Ереванский государственный университет

Навасардян Карен Аршалуйсович

Вопросы сходимости и единственности рядов по системам Хаара, Уолша и их обобщениям

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

по специальности

01.01.01–"Математический анализ"

Ереван — 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В 1915 г. Н.Н. Лузиным (см. [1, ст. 236]) была поставлена задача: можно ли представить почти всюду сходящимся тригонометрическим рядом произвольную измеримую (действительную) функцию, конечную почти всюду или принимающую значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры? Первые результаты, связанные с этой задачей, были получены им же в работе [1]. Фундаментальные результаты в этом направлении были получены Д.Е. Меньшовым в работах [2] и [3]. Где, в частности, доказана

Теорема (Д.Е. Меньшов [2]). *Для любой почти всюду конечной на* $[0, 2\pi]$ *измеримой функции* f *существует тригонометрический ряд, который сходится к ней почти всюду.*

Затем С.В. Конягином (см. [4]) было доказано, что тригонометрический ряд не может сходиться к бесконечности на множестве положительной меры. Тем самым в одномерном случае проблема представления измеримой функции сходящимся почти всюду (п.в.) тригонометрическим рядом была полностью решена.

Вопросы представления функций общими ортогональными рядами интенсивно рассматривались с тридцатых годов прошлого века Марцинкевичем (см. [5, ст. 312]). Подробно об этой тематике можно узнать из обзорных статей А.А. Талаляна [6], [7] и П.Л. Ульянова [8]. Для достаточно широкого класса ортогональных систем (мажоранта частичных сумм которых имеет тип (2,2)) Ф.Г. Арутюняном и Н.Б. Погосяном получен аналог теоремы Д.Е. Меньшова (см., напр., [9, ст. 452]). А.А. Талалян и Ф.Г. Арутюнян (см. [10]) доказали, что ряды по системам Хаара и Уолша не могут стремиться к $+\infty$ на множестве положительной меры.

Вопросы представления функций ортогональными рядами развивались в разных направлениях: возможность представления функций с помощью одного ряда (универсальный ряд); поведение коэффициентов таких рядов (монотонность, скорость стремления к нулю); представление функций абсолютно сходящимися рядами и т.д.

В главе 1 рассматриваются вопросы представления п.в. конечной измеримой функции рядами по системе Уолша, а также по $\mathscr{H}$-системам (определение системы Уолша приведено в разделе 1.1.2, а определение $\mathscr{H}$-системы – в разделе 1.3.1). В разделе 1.1, в частности, доказывается следующая

Теорема 1.1.3 ([128]). *Пусть* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– монотонная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условиям* $a_n \to 0$, $n \to \infty$, *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. *Тогда для любой п.в. конечной измеримой функции* f, *определенной на* $[0,1]$, *существует последовательность* $\{\delta_n\}$, $\delta_n = 0, \pm 1$, *такая, что ряд по системе Уолша* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *п.в. на* $[0,1]$.

Заметим, что в этой теореме (в общем случае) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ содержит нулевые слагаемые ($\delta_n = 0$), поэтому последовательность модулей коэффициентов $\{|\delta_n a_n|\}$ не может быть монотонной. В разделе 1.2 рассматриваются вопросы представления рядами по системе Уолша, последовательность абсолютных величин коэффициентов которых монотонная и находится над наперед заданной минорантой. Точнее, доказана

Теорема 1.2.1 ([133]). *Для любой последовательности* $a_n \downarrow 0$ *при* $n \to \infty$ *существует ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ *с монотонно убывающими коэффициентами* $b_n \geq a_n$, *который является универсальным относительно знаков в классе почти всюду конечных измеримых функций.*

В работах [129]–[132] рассмотрены теоремы представления для кратных рядов Уолша. Приведем один результат, доказанный в [132].

Теорема 1.1.6 ([132]). *Пусть кратная последовательность положительных действительных чисел* $\{a_{\mathbf{n}}\}$, *где* $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d$, *удовлетворяет следующим условиям: для любого* $M \in \mathbb{N}$ *ряд* $\sum\limits_{\mathbf{n}: n_i \geq M} a_{\mathbf{n}}^2$ *расходится и* $0 < a_{\mathbf{m}} \leq a_{\mathbf{n}}$, *если* $m_i \geq n_i$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, d$. *Тогда существует функция* $f \in \bigcap\limits_{p<2} L^p(0,1)^d$ *с коэффициентами Фурье–Уолша* $|c_{\mathbf{n}}(f)| \leq a_{\mathbf{n}}$, *ряд Фурье–Уолша которой является универсальным относительно знаков в классе п.в. конечных измеримых функций, а для некоторого набора знаков* $\{\delta_{\mathbf{n}}\}$,

$\delta_{\mathbf{n}} = \pm 1$, *ряд*

$$\sum_{\mathbf{n}: n_i \geq 0} \delta_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}(f) W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

В разделе 1.3 приведено определение диадического семейства $\mathscr{D}$ с параметром $\delta \in (0,1)$ в пространстве однородного типа X, а также дается определение системы типа Хаара ($\mathscr{H}$-системы), связанной с семейством $\mathscr{D}$. Рассматриваются вопросы представления функций абсолютно сходящимися рядами по этим системам. Доказана следующая

Теорема 1.3.4 ([134]). *Пусть (X, ρ, μ) – некоторое пространство однородного типа, $\mathscr{D}$ – диадическое семейство с параметром δ в пространстве X, а $\mathscr{H} = \{h\}$ – некоторая система типа Хаара, связанная с системой $\mathscr{D}$. Тогда для любой п.в. конечной на X измеримой функции f существует ряд $\sum\limits_{h \in \mathscr{H}} a_h h$ по системе $\mathscr{H}$, который п.в. абсолютно сходится и*

$$\sum_{h \in \mathscr{H}} a_h h(x) = f(x) \quad \text{п.в. на } X.$$

Из этой теоремы, как следствие, для ограниченной обобщенной системы Хаара получается следующий результат:

Теорема 1.3.6 ([134]). *Пусть $\mathscr{H} = \{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – обобщенная система Хаара, порожденная ограниченной последовательностью $\{p_k\}$. Тогда для любой п.в. конечной на $[0,1)$ измеримой функции f существует абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ такой, что*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) = f(x) \quad \text{п.в. на } [0,1).$$

В разделе 1.4 рассматриваются вопросы представленя рядами Уолша функций пространства $L^p(0,1)$, $p \in (0,1)$, в смысле сходимости этого пространства и доказывается следующая теорема.

Теорема 1.4.1 ([135]). *Пусть последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty$. Тогда существуют числа $\gamma_n = \pm 1$, $n \in \mathbb{N}$,* *такие, что для любого $p \in (0,1)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n W_n(x)$ является универсальным относительно подрядов в классе $L^p(0,1)$ в смысле сходимости пространства $L^p(0,1)$.*

Аналогичные вопросы для системы Хаара были рассмотрены в работе [136] (определение системы Хаара приведено в разделе 1.1.2). Там доказана следующая теорема.

Теорема 1.4.2 ([136]). *Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что для почти всех $x \in [0,1]$ выполняются условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x) = \infty \quad \text{и} \quad a_n \chi_n(x) \to 0.$$

Тогда для любого $p \in (0,1)$ ряд по системе Хаара $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ является универсальным относительно подрядов в классе $L^p(0,1)$ в смысле сходимости пространства $L^p(0,1)$.

Глава 2 посвящена вопросам "исправления" функции с целью улучшения ее свойств. Напомним, что эта идея принадлежит Н. Лузину (см. [42]). Им в 1912 г. был получен знаменитый результат (C-свойство Лузина), согласно которому любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в непрерывную функцию.

Теорема (C-свойство Лузина). *Для любой измеримой, п.в. конечной на $[0,1]$ функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество E с мерой $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$ и непрерывная на $[0,1]$ функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на E.*

Далее в этом направлении получены интересные результаты (см. [43]–[56]). В 1939 г. Д.Е. Меньшов [43] доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема (усиленное C-свойство Меньшова [43]). *Пусть $f(x)$ – измеримая функция, конечная почти всюду на $[0,2\pi]$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно определить непрерывную функцию $g(x)$, совпадающую с $f(x)$ на некотором множестве E, $\mathrm{mes}(E) > 2\pi - \varepsilon$, и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на $[0,2\pi]$.*

Заметим, что в этих теоремах множество E зависит от функции f. Затем теоремы исправления развивались в разных направлениях: 1) возможность выбора "исключительного" множества E_0 (на котором "исправляется" функция f некоторого класса функций $\mathscr{F}$) независящим от f; 2) изменить функцию на множестве малой меры с целью улучшения свойств коэффициентов разложения новой функции (например, монотонность модулей всех или ненулевых коэффициентов).

В 1988 г. М.Г. Григорян доказал, что тригонометрическая система обладает усиленным L^1-свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем:

Теорема (М.Г. Григорян [50]). *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 2\pi]$ с мерой $\mathrm{mes}(E) > 2\pi - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[0, 2\pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0, 2\pi]$, совпадающую с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1[0, 2\pi]$-норме.*

Более того, в работе [54] доказано, что произвольная ортонормированная система обладает усиленным L^1-свойством. Отметим, что существует функция $f \in L^1(0, 1)$, ряд Фурье–Уолша которой не сходится в $L^1(0, 1)$ (см., например, [9]).

В разделе 2.1 рассматриваются ряды по системе Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ с монотонными коэффициентами и доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1.1 ([135]) *Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \in [0, 1]$, $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon$, такое, что для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ существуют функция $\tilde{f} \in L^1(0, 1)$ и числа $\delta_n = 0$ или ± 1 такие, что $\tilde{f}(x) = f(x)$ для $x \in E$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ сходится к функции $\tilde{f}$ в метрике $L^1(0, 1)$.*

Заметим, что из теоремы 2.1.1 непосредственно следует следующая

Теорема 2.1.2 ([135]). *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0, 1)$ существует $\tilde{f} \in L^1(0, 1)$, которая совпадает с f на E и жадный алгоритм которой по системе Уолша сходится к $\tilde{f}$ по норме $L^1(0, 1)$.*

Отметим, что жадные алгоритмы для банаховых пространств относительно нормированных базисов изучены В.Н. Темляковым, С.В. Конягиным, Р. ДеВором, П. Войтащиком, Т.В. Корнером и другими авторами (см. [59]–[73]). Напомним, что если $f \in L^1(0, 1)$, то жадный алгоритм функции f по системе Уолша не обязан сходиться (см. [74]). Поэтому в теореме 2.1.2 “исправление” функции f вне множества E существенно.

Аналогичные теоремы для системы Хаара были получены в работе [136], где в частности доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.3 ([136]). *Пусть ряд по системе Хаара* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ *таков, что для почти всех* $x \in [0,1]$ *выполняются условия* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x) = +\infty$ *и* $a_n\chi_n(x) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$, *такое, что для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *существует* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ *такая, что* $\tilde{f}(x) = f(x)$ *для* $x \in E$, *а ряд Фурье–Хаара функции* $\tilde{f}$ *является подрядом ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, *т.е. существуют числа* $\delta_n = 0$ *или* 1, *такие, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n a_n\chi_n(x)$ *сходится к функции* $\tilde{f}$ *в метрике* $L^1(0,1)$.

В [136] также рассматривались подсистемы $\{\chi_{n_k}(x)\}$ системы Хаара, для которых получен следующий результат.

Теорема 2.1.5 ([136]). *Для любой подсистемы* $\{\chi_{n_k}\}$ *системы Хаара с условием* $\mathrm{mes}\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=i}^{\infty}\Delta_{n_k}\Big) = 1$ $(\Delta_m := \mathrm{supp}(\chi_m))$ *существует ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\chi_{n_k}(x)$, *с* $a_k \downarrow 0$, *такой, что для любого* $\varepsilon > 0$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$, *такое, что для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *существует* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, *которая совпадает с* f *на* E *и ряд Фурье–Хаара которой имеет вид* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k a_{n_k}\chi_{n_k}(x)$, *где* $\delta_k = 0$ *или* 1.

Отметим, что в связи с изучением сходимости жадного алгоритма вновь полученной, исправленной, функции возник следующий вопрос, который представляет самостоятельный интерес.

Вопрос. Можно ли изменить значения любой функции $f(x)$ класса $L^p(0,1)$, $p \geq 1$, на множестве малой меры так, чтобы *все члены* в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по классическим системам (в частности по системам Уолша и Хаара и по тригонометрической системе) по модулю были бы расположены в убывающем порядке?

Ряд работ (см., например, [57], [58], [77]–[80], [135], [136]) были посвящены теоремам исправления, в которых модули ненулевых коэффициентов Фурье вновь полученной функции (по системам Хаара, Уолша, Фабера– Шаудера) монотонно убывали. Отметим, что из доказательств результатов этих работ не ясно, можно ли исправленную функцию выбрать так, чтобы *все члены* в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по модулю были расположены в убывающем порядке.

В разделе 2.2 доказывается, что для системы Уолша это возможно, т.е. исправляемую функцию $\tilde{f}(x)$ можно выбрать так, чтобы

$$|c_k(\tilde{f})| > |c_{k+1}(\tilde{f})|, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2.1 ([137]). *Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\operatorname{mes}(E) > 1-\varepsilon$ и функция $g \in L^1(0,1)$ с коэффициентами Фурье–Уолша*

$$0 < c_{k+1}(g) < c_k(g), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

такие, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E, такую, что ряд Фурье–Уолша функции $\tilde{f}(x)$ сходится к ней по норме $L^1(0,1)$ и модули всех членов последовательности коэффициентов Фурье–Уолша вновь полученной функции имеют вид:

$$|c_k(\tilde{f})| = c_k(g), \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Там же приводится определение универсальной пары (g, E) (определение 2.2.3) и, как следствие из теоремы 2.2.1, получена следующая теорема.

Теорема 2.2.4 ([137]). *Пусть $\varepsilon > 0$ – некоторое число. Тогда существуют функция $g \in L^1(0,1)$ с коэффициентами Фурье–Уолша*

$$0 < c_{k+1}(g) < c_k(g), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\operatorname{mes}(E) > 1-\varepsilon$, которые образуют универсальную пару (g, E) в $L^1[E]$ в смысле модификации относительно знаков коэффициентов Фурье по системе Уолша.

Плотностью подмножества B неотрицательных целых чисел называется величина

$$\rho(B) = \limsup_{n\to\infty} \frac{B_n}{n},$$

где B_n – число элементов из B, не превышающих n.

В разделе 2.2 доказывается также следующая теорема.

Теорема 2.2.5 ([138]). *Для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой* $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$ *такое, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ вида $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x)$, совпадающую с f на E, такую, что*

1. все члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции $\tilde{f}(x)$ по системе Уолша по модулю расположены в убывающем порядке;

2. ряд Фурье–Уолша функции $\tilde{f}_2(x)$ сходится к ней по норме $L^1(0,1)$, а ряд Фурье–Уолша функции $\tilde{f}_1$ абсолютно сходится к ней;

3. плотность спектра $Spec(\tilde{f}_1) := \{k \in \mathbb{N}_0 : \ c_k(\tilde{f}_1) \neq 0\}$ равна 1 и

$$Spec(\tilde{f}_1) \cup Spec(\tilde{f}_2) = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad Spec(\tilde{f}_1) \cap Spec(\tilde{f}_2) = \varnothing.$$

В разделе 2.3 рассматриваются вопросы исправления функций в пространствах $L^p(0,1)$ $(p \geq 1)$ с точки зрения универсальных функций. Отметим один результат М.Г. Григоряна, доказанный в работе [58].

Теорема (М.Г. Григорян, [58]). *Для любых $0 < \varepsilon < 1$, $p \geq 1$ и для каждой функции $f \in L^p(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(0,1)$,* $\mathrm{mes}\{x : f(x) \neq \tilde{f}(x)\} < \varepsilon$, *чтобы все ненулевые члены в последовательности $\{|c_k(\tilde{f})|\}$ были расположены в убывающем порядке (здесь $c_k(\tilde{f})$ – коэффициенты Фурье–Уолша исправленной функции $\tilde{f}(x)$).*

В разделе 2.3 доказывается следующее усиление этой теоремы.

Теорема 2.3.1 ([137]). *Существует функция $g \in L^1(0,1)$ с коэффициентами Фурье–Уолша*

$$c_k(g) > c_{k+1}(g) > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

такая, что для каждой функции $f \in L^p(0,1)$, $p \geq 1$, и любого $\varepsilon > 0$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(0,1)$ с мерой $\mathrm{mes}\{x \in [0,1] : \ f(x) = \tilde{f}(x)\} > 1-\varepsilon$, *ряд Фурье которой по системе Уолша сходится к ней по $L^p(0,1)$-норме и*

$$|c_k(\tilde{f})| = c_k(g) \quad \text{для всех } k \in Spec(\tilde{f}).$$

Функцию g (встречающуюся в фомулировке теоремы 2.3.1) будем назвать *универсальной функцией* в $L^p(0,1),\ p\geq 1$, в смысле модификации относительно знаков коэффициентов Фурье по системе Уолша.

Из теоремы 2.3.1 следует, что *для любых* $0<\varepsilon<1,\quad p>1$ *и для каждой функции* $f\in L^p(0,1)$ *можно найти числа* $\delta_k=\pm 1,0,\quad k=0,1,...,$ *и функцию* $\tilde{f}\in L^p(0,1)$, $\mathrm{mes}\{x:\ f(x)\neq\tilde{f}(x)\}<\varepsilon$, *такую, что*

$$G_m(x,\tilde{f},\Phi)=\sum_{k=0}^{m}\delta_k c_k(g)W_k(x)=S_m(x,\tilde{f},\Phi),\ \forall x\in(0,1),\forall m=0,1,2,\dots,$$

где $\Phi=\{W_k\}$ – система Уолша. Следовательно, *жадный алгоритм функции* $\tilde{f}$ *по системе Уолша сходится к ней как по* $L^p(0,1)$*-норме, так и почти всюду на* $[0,1]$.

Отметим, что в работе [65] построены ортонормированная система $\Psi=\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных функций и непрерывная функция g такие, что если при некоторой функции $f\in L^p,\ p>2$, $\mathrm{mes}\{x\in[0,1]:\ f(x)=g(x)\}>0$, то ее жадный алгоритм $\{G_m(x,f,\Psi)\}$ по системе Ψ расходится в $L^p(0,1)$.

Возникает следующий вопрос, ответ на который нам не известен.

Вопрос. Можно ли в теореме 2.3.1 “исключительное” множество выбрать независящим от исправляемой функции $f(x)$?

