane stress solutions. *Thin Walled Structures*, 2006, 44: pp.507–516
65. Jones RM. Buckling of bars, plates, and shells. Blacksbourg, VA: Bull Ridge Publishing; 2006. 824p.
66. Kang J.H., Leissa A.W. Exact solutions for the buckling of rectangular plates having linearly varying in-plane loading on two opposite simply supported edges. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, V. 42, Is. 14, pp. 4220-4238 <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.12.011>
67. Kang J.H., Leissa A.W. Vibration and buckling of SS-F-SS-F rectangular plates loaded by in-plane moments. *International journal of structural stability and dynamics*, 2001, V. 01(04), pp. 527–543 doi: 10.1142/S0219455401000299
68. Kerr AD, Alexander H. An application of the extended Kantorovich method to the stress analysis a clamped rectangular plate. *Acta Mechanica* 1968; 6: pp. 180–96.
69. Khan M.Z., Walker A.C., Buckling of plates subjected to localized edge loading, *Structural Engineering*, 1972, 50(6): pp. 225-232.
70. Kokhanenko Yu.V., Zelenskii V.S., “Influence of the geometrical parameters on the critical load in three-dimensional stability problems for rectangular plates and beams,” *Int. Appl. Mech.*, 39, No. 9, pp. 1073–1080 (2003).

71. Kolomiets L., Orobey V., Lymarenko A. Non-conservative problems of the stability of bar structures // Technical journal, Hrcak, Croatia, Vol.9, No3 (2015), 311-316
72. Kumar Panda S, Ramachandra LS Buckling of rectangular plates with various boundary conditions loaded by non-uniform inplane loads. International Journal of Mechanical Sciences, 2010, 52(6): pp.819–828
73. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio. Science, 1987, v. 235, pp. 1038- 1040.
74. Langthjem M.A., Sugiyama Y., Dynamic stability of columns subjected to follower loads: a survey, Journal of Sound and Vibration, 8 (2000), 809–851.
75. Lee G.E., Reissner E. Note on a problem of beam buckling //Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) (1975) 26:839. doi:10.1007/BF01596086
76. Leissa A.W., Ayoub E.F., Vibration and buckling of a simply supported rectangular plates subjected to a of inplane concentrated forces, Journal of Sound and Vibration, 1988, 127: pp. 155-171.
77. Liu Y., Xue Y. Some Aspects of Research on Mechanics of Thin Elastic Rod. The 4th Symposium on the Mechanics of Slender Structures (MoSS2013) // Journal of Physics: Conference Series 448 (2013) 012001, doi:10.1088/1742-6596/448/1/012001
78. Liu Y.G., Pavlovic M.N., Elastic Stability of flat rectangular plates under patch compression, International Journal of Mechanical Sciences, 2007, 49, pp. 970-982
79. Norris A.N. Flexural edge waves. Journal of Sound and Vibration, 1994, v.171, pp.571-573
80. Norris AN, Krylov VV, Abrahams ID. Flexural edge waves and comments on "A new bending wave solution for the classical plate equation", J Acoust Soc Am. 2000 Mar;107(3):1781-1785.
81. Rajalingham, C., Bhat, R.B. and Xistris, G.D. Vibration of Rectangular Plates Using Plate Characteristic Functions as Shape Functions in the Rayleigh-Ritz Method. Journal of Sound and Vibration, 1996, 193(2):497–509.
82. Sarat Kumar Panda and Ramachandra L.S., “Buckling of rectangular plates with various boundary conditions loaded by non-uniform inplane loads”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 52, No. 6, June 2010, pp. 819-828, doi:10.1016/j.ijmecsci.2010.01.009
83. Shan W. and Chen Z. Mechanical instability of thin elastic rods // Journal of Postdoctoral Research, 2013, Vol.1, No. 2, pp.1-8
84. Sharifian R., Belubekyan V. Stability of a rectangular plate axially compressed on its two opposite free edges. //ZAMM, 2012, v.92(7), pp.558-564.