Глава 3 посвящена вопросам единственности некоторых ортогональных рядов. Рассматривается следующая задача. Пусть ортотогональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ или некоторая подпоследовательность частичных сумм этого ряда сходится к некоторой функции $f(x)$. Как по $f(x)$ восстановить коэффициенты ряда? Еще в 19-ом веке было известно, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду, за исключением, быть может, некоторого счетного множества, то все коэффициенты равны нулю. В случае сходимости почти всюду таких рядов может быть несколько, например нуль-ряды (напомним, что первый пример тригонометрического нуль-ряда был построен Д.Е. Меньшовым в 1916 г.). Поэтому надо накладывать дополнительные условия на ряд, обеспечивающие его единственность. Если же единственность есть, то в общем случае коэффициенты не восстанавливаются по формулам Фурье, поскольку $f(x)$ может оказаться не интегрируемой по Лебегу. В этом случае можно попытаться вместо интеграла Лебега рассматривать его обобщения. Одним из наиболее часто применяемых обобщений интеграла

Лебега является A-интеграл, определение которого приведено в разделе 3.1. Впервые теоремы единственности для п.в. сходящихся тригонометрических рядов были рассмотрены в работах [95], [96]. Ряд работ посвящены теоремам единственности п.в. сходящих рядов по разным ортогональными системами, где присутствует одно необходимое условие на мажоранту частичных сумм (см. [97]–[101], [111]–[117]). В частности в работе [97] Геворкяном была доказана следующая

Теорема (Г.Г. Геворкян [97]). *Пусть кубические частичные суммы* $S_k(\mathbf{x})$ *кратного ряда* $\sum\limits_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ *по системе Хаара почти всюду сходятся к* $f(\mathbf{x})$ *и для некоторой последовательности* $\lambda_m \uparrow +\infty$ *выполняется*

$$\lim_{m\to+\infty} \lambda_m \cdot \operatorname{mes}\left\{\mathbf{x}\in[0,1]^d : \quad \sup_k |S_k(\mathbf{x})| > \lambda_m\right\} = 0,$$

тогда для всех $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})]_{\lambda_m^{\mathbf{n}}}\, d\mathbf{x},$$

где $\lambda_m^{\mathbf{n}} = \lambda_m \|\chi_{\mathbf{n}}\|_\infty$, *а*

$$[\varphi(x)]_\lambda = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } |\varphi(x)| \le \lambda, \\ 0, & \text{если } |\varphi(x)| > \lambda. \end{cases}$$

В разделе 3.1 доказано следующее усиление этой теоремы.

Теорема 3.1.2 ([139]). *Пусть* $\{q_j\}$ *– некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение* $\dfrac{q_{j+1}}{q_j}$ *ограниченно, последовательность кубических частичных сумм* $S_{q_j}(\mathbf{x})$ *ряда* (3.1.1) *почти всюду сходится к некоторой функции* $f(\mathbf{x})$ *при* $j\to\infty$ *и для некоторой последовательности* $\{\lambda_m\}$, $\lambda_m\to\infty$,

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m \cdot \operatorname{mes}\big\{\mathbf{x}\in[0,1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda_m\big\} = 0.$$

Тогда для всех $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$ *выполняются*

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} \big[f(\mathbf{x})\big]_{\lambda_m} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Оказывается, что в теореме 3.1.2 ограниченность отношения $\dfrac{q_{n+1}}{q_n}$ существенна. Действительно, верна следующая

Теорема 3.1.7 ([139]). *Пусть $\{q_n\}$ – некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что $\sup\limits_n \frac{q_{n+1}}{q_n} = +\infty$. Тогда существует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ такой, что*

1) $a_1 \neq 0, \qquad S_{q_n}(x) \to 0$ п.в. при $n \to \infty$;

2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}\big\{x \in [0,1] : \ \sup\limits_n |S_{q_n}(x)| > \lambda\big\} = 0$.

Аналогичные вопросы для классической и общей систем Франклина рассмотрены в разделе 3.2, где для классической системы Франклина доказаны аналоги теорем 3.1.2 и 3.1.7 (см. теоремы 3.2.6 и 3.2.9). Для общей системы Франклина доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.4 ([141]). *Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – общая система Франклина, соответствующая парно регулярному разбиению $\mathcal{T}$ с параметром $\gamma > 1$. Далее, пусть кубические частичные суммы $S_n(\mathbf{x})$ кратного ряда по этой системе по мере сходятся к некоторой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_k \to \infty$ выполняется*

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\lambda_k \cdot \mathrm{mes}\left\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \sup_n |S_n(\mathbf{x})| > \lambda_k\right\}\right) = 0.$$

Тогда для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ имеет место

$$a_{\mathbf{m}} = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

В работах [98] и [99] рассматривались вопросы единственности для рядов по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара, порожденной ограниченной последовательностью $p_k,\ k \in \mathbb{N}$. В работе [98] доказан следующий аналог теоремы Геворкяна.

Теорема (Костин В.В., [98]). *Пусть $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – либо система Виленкина, либо обобщенная система Хаара, порожденная ограниченной последовательностью $p_k,\ k \in \mathbb{N}$. Тогда, если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ почти всюду сходятся к некоторой функции $f(x)$ и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p \cdot \mathrm{mes}\left\{x \in [0,1) : \ \sup_k |S_{m_k-1}(x)| > \lambda_p\right\} = 0,$$

то для всех n имеют место

$$a_n = \lim_{p\to\infty} \int_0^1 [f(t)]_{\lambda_p} \overline{f_n(t)} dt.$$

В той же работе [98] приведен пример системы $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$, порожденной неограниченной последовательностью $p_k,\ k\in\mathbb{N}$, для которой эта теорема не верна.

Оказывается, что если в теореме Костина вместо мажоранты частичных сумм $S_{m_k-1}(x)$ рассматривать мажоранту всей последовательности частичных сумм $S^*(x)$, то те же формулы восстановления верны для любой последовательности $\{p_k\}$.

Разделы 3.3 и 3.4 посвящены теоремам единственности для рядов по системе Виленкина и обобщенной системы Хаара. В пункте 3.3.1 введен новый линейный метод суммирования для рядов по отмеченным системам. Доказаны некоторые свойства этого метода, в частности, получена его регулярность. Затем доказана теорема единственности для рядов, суммируемых этим методом, из которой как следствие получается следующее обобщение теоремы Костина.

Теорема 3.3.6 ([145], [146]). *Пусть $\{p_k\}$ – произвольная последовательность натуральных чисел с условием $p_k\ge 2,\ k\in\mathbb{N}$, а $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – либо система Виленкина, либо обобщенная система Хаара, порожденная этой последовательностью. Тогда, если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда $\sum\limits_{n=0}^\infty a_nf_n(x)$ по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_p\uparrow+\infty$ выполняется*

$$\lim_{p\to\infty}\lambda_p\cdot\mathrm{mes}\left\{x\in[0,1):\ \sup_n|S_n(x)|>\lambda_p\right\}=0,$$

то для всех n имеют место

$$a_n=\lim_{p\to\infty}\int_0^1[f(t)]_{\lambda_p}\overline{f_n(t)}dt.$$

В тексте встречаются следующие обозначения:

$C, C_1,\dots$ – абсолютные постоянные;

$C_\delta, C_{\delta,m},\dots$ – постоянные, зависящие только от индексов;

$\mathbb{1}_E(x)$ – характеристическая функция множества E;

$\mathrm{mes}(E)$ – Лебегова мера множества E.

Глава 1

Теоремы представления

1.1 Представление функций почти всюду сходящимися рядами Уолша

1.1.1 Введение

Напомним некоторые определения.

Определение 1.1.1 *Пусть* $\mathscr{F}$ *– некоторый класс измеримых функций. Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \tag{1.1.1}$$

называется универсальным относительно знаков (подрядов) в классе $\mathscr{F}$*, если для любой функции* $f \in \mathscr{F}$ *существует последовательность* $\{\gamma_n\}$*,* $\gamma_n = \pm 1$ *(*$\gamma_n = 0, 1$*), для которой ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n \varphi_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *п.в.*

Определение 1.1.2 *Пусть* $\mathscr{F}$ *– некоторый класс измеримых функций. Ряд* (1.1.1) *называется универсальным относительно перестановок в классе* $\mathscr{F}$*, если для любой функции* $f \in \mathscr{F}$ *члены ряда* (1.1.1) *можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился к* $f(x)$ *п.в.*

Первые примеры (в разных смыслах) универсальных тригонометрических рядов были получены в работах [11]–[15]. Отметим некоторые из них.

Теорема 1.1.A (А.А. Талалян, [13]). *Существует тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

обладающий следующим свойством: для любой измеримой функции f, определенной на $[0,2\pi]$, ($f(x)$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры), существует подряд этого ряда, который сходится к $f(x)$ п.в. на том множестве, где f конечна, и по мере на $[0,2\pi]$.

В работе [14] Г.М. Мушегяном отмечен некоторый класс ортогональных систем (в который, в частности, входят системы Хаара, Уолша и тригонометрическая система) для которых существуют универсальные ряды относительно перестановок в классе всех измеримых функций.

Теорема 1.1.B (Н.Б. Погосян [15]). *По любой полной, ортонормированной и равномерно ограниченной системе $\{\varphi_n(x)\}$ существует ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x),$$

который удовлетворяет следующим условиям:

i) этот ряд является универсальным относительно перестановок в классе всех измеримых функций;

ii) после некоторой перестановки членов полученный ряд становится универсальным относительно знаков в классе всех измеримых функций;

iii) для любого числа $\varepsilon>0$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^{2+\varepsilon}$ сходится.

Об исследованиях универсальных ортогональных рядов подробно можно узнать из работ [7], [16].

В этом разделе рассматриваются ряды по системе Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nW_n(x)$ с монотонными коэффициентами. Справедлива следующая

Теорема 1.1.3 ([128]). *Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – монотонная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условиям $a_n\to 0$, $n\to\infty$, и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^2=+\infty$. Тогда для любой п.в. конечной измеримой функции f, определенной на $[0,1]$, существует последовательность $\{\delta_n\}$, $\delta_n=0,\pm1$, такая, что ряд по системе Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta_na_nW_n(x)$ сходится к $f(x)$ п.в. на $[0,1]$.*

Заметим, что теорема 1.1.3 следует из следующей теоремы:

Теорема 1.1.4 ([128]) *Пусть* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– монотонная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условиям* $a_n \to 0$, $n \to \infty$, *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. *Тогда существуют числа* $\delta_n = \pm 1$ *такие, что ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ *является универсальным относительно подрядов в классе почти всюду конечных измеримых на* $[0,1]$ *функций.*

Известно (см. [17], [18], а также [25, с. 165]), что ряд по системе Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$ с монотонными коэффициентами является рядом Фурье–Уолша функции $f \in L^p(0,1)$, $1 < p < \infty$, в том и только том случае, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}$ сходится. Из этого факта и из теоремы 1.1.3 следует

Теорема 1.1.5 ([128]). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} W_n(x)$ *является рядом Фурье–Уолша некоторой функции из класса* $\bigcap\limits_{p<2} L^p(0,1)$, *и для любой п.в. конечной измеримой функции* f *существуют числа* $\delta_n = 0, \pm 1$, $n \in \mathbb{N}$, *такие, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{\sqrt{n}} W_n(x)$ *п.в. сходится к* $f(x)$.

Работы [129]–[132] посвящены теоремам представления для кратных рядов Уолша.

Пусть d – некоторое натуральное число, а $\mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел. Для элемента $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}_0^d$ и точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in [0,1]^d$ обозначим $W_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) := W_{m_1}(x_1) W_{m_2}(x_2) \cdots W_{m_d}(x_d)$. Как обычно, для $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d)$ через $c_{\mathbf{n}}(f)$ будем обозначать коэффициент Фурье по кратной системе Уолша, т.е.

$$c_{\mathbf{n}}(f) := \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Запись $\mathbf{m} \le \mathbf{n}$ будет означать, что $m_i \le n_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, d$. Справедлива следующая

Теорема 1.1.6 ([132]). *Пусть последовательность положительных действительных чисел* $\{a_{\mathbf{n}}\}$ *удовлетворяет следующим условиям:* $0 < a_{\mathbf{m}} \le a_{\mathbf{n}}$ *при* $\mathbf{n} \le \mathbf{m}$ *и для любого* $\mathbf{M} := (M, M, \ldots, M) \in \mathbb{N}_0^d$ *ряд* $\sum\limits_{\mathbf{n} \ge \mathbf{M}} a_{\mathbf{n}}^2$ *расходится. Тогда существует функция* $f \in \bigcap\limits_{p<2} L^p(0,1)^d$ *с коэффициентами Фурье* $|c_{\mathbf{n}}(f)| \le a_{\mathbf{n}}$, *ряд Фурье которой является универсальным относительно знаков в классе п.в. конечных измеримых функций, а для некоторого набора знаков* $\{\delta_{\mathbf{n}}\}$, $\delta_{\mathbf{n}} = \pm 1$, *ряд*

$$\sum_{\mathbf{n}: n_i \ge 0} \delta_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}}(f) W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

1.1.2 Некоторые определения и вспомогательные леммы

Напомним, что функции системы Радемахера определяются по формулам

$$R_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi x), \quad x \in [0,1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Функции системы Уолша выражаются через функции системы Радемахера следующим образом (см., например, [9, с. 150]): $W_0(x) \equiv 1$, а для $n \geq 1$, если $2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \cdots + 2^{\nu_p}$ есть двоичное представление числа n ($\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_p$), то в точках непрерывности функций R_{ν_i+1}, $i = 1, 2, \dots, p$,

$$W_n(x) := \prod_{i=1}^{p} R_{\nu_i+1}(x),$$

а в остальных точках – среднее арифметическое односторонних пределов функции $W_n(x)$.

Система $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется системой Уолша в нумерации Пэли или системой Уолша–Пэли. В дальнейшем систему Уолша–Пэли называть просто системой Уолша. Из определения системы Уолша непосредственно следует, что если $k < 2^n$, то

$$W_{2^n}(x) W_k(x) = W_{2^n+k}(x). \tag{1.1.2}$$

Известно также (см. [25]), что для любых натуральных m и M

$$\sum_{k=0}^{2^m-1} W_k(x) = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} W_k(x) = 0 \quad \text{при всех} \quad x > \frac{1}{2^m}, \tag{1.1.3}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{M} W_k(x) \right| \leq \frac{1}{x} \quad \text{при всех } x \in (0,1]. \tag{1.1.4}$$

Система Хаара на $[0,1]$ определяется следующим образом (см., например, [9], с. 70): $\chi_1(x) = \chi_0^{(0)}(x) = 1$, а для $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\chi_n(x) = \chi_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & \text{если} \quad \frac{i-1}{2^k} < x < \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{\frac{k}{2}}, & \text{если} \quad \frac{2i-1}{2^{k+1}} < x < \frac{i}{2^k}, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin [\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}]. \end{cases}$$

В точках разрыва функции Хаара определяются как среднее арифметическое односторонних пределов.

Для системы Уолша мы иногда будем использовать также обозначение с двумя индексами, точнее $W_0^{(0)}(x) = W_0(x)$, а если $n = 2^k + i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то $W_i^{(k)}(x) = W_n(x)$.

Для каждого натурального числа n определим матрицу Качмажа $K_n = \left(\varepsilon_{k,m}^{(n)}\right)_{k,m=1}^{2^n}$ следующим образом:

$$\varepsilon_{k,m}^{(n)} = W_{k-1}(x), \quad \text{где} \;\; x \in \left(\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right).$$

Ясно, что если $k = 2^i + j$, где $0 \le i < n$ и $1 \le j \le 2^i$, то

$$\varepsilon_{k,m}^{(n)} = \varepsilon_{2^i+j,m}^{(n)} = W_j^{(i)}(x), \quad \text{где} \;\; x \in \left(\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}\right). \tag{1.1.5}$$

Известно, что матрица Качмажа $K_n (n \in \mathbb{N})$ – симметричная и ортогональная матрица, и для каждого $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ имеем (см. [19, стр. 155])

$$W_k^{(n)}(x) = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{2^n} \varepsilon_{k,m}^{(n)} \chi_m^{(n)}(x) \quad \text{и} \quad \chi_k^{(n)}(x) = 2^{-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{2^n} \varepsilon_{k,m}^{(n)} W_m^{(n)}(x). \tag{1.1.6}$$

Отметим некоторые свойства матриц Качмажа.

Свойство 1. Если записать каждую строку матрицы K_n дважды и к каждой новой строке добавить ту же строку, если у нее нечетный номер, и строку с противоположными элементами, если у новой строки четный номер, тогда получается матрица K_{n+1}, т.е.

$$\varepsilon_{2k-1,m}^{(n+1)} = \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad \varepsilon_{2k-1,2^n+m}^{(n+1)} = \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad k, m = 1, 2, \ldots, 2^n, \tag{1.1.7}$$

$$\varepsilon_{2k,m}^{(n+1)} = \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad \varepsilon_{2k,2^n+m}^{(n+1)} = -\varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad k, m = 1, 2, \ldots, 2^n. \tag{1.1.8}$$

Свойство 2. Для фиксированного $j, \quad 1 \le j \le 2^n$, обозначим через $\varepsilon_j^{(n)}$ j-ую строку матрицы K_n. На месте элемента $\varepsilon_{k,m}^{(i)}$ матрицы K_i запишем строку $\varepsilon_{k,m}^{(i)} \varepsilon_j^{(n)}$. Полученные матрицы $K_{n,i}^{(j)}, \quad 1 \le j \le 2^n$, запишем одну под другой ($K_{n,i}^{(j+1)}$ под $K_{n,i}^{(j)}$). В итоге получится матрица K_{n+i}, т.е.

$$\varepsilon_{k,m}^{(i)} \varepsilon_{p,q}^{(n)} = \varepsilon_{(p-1)2^i+k,(m-1)2^n+q}^{(n+i)} \,. \tag{1.1.9}$$

Свойство 3. При любом $n \in \mathbb{N}$ верны следующие равенства:

$$\sum_{m=1}^{2^n} \varepsilon_{1,m}^{(n)} = \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_{k,1}^{(n)} = 2^n,$$

$$\sum_{m=1}^{2^n} \varepsilon_{s,m}^{(n)} = \sum_{k=1}^{2^n} \varepsilon_{k,s}^{(n)} = 0, \quad \text{когда} \quad s \neq 1.$$

Верна следующая лемма (см. [20, Лемма 1] или [21, Лемма 1]).

Лемма 1.1.А *Пусть* $\left\{\varepsilon_{k,m}^{(2n)}\right\}$ *– элементы матрицы Качмажа* K_{2n}*. Тогда существуют числа* $\delta_k = \pm 1$, $k = 1, 2, \ldots, 2^{2n}$, *такие, что*

$$\sum_{k=1}^{2^{2n}} \delta_k \varepsilon_{k,m}^{(2n)} = \pm 2^n, \qquad m = 1, 2, \ldots 2^{2n}.$$

Последовательность $\{\delta_k\}$ была построена следующим образом:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -\delta_4, \quad \delta_{4k-j} = \delta_k \delta_{4-j}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{1.1.10}$$

Нетрудно убедиться, что если $m = \theta_p 4^p + \theta_{p+1} 4^{p+1} + \cdots + \theta_q 4^q$, где $\theta_p \neq 0$ и $\theta_i = 0, 1, 2, 3,$ когда $p \leq i \leq q, \quad 1 \leq m \leq 2^{2n}$, то

$$\delta_{j2^{2n}+m} = (-1)^p \delta_{\theta_p} \delta_{\theta_{p+1}+1} \cdots \delta_{\theta_q+1} \delta_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{1.1.11}$$

Действительно, несколько раз применяя (1.1.10), получаем

$$\delta_{j2^{2n}+m} = \delta_{j4^n+\theta_q 4^q+\cdots+\theta_{p+1}4^{p+1}+\theta_p 4^p} = \delta_{4^p(j4^{n-p}+\theta_q 4^{q-p}+\cdots+\theta_p)} =$$

$$(-1)^p \delta_{(j4^{n-p}+\theta_q 4^{q-p}+\cdots+\theta_p)} = (-1)^p \delta_{\theta_p} \delta_{(j4^{n-p-1}+\theta_q 4^{q-p-1}+\cdots+\theta_{p+1}+1)} = \cdots =$$

$$(-1)^p \delta_{\theta_p} \delta_{\theta_{p+1}+1} \cdots \delta_{\theta_q+1} \delta_{j4^{n-q-1}+1} = \cdots = (-1)^p \delta_{\theta_p} \delta_{\theta_{p+1}+1} \cdots \delta_{\theta_q+1} \delta_{j+1}.$$

Из (1.1.10) и (1.1.11) следует, что

$$\delta_m = \delta_{2^{2n}+m} = \delta_{2\cdot 2^{2n}+m} = -\delta_{3\cdot 2^{2n}+m}, \quad 1 \leq m \leq 2^{2n}. \tag{1.1.12}$$

Учитывая (1.1.12), без существенных изменений в доказательстве леммы 1.1.А можно получить следующее утверждение:

Лемма 1.1.7 *Пусть* $\left\{\varepsilon_{k,m}^{(2n)}\right\}$ *– элементы матрицы Качмажа* K_{2n}*. Тогда, если последовательность* $\{\delta_k\}$ *определяется как в* (1.1.10)*, то справедливо следующее равенство:*

$$\sum_{k=1}^{2^{2n}} \delta_k \varepsilon_{k,m}^{(2n)} = \delta_m 2^n, \qquad m = 1, 2, \ldots 2^{2n}.$$

Доказательство. Докажем лемму по индукции. Для $n = 1$ имеем

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому из (1.1.10) непосредственно следует утверждение леммы 1.1.7. Допустим, что лемма верна для n, т.е.

$$\sum_{k=1}^{2^{2n}} \delta_k \varepsilon_{k,m}^{(2n)} = \delta_m 2^n, \qquad m = 1, 2, \dots, 2^{2n}, \tag{1.1.13}$$

и докажем ее для $n + 1$.

Заметим, что если $k = 4(p-1)+r$ и $m = (s-1)2^{2n}+q$, где $1 \le q \le 2^{2n}$, $r, s \in \{1, 2, 3, 4\}$, то

$$\varepsilon_{k,m}^{(2n+2)} = \varepsilon_{4(p-1)+r,(s-1)2^{2n}+q}^{(2n+2)} = \varepsilon_{r,s}^{(2)} \varepsilon_{p,q}^{(2n)},$$

(см. (1.1.9)). Следовательно, учитывая (1.1.10) и (1.1.13) получим, что

$$\sum_{k=1}^{2^{2n+2}} \delta_k \varepsilon_{k,(s-1)2^{2n}+q}^{(2n+2)} = \sum_{r=1}^{4} \sum_{p=1}^{2^{2n}} \delta_{4(p-1)+r} \varepsilon_{r,s}^{(2)} \varepsilon_{p,q}^{(2n)} = \sum_{r=1}^{4} \delta_r \varepsilon_{r,s}^{(2)} \sum_{p=1}^{2^{2n}} \delta_p \varepsilon_{p,q}^{(2n)} = \delta_s \delta_q 2^{n+1}.$$

Комбинируя последнее равенство с условием (1.1.12), получаем, что для каждого числа $m = (s-1)2^{2n} + q$ справедливо

$$\sum_{k=1}^{2^{2n+2}} \delta_k \varepsilon_{k,(s-1)2^{2n}+q}^{(2n+2)} = 2^{n+1} \delta_{(s-1)2^{2n}+q} = 2^{n+1} \delta_m.$$

Лемма 1.1.7 доказана. $\square$

В работе [21] была доказана следующая

Лемма 1.1.B ([21, Лемма 1]). *Для любой матрицы Качмажа K_ν и для любых натуральных n и p выполняются неравенства*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \delta_k \varepsilon_{k,m}^{(\nu)} \right| \le M\sqrt{p}, \quad 1 \le m \le 2^\nu,$$

где M – абсолютная постоянная, а числа $\{\delta_k\}$ определяются как в (1.1.10).

Определение 1.1.8 *Пусть f – интегрируемая функция, определенная на $[0,1]$. Функция*

$$S^*(f,x) := \sup_N \left| \sum_{n=0}^{N} c_n(f) W_n(x) \right|$$

называется мажорантой частичных сумм ряда Фурье-Уолша функции f, где

$$c_n(f) := \int_0^1 f(x) W_n(x) dx, \quad n = 0, 1, \dots,$$

– коэффициенты Фурье–Уолша функции f.

Верна следующая

Лемма 1.1.9 *Для любого двоичного интервала $I := \left[\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}\right]$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $0 \le i < 2^\sigma$, и для любого натурального $n > \sigma$, где $(n - \sigma)$ – четное число, существует полином по системе Уолша $P(x) = \sum_{k=1}^{2^n} a_k^{(n)} W_k^{(n)}(x)$ такой, что:*

1. $|a_k^{(n)}| = 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} = \left(2^{-n} \mathrm{mes}(I)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad 1 \le k \le 2^n;$

2. $P(x) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если}} \;\; x \in E_1 \subset I, \quad \mathrm{mes}(E_1) = 2^{-\sigma-1}, \\ -1, & \text{\textit{если}} \;\; x \in E_2 \subset I, \quad \mathrm{mes}(E_2) = 2^{-\sigma-1}, \\ 0, & \text{\textit{если}} \;\; x \notin I; \end{cases}$

3. $S^*(P,x) \le (2^n \mathrm{mes}(I))^{-\frac{1}{2}}$, *если* $x \notin I$;

4. $S^*(P,x) \le C$, *если* $x \in I$,

причем E_1 и E_2 являются конечными объединениями двоичных интервалов, а C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Полином $P(x)$ будем искать среди функций вида

$$2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \alpha_k \chi_k^{(n)}(x), \quad \text{где} \quad \alpha_k = \pm 1. \tag{1.1.14}$$

Ясно, что при любом выборе чисел α_k, функции вида (1.1.14) удовлетворяют условию *2* леммы 1.1.9.

Из (1.1.6) имеем (отметим, что числа α_k еще не фиксированы)

$$2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \alpha_k \chi_k^{(n)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \alpha_k \sum_{m=1}^{2^n} \varepsilon_{k,m}^{(n)} W_m^{(n)}(x) =$$

$$2^{-n} \sum_{m=1}^{2^n} \left(\sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \alpha_k \varepsilon_{k,m}^{(n)} \right) W_m^{(n)}(x).$$

Напомним, что для фиксированного j, $1 \le j \le 2^\sigma$, матрицы

$$\left(\varepsilon_{i2^{n-\sigma}+l,(q-1)2^\sigma+j}^{(n)} \right)_{l,q=1}^{2^{n-\sigma}}$$

(см. (1.1.9)) являются матрицами Качмажа порядка $2^{n-\sigma}$, умноженными на $\varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)}$. Взяв $\alpha_k = \delta_{k-i2^{n-\sigma}}$ (где $\{\delta_k\}$ – последовательность, определенная в (1.1.10)) и применив лемму 1.1.7 для $m = (q-1)2^\sigma + j$, $1 \le q \le 2^{n-\sigma}$, $j = 1, 2, \dots, 2^\sigma$, получим

$$\sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \alpha_k \varepsilon_{k,m}^{(n)} = \sum_{l=1}^{2^{n-\sigma}} \delta_l \varepsilon_{l,q}^{(n-\sigma)} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} = 2^{\frac{n-\sigma}{2}} \delta_q \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)}. \tag{1.1.15}$$

Обозначим

$$a_m^{(n)} = 2^{-n} \sum_{k=i2^{n-\sigma}+1}^{(i+1)2^{n-\sigma}} \alpha_k \varepsilon_{k,m}^{(n)}, \quad m = 1, 2, \dots, 2^n. \tag{1.1.16}$$

Из (1.1.15) и (1.1.16) следует, что

$$a_{(q-1)2^\sigma+j}^{(n)} = 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} \delta_q \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)}, \quad q = 1, 2, \dots, 2^{n-\sigma}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^\sigma, \tag{1.1.17}$$

$$|a_m^{(n)}| = 2^{-\frac{n+\sigma}{2}}, \qquad m = 1, 2, \dots, 2^n. \tag{1.1.18}$$

Пусть $x \in [0,1]$ – двоично иррациональное число и

$$x \in \left(\frac{r2^{n-\sigma+1} + s - 1}{2^{n+1}}, \frac{r2^{n-\sigma+1} + s}{2^{n+1}} \right)$$

для некоторых чисел r и s ($r \in \{0, 1, \dots, 2^\sigma - 1\}$, $s \in \{1, 2, \dots, 2^{n-\sigma+1}\}$). Далее, пусть $m = (q-1)2^\sigma + j$, где $1 \le q \le 2^{n-\sigma}$, $1 \le j \le 2^\sigma$. Тогда из (1.1.5) и (1.1.7)–(1.1.9) получаем

$$W_m^{(n)}(x) = \varepsilon_{2^n+(q-1)2^\sigma+j,r2^{n-\sigma+1}+s}^{(n+1)} = \varepsilon_{j,r+1}^{(\sigma)} \varepsilon_{2^{n-\sigma}+q,s}^{n-\sigma+1} = (-1)^{s+1} \varepsilon_{r+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{q,[\frac{s+1}{2}]}^{(n-\sigma)}, \tag{1.1.19}$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа α. Учитывая (1.1.17) и (1.1.19), для любого N, $1 \le N \le 2^n$, будем иметь

$$\sum_{m=1}^{N} a_m^{(n)} W_m^{(n)}(x) = \sum_{m=1}^{2^\sigma\left[\frac{N}{2^\sigma}\right]} a_m^{(n)} W_m^{(n)}(x) + \sum_{m=2^\sigma\left[\frac{N}{2^\sigma}\right]+1}^{N} a_m^{(n)} W_m^{(n)}(x) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\left[\frac{N}{2^\sigma}\right]} \sum_{j=1}^{2^\sigma} a_{(q-1)2^\sigma+j}^{(n)} W_{(q-1)2^\sigma+j}^{(n)}(x) + \sum_{m=2^\sigma\left[\frac{N}{2^\sigma}\right]+1}^{N} a_m^{(n)} W_m^{(n)}(x) = \tag{1.1.20}$$

$$(-1)^{s+1} 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} \sum_{q=1}^{\left[\frac{N}{2^\sigma}\right]} \sum_{j=1}^{2^\sigma} \delta_q \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{r+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{q,\left[\frac{s+1}{2}\right]}^{(n-\sigma)} + \sum_{m=2^\sigma\left[\frac{N}{2^\sigma}\right]+1}^{N} a_m^{(n)} W_m^{(n)}(x).$$

Если $x \notin I$ (т.е. $r \neq i$), то из ортогональности матрицы Качмажа имеем

$$\sum_{j=1}^{2^\sigma} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{r+1,j}^{(\sigma)} = 0.$$

Поэтому из (1.1.18) и (1.1.20) следует, что

$$\left|\sum_{m=1}^{N} a_m^{(n)} W_m^{(n)}(x)\right| = \left|\sum_{m=2^\sigma\left[\frac{N}{2^\sigma}\right]+1}^{N} a_m^{(n)} W_m^{(n)}(x)\right| \leq 2^\sigma \cdot 2^{-\frac{n+\sigma}{2}} = 2^{-\frac{n-\sigma}{2}} = (2^n \mathrm{mes}(I))^{-\frac{1}{2}}.$$

Если же $x \in I$ (т.е. $r = i$), то

$$\sum_{j=1}^{2^\sigma} \varepsilon_{i+1,j}^{(\sigma)} \varepsilon_{r+1,j}^{(\sigma)} = 2^\sigma.$$

Следовательно, с учетом леммы 1.1.В, (1.1.18) и (1.1.20) получаем

$$\left|\sum_{m=1}^{N} a_m^{(n)} W_m^{(n)}(x)\right| \leq 2^{-\frac{n-\sigma}{2}} \left|\sum_{q=1}^{\left[\frac{N}{2^\sigma}\right]} \delta_q \varepsilon_{q,\left[\frac{s+1}{2}\right]}^{(n-\sigma)}\right| + 2^{-\frac{n-\sigma}{2}} \leq 2^{-\frac{n-\sigma}{2}} \left(M \sqrt{\left[\frac{N}{2^\sigma}\right]} + 1\right) \leq C.$$

Тем самым лемма 1.1.9 доказана. $\square$

Лемма 1.1.10 *Для любого двоичного интервала* $I = \left[\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}\right]$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $0 \leq i < 2^\sigma$, *и для любых натуральных чисел* m, n *и* q, *где* $(n - m - \sigma - 1)$ *– положительное четное число, а* $q \in \{0, 1, \ldots, 2^m - 1\}$, *существует полином по системе Уолша*

$$P(x) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \delta_k W_k(x)$$

такой, что:

1. $\delta_k = \pm 1$, *если* $2^n + q2^{n-m} + 2^{n-m-1} \leq k < 2^n + (q+1)2^{n-m}$;

2. $\delta_k = 0$ *для остальных* k*;*

3. $$P(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n-m+\sigma-1}{2}}, & \text{если } \ x \in E_1 \subset I, \quad \mathrm{mes}(E_1) = \frac{1}{2}\mathrm{mes}(I), \\ -2^{\frac{n-m+\sigma-1}{2}}, & \text{если } \ x \in E_2 \subset I, \quad \mathrm{mes}(E_2) = \frac{1}{2}\mathrm{mes}(I), \\ 0, & \text{если } \ x \notin I; \end{cases}$$

4. $S^*(P,x) \le C2^{\frac{n-m+\sigma-1}{2}}$, *для всех* $x \in [0,1]$,

причем E_1 *и* E_2 *являются конечными объединениями двоичных интервалов, а* C *– абсолютная постоянная.*

Доказательство. Пусть $I = \left[\frac{i}{2^\sigma}, \frac{i+1}{2^\sigma}\right]$ – двоичный интервал, а m и n – такие натуральные числа, что $(n-m-\sigma-1)$ – положительное четное число. Тогда, согласно лемме 1.1.9, существует такой полином

$$P'(x) = \sum_{k=2^{n-m-1}}^{2^{n-m}-1} a_k W_k(x) = \sum_{i=1}^{2^{n-m-1}} a_i^{(n-m-1)} W_i^{(n-m-1)}(x),$$

что:

1') $|a_k| = 2^{-\frac{n-m+\sigma-1}{2}}, \quad 2^{n-m-1} \le k < 2^{n-m}$;

2') $$P'(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x \in E_1 \subset I, \quad \mathrm{mes}(E_1) = \frac{1}{2}\mathrm{mes}(I), \\ -1, & \text{если } \ x \in E_2 \subset I, \quad \mathrm{mes}(E_2) = \frac{1}{2}\mathrm{mes}(I), \\ 0, & \text{если } \ x \notin I; \end{cases}$$

3') $S^*(P',x) \le C$ для всех $x \in [0,1]$.

Пусть $0 \le q < 2^m$ – любое натуральное число и $q = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \dots + 2^{\nu_i}$ $(\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_i)$. Рассмотрим полином

$$P(x) := 2^{\frac{n-m+\sigma-1}{2}} W_{2^{n-m+\nu_1}}(x) \cdots W_{2^{n-m+\nu_i}}(x) P'(x) W_{2^n}(x). \tag{1.1.21}$$

Ясно, что $P(x)$ удовлетворяет условиям *3* и *4* леммы 1.1.10. Из (1.1.2) и (1.1.21) следует, что

$$P(x) = 2^{\frac{n-m+\sigma-1}{2}} \sum_{k=2^{n-m-1}}^{2^{n-m}-1} a_k W_{2^n+q2^{n-m}+k}(x) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \delta_k W_k(x),$$

где (см. также 1')) числа δ_k удовлетворяют условиям *1.* и *2.* леммы 1.1.10.

Лемма 1.1.10 доказана. □

Пусть $P_n(x) = \sum\limits_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k\chi_k(x)$ – последовательность полиномов по системе Хаара со следующими свойствами:

a) если $\Delta_n := \{x : P_n(x) \neq 0\}$, то полиномы $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_{n-1}(x)$ принимают постоянные значения на Δ_n, и если $\Delta_n^+ := \{x : P_n(x) > 0\}$ и $\Delta_n^- := \{x : P_n(x) < 0\}$, то $|P_n(x)|$ – постоянная на множестве $\Delta_n^+ \cup \Delta_n^-$. Кроме того, для некоторого двоичного интервала I все $\Delta_n \subset I$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n^2(x) = +\infty$ п.в. на интервале I;

c) $\sup\limits_x S^*(P_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$;

Тогда справедлива следующая

Лемма 1.1.11 *Для любых положительных чисел $\varepsilon < 1$, δ и d существуют полином*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{m} P_{n_k}(x)$$

и множество $E \subset I$ такие, что:

1. *$|P(x) - d| < \delta$, если $x \in E$, $\quad \mathrm{mes}(E) > (1-\varepsilon)\mathrm{mes}(I)$;*

2. *$S^*(P, x) < \delta$, если $x \notin I$;*

3. *$S^*(P, x) < \dfrac{Cd}{\varepsilon} + \delta$ для п.в. $x \in I$.*

Для доказательства этой леммы мы пользуемся следующими теоремами.

Теорема 1.1.C (см. [22], [23] или [9]). *Для того чтобы ряд по системе Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x) \tag{1.1.22}$$

сходился п.в. на множестве $E \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}(E) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы для п.в. $x \in E$ была конечна сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x)$.

Теорема 1.1.D (см. [22]–[24] или [9]). *Если для частичных сумм ряда (1.1.22) выполняется соотношение*

$$\limsup_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x) < \infty, \quad x \in E, \quad \mathrm{mes}(E) > 0,$$

то ряд (1.1.22) сходится п.в. на E (к конечной п.в. функции).