85. Shatalov M., Marais J., Fedotov J., and Tenkam M., “Longitudinal Vibration of Isotropic Solid Rods: From Classical to Modern Theories,” *Advances in Computer Science and Engineering*, M. Schmidt, ed., InTech Open, Rijeka, Croatia, 2011, pp.187–214.
86. Shukla, K.K., Nath, Y., Kreuzer, E., Sateesh Kumar, K.V., 2005. Buckling of laminated composite rectangular plates. *Journal of Aerospace Engineering* 18 (4), pp.215–223.
87. Shvartsman B.S. Static Analysis of the Cantilever Subjected to Subtangential Follower Forces. *Adv. Theor. Appl. Mech.*, Vol. 1, 2008, no. 3, pp.121 – 130
88. Shvartsman B.S., Direct method for analysis of flexible beam under a follower load, *Proceedings of Computational of Mechanics for the Next Millennium*, Vol. 1, Singapore, 1999, pp.155-160
89. Shvartsman B.S., Large deflections of a cantilever beam subjected to a follower force. *Journal of Sound and Vibration*, 304 (2007), pp.969-973.
90. Srinivas, S., and Rao, A.K., “Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates,” *Inter. Journal of Solids and Structures*, Vol. 6, No. 10, 1970, pp. 1463– 1481.
91. Sun Y., Choi W.M., Jiang H., Huang Y.Y., Rogers J.A. Controlled Buckling of Semiconductor Nanoribbons for Stretchable Electronics //*Nature Nanotechnology*, 2006, Vol. 1, No. 3, pp.201-207.
92. Taylor R, Govindjee S. Solution of clamped rectangular plate problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2004, 20(10):757–765, doi:10.1002/cnm.652
93. Wang X, Gan L, Zhang Y Differential quadrature analysis of the buckling of thin rectangular plates with cosine-distributed compressive loads on two opposite sides. *Advances in Engineering Software*, 2008, 39(6): pp. 497–504
94. Wojciechowski K.W. Constant thermodynamic tension Monte-Carlo studies of elastic properties of a two-dimensional system of hard cyclic hexamers. *Molecular Physics.*, 1987, v. 61, № 5, pp. 1247-1258.
95. Xiang Y. and Wang C. M. “Exact Buckling and Vibration Solutions for Stepped Rectangular Plates”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 250, No. 3, 2002, pp. 503-517, doi:10.1006/jsvi.2001.3922
96. Xu F., Lu W., Zhu Y. Controlled 3D buckling of silicon nanowires for stretchable electronics //*ACS Nano*, 2011, 5 (1), pp 672–678, doi: 10.1021/nn103189z

97. **Саакян А.А.** Анализ прогиба балки под действием сосредоточенной силы при различных условиях на концах Известия НАН РА , Механика, 2016, т.69, №2, сс. 46-54
98. **Белубекян М.В., Саакян А.А.** Локализованная неустойчивость прямоугольной пластинки при действии сжимающей нагрузки на свободном крае. Труды межд. школы-конференции молодых ученых «Механика 2016», 3-7 октября 2016, Цахкадзор, Армения, сс. 43-46.
99. **Саакян А.А.** Влияние места расположения опоры на величину критической нагрузки сжатого стержня. Известия НАН РА и НПУА. Серия технических наук. 2017, №3, сс. 272-279.
100. **Саакян А.А.** Влияние места расположения и типа опоры на величину критической нагрузки сжатого стержня. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 4, сс.65-74.
101. **Геворгян Г.З., Саакян А.А.** О динамической неустойчивости прямоугольной пластинки с одним свободным краем Труды V международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды», , 3-7 октября 2017, Цахкадзор, Армения, сс. 59-60.
102. **Gevorgyan G.Z. and Sahakyan A.A.** On the dynamic instability of a rectangular plate with one free edge Journal of Physic. Conference Series. 2018, Ser. 991 012024. DOI: /10.1088/1742-6596/991/1/012024
103. **Белубекян М.В., Саакян А.А.** О локализованной неустойчивости свободного края опертой по двум противоположным сторонам прямоугольной пластинки при различных условиях закрепления четвертой стороны. МТТ, 2018, №3, 61-66.