Доказательство Леммы 1.1.11. Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \chi_m(x) := \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \chi_k(x). \tag{1.1.23}$$

Из (1.1.23) и свойства b) полиномов P_n следует, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \chi_m^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n^2(x) = +\infty$$

п.в. на интервале I. Поэтому, в силу теоремы 1.1.C, ряд (1.1.23) расходится п.в. на интервале I. Следовательно (см. теорему 1.1.D),

$$\limsup_{M\to\infty} \sum_{m=1}^{M} a_m \chi_m(x) = +\infty \quad \text{для п.в.} \;\; x \in I. \tag{1.1.24}$$

Из (1.1.23) и (1.1.24) следует, что

$$\limsup_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P_n(x) = +\infty \quad \text{для п.в.} \;\; x \in I. \tag{1.1.25}$$

Из свойства c) полиномов P_n получаем, что существует натуральное число n_0 такое, что для любого $x \in [0,1]$

$$S^*(P_n, x) < \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \;\; n > n_0, \tag{1.1.26}$$

откуда, в частности, следует, что для любого $x \in [0,1]$

$$|P_n(x)| < \frac{\delta}{2} \quad \text{при} \;\; n > n_0. \tag{1.1.27}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\tau(x) = \begin{cases} +\infty, \quad \text{если} \quad \sup\limits_{N:\ x\in\Delta_N} \left\{ \max\limits_{t\in\Delta_N} \sum\limits_{n=n_0}^{N} P_n(t) \right\} \le d, \\ \inf \left\{ N:\ x \in \Delta_{N+1},\ \max\limits_{t\in\Delta_{N+1}} \sum\limits_{n=n_0}^{N+1} P_n(t) > d \right\} \ \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.1.28}$$

Легко видеть, что при каждом $j \ge n_0$ множество $e_j := \{x:\ \tau(x) = j\}$ либо пусто, либо совпадает с Δ_{j+1}. Так как P_n – полином по системе Хаара, то из свойства a) получаем, что при $n > j+1$ множества Δ_n и e_j либо не пересекаются, либо $\Delta_n \subset e_j$. Положим $\gamma_n = 0$, если $\Delta_n \subset e_j$ для некоторого j, и $\gamma_n = 1$ в противном случае. Из выбора чисел $\{\gamma_n\}$ и из (1.1.28) следует, что

$$\sup_N \sum_{n=n_0}^{N} \gamma_n P_n(x) \le d, \quad x \in I. \tag{1.1.29}$$

Пусть $x \in I$ и $\limsup\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} P_n(x) = +\infty$. Тогда $x \in e_j$ для некоторого $j \geq n_0$, поэтому

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma_n P_n(x) = \sum_{n=n_0}^{j} P_n(x), \quad x \in e_j.$$

Но полиномы $P_{n_0}(x), P_{n_0+1}(x), \ldots, P_j(x)$ принимают постоянные значения на множестве $e_j = \Delta_{j+1}$ (см. свойство а)), а $\sum\limits_{n=n_0}^{j+1} P_n(x') > d$ для некоторого $x' \in e_j$. Следовательно, из (1.1.27) и (1.1.29) получаем, что для $x \in e_j$

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma_n P_n(x) - d \right| < \frac{\delta}{2}. \tag{1.1.30}$$

Учитывая также (1.1.25), получаем, что неравенство (1.1.30) выполняется для п.в. $x \in I$.

Для каждого $x \in I$ положим

$$\tau'(x) = \begin{cases} +\infty, \quad \text{если} \quad \inf\limits_{N:\ x\in\Delta_N} \left\{ \min\limits_{t\in\Delta_N} \sum\limits_{n=n_0}^{N} \gamma_n P_n(t) \right\} \geq -\frac{4d}{\varepsilon}, \\ \inf \left\{ N : x \in \Delta_{N+1}, \min\limits_{t\in\Delta_{N+1}} \sum\limits_{n=n_0}^{N+1} \gamma_n P_n(t) < -\frac{4d}{\varepsilon} \right\} \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{1.1.31}$$

Легко видеть, что при $j \geq n_0$ множество $e'_j := \{x : \ \tau'(x) = j\}$ либо пусто, либо совпадает с Δ_{j+1}. Пусть $\gamma'_n = 0$, если $\Delta_n \subset e'_j$ для некоторого j, и $\gamma'_n = 1$ в противном случае. Нетрудно убедиться в том, что :

$$\inf_N \sum_{n=n_0}^{N} \gamma'_n \gamma_n P_n(x) \geq -\frac{4d}{\varepsilon} \quad \text{для п.в. } x \in I, \tag{1.1.32}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma'_n \gamma_n P_n(x) = \sum_{n=n_0}^{j} \gamma_n P_n(x), \quad \text{если} \ \ x \in e'_j, \ \ j \geq n_0, \tag{1.1.33}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma'_n \gamma_n P_n(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma_n P_n(x), \quad \text{если} \ \ \tau'(x) = +\infty. \tag{1.1.34}$$

Из (1.1.30) и (1.1.34) следует, что

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma'_n \gamma_n P_n(x) - d \right| < \frac{\delta}{2} \quad \text{для п.в.} \ \ x \in \{x : \tau'(x) = +\infty\}. \tag{1.1.35}$$

Докажем, что $\operatorname{mes}\{x : \tau'(x) = +\infty\} > \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \operatorname{mes}(I)$. Действительно, из (1.1.31) имеем

$$\operatorname{mes}\{x : \tau'(x) = +\infty\} = \operatorname{mes}(I) - \operatorname{mes}\{x : \tau'(x) < +\infty\} = \operatorname{mes}(I) - \sum_{j=n_0}^{\infty} \operatorname{mes}(e'_j), \tag{1.1.36}$$

и на множестве $e'_j = \{x : \tau'(x) = j\} = \Delta_{j+1}$ (если $e'_j \neq \emptyset$) сумма $\sum\limits_{n=n_0}^{j} \gamma_n P_n(x)$ постоянная (см. свойство а)). Следовательно, на одном из множеств Δ^+_{j+1} или Δ^-_{j+1} выполняется неравенство

$$\sum_{n=n_0}^{j+1} \gamma_n P_n(x) < -\frac{4d}{\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\operatorname{mes}(e'_j) = 2\operatorname{mes}\left\{x \in \Delta_{j+1} : \sum_{n=n_0}^{j+1} \gamma_n P_n(x) < -\frac{4d}{\varepsilon}\right\}. \tag{1.1.37}$$

Рассмотрим функцию

$$S(x) = \begin{cases} \sum\limits_{n=n_0}^{j+1} \gamma_n P_n(x), & \text{если} \quad x \in e'_j, \\ \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \gamma_n P_n(x), & \text{если} \quad \tau'(x) = +\infty. \end{cases} \tag{1.1.38}$$

Так как множества e'_j, $j \geq n_0$, не пересекаются, $\int_0^1 P_n(x)dx = 0$ для всех $n \geq n_0$ ($P_n(x)$ – полином по системе Хаара) и

$$\sup_N \left| \sum_{n=n_0}^{N} \gamma'_n \gamma_n P_n(x) \right| \leq d + \frac{4d}{\varepsilon} \quad \text{для п.в.} \;\; x \in I, \tag{1.1.39}$$

(см. (1.1.29) и (1.1.32)), то из (1.1.33), (1.1.34) и (1.1.38) следует, что

$$\int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma'_n \gamma_n P_n(x)dx + \int_0^1 \sum_{\substack{n=n_0 \\ e'_n \neq \varnothing}}^{\infty} \gamma_{n+1} P_{n+1}(x) =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} \gamma'_n \gamma_n \int_0^1 P_n(x)dx + \sum_{\substack{n=n_0 \\ e'_n \neq \varnothing}}^{\infty} \gamma_{n+1} \int_0^1 P_{n+1}(x) = 0.$$

Учитывая также (1.1.29), получаем

$$0 = \int_0^1 S(x)dx < d\operatorname{mes}(I) - \frac{4d}{\varepsilon}\operatorname{mes}\left\{x : S(x) < -\frac{4d}{\varepsilon}\right\},$$

откуда

$$\operatorname{mes}\left\{x : S(x) < -\frac{4d}{\varepsilon}\right\} < \frac{\varepsilon}{4}\operatorname{mes}(I).$$

Поэтому (см. также (1.1.36)–(1.1.38))

$$\operatorname{mes}\{x : \tau'(x) = +\infty\} \geq \operatorname{mes}(I) - 2\sum_{j=n_0}^{\infty} \operatorname{mes}\left\{x \in e'_j : \sum_{n=n_0}^{j+1} \gamma_n P_n(x) < -\frac{4d}{\varepsilon}\right\} =$$

$$= \operatorname{mes}(I) - 2\operatorname{mes}\left\{x \in I : S(x) < -\frac{4d}{\varepsilon}\right\} > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\operatorname{mes}(I).$$

Из последнего неравенства с учетом (1.1.35) следует, что существуют натуральное число $m > n_0$ и множество $E \subset \{x : \tau'(x) = +\infty\}$ с мерой $\mathrm{mes}(E) > (1-\varepsilon)\mathrm{mes}(I)$ такие, что

$$\left|\sum_{n=n_0}^{m} \gamma_n' \gamma_n P_n(x) - d\right| < \delta \quad \text{при} \quad x \in E.$$

Положив $P(x) := \sum\limits_{n=n_0}^{m} \gamma_n' \gamma_n P_n(x)$ и учитывая (1.1.26) и свойство а) полином P_n, нетрудно убедиться в том, что

$$S^*(P, x) < \delta, \quad \text{если} \quad x \notin I,$$

и (см. также (1.1.39))

$$S^*(P, x) < d\left(1 + \frac{4}{\varepsilon}\right) + \delta < \frac{5d}{\varepsilon} + \delta \quad \text{для п.в.} \quad x \in I.$$

Тем самым лемма 1.1.11 доказана. □

1.1.3 Главная лемма

Лемма 1.1.12 *Пусть* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– монотонная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условиям* $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. *Тогда для любого двоичного интервала* $I = \left[\frac{\eta}{2^\sigma}, \frac{\eta+1}{2^\sigma}\right]$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $0 \le \eta < 2^\sigma$, *и для любых положительных чисел* $\varepsilon < 1$, $\delta < 1$, d, $M \in \mathbb{N}$, *существуют полином по системе Уолша* $Q(x) = \sum\limits_{n=M}^{N} \delta_n a_n W_n(x)$ *и множество* $E \subset [0,1]$ *такие, что:*

1. $\delta_n = 0, \pm 1$ *для* $M \le n \le N$;
2. $|Q(x) - d\mathbb{1}_I(x)| < \delta$, *если* $x \notin E$;
3. $\mathrm{mes}(E) < \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I)$;
4. $S^*(Q, x) < \delta$, *если* $x \notin I \cup E$;
5. $S^*(Q, x) < C\dfrac{d}{\varepsilon} + \delta$, *если* $x \in I \setminus E$,

где $\mathbb{1}_I(x)$ *– характеристическая функция интервала* I, *а* C *– абсолютная постоянная.*

Доказательство. Пусть $a_n \downarrow 0$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}^2 = +\infty. \tag{1.1.40}$$

Обозначим

$$G := \{k \in \mathbb{N} : a_{2^k} < 2a_{2^{k+1}}\}. \qquad (1.1.41)$$

Пусть $m \in G$, а n – такое натуральное число, что $k \notin G$ при всех $m < k < n$. Тогда с учетом монотонности последовательности $\{a_n\}$ получим

$$\sum_{k=m+1}^{n} 2^k a_{2^k}^2 \leq \sum_{k=m+1}^{n} 2^k \left(\frac{a_{2^{m+1}}}{2^{k-m-1}}\right)^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{2^{2m+2}a_{2^{m+1}}^2}{2^k} < 2^{m+2}a_{2^m}^2.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}^2 \leq 4a_1^2 + 4\sum_{m\in G} 2^m a_{2^m}^2.$$

Из последнего неравенства с учетом (1.1.40) получаем

$$\sum_{k\in G} 2^k a_{2^k}^2 = +\infty. \qquad (1.1.42)$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что если $k, k' \in G$, то $(k - k')$ – четное число. Действительно, за G можно взять одно из следующих множеств: $G_1 = \{k \in G : k - \text{четное}\}$ и $G_2 = \{k \in G : k - \text{нечетное}\}$. Очевидно, что для одного из них выполняется (1.1.42).

Пусть γ – некоторое положительное число, удовлетворяющее условию

$$\gamma^2 < \left((d+1)^2 + \frac{4(Cd+1)^2}{\varepsilon}\right)^{-1} \cdot \frac{\delta^2\varepsilon}{16}, \qquad (1.1.43)$$

где C – постоянная из леммы 1.1.11.

Возьмем натуральное число m настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$(1+\gamma)^{2^m} > 2, \qquad (1.1.44)$$

и рассмотрим следующие отношения:

$$\frac{a_{2^n+q2^{n-m}}}{a_{2^n+(q+1)2^{n-m}}}, \quad n \in G, \quad n > m, \quad q = 0, 1, \ldots, 2^m - 1.$$

Из (1.1.41) и (1.1.44) следует, что для каждого $n \in G$, $n > m$, существует такое число $q_n \in \{0, 1, \ldots, 2^m - 1\}$, что

$$\frac{a_{2^n+q_n2^{n-m}}}{a_{2^n+(q_n+1)2^{n-m}}} < 1 + \gamma, \quad n \in G, \quad n > m.$$

В дальнейшем будем считать, что если $n \in G$, то $n > m$. Обозначим

$$\alpha_n := a_{2^n+(q_n+1)2^{n-m}}, \quad n \in G. \tag{1.1.45}$$

Очевидно, что

$$\frac{a_k}{\alpha_n} - 1 < \gamma, \quad \text{если} \quad 2^n + q_n 2^{n-m} \le k \le 2^n + (q_n+1)2^{n-m}. \tag{1.1.46}$$

Из (1.1.41) и (1.1.45) с учетом монотонности последовательности $\{a_n\}$ следует, что

$$\sum_{n\in G} 2^n \alpha_n^2 \ge \sum_{n\in G} 2^n a_{2^{n+1}}^2 \ge 2^{-2} \sum_{n\in G} 2^n a_{2^n}^2.$$

Поэтому (см. также (1.1.42))

$$\sum_{n\in G} 2^n \alpha_n^2 = +\infty. \tag{1.1.47}$$

Обозначим $G' := \{n \in G : \ 2^n \alpha_n^2 > 2^{-\frac{n}{2}}\}$. Очевидно, что

$$\sum_{n\in G\setminus G'} 2^n \alpha_n^2 \le \sum_{n\in G\setminus G'} 2^{-\frac{n}{2}} < +\infty.$$

Следовательно, учитывая также (1.1.47), получаем $\sum\limits_{n\in G'} 2^n \alpha_n^2 = +\infty$. Выберем натуральные числа p_n $(n \in G')$, удовлетворяющие условиям:

$$(n - m - p_n) \text{ – четное число,} \tag{1.1.48}$$

$$\sum_{n\in G'} 2^{n-p_n} \alpha_n^2 = +\infty, \tag{1.1.49}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in G'}} 2^{n-p_n} \alpha_n^2 = 0, \tag{1.1.50}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in G'}} 2^{n-p_n} \alpha_n = +\infty. \tag{1.1.51}$$

В дальнейшем для каждого $n \in G$ через n' будем обозначать число $n - m - p_n$. Пусть $I = \left[\frac{\eta}{2^\sigma}, \frac{\eta+1}{2^\sigma}\right]$ – двоичный интервал, а M – некоторое натуральное число. Из (1.1.49)–(1.1.51) следует, что существует конечное подмножество B_1' множества G' такое, что

$$\min B_1' \ge \log_2 M,$$

$$2^{n'} \alpha_n > 4, \quad \text{если} \ \ n \in B_1', \tag{1.1.52}$$

$$2^{n'} \alpha_n^2 < 2^{-\sigma}, \quad \text{если} \ \ n \in B_1', \tag{1.1.53}$$

$$\sum_{n\in B_1'} 2^{n'}\alpha_n^2 > 2^{-\sigma+1}. \qquad (1.1.54)$$

Для каждого $n\in B_1'$ существует нечетное число $\sigma_n\geq\sigma$ такое, что (см. (1.1.53))

$$2^{-\sigma_n-1} < 2^{n'}\alpha_n^2 \leq 2^{-\sigma_n+1}. \qquad (1.1.55)$$

Из (1.1.52) и (1.1.55) следует, что $2^{n'-\sigma_n}\geq 2^{-1}(2^{n'}\alpha_n)^2 > 8$ при $n\in B_1'$, которое означает (см. также (1.1.48)), что $(n'-\sigma_n-1)$ – положительное четное число для всех $n\in B_1'$. Учитывая также (1.1.54), получаем, что

$$\sum_{n\in B_1'} 2^{-\sigma_n} \geq \frac{1}{2}\sum_{n\in B_1'} 2^{n'}\alpha_n^2 > 2^{-\sigma}.$$

Следовательно (напомним, что $\sigma_n\geq\sigma$), существует подмножество B_1 множества B_1' такое, что

$$\sum_{n\in B_1} 2^{-\sigma_n} = 2^{-\sigma}.$$

Интервал I представим в виде объединения двоичных интервалов I_n, $n\in B_1$, с мерой $\mathrm{mes}(I_n)=2^{-\sigma_n}$. В силу леммы 1.1.10, для каждого интервала I_n, $n\in B_1$, и чисел $m+p_n$, n и $2^{p_n}q_n$ существует полином по системе Уолша $P_n(x)=\sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\alpha_n\delta_k W_k(x)$ такой, что

$$1')\ \ \delta_k=\begin{cases}\pm1, & \text{если}\ \ 2^n+2^{n-m}q_n+2^{n-m-p_n-1}\leq k<2^n+2^{n-m}q_n+2^{n-m-p_n},\\ 0 & \text{для остальных}\ \ k;\end{cases}$$

$$2')\ \ P_n(x)=\begin{cases}2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}}\alpha_n, & \text{если}\ \ x\in E_n',\ \ \mathrm{mes}(E_n')=\frac{1}{2}\mathrm{mes}(I_n),\\ -2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}}\alpha_n, & \text{если}\ \ x\in E_n'',\ \ \mathrm{mes}(E_n'')=\frac{1}{2}\mathrm{mes}(I_n),\\ 0, & \text{если}\ \ x\notin I_n,\end{cases}$$

причем E_n' и E_n'', $n\in B_1$, являются конечными объединениями двоичных интервалов. Из (1.1.55) и 2') следует, что

$$2^{-1}\leq|P_n(x)|=2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}}\alpha_n\leq 1, \quad \text{если}\ \ x\in E_n'\cup E_n'',\ \ n\in B_1.$$

Допустим, что множества $B_1,B_2,\dots,B_{j-1}$ и полиномы P_n, $n\in\bigcup\limits_{i=1}^{j-1}B_i$, уже построены, $\lambda_{j-1}:=\max B_{j-1}+1$ и полином P_n ($n\in\bigcup\limits_{i=1}^{j-1}B_i$) принимает постоянное значение на каждом двоичном интервале с длиной $2^{\lambda_{j-1}}$.

Из (1.1.49)–(1.1.51) следует, что существует конечное подмножество B'_j множества G' такое, что:

$$\min B'_j \geq \lambda_{j-1},$$

$$2^{n'}\alpha_n > \frac{4}{\sqrt{j}}, \quad \text{если} \;\; n \in B'_j, \tag{1.1.56}$$

$$2^{n'}\alpha_n^2 \leq \frac{1}{j}2^{-\lambda_{j-1}}, \quad \text{если} \;\; n \in B'_j, \tag{1.1.57}$$

$$\sum_{n \in B'_j} 2^{n'}\alpha_n^2 > \frac{2}{j}2^{-\sigma}. \tag{1.1.58}$$

В силу (1.1.57), для каждого $n \in B'_j$ существует нечетное число $\sigma_n \geq \lambda_{j-1}$ такое, что

$$\frac{1}{j}2^{-\sigma_n-1} < 2^{n'}\alpha_n^2 \leq \frac{1}{j}2^{-\sigma_n+1}. \tag{1.1.59}$$

Из (1.1.56) и (1.1.59) следует, что $2^{n'-\sigma_n} \geq j2^{2n'-1}\alpha_n^2 > 8$, которое означает (см. также (1.1.48)), что $(n' - \sigma_n - 1)$ – положительное четное число для всех $n \in B'_j$.

Учитывая (1.1.58) и (1.1.59), немедленно получаем, что

$$\sum_{n \in B'_j} 2^{-\sigma_n} \geq \frac{j}{2} \sum_{n \in B'_j} 2^{n'}\alpha_n^2 > 2^{-\sigma}.$$

Следовательно (напомним, что $\sigma_n \geq \lambda_{j-1} > \sigma$), существует подмножество B_j множества B'_j такое, что

$$\sum_{n \in B_j} 2^{-\sigma_n} = 2^{-\sigma}.$$

Поэтому интервал I можно представить в виде объединения двоичных интервалов I_n, $n \in B_j$, $\mathrm{mes}(I_n) = 2^{-\sigma_n}$. Очевидно, что полином $P_k(x)$ $\big(k \in \bigcup\limits_{i=1}^{j-1} B_i\big)$ принимает постоянное значение на каждом интервале I_n, $n \in B_j$. В силу леммы 1.1.10, для каждого интервала I_n, $n \in B_j$, и чисел $m + p_n$, n и $2^{p_n}q_n$ существует полином по системе Уолша

$$P_n(x) = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \alpha_n \delta_k W_k(x) \tag{1.1.60}$$

такой, что

1”) $\delta_k = \begin{cases} \pm 1, & \text{если} \;\; 2^n + q_n 2^{n-m} + 2^{n'-1} \leq k < 2^n + q_n 2^{n-m} + 2^{n'}, \\ 0 & \text{для остальных} \;\; k; \end{cases}$

$$2”)\ \ P_n(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}}\alpha_n, & \text{если } \ x \in E'_n \subset I_n, \ \mathrm{mes}(E'_n) = \frac{1}{2}\mathrm{mes}(I_n), \\ -2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}}\alpha_n, & \text{если } \ x \in E''_n \subset I_n, \ \mathrm{mes}(E''_n) = \frac{1}{2}\mathrm{mes}(I_n), \\ 0, & \text{если } \ x \notin I_n; \end{cases}$$

$$3”)\ \ S^*(P_n, x) \le C_1 2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}}\alpha_n \ \ \text{для всех } x \in [0,1],$$

причем E'_n и E''_n являются конечными объединениями двоичных интервалов с длиной 2^{-n-1}.

Из 2”), 3”) и (1.1.59) следует, что

$$\frac{1}{2\sqrt{j}} \le |P_n(x)| = 2^{\frac{n'+\sigma_n-1}{2}}\alpha_n \le \frac{1}{\sqrt{j}}, \quad \text{если } \ x \in E'_n \cup E''_n, \ \ n \in B_j,$$

и $S^*(P_n, x) \le \dfrac{C_1}{\sqrt{j}}$ для всех $x \in [0,1]$. Поэтому

$$\sum_{n \in B_j} (P_n(x))^2 > \frac{1}{4j} \quad \text{для п.в. } \ x \in I.$$

Нетрудно убедиться в том, что к полиномам $P_n(x)$, $n \in B_j$, $j = 1, 2, \ldots$, применима лемма 1.1.11 (выполняются условия a)–c)). Поэтому, согласно лемме 1.1.11, существует полином

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\nu} P_{n_i}(x), \quad n_i \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$P(x) = 0, \quad \text{если } \ x \notin I, \tag{1.1.61}$$

$$\mathrm{mes}\left\{x \in I: \ |P(x) - d| > \frac{\delta}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{4}\mathrm{mes}(I), \tag{1.1.62}$$

$$S^*(P, x) < \frac{\delta}{2}, \quad \text{если } \ x \notin I, \tag{1.1.63}$$

$$S^*(P, x) < C\frac{4d}{\varepsilon} + \frac{\delta}{2} \quad \text{для п.в. } \ x \in I, \tag{1.1.64}$$

где C – абсолютная постоянная из леммы 1.1.11.

Из (1.1.61), (1.1.62), (1.1.64) и (1.1.43) следует, что

$$\|P\|_2^2 \le \left(d + \frac{\delta}{2}\right)^2 \mathrm{mes}(I) + \left(\frac{4Cd}{\varepsilon} + \frac{\delta}{2}\right)^2 \frac{\varepsilon}{4}\mathrm{mes}(I) < \frac{\varepsilon\delta^2}{16\gamma^2}\mathrm{mes}(I). \tag{1.1.65}$$

Для каждого $n \in B_j$, $j = 1, 2, \ldots$, обозначим $Q_n(x) := \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \delta_k W_k(x)$ и рассмотрим полином

$$Q(x) = \sum_{k=M}^{N} \delta'_k a_k W_k(x) \equiv \sum_{i=1}^{\nu} Q_{n_i}(x). \tag{1.1.66}$$

Ясно, что либо $\delta'_k = \delta_k$ (если $2^{n_i} \le k < 2^{n_i+1}$ для некоторого $i = 1, 2, \ldots .\nu$), либо $\delta'_k = 0$ (в противном случае). Из (1.1.46), (1.1.60), (1.1.66) и 1") следует, что

$$\|Q - P\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=2^{n_i}}^{2^{n_i+1}-1} \delta_k^2 (a_k - \alpha_{n_i})^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=2^{n_i}}^{2^{n_i+1}-1} \delta_k^2 \alpha_{n_i}^2 \left(\frac{a_k}{\alpha_{n_i}} - 1 \right)^2 <$$

$$< \gamma^2 \sum_{i=1}^{\nu} \|P_{n_i}\|_2^2 = \gamma^2 \|P\|_2^2.$$

Поэтому с учетом (1.1.65) получаем

$$\|Q - P\|_2^2 \le \frac{\varepsilon \delta^2}{16} \mathrm{mes}(I). \tag{1.1.67}$$

Следовательно, $\mathrm{mes} \left\{ x \in [0,1] : \ |Q(x) - P(x)| > \frac{\delta}{2} \right\} \le \frac{4\|Q - P\|_2^2}{\delta^2} < \frac{\varepsilon}{4} \mathrm{mes}(I)$. Из (1.1.61), (1.1.62) и последнего неравенства получаем

$$\mathrm{mes}\{x \in [0,1] : \ |Q(x) - d \cdot \mathbb{1}_I(x)| > \delta\} < \frac{\varepsilon}{2} \mathrm{mes}(I). \tag{1.1.68}$$

Так как система Уолша имеет слабый тип $(2, 2)$ (см., например, [25] ст. 189), то из (1.1.67) следует, что

$$\mathrm{mes} \left\{ x : \ S^*(Q - P, x) > \frac{\delta}{2} \right\} \le \frac{4C'}{\delta^2} \|Q - P\|_2^2 < C' \frac{\varepsilon}{2} \mathrm{mes}(I), \tag{1.1.69}$$

Обозначим $E := \{x : \ |Q(x) - d \cdot \mathbb{1}_I(x)| > \delta\} \cup \{x : \ S^*(Q - P, x) > \delta/2\}$. Из (1.1.68) и (1.1.69) следует, что $\mathrm{mes}(E) < (C' + 1)\varepsilon \mathrm{mes}(I)$. А из (1.1.63) и (1.1.64) получаем, что

$$S^*(Q, x) \le S^*(P, x) + S^*(Q - P, x) < \delta, \quad \text{если} \ \ x \notin E \cup I,$$

$$S^*(Q, x) < \frac{4Cd}{\varepsilon} + \delta, \quad \text{если} \ \ x \in I \setminus E.$$

Лемма 1.1.12 доказана. □

Из доказательства леммы 1.1.12 видно, что спаведлива следующая лемма, которую мы будем использовать в главе 2.

Лемма 1.1.13 *Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – монотонная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условиям $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. Тогда для любого двоичного интервала $I \subset [0,1]$ и для любых положительных чисел $\varepsilon < 1$, $\delta < 1$, d и M ($M \in \mathbb{N}$) существуют множество $F \subset I$ и полиномы по системе Уолша*

$$Q(x) = \sum_{n=M}^{N} \delta_n a_n W_n(x), \qquad P(x) = \sum_{n=M}^{N} b_n W_n(x)$$

такие, что:

1. $\delta_n = 0, \pm 1$, *если* $M \le n \le N$;

2. $P(x) = 0$, *если* $x \notin I$;

3. $|P(x) - d| < \delta$, *если* $x \in F$, $\quad \mathrm{mes}(F) > (1-\varepsilon)\mathrm{mes}(I)$;

4. $S^*(P, x) < \delta$, *если* $x \notin I$;

5. $S^*(P, x) < C\dfrac{d}{\varepsilon} + \delta$;

6. $\|Q - P\|_2^2 < \varepsilon\delta^2 \mathrm{mes}(I)$.

Доказательство. Пусть $Q(x)$ и $P(x)$ – полиномы, полученные в доказательстве предыдущей леммы. Справедливость утверждения леммы 1.1.13 непосредственно следует из (1.1.61)–(1.1.64) и (1.1.67). □

1.1.4 Доказательство теорем

Рассмотрим множество $\{(\Delta, d, \lambda)\}$, зависящее от трех параметров, где Δ пробегает все двоичные интервалы, d пробегает множество всех рациональных чисел, а λ – множество рациональных чисел интервала $(0,1)$. Пронумеровав это множество, мы можем представить его в виде последовательности

$$(\Delta_1, d_1, \lambda_1),\ (\Delta_2, d_2, \lambda_2), \ldots, (\Delta_m, d_m, \lambda_m), \ldots \tag{1.1.70}$$

В этой последовательности элементы отличны друг от друга, но параметры, стоящие в разных элементах в одинаковых местах, могут совпадать.

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty}$, где

$$1 > \eta_1 > \eta_2 > \cdots, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m < +\infty. \tag{1.1.71}$$

В силу леммы 1.1.12, для каждого натурального числа m существуют полином

$$P_m(x) = \sum_{n=M_m+1}^{M_{m+1}} \delta_n a_n W_n(x),$$

множество $E_m \subset [0,1]$ и абсолютная постоянная C такие, что:

A) $\delta_n = 0, \pm 1$ для всех n;

B) $|P_m(x) - d_m \mathbb{1}_{\Delta_m}(x)| < \eta_m$, если $x \notin E_m$;

C) $\mathrm{mes}(E_m) < \lambda_m \mathrm{mes}(\Delta_m)$;

D) $S^*(P_m, x) < C\dfrac{|d_m|}{\lambda_m} + \eta_m$, если $x \in \Delta_m \setminus E_m$;

E) $S^*(P_m, x) < \eta_m$, если $x \notin \Delta_m \cup E_m$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x) \tag{1.1.72}$$

и докажем, что для любой п.в. конечной измеримой функции f существует подряд этого ряда, который п.в. сходится к f. Тем самым теорема 1.1.4 будет доказана. Для этого сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1.1.14 *Пусть φ – п.в. конечная измеримая функция, определенная на $[0,1]$, далее, пусть $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ – произвольные числа, а ν – произвольное натуральное число. Тогда существуют натуральные числа $m_1, m_2, \ldots, m_j$, множество E и абсолютная постоянная C, удовлетворяющие следующим условиям:*

i) $\nu < m_1 < m_2 < \cdots < m_j$;

ii) $E \subset [0,1], \quad \mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon$;

iii) $\left|\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}(x) - \varphi(x)\right| < \delta$, *если* $x \in E$;

iv) $S^*\Big(\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}, x\Big) \le C\frac{|\varphi(x)|}{\varepsilon} + \varepsilon$ *для всех* $x \in E$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что существуют конечное разбиение интервала $[0,1]$ на попарно непересекающиеся двоичные интервалы $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_j$, рациональные числа $d'_1, d'_2, \dots, d'_j$ и множество E_0 такие, что

$$E_0 \subset [0,1], \quad \mathrm{mes}(E_0) > 1-\varepsilon, \tag{1.1.73}$$

$$|\varphi(x) - d'_i| < \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon^2}{C}\right\} \quad \text{при} \;\; x \in \Delta'_i \cap E_0, \;\; i = 1,2,\dots,j, \tag{1.1.74}$$

где C – постоянная из D).

Для фиксированного i, $1 \le i \le j$, в последовательности (1.1.70) существует подпоследовательность вида

$$(\Delta'_i, d'_i, \lambda_{k_1}), (\Delta'_i, d'_i, \lambda_{k_2}), \dots, (\Delta'_i, d'_i, \lambda_{k_n}), \dots,$$

где

$$\lambda_{k_n} > \varepsilon, \quad n = 1,2,\dots, \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_{k_n} = \varepsilon. \tag{1.1.75}$$

Пусть $m_0 > \nu$ выбрано настолько большим, чтобы (см. (1.1.71))

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \eta_m < \min\left\{\varepsilon, \frac{\delta}{2}\right\}. \tag{1.1.76}$$

Применяя условия B)–E) полиномов P_m для $m = k_n$ с достаточно большим индексом n и учитывая (1.1.74)–(1.1.76), легко видеть, что для номера $m_i := k_n > m_{i-1}$ выполняются условия:

$$|P_{m_i}(x) - d'_i| < \eta_{m_i}, \quad \text{если} \;\; x \in \Delta'_i \setminus E_{m_i}, \tag{1.1.77}$$

где

$$E_{m_i} \subset [0,1], \quad \mathrm{mes}(E_{m_i}) < \lambda_{m_i}\mathrm{mes}(\Delta'_i) < 2\varepsilon\mathrm{mes}(\Delta'_i), \tag{1.1.78}$$

$$|P_{m_i}(x)| < \eta_{m_i}, \quad \text{если} \;\; x \notin \Delta'_i \cup E_{m_i}, \tag{1.1.79}$$

$$S^*(P_{m_i}, x) < \eta_{m_i}, \quad \text{если} \;\; x \notin \Delta'_i \cup E_{m_i}, \tag{1.1.80}$$

$$\begin{aligned} S^*(P_{m_i}, x) &< C\frac{|d'_i|}{\lambda_{m_i}} + \eta_{m_i} < C\frac{|\varphi(x)| + \varepsilon^2/C}{\varepsilon} + \eta_{m_i} < \\ &< C\frac{|\varphi(x)|}{\varepsilon} + 2\varepsilon, \quad \text{если} \;\; x \in E_0 \cap (\Delta'_i \setminus E_{m_i}). \end{aligned} \tag{1.1.81}$$

Обозначим $E := E_0 \setminus \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{j} E_{m_i}\Big)$. Из (1.1.78) следует, что

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcup_{i=1}^{j} E_{m_i}\Big) \le \sum_{i=1}^{j} \operatorname{mes}(E_{m_i}) < \sum_{i=1}^{j} 2\varepsilon \operatorname{mes}(\Delta_i') = 2\varepsilon.$$

Отсюда с учетом (1.1.73) получаем, что $\operatorname{mes}(E) > 1 - 3\varepsilon$.

Пусть $x \in E$, тогда для некоторого q, $1 \le q \le j$, имеем $x \in \Delta_q'$. Из (1.1.74), (1.1.76), (1.1.77) и (1.1.79) получаем, что

$$\left|\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}(x) - \varphi(x)\right| \le |P_{m_q}(x) - \varphi(x)| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne q}}^{j} |P_{m_i}(x)| \le$$

$$\le |P_{m_q}(x) - d_q'| + |\varphi(x) - d_q'| + \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne q}}^{j} \eta_{m_i} \le \frac{\delta}{2} + \sum_{i=1}^{j} \eta_{m_i} < \delta.$$

А из (1.1.76), (1.1.80) и (1.1.81) следует, что

$$S^*\left(\sum_{i=1}^{j} P_{m_i}, x\right) \le S^*(P_{m_q}, x) + \sum_{i \ne q} S^*(P_{m_i}, x) < C\frac{|\varphi(x)|}{\varepsilon} + 3\varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Пусть f – почти всюду конечная измеримая функция, определенная на отрезке $[0, 1]$, а $\{\gamma_n\}$ – последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < +\infty, \quad 1 > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots \tag{1.1.82}$$

В силу леммы 1.1.14 ($\varphi(x) = f(x)$, $\varepsilon = \gamma_1$, $\delta = \gamma_2^2$, $\nu = 1$) существуют полином $Q_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{j_1} P_{m_i^{(1)}}(x)$, $1 < m_1^{(1)} < m_2^{(1)} < \cdots < m_{j_1}^{(1)}$, и множество F_1 такие, что

$$\operatorname{mes}(F_1) > 1 - \gamma_1,$$

$$|f(x) - Q_1(x)| < \gamma_2^2 \quad \text{для всех} \;\; x \in F_1.$$

Допустим, что уже построены полиномы $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_k(x)$ и множества F_1, $F_2, \dots, F_k$ такие, что

$$\operatorname{mes}(F_i) > 1 - \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \tag{1.1.83}$$

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{k} Q_i(x)\right| < \gamma_{k+1}^2, \quad \text{для всех} \;\; x \in F_k. \tag{1.1.84}$$

Положим $f_k(x) := f(x) - \sum_{i=1}^{k} Q_i(x)$. В силу леммы 1.1.14 ($\varphi(x) = f_k(x)$, $\varepsilon = \gamma_{k+1}$, $\delta = \gamma_{k+2}^2$, $\nu = m_{j_k}^{(k)}$), существует полином $Q_{k+1}(x) = \sum_{i=1}^{j_{k+1}} P_{m_i^{(k+1)}}(x)$ и множество F_{k+1} такие, что $m_{j_k}^{(k)} < m_1^{(k+1)} < m_2^{(k+1)} < \dots < m_{j_{k+1}}^{(k+1)}$,

$$\mathrm{mes}(F_{k+1}) > 1 - \gamma_{k+1},$$

$$|f_k(x) - Q_{k+1}(x)| < \gamma_{k+2}^2 \quad \text{для всех} \ \ x \in F_{k+1}$$

и

$$S^*(Q_{k+1}, x) < C\frac{|f_k(x)|}{\gamma_{k+1}} + \gamma_{k+1} \quad \text{для всех} \quad x \in F_{k+1}.$$

Следовательно, учитывая также (1.1.84), получаем, что на множестве $F'_{k+1} := F_k \cap F_{k+1}$

$$S^*(Q_{k+1}, x) < C\gamma_{k+1} + \gamma_{k+1} < C_1\gamma_{k+1}. \tag{1.1.85}$$

Так, по индукции мы построим множества F_k, $k = 1, 2, \dots$, и подряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n W_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) \tag{1.1.86}$$

ряда (1.1.72) со следующими свойствами:

1) для любого $k \geq 1$ выполняются неравенства (1.1.83) и (1.1.84);

2) для любого $k \geq 1$ на множестве F'_{k+1} выполняется неравенство (1.1.85).

Это означает, что ряд (1.1.86) на множестве

$$F_0 := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} F'_k \quad (F'_1 := [0,1])$$

сходится к функции $f(x)$.

Из (1.1.82) и (1.1.83) следует, что

$$\mathrm{mes}(F_0) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{mes}\left(\bigcap_{k=m}^{\infty} F'_k\right) \geq \lim_{m\to\infty}\left(1 - \sum_{k=m}^{\infty}(\gamma_k + \gamma_{k+1})\right) = 1.$$

Теорема 1.1.4 доказана. □

1.2 Универсальные ряды по системе Уолша с монотонными коэффициентами

1.2.1 Постановка задачи и вспомогательные утверждения

В настоящем разделе рассматривается вопрос скорости стремления к нулю коэффициентов универсальных рядов по системе Уолша. В работе [26] А.М. Олевский доказал существование таких ограниченной в совокупности полной ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_n\}$ и функции $f \in L^p$ при всех $p \in [1, 2)$, что ряд Фурье функции f по системе Φ является универсальным относительно перестановок в классе всех измеримых функций. Для тригонометрической системы в работе [27] Н. С. Погосян анонсировал следующую теорему.

Теорема 1.2.А (Н.С. Погосян, [27]). *Пусть $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность чисел, удовлетворяющая условиям $\rho_n \searrow 0$, $n \to \infty$, и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \rho_n^2 = +\infty$. Тогда существует функция $f \in \bigcap\limits_{p<2} L^p[0, 2\pi]$, тригонометрический ряд Фурье которой является универсальным одновременно относительно знаков, перестановок и подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций, а коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам $|c_n(f)| \le \rho_{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Аналогичные вопросы для кратных рядов Уолша были рассмотрены в работах [131] и [132] (см. теорему 1.1.6).

Отметим, что в этих теоремах для коэффициентов получены оценки сверху. В этом разделе рассматривается вопрос представления функций рядами по системе Уолша, модули коэффициентов которых находятся над наперед заданной минорантой и не возрастают. Доказывается следующая

Теорема 1.2.1 ([133]). *Для любой последовательности $a_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ существует ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n W_n(x)$ с монотонно убывающими коэффициентами $b_n \ge a_n$, который является универсальным относительно знаков в классе почти всюду конечных измеримых функций.*

Прежде чем приступим к доказательству этой теоремы, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1.2.2 *Для любого двоичного интервала* $I = \left[\frac{j}{2^\sigma}, \frac{j+1}{2^\sigma}\right]$, $0 \le j < 2^\sigma$, *и для любых натуральных чисел* m, n *и* i, *удовлетворяющих условиям* $n > m > \sigma$, $(m-\sigma)$ – *четное число и* $0 \le i < 2^{n-m}$, *существует многочлен по системе Уолша*

$$P(x) = \sum_{k=2^n+i2^m}^{2^n+(i+1)2^m-1} a_k W_k(x)$$

такой, что:

1. $|a_k| = 2^{-\frac{m+\sigma}{2}}, \quad 2^n + i2^m \le k < 2^n + (i+1)2^m$;

2. $P(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } \; x \in E_1 \subset I, \quad \operatorname{mes}(E_1) = 2^{-\sigma-1}, \\ -1, & \textit{если } \; x \in E_2 \subset I, \quad \operatorname{mes}(E_2) = 2^{-\sigma-1}, \\ 0, & \textit{если } \; x \notin I; \end{cases}$

3. $S^*(P,x) \le 2^{-\frac{m-\sigma}{2}}$, *если* $x \notin I$;

4. $S^*(P,x) \le C$, *если* $x \in I$.

Доказательство. В силу леммы 1.1.9, существует полином

$$P(x) = \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \alpha_k W_k(x) = W_{2^m}(x) \sum_{k=0}^{2^m-1} \alpha_{2^m+k} W_k(x)$$

с коэффициентами $\alpha_k = 2^{-\frac{m+\sigma}{2}}$, $2^m \le k < 2^{k+1}$, удовлетворяющий условиям *2–4* леммы 1.2.2. Учитывая свойство (1.1.2) системы Уолша, получаем, что полином

$$P_1(x) := \sum_{k=2^n+i2^m}^{2^n+(i+1)2^m-1} a_k W_k(x) \equiv W_{2^n}(x) W_{i2^m}(x) \sum_{k=0}^{2^m-1} \alpha_{2^m+k} W_k(x)$$

удовлетворяет всем условиям леммы 1.2.2. □

Лемма 1.2.3 *Пусть последовательность положительных чисел* $\{a_n\}$ *монотонно стремится к нулю. Тогда для любых чисел* $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$, $l \ne 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ *и для любого двоичного интервала* $I \subset [2^{-n_0}, 1]$ *существует многочлен по системе Уолша* $P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} b_k W_k(x)$, *удовлетворяющий условиям:*

1. $|b_{k-1}| \geq |b_k| \geq a_k$ *для всех* $2^{n_0} < k < 2^n, \quad b_{2^{n_0}} = a_{2^{n_0}}$*;*

2. $P(x) = l, \quad$ *если* $x \in E \subset I, \ \ \mathrm{mes}(E) > (1-\varepsilon)\mathrm{mes}(I)$*;*

3. $P(x) = 0, \quad$ *если* $x \notin I \cup [0, 2^{-n_0}]$*;*

4. $S^*(P, x) < \dfrac{2a_{2^{n_0}}}{x} + \dfrac{C|l|}{\varepsilon} + \delta, \quad$ *если* $x \in I$*;*

5. $S^*(P, x) < \dfrac{2a_{2^{n_0}}}{x} + \delta, \quad$ *если* $x \notin I \cup [0, 2^{-n_0}]$*;*

6. $\hat{P}(x) := \displaystyle\sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} |b_k| W_k(x) = 0$*, если* $x > 2^{-n_0}$*;*

7. $S^*(\hat{P}, x) < \dfrac{2a_{2^{n_0}}}{x}$*, если* $x > 2^{-n_0}$*,*

где C *– абсолютная постоянная.*

Доказательство. Пусть n_0 – натуральное число, а I – двоичный интервал такой, что

$$\mathrm{mes}(I) = 2^{-\sigma} \quad \text{и} \quad I \subset [2^{-n_0}, 1]. \tag{1.2.1}$$

Пусть натуральные числа m_0 и n_1 удовлетворяют следующим условиям:

$$n_1 > m_0 > \max\{\sigma, n_0\}, \quad (m_0 - \sigma) \text{ – четное,}$$

$$|l| 2^{-\frac{m_0-\sigma}{2}} < \delta, \tag{1.2.2}$$

$$a_{2^{n_0}} \geq |l| 2^{-\frac{m_0+\sigma}{2}} \geq a_{2^{n_1}}. \tag{1.2.3}$$

Пусть $\tilde{P}_0(x) := \sum\limits_{k=2^{n_1}}^{2^{n_1}+2^{m_0}-1} \alpha_k W_k(x)$ – полином, полученный применением леммы 1.2.2 к интервалу I при $m = m_0$, $n = n_1$, $i = 0$. Рассмотрим полином

$$P_0(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1+1}-1} b_k W_k(x) := \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} a_{2^{n_0}} W_k(x) + l\tilde{P}_0(x) + \sum_{k=2^{n_1}+2^{m_0}}^{2^{n_1+1}-1} |l| 2^{-\frac{m_0+\sigma}{2}} W_k(x).$$

Из (1.2.3), пункта *1* леммы 1.2.2 и монотонности последовательности a_n следует, что $|b_{k-1}| \geq |b_k| \geq a_k$ для всех $2^{n_0} < k < 2^{n_1+1}$. Очевидно, что $b_{2^{n_0}} = a_{2^{n_0}}$. Положим $I_0^+ := \{x : \tilde{P}_0(x) > 0\}$ и $I_0^- := \{x : \tilde{P}_0(x) < 0\}$. Ясно, что I_0^+ и I_0^- являются конечными объединениями двоичных интервалов и $\mathrm{mes}(I_0^+) = \mathrm{mes}(I_0^-) = 2^{-1}\mathrm{mes}(I)$. Из (1.1.3), (1.2.1) и леммы 1.2.2 непосредственно следует, что

$$P_0(x) = l, \quad \text{если} \ \ x \in I_0^+, \tag{1.2.4}$$

$$P_0(x) = -l, \quad \text{если} \ \ x \in I_0^-, \tag{1.2.5}$$

$$P_0(x) = 0, \quad \text{если} \ \ x \notin I \cup [0, 2^{-n_0}]. \tag{1.2.6}$$

Ясно также, что

$$\hat{P}_0(x) := \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1+1}-1} |b_k| W_k(x) = 0, \quad \text{если} \ \ x > 2^{-n_0}. \tag{1.2.7}$$

Допустим, что уже построены полиномы $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{j-1}(x)$ и

$$P_{j-1}(x) = \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^{2^{n_j+1}-1} b_k W_k(x) = -2^{j-1} l, \quad \text{если} \ \ x \in I_{j-1}^-,$$

где I_{j-1}^- является конечным объединением двоичных интервалов и $\mathrm{mes}(I_{j-1}^-) = 2^{-j-\sigma}$. Пусть $I_{j-1}^- = \bigcup\limits_{i=1}^{r_j} I_{ji}$, где I_{ji} – двоичные интервалы и $\mathrm{mes}(I_{ji}) = 2^{-\sigma_j}$, $i = 1, 2, \dots, r_j$. Ясно, что $r_j = 2^{\sigma_j - \sigma - j}$.

Выберем натуральные числа m_j и n_{j+1}, удовлетворяющие условиям:

$$m_j > \max\{\sigma_j, n_j + 1\}, \quad (m_j - \sigma_j) \text{ – четное}, \tag{1.2.8}$$

$$2^j |l| 2^{-\frac{m_j - \sigma_j}{2}} < \delta, \tag{1.2.9}$$

$$a_{2^{n_j+1}} \geq 2^j |l| 2^{-\frac{m_j + \sigma_j}{2}} > a_{2^{n_{j+1}}}, \tag{1.2.10}$$

$$n_{j+1} > m_j + \sigma_j - \sigma - j. \tag{1.2.11}$$

Для каждого интервала I_{ji}, $i = 1, \dots, r_j$, применяя лемму 1.2.2 при $m = m_j$, $n = n_{j+1}$, $i = i - 1$, получим полиномы

$$\tilde{P}_{ji}(x) = \sum_{k=2^{n_j+1}+(i-1)2^{m_j}}^{2^{n_j+1}+i2^{m_j}-1} \alpha_k W_k(x), \qquad i = 1, 2, \dots, r_j.$$

Положим

$$Q_1(x) := \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_j+1}-1} a_{2^{n_j+1}} W_k(x), \quad Q_2(x) := 2^j l \sum_{i=1}^{r_j} \tilde{P}_{ji}(x),$$

$$Q_3(x) := \sum_{k=2^{n_j+1}+r_j 2^{m_j}}^{2^{n_{j+1}+1}-1} 2^j |l| 2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} W_k(x)$$

и рассмотрим полином

$$P_j(x) = \sum_{2^{n_j+1}}^{2^{n_{j+1}+1}-1} b_k W_k(x) := Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x). \tag{1.2.12}$$

В силу монотонности последовательности $\{a_n\}$, из (1.2.10), (1.2.12) и леммы 1.2.2 получаем

$$b_{2^{n_j+1}} = a_{2^{n_j+1}}, \quad |b_{k-1}| \geq |b_k| \geq a_k \quad \text{для всех } 2^{n_j+1} < k < 2^{n_{j+1}+1}. \tag{1.2.13}$$

Из (1.1.3) и (1.1.2) следует, что

$$Q_1(x) = 0 \quad \text{для всех} \;\; x > 2^{-n_j+1}, \tag{1.2.14}$$

$$\sum_{k=2^{n_j+1}+i2^{m_j}}^{2^{n_j+1}+(i+1)2^{m_j}-1} W_k(x) = W_{2^{n_j+1}+i2^{m_j}}(x) \sum_{k=0}^{2^{m_j}-1} W_k(x) = 0, \;\; \text{если } i < 2^{n_{j+1}-m_j} \text{ и } x > 2^{-m_j}.$$

Поэтому из (1.2.1), (1.2.8), (1.2.12) и леммы 1.2.2 имеем

$$Q_3(x) = 0 \quad \text{при} \;\; x > 2^{-n_0}, \tag{1.2.15}$$

$$P_j(x) = 2^j l, \quad \text{если} \;\; x \in I_j^+ \subset I_{j-1}^-, \quad \mathrm{mes}(I_j^+) = 2^{-1}\mathrm{mes}(I_{j-1}^-) = 2^{-j-1}\mathrm{mes}(I), \tag{1.2.16}$$

$$P_j(x) = -2^j l, \; \text{если } x \in I_j^- \subset I_{j-1}^-, \quad \mathrm{mes}(I_j^-) = 2^{-1}\mathrm{mes}(I_{j-1}^-) = 2^{-j-1}\mathrm{mes}(I), \tag{1.2.17}$$

$$P_j(x) = 0, \quad \text{если} \;\; x \notin [0, 2^{-n_0}] \cup I_{j-1}^-. \tag{1.2.18}$$

Точно также получаем, что если $x \in [2^{-(n_j+1)}, 1] \supset [2^{-n_0}, 1]$, то

$$\hat{P}_j(x) := \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_{j+1}+1}-1} |b_k| W_k(x) = Q_1(x) + 2^j |l| 2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} \sum_{k=2^{n_j+1}}^{2^{n_{j+1}+1}-1} W_k(x) = 0. \tag{1.2.19}$$

Из определения полиномов Q_1 и Q_3, с учетом (1.1.4) и (1.2.10) получаем, что для любого $x \in (0,1]$

$$S^*(Q_1, x) \leq \frac{2a_{2^{n_j+1}}}{x}, \tag{1.2.20}$$

$$S^*(Q_3, x) \leq 2^j |l| 2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}} \frac{2}{x} \leq \frac{2a_{2^{n_j+1}}}{x}. \tag{1.2.21}$$

Пусть $x \in I_{j-1}^-$, тогда для некоторого i_0 имеем $x \in I_{ji_0}$. В силу леммы 1.2.2

$$S^*(2^j l P_{ji}, x) \leq 2^j |l| 2^{-\frac{m_j-\sigma_j}{2}} \quad \text{при } i \neq i_0 \;\; \text{и} \;\; S^*(2^j l P_{ji_0}, x) \leq 2^j |l| C.$$

Поэтому, учитывая тот факт, что $P_{ji}(x) = 0$ при $i \neq i_0$, из (1.2.9) и (1.2.12) получаем $S^*(Q_2, x) \leq \delta + 2^j |l| C$. Комбинируя последнее неравенство с (1.2.14), (1.2.15), (1.2.20) и (1.2.21), с учетом (1.2.1) получаем, что

$$S^*(P_j, x) \leq \frac{2a_{2^{n_j+1}}}{x} + \delta + 2^j |l| C \quad \text{для всех} \;\; x \in I_{j-1}^-. \tag{1.2.22}$$

Аналогично доказывается, что

$$S^*(P_j,x) \le \frac{2a_{2^{n_j+1}}}{x} + \delta, \quad \text{если} \;\; x \notin [0,2^{-n_0}] \cup I^-_{j-1},$$

$$S^*(\hat{P}_j,x) \le \frac{2a_{2^{n_j+1}}}{x}, \quad \text{если} \;\; x > 2^{-n_0}.$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ – некоторое число. Положим $q = [\log_2 \varepsilon^{-1}]$ и рассмотрим многочлены

$$P(x) := \sum_{j=0}^{q} P_j(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{q+1}+1}-1} b_k W_k(x), \qquad \hat{P}(x) := \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_{q+1}+1}-1} |b_k| W_k(x).$$

Из (1.2.4)–(1.2.6) и (1.2.16)–(1.2.18) следует, что

$$P(x) = l, \quad \text{если} \;\; x \in E := I \setminus I^-_q,$$

$$P(x) = 0, \quad \text{если} \;\; x \notin [0,2^{-n_0}] \cup I.$$

Ясно, что $\mathrm{mes}(E) = \mathrm{mes}(I) - 2^{-(q+1)}\mathrm{mes}(I) \ge (1-\varepsilon)\mathrm{mes}(I)$, это означает (см. также (1.2.13), (1.2.7) и (1.2.19)), что полином $P(x)$ удовлетворяет пунктам *1–3* и *6* леммы 1.2.3.

Предположим, что $x \in I$ и

$$S^*(P,x) = \left| \sum_{j=0}^{i-1} P_j(x) + \sum_{k=2^{n_i+1}}^{M} b_k W_k(x) \right|$$

для некоторых $i < q$ и M. Тогда в силу (1.2.16)–(1.2.18) и (1.2.22) имеем

$$S^*(P,x) \le \left| \sum_{j=0}^{i-1} P_j(x) \right| + S^*(P_i,x) \le \frac{2a_{2^{n_0+1}}}{x} + \delta + 2^q|l|(C+1) \le \frac{2a_{2^{n_0+1}}}{x} + \delta + \frac{|l|C_1}{\varepsilon}.$$

Остальные пункты леммы доказываются аналогично. Лемма 1.2.3 доказана. □

Рассмотрим множество $\{(\Delta, l, \varepsilon)\}$, зависящее от трех параметров, где Δ пробегает все двоичные интервалы, левый конец которых отличен от нуля, l пробегает множество всех ненулевых рациональных чисел, а ε – множество рациональных чисел интервала $(0,1)$. Пронумеровав это множество, мы можем представить его в виде последовательности

$$(\Delta_1, l_1, \varepsilon_1),\ (\Delta_2, l_2, \varepsilon_2), \ldots, (\Delta_m, l_m, \varepsilon_m), \ldots \tag{1.2.23}$$

В этой последовательности элементы отличны друг от друга, но параметры, стоящие в разных элементах в одинаковых местах, могут совпадать.

Лемма 1.2.4 *Пусть последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю. Тогда существуют многочлены*

$$P_m(x) = \sum_{k=N_m+1}^{N_{m+1}} b_k W_k(x), \quad m = 1, 2, \dots,$$

и множества $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$, причем $G_m \supset G_{m-1}$, $\mathrm{mes}(G_m) \to 1$, $\Delta_m \subset G_m$ ($G_0 = \varnothing$, $N_1 = -1$), такие, что

1. *$b_0 = a_0$, $|b_{k-1}| \geq |b_k| \geq a_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$;*

2. *$P_m(x) = l_m$, если $x \in E_m \subset \Delta_m$, $\mathrm{mes}(E_m) > (1-\varepsilon_m)\mathrm{mes}(\Delta_m)$, $m \in \mathbb{N}$;*

3. *$P_m(x) = 0$, если $x \in G_m \setminus \Delta_m$, $m \in \mathbb{N}$;*

4. *$S^*(P_m, x) \leq 2^{-m} + \dfrac{C|l_m|}{\varepsilon_m}$, если $x \in \Delta_m$, $m > 1$;*

5. *$S^*(P_m, x) \leq 2^{-m}$, если $x \in G_m \setminus \Delta_m$, $m > 1$;*

6. *$\hat{P}_m(x) := \displaystyle\sum_{k=N_m+1}^{N_{m+1}} |b_k| W_k(x) = 0$, если $x \in G_m$, $m \in \mathbb{N}$;*

7. *$S^*(\hat{P}_m, x) \leq 2^{-m}$ если $x \in G_m$, $m > 1$,*

где C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Пусть $\Delta_m = \left[\dfrac{k_m}{2^{\sigma_m}}, \dfrac{k_m+1}{2^{\sigma_m}}\right]$, $m \in \mathbb{N}$. Выберем натуральное число $n_0 > \sigma_1$ и рассмотрим полином

$$Q_0(x) := \sum_{k=0}^{2^{n_0}-1} a_0 W_k(x).$$

Ясно, что (см. (1.1.3)) $Q_0(x) = 0$, если $x \in (2^{-n_0}, 1)$ и $\Delta_1 \subset (2^{-n_0}, 1)$. Для интервала Δ_1, применяя лемму 1.2.3 при $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\delta = 2^{-2}$ и $l = l_1$, получим множество $E_1 \subset \Delta_1$ и полиномы

$$R_1(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{r_1}-1} \beta_k W_k(x), \qquad \hat{R}_1(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{r_1}-1} |\beta_k| W_k(x),$$

обладающие следующими свойствами:

i) $\beta_{2^{n_0}} = a_{2^{n_0}}$, $|\beta_{k-1}| \geq |\beta_k| \geq a_k$, $2^{n_0} < k < 2^{r_1}$;

ii) $R_1(x) = l_1$, если $x \in E_1$, $\mathrm{mes}(E_1) > (1-\varepsilon_1)\mathrm{mes}(\Delta_1)$;

iii) $R_1(x) = 0,\quad$ если $x \notin \Delta_1 \cup [0, 2^{-n_0}]$;

iv) $\hat{R}_1(x) = 0,\quad$ если $x > 2^{-n_0}$.

Выберем натуральное число $n_1 > r_1$, удовлетворяющее неравенствам $n_1 > \sigma_2$ и $\sqrt{a_{2^{n_1}}} < \min\{2^{-\sigma_2}, 2^{-5}\}$, и рассмотрим полином $Q_1(x) := \sum\limits_{k=2^{r_1}}^{2^{n_1}-1} a_{2^{r_1}} W_k(x)$. Ясно, что $Q_1(x) = 0$ для всех $x > 2^{-n_0}$ (см. (1.1.3)).

Положим

$$P_1(x) := \sum_{k=0}^{2^{n_1}-1} b_k W_k(x) \equiv Q_0(x) + R_1(x) + Q_1(x), \qquad G_1 := [2^{-n_0}, 1].$$

Очевидно, что утверждения *1–3* и *6* леммы 1.2.4, при $k = 1$ выполняются.

Допустим, что уже построены полиномы $P_i(x) = \sum\limits_{k=2^{n_{i-1}}}^{2^{n_i}-1} b_k W_k(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, причем числа n_i удовлетворяют условиям

$$n_i > \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{1.2.24}$$

$$\sqrt{a_{2^{n_i}}} < \min\{2^{-\sigma_{i+1}}, 2^{-(i+4)}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{1.2.25}$$

Положим

$$G_m := [2^{-n_{m-1}}, 1] \cap [\sqrt{a_{2^{n_{m-1}}}}, 1]. \tag{1.2.26}$$

Поскольку левый конец интервала Δ_m отличен от нуля, то из (1.2.24) и (1.2.25) следует, что $\Delta_m \subset G_m$. Применяя лемму 1.2.3 к интервалу Δ_m (при $\varepsilon = \varepsilon_m$, $\delta = 2^{-m-1}$ и $l = l_m$) получим множество $E_m \subset \Delta_m$ и полиномы

$$R_m(x) = \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{r_m}-1} \beta_k W_k(x), \qquad \hat{R}_m(x) = \sum_{k=2^{n_{m-1}}}^{2^{r_m}-1} |\beta_k| W_k(x),$$

обладающими следующими свойствами:

A) $\beta_{2^{n_{m-1}}} = a_{2^{n_{m-1}}}\quad$ и $|\beta_{k-1}| \geq |\beta_k| \geq a_k$, если $2^{n_{m-1}} < k < 2^{r_m}$;

B) $R_m(x) = l_m,\quad$ если $x \in E_m \subset \Delta_m$, $\operatorname{mes}(E_m) > (1 - \varepsilon_m)\operatorname{mes}(\Delta_m)$;

C) $R_m(x) = 0,\quad$ если $x \notin \Delta_m \cup [0, 2^{-n_{m-1}}]$;

D) $S^*(R_m, x) \leq \dfrac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x} + 2^{-m-1} + \dfrac{C|l_m|}{\varepsilon_m},\quad$ если $x \in \Delta_m$;

E) $S^*(R_m, x) \leq \dfrac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x} + 2^{-m-1},\quad$ если $x \notin \Delta_m \cup [0, 2^{-n_{m-1}}]$;

F) $\hat{R}_m(x) = 0$ и $S^*(\hat{R}_m, x) \le \dfrac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x}$, если $x > 2^{-n_{m-1}}$.

Выберем натуральное число $n_m > r_m$ так, чтобы выполнялись также неравенства $n_m > \sigma_{m+1}$ и $\sqrt{a_{2^{n_m}}} < \min\{2^{-\sigma_{m+1}}, 2^{-m-4}\}$. Пусть

$$Q_m(x) := \sum_{k=2^{r_m}}^{2^{n_m}-1} a_{2^{r_m}} W_k(x).$$

Из (1.1.3), (1.1.4), (1.2.26) и условия $r_m > n_{m-1}$ получим, что

$$Q_m(x) = 0, \quad \text{если } \ x \in G_m, \tag{1.2.27}$$

$$S^*(Q_m, x) \le \frac{2a_{2^{r_m}}}{x} \le \frac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x} \quad \text{для всех } \ x \in (0,1], \tag{1.2.28}$$

$$G_{m-1} \subset G_m \quad \text{и} \quad \mathrm{mes}(G_m) \to 1.$$

Положим

$$P_m(x) := R_m(x) + Q_m(x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так, по индукции, для каждого натурального m определяются полиномы $P_m(x)$ и множества G_m и E_m. Теперь докажем, что они удовлетворяют условиям *1–7* леммы 1.2.4. Пункт *1* немедленно следует из i), A) и монотонности последовательности $\{a_n\}$. Так как $\Delta_m \subset G_m$, то с учетом (1.2.27) и B) получаем, что

$$P_m(x) = l_m, \quad \text{если } \ x \in E_m \subset \Delta_m, \quad \mathrm{mes}(E_m) > (1-\varepsilon_m)\mathrm{mes}(\Delta_m).$$

Аналогично получаем $P_m(x) = 0$, если $x \in G_m \setminus \Delta_m$. Для мажоранты частичных сумм полинома P_m имеем (см. D) и (1.2.28)), что при $x \in \Delta_m$

$$S^*(P_m, x) \le S^*(R_m, x) + S^*(Q_m, x) \le \frac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x} + 2^{-m-1} + \frac{C|l_m|}{\varepsilon_m} + \frac{2a_{2^{n_{m-1}}}}{x}.$$

Следовательно, учитывая также (1.2.25), (1.2.26) и $\Delta_m \subset G_m$, получим, что

$$S^*(P_m, x) \le 4\sqrt{a_{2^{n_{m-1}}}} + 2^{-m-1} + \frac{C|l_m|}{\varepsilon_m} < 2^{-m} + \frac{C|l_m|}{\varepsilon_m}, \quad \text{если } \ x \in \Delta_m.$$

Остальные пункты леммы 1.2.4 доказываются аналогично. Лемма 1.2.4 доказана. □

Лемма 1.2.5 *Пусть* $\{P_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ *– последовательность полиномов, полученных в лемме* 1.2.4, *а* g *– почти всюду конечная измеримая функция, определенная на* $[0,1]$. *Тогда для любых чисел* $0 < \varepsilon < 1$, $\delta > 0$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *существуют натуральные числа* $m_1, m_2, \ldots, m_j$ *и множество* $E \subset [0,1]$, *удовлетворяющие следующим условиям:*

a) $m < m_1 < m_2 < \dots < m_j$;

b) $\left| g(x) - \sum_{k=1}^{j} P_{m_k}(x) \right| < \delta$, *если* $x \in E$, $\operatorname{mes}(E) > 1 - \varepsilon$;

c) $S^* \left(\sum_{k=1}^{j} P_{m_k}, x \right) \le \frac{C|g(x)|}{\varepsilon} + \varepsilon$ *для всех* $x \in E$,

где C – абсолютная постоянная.

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ – некоторое число. Выберем натуральное число p так, чтобы

$$\frac{1}{2^p} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.2.29}$$

Очевидно, что существуют конечное разбиение интервала $[2^{-p}, 1]$ на попарно непересекающиеся двоичные интервалы $I_1, \dots, I_j$, ненулевые рациональные числа $d_1, \dots, d_j$ и множество E_0 такие, что

$$E_0 \subset [2^{-p}, 1], \quad \operatorname{mes}(E_0) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \tag{1.2.30}$$

$$|g(x) - d_k| < \min\left\{\delta, \frac{\varepsilon^2}{C}\right\}, \quad \text{если} \;\; x \in I_k \cap E_0, \quad k = 1, 2, \dots, j, \tag{1.2.31}$$

где C – постоянная из леммы 1.2.4. Для фиксированного k, $1 \le k \le j$, в последовательности (1.2.23) существует подпоследовательность вида

$$(I_k, d_k, \varepsilon_{r_1}),\; (I_k, d_k, \varepsilon_{r_2}), \dots, (I_k, d_k, \varepsilon_{r_n}), \dots,$$

где

$$\varepsilon_{r_n} \ge \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} \varepsilon_{r_n} = \varepsilon. \tag{1.2.32}$$

Пусть $\{P_m\}$, $\{G_m\}$ и $\{E_m\}$ – последовательности, определенные в лемме 1.2.4, а натуральное число $m_0 > m$ выбрано настолько большим, чтобы $2^{-m_0} < \varepsilon$. В силу леммы 1.2.4 и (1.2.32), существует достаточно большое n такое, что для $m_k := r_n > m_{k-1}$ выполняются условия:

$$\operatorname{mes}(G_{m_k}) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \tag{1.2.33}$$

$$P_{m_k}(x) = d_k, \quad \text{если} \;\; x \in E_{m_k}, \tag{1.2.34}$$

где

$$E_{m_k} \subset I_k, \quad \operatorname{mes}(E_{m_k}) > (1 - \varepsilon_{m_k})\operatorname{mes}(I_k) > (1 - \varepsilon)\operatorname{mes}(I_k) - \frac{\varepsilon}{4j}, \tag{1.2.35}$$

$$P_{m_k}(x) = 0, \quad \text{если} \;\; x \in G_{m_k} \setminus I_k, \tag{1.2.36}$$

$$S^*(P_{m_k}, x) \le 2^{-m_k} + \frac{C|d_k|}{\varepsilon_{m_k}} \le 2^{-m_k} + \frac{C|d_k|}{\varepsilon}, \quad \text{если} \;\; x \in I_k, \tag{1.2.37}$$

$$S^*(P_{m_k}, x) \le 2^{-m_k}, \quad \text{если} \;\; x \in G_{m_k} \setminus I_k. \tag{1.2.38}$$

Обозначим через E множество

$$E := E_0 \cap G_{m_1} \cap \left(\cup_{k=1}^{j} E_{m_k}\right).$$

Из (1.2.29) и (1.2.35) следует, что

$$\operatorname{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{j} E_{m_k}\right) \ge \sum_{k=1}^{j}\left((1-\varepsilon)\operatorname{mes}(I_k) - \frac{\varepsilon}{4j}\right) > 1 - \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Поэтому с учетом (1.2.30) и (1.2.33) получаем, что $\operatorname{mes}(E) > 1 - 2\varepsilon$.

Пусть $x \in E$, тогда для некоторого $i, 1 \le i \le j$, имеем $x \in E_{m_i}$. В силу (1.2.31), (1.2.34) и (1.2.36), с учетом того, что $G_{m_1} \subset G_{m_2} \subset \cdots \subset G_{m_j}$ и $I_{m_k} \subset G_{m_k}$, получаем неравенство

$$\left| g(x) - \sum_{k=1}^{j} P_{m_k}(x) \right| = |g(x) - P_{m_i}(x)| < \delta.$$

Наконец, из (1.2.31), (1.2.37) и (1.2.38) вытекает, что

$$S^*\left(\sum_{k=1}^{j} P_{m_k}, x\right) \le S^*(P_{m_i}, x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{j} S^*(P_{m_k}, x) \le$$

$$\le 2^{-m_i} + \frac{C|d_i|}{\varepsilon} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{j} 2^{-m_k} \le 2\varepsilon + \frac{C|g(x)|}{\varepsilon}.$$

Лемма 1.2.5 доказана. □

1.2.2 Доказательство теоремы 1.2.1

Пусть $\left\{ P_m(x) = \sum_{k=N_m+1}^{N_{m+1}} b_k W_k(x) \right\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность полиномов, построенная в лемме 1.2.4. Для доказательства теоремы 1.2.1 достаточно доказать (см. пункт *1* леммы 1.2.4), что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| W_k(x) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \hat{P}_m(x) \tag{1.2.39}$$

является универсальным относительно знаков в классе почти всюду конечных измеримых функций. Выберем последовательность положительных чисел $\{\gamma_m\}$ и натуральное число i_0 так, чтобы

$$1 > \gamma_1 > \gamma_2 > \cdots, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m < +\infty, \quad \operatorname{mes}(G_{i_0}) > 1 - \gamma_1 \tag{1.2.40}$$

($\{G_m\}$ – последовательность множеств, построенная в лемме 1.2.4).

Пусть $f(x)$ – почти всюду конечная, измеримая функция, определенная на $[0,1]$. В силу леммы 1.2.5, для функции $g(x) = f(x) - \sum\limits_{m=1}^{i_0} \hat{P}_m(x)$ ($\varepsilon = \gamma_1$, $\delta = \gamma_2^2$, $m = i_0$) существуют полиномы $P_{m_1^0}(x), P_{m_2^0}(x), \dots, P_{m_{k_0}^0}(x)$, $i_0 < m_1^0 < \cdots < m_{k_0}^0$, и множество E_1 такие, что

$$\operatorname{mes}(E_1) > 1 - \gamma_1, \tag{1.2.41}$$

$$\left| f(x) - \sum_{m=1}^{i_0} \hat{P}_m(x) - \sum_{j=1}^{k_0} P_{m_j^0}(x) \right| < \gamma_2^2, \quad \text{если} \;\; x \in E_1. \tag{1.2.42}$$

Возьмем натуральное число $i_1 > m_{k_0}^0$ так, чтобы выполнялись также неравенства $2^{-i_1} < \gamma_2$ и $\operatorname{mes}(G_{i_1}) > 1 - \gamma_2$ (вспомним, что $\operatorname{mes}(G_m) \to 1$). Положим

$$E_1' := E_1 \cap G_{i_0}, \quad J_1 := \{m : i_0 < m \le i_1\} \setminus \{m_1^0, m_1^0, \dots, m_{k_0}^0\}, \tag{1.2.43}$$

$$Q_1(x) := \sum_{m=1}^{i_0} \hat{P}_m(x) + \sum_{j=1}^{k_0} P_{m_j^0}(x) + \sum_{m \in J_1} \hat{P}_m(x). \tag{1.2.44}$$

Из (1.2.40)–(1.2.44) и пункта 6) леммы 1.2.4 следует, что

$$|f(x) - Q_1(x)| \le \gamma_2^2 \quad \text{для всех } x \in E_1' \quad \text{и} \quad \operatorname{mes}(E_1') > 1 - 2\gamma_1.$$

Допустим, что уже определены число i_p, множество E_p' и полином $Q_p(x)$ так, что

$$2^{-i_p} < \gamma_{p+1}, \quad \operatorname{mes}(G_{i_p}) > 1 - \gamma_{p+1}, \quad E_p' \subset G_{i_{p-1}}, \quad \operatorname{mes}(E_p') > 1 - 2\gamma_p, \tag{1.2.45}$$

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{p} Q_j(x) \right| \le \gamma_{p+1}^2, \quad \text{если} \;\; x \in E_p'. \tag{1.2.46}$$

В силу леммы 1.2.5, для функции $g(x) = f_p(x) := f(x) - \sum\limits_{j=1}^{p} Q_j(x)$ ($\varepsilon = \gamma_{p+1}$, $\delta = \gamma_{p+2}^2$, $m = i_p$) существуют натуральные числа $i_p < m_1^p < m_2^p < \cdots < m_{k_p}^p$ и множество E_{p+1} такие, что

$$\operatorname{mes}(E_{p+1}) > 1 - \gamma_{p+1}, \tag{1.2.47}$$

$$\left|f(x)-\sum_{j=1}^{p}Q_j(x)-\sum_{j=1}^{k_p}P_{m_j^p}(x)\right|<\gamma_{p+2}^2 \quad \text{для всех} \quad x\in E_{p+1}, \tag{1.2.48}$$

$$S^*\left(\sum_{j=1}^{k_p}P_{m_j^p},x\right)\leq\frac{C|f_p(x)|}{\gamma_{p+1}}+\gamma_{p+1} \quad \text{для всех} \quad x\in E_{p+1}. \tag{1.2.49}$$

Пусть натуральное число $i_{p+1}>m_{k_p^p}$ выбрано так, чтобы выполнялись также неравенства $2^{-i_{p+1}}<\gamma_{p+2}$ и $\mathrm{mes}(G_{i_{p+1}})>1-\gamma_{p+2}$. Положим

$$J_{p+1}:=\{m\in\mathbb{N}:i_p<m\leq i_{p+1}\}\setminus\{m_1^p,m_2^p,\dots,m_{k_p}^p\},$$

$$Q_{p+1}(x):=\sum_{j=1}^{k_p}P_{m_j^p}(x)+\sum_{m\in J_{p+1}}\hat{P}_m(x), \tag{1.2.50}$$

$$E'_{p+1}:=E_{p+1}\cap G_{i_p}, \quad E''_{p+1}:=E'_{p+1}\cap E'_p. \tag{1.2.51}$$

Из (1.2.45), (1.2.47) и (1.2.51) следует, что

$$\mathrm{mes}(E'_{p+1})>1-2\gamma_{p+1}, \quad \mathrm{mes}(E''_{p+1})>1-2\gamma_p-2\gamma_{p+1}. \tag{1.2.52}$$

Ясно, что если $m>i_p$, то $\hat{P}_m(x)=0$ для всех $x\in G_{i_p}$ (см. лемму 1.2.4). Поэтому с учетом (1.2.48), (1.2.50) и (1.2.51) получаем

$$\left|f(x)-\sum_{j=1}^{p+1}Q_j(x)\right|\leq\gamma_{p+2}^2, \quad \text{если} \quad x\in E'_{p+1}. \tag{1.2.53}$$

Пусть $x\in E''_{p+1}$, тогда в силу (1.2.46), (1.2.49) и (1.2.51) имеем, что

$$S^*\left(\sum_{j=1}^{k_p}P_{m_j^p},x\right)\leq\frac{C\gamma_{p+1}^2}{\gamma_{p+1}}+\gamma_{p+1}\leq C_1\gamma_{p+1}.$$

Следовательно, из (1.2.50), первого неравенства (1.2.45) и пункта 7) леммы 1.2.4 заключаем, что

$$S^*(Q_{p+1},x)\leq C_1\gamma_{p+1}+\sum_{m=i_p+1}^{\infty}2^{-m}\leq(C_1+1)\gamma_{p+1} \quad \text{для всех} \quad x\in E''_{p+1}. \tag{1.2.54}$$

Рассмотрим множества $F':=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{p=m}^{\infty}E'_p$ и $F'':=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{p=m}^{\infty}E''_p$, $(E''_1=[0,1])$. Очевидно, что $\mathrm{mes}(F')=\mathrm{mes}(F'')=1$ (см. (1.2.40) и (1.2.52)). Следовательно, учитывая (1.2.53) и (1.2.54), заключаем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kW_k(x)\equiv\sum_{j=1}^{\infty}Q_j(x)$$

на множестве $F' \cap F''$ сходится к $f(x)$ и $\mathrm{mes}(F' \cap F'') = 1$. Это означает, что ряд (1.2.39) является универсальным относительно знаков в классе почти всюду конечных измеримых функций (так как $|\alpha_k| = |b_k|$ для всех неотрицательных целых k).

Теорема 1.2.1 доказана. $\square$

1.3 Представление функций абсолютно сходящимися рядами по $\mathscr{H}$-системам

1.3.1 Введение

В этом разделе рассматриваются системы типа Хаара, построенные на диадических системах пространств однородного типа.

Напомним некоторые определения.

Определение 1.3.1 *Пусть X – некоторое множество. Неотрицательная симметричная функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется квазиметрикой, если*

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) существует постоянная K такая, что

$$\rho(x, y) \leq K\left(\rho(x, z) + \rho(z, y)\right) \quad \text{для всех} \;\; x, y, z \in X.$$

Обозначим через $B(x, r) := \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ шар с центром x и радиусом r. Известно, что если ρ – квазиметрика с коэффициентом $K > 1$, то шар $B(x, r)$ может быть неоткрытым множеством. В работе [28] доказано, что для любой квазиметрики ρ существует такая квазиметрика ρ', которая эквивалентна ρ, и все шары относительно ρ' являются открытыми множествами. Мы будем предполагать, что все шары – открытые множества.

Напомним также, что пространство (X, ρ, μ), где ρ – квазиметрика, а μ – некоторая бореловая σ-конечная мера, определенная на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X, называется пространством однородного типа, если существует постоянная A

такая, что

$$\mu(B(x,2r)) \le A\mu(B(x,r)) < +\infty \qquad \text{для всех } x \in X \quad \text{и } r > 0. \tag{1.3.1}$$

Мы будем предполагать, что мера μ регулярная.

Определение 1.3.2 *Пусть (X,ρ,μ) – некоторое пространство однородного типа. Семейство $\mathscr{D} = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}^j$ называется диадическим семейством с параметром $\delta \in (0,1)$ в пространстве X, если каждое $\mathscr{D}^j$ является семейством бореловых множеств $Q \subset X$, удовлетворяющее условиям:*

d1) для каждого $j \in \mathbb{Z}$ множества в $\mathscr{D}^j$ попарно не пересекаются и $X = \bigcup\limits_{Q\in\mathscr{D}^j} Q$;

d2) если $Q \in \mathscr{D}^j$ и $i < j$, то существует множество $\tilde{Q} \in \mathscr{D}^i$ такое, что $Q \subset \tilde{Q}$;

d3) существует натуральное число N такое, что для всех $j \in \mathbb{Z}$ и $Q \in \mathscr{D}^j$ справедливо неравенство $1 \le \operatorname{card}\{Q' \in \mathscr{D}^{j+1} : Q' \subset Q\} \le N$;

d4) существуют постоянные a_1 и a_2 такие, что для каждого $Q \in \mathscr{D}^j$, $j \in \mathbb{Z}$, существуют шары $B(x_1,r_1)$ и $B(x_2,r_2)$ такие, что

$$B(x_1,r_1) \subset Q \subset B(x_2,r_2), \qquad r_1 \ge a_1\delta^j, \quad r_2 \le a_2\delta^j.$$

Первые нетривиальные конструкции диадических семейств были рассмотрены в [29].

В работах [30]–[33] дано определение системы типа Хаара, соответствующей диадической системе $\mathscr{D}$, и исследованы некоторые свойства этой системы.

Пусть $\mathscr{D}$ – некоторое диадическое семейство с параметром δ в пространстве однородного типа X. Для $Q \in \mathscr{D}^j$, $j \in \mathbb{Z}$, обозначим

$$\mathscr{L}(Q) := \{Q' \in \mathscr{D}^{j+1} :\ Q' \subset Q\}.$$

Положим

$$\tilde{\mathscr{D}}^j := \{Q \in \mathscr{D}^j :\ \operatorname{card}(\mathscr{L}(Q)) > 1\}, \qquad \tilde{\mathscr{D}} := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathscr{D}}^j.$$

Мы будем предполагать, что в $\mathscr{D}$ не существуют одноточечные множества с положительной мерой. Это означает (см. также *d4)*), что для каждого $Q \in \mathscr{D}$ существует $n(Q) \in \mathbb{N}$ такое, что $Q \in \tilde{\mathscr{D}}^{n(Q)}$, т.е.

$$\mathscr{D} = \tilde{\mathscr{D}}. \tag{1.3.2}$$

Определение 1.3.3 *Система простых, измеримых функций $\mathscr{H} = \{h\}$, определенных на X, называется системой типа Хаара ($\mathscr{H}$-системой), связанной с системой $\mathscr{D}$, если:*

(h1) для каждого $h \in \mathscr{H}$ существуют единственное $j = j(h) \in \mathbb{Z}$ и множество $Q = Q(h) \in \tilde{\mathscr{D}}^j$ такие, что $\{x \in X: \ h(x) \neq 0\} \subset Q$, и это свойство не выполняется для множеств из $\mathscr{D}^{j+1}$. Более того, каждая функция h постоянна на каждом множестве $Q' \in \mathscr{L}(Q(h))$;

(h2) для каждого $Q \in \tilde{\mathscr{D}}$ существуют $M_Q := \operatorname{card}(\mathscr{L}(Q)) - 1 \geq 1$ функций $h \in \mathscr{H}$, удовлетворяющих (h1). Множество этих функций обозначим через $\mathscr{H}(Q)$;

(h3) $\int_X h d\mu = 0$ для каждого $h \in \mathscr{H}$;

(h4) если для каждого $Q \in \tilde{\mathscr{D}}$ обозначим через V_Q линейное пространство тех функций, определенных на Q, которые постоянны на каждом $Q' \in \mathscr{L}(Q)$, то система $\left\{\dfrac{\mathbb{1}_Q}{\sqrt{\mu(Q)}}\right\} \cup \mathscr{H}(Q)$ является ортонормированным базисом в V_Q ($\mathbb{1}_Q$ – характеристическая функция множества Q).

Заметим, что система типа Хаара, связанная с данной системой $\mathscr{D}$, может быть не единственной.

Н.К. Бари было установлено, что любая п.в. конечная на $[0,1]$, измеримая функция представима рядом по системе Хаара, сходящимся к этой функции п.в. [1, с. 527]. Затем Ф.Г. Арутюняном [22] эта теорема была усилена и доказано, что для любой п.в. конечной на $[0,1]$, измеримой функции f существует абсолютно сходящийся п.в. на $[0,1]$ ряд по системе Хаара, такой, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) = f(x) \quad \text{п.в. на } [0,1].$$

В работах [34]–[36] этот результат Арутюняна распространен на другие системы, содержащие в себе систему Хаара. Здесь мы рассмотрим вопросы представления функций абсолютно сходящимися рядами по $\mathscr{H}$-системам и для них докажем аналог теоремы Арутюняна. Точнее, справедлива следующая

Теорема 1.3.4 ([134]) *Пусть (X,ρ,μ) – некоторое пространство однородного типа, $\mathscr{D}$ – диадическое семейство с параметром δ в пространстве X, удовлетворяющее условию (1.3.2), а $\mathscr{H}=\{h\}$ – некоторая система типа Хаара, связанная с системой $\mathscr{D}$. Тогда для любой п.в. конечной на X измеримой функции f существует ряд $\sum\limits_{h\in\mathscr{H}} a_h h$ по системе $\mathscr{H}$, который п.в. абсолютно сходится и*

$$\sum_{h\in\mathscr{H}} a_h h(x) = f(x) \quad \text{п.в. на } X.$$

Для каждого целого числа k_0 обозначим (см. (h1))

$$\mathscr{H}_{k_0} := \{h\in\mathscr{H} : j(h)\geq k_0\}.$$

Нетрудно заметить, что теорема 1.3.4 следует из следующей теоремы:

Теорема 1.3.5 ([134]) *Пусть (X,ρ,μ) — некоторое пространство однородного типа, $\mathscr{D}$ – диадическое семейство с параметром δ в пространстве X, удовлетворяющее условию (1.3.2), а $\mathscr{H}=\{h\}$ – некоторая система типа Хаара, связанная с системой $\mathscr{D}$. Тогда для любого $k_0\in\mathbb{Z}$ и любой п.в. конечной на X измеримой функции f существует ряд $\sum\limits_{h\in\mathscr{H}_{k_0}} a_h h$ по системе $\mathscr{H}_{k_0}$, который п.в. абсолютно сходится и*

$$\sum_{h\in\mathscr{H}_{k_0}} a_h h(x) = f(x) \quad \text{п.в. на } X.$$

Напомним определение обобщенной системы Харра (см., например, [37]). Пусть $\{p_k\}$ – некоторая последовательность натуральных чисел с условием $p_k\geq 2,\ k\in\mathbb{N}$. Допустим $m_0=1$ и $m_k=m_{k-1}p_k,\ k\in\mathbb{N}$. Тогда любое число $x\in[0,1)$ единственным образом представляется в виде

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{m_k}, \quad \text{где} \quad x_k\in\{0,1,\dots,p_k-1\},\ k\in\mathbb{N},$$

и для бесконечно многих $k\in\mathbb{N}$ имеет место $x_k\neq p_k-1$. Для натурального числа $n=m_k+r(p_{k+1}-1)+s-1$, где $0\leq r\leq m_k-1,\ 1\leq s\leq p_{k+1}-1$, положим

$$\chi_n(x) := \chi^k_{r,s}(x) := \begin{cases} \sqrt{m_k}\exp\left(2\pi i\frac{x_{k+1}}{p_{k+1}}s\right), & \text{когда } x\in\left[\frac{r}{m_k},\frac{r+1}{m_k}\right), \\ 0, & \text{когда } x\notin\left[\frac{r}{m_k},\frac{r+1}{m_k}\right). \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Полагая $\chi_0(x) \equiv 1$, получим обобщенную систему Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, порожденную последовательностью натуральных чисел $p_k \geq 2$. При $p_k = 2,\ k \in \mathbb{N}$, эта система совпадает с классической системой Хаара. В разделе 3.3 мы будем доказывать теоремы единственности для обобщенной системы Хаара, а также для системы Виленкина. Здесь для обобщенной системы Хаара отметим один результат, который является непосредственным следствием теоремы 1.3.5.

Пусть $\{p_k\}$ – некоторая ограниченная последовательность натуральных чисел с условием $p_k \geq 2$, а натуральные числа j_k удовлетворяют условию $2^{j_k-1} < m_k \leq 2^{j_k},\ k \in \mathbb{N}$. Положим $\mathscr{D}^j = \{[0,1)\}$, если $j < j_1$ и

$$\mathscr{D}^{j_k} = \mathscr{D}^{j_k+1} = \cdots = \mathscr{D}^{j_{k+1}-1} = \left\{ \left[\frac{i-1}{m_k}, \frac{i}{m_k} \right) : \ i = 1, 2, \ldots, m_k \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ясно, что если $j_k \leq j < j_{k+1}$ и $Q \in \mathscr{D}^j$, то

$$2^{-j} \leq \frac{1}{m_k} = \mu Q \leq \frac{\max\{p_k\}}{m_{k+1}} \leq \frac{\max\{p_k\}}{2^{j_{k+1}-1}} \leq \frac{\max\{p_k\}}{2^j},$$

откуда следует, что $\mathscr{D} = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \mathscr{D}^j$ является диадической системой на $[0,1)$ с параметром $\delta = 2^{-1}$, а обобщенная система Хаара $\mathscr{H} = \{\chi_n(x)\}$, порожденная последовательностью $\{p_k\}$, является $\mathscr{H}$-системой, связанной с $\mathscr{D}$. Из теоремы 1.3.5 и вышесказанного в частности следует следующая

Теорема 1.3.6 ([134]) *Пусть $\mathscr{H} = \{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – обобщенная система Хаара, порожденная ограниченной последовательностью $\{p_k\}$. Тогда для любой п.в. конечной на $[0,1)$ измеримой функции f существует абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ такой, что*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) = f(x) \quad \textit{п.в. на} \ \ [0,1).$$

1.3.2 Вспомогательные утверждения

Пусть $\mathscr{D}$ – некоторая диадическая система с параметром $\delta \in (0,1)$ в пространстве однородного типа X, удовлетворяющая условию (1.3.2). Из определения $\mathscr{H}$-системы нетрудно установить следующую лемму, (см. [33, лемма 3.2]).

Лемма 1.3.7 *Пусть $\mathscr{H} = \{h\}$ – некоторая система типа Хаара, связанная с $\mathscr{D}$. Существует постоянная C такая, что для каждой функции $h \in \mathscr{H}$*

$$|h(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{\mu(Q(h))}} \quad \text{для всех} \;\; x \in Q(h).$$

Доказательство. Пусть $h \in \mathscr{H}$ и $Q := Q(h) \in \mathscr{D}^j$. В силу (h1) и d3), существует конечное множество чисел $\{d_{Q'} : Q' \in \mathscr{L}(Q)\}$ такое, что

$$h(x) = \sum_{Q' \in \mathscr{L}(Q)} d_{Q'} \mathbb{1}_{Q'}(x).$$

Поскольку $\mathscr{H}$ – ортонормированная система, то

$$\|h\|_2^2 = \sum_{Q' \in \mathscr{L}(Q)} |d_{Q'}|^2 \mu(Q') = 1.$$

С другой стороны, из (1.3.1) и определения диадической системы $\mathscr{D}$ следует, что существует постоянная C такая, что для всех $Q' \in \mathscr{L}(Q)$ выполняется

$$\mu(Q') \leq \mu(Q) \leq C\mu(Q').$$

Поэтому для каждого $Q' \in \mathscr{L}(Q)$ имеем $|d_{Q'}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{\mu(Q')}} \leq \dfrac{C_1}{\sqrt{\mu(Q)}}$. Следовательно, $|h(x)| \leq \dfrac{C}{\sqrt{\mu(Q(h))}}$ для всех $x \in Q(h)$. Лемма 1.3.7 доказана. □

Лемма 1.3.8 *Пусть $\mathscr{H} = \{h\}$ – некоторая система типа Хаара, связанная с $\mathscr{D}$. Тогда для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ и для каждого $Q \in \mathscr{D}$ существуют множество $Q' \subset Q$ и полином $P_Q = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{h \in \mathscr{H}(Q_i)} b_h h$ по системе $\mathscr{H}$ такие, что:*

1) $Q' \in \mathscr{D}$ и $\mu(Q') < \varepsilon\mu(Q)$;

2) $P_Q(x) = 1$, если $x \in Q \setminus Q'$;

3) $\tilde{P}_Q(x) := \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{h \in \mathscr{H}(Q_i)} |b_h h(x)| \leq \dfrac{C}{\varepsilon}$ для всех $x \in Q$;

4) $\tilde{P}_Q(x) = 0$, если $x \notin Q$.

Доказательство. Для каждого $Q \in \mathscr{D}$ обозначим через Q^* то множество из $\mathscr{L}(Q)$, для которого

$$\mu(Q^*) = \min\{\mu(Q') : \; Q' \in \mathscr{L}(Q)\}$$

(если существует несколько таких множеств, то будем брать одно из них). Из (1.3.1) и d4) нетрудно установить, что существует постоянная C_1, удовлетворяющая неравенству

$$\mu(Q^*) \le \mu(Q) \le C_1\mu(Q^*). \tag{1.3.4}$$

Обозначим через

$$F_Q(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in Q \setminus Q^*, \\ -\dfrac{\mu(Q \setminus Q^*)}{\mu(Q^*)}, & \text{если} \quad x \in Q^*, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin Q. \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Ясно, что

$$\int_X F_Q d\mu = \int_Q F_Q d\mu = 0, \tag{1.3.6}$$

поэтому из (h4) следует, что функцию F_Q можно представить в следующей форме:

$$F_Q(x) = \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} d_{Q,h} h(x).$$

Из леммы 1.3.7 и (1.3.5) следует, что для каждого $h \in \mathscr{H}(Q)$

$$|d_{Q,h}| = \left|\int_Q F_Q h d\mu\right| \le \frac{C}{\sqrt{\mu(Q)}} \int_Q |F_Q| d\mu \le \frac{2C}{\sqrt{\mu(Q)}}\mu(Q) \le 2C\sqrt{\mu(Q)}.$$

Поэтому, учитывая также d3), получим

$$\tilde{F}_Q(x) := \sum_{h \in \mathscr{H}(Q)} |d_{Q,h} h(x)| \le 2NC^2 \quad \text{для всех} \;\; x \in Q.$$

Таким образом, существует постоянная C_3 такая, что

$$\tilde{F}_Q(x) \le C_3 \le C_3|F_Q(x)| \quad \text{для всех} \;\; x \in Q. \tag{1.3.7}$$

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ и $Q \in \mathscr{D}$. Определим множества $\{Q_m\} \subset \mathscr{D}$ следующим обазом:

$$Q_0 = Q, \quad Q_m := Q^*_{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \tag{1.3.8}$$

(т.е. m-й потомок Q с наименьшей мерой), и обозначим

$$k := \min\{m : \; \mu(Q_{m+1}) < \varepsilon\mu(Q)\}. \tag{1.3.9}$$

Из (1.3.5) и (1.3.8) следует, что можно поочередно выбрать положительные числа $l_0, l_1, \dots, l_k$, так, чтобы $l_0 = 1$ и для каждого $m \le k$

$$\sum_{i=0}^{m} l_i F_{Q_i}(x) = 1, \qquad \text{если} \;\; x \in Q \setminus Q^*_m. \tag{1.3.10}$$

Очевидно, что полином

$$P_Q(x) := \sum_{i=0}^{k} \sum_{h\in\mathscr{H}(Q_i)} b_h h(x) \equiv \sum_{i=0}^{k} l_i F_{Q_i}(x) = \sum_{i=0}^{k} l_i \sum_{h\in\mathscr{H}(Q_i)} d_{Q_i,h} h(x)$$

и множество $Q' := Q_{k+1}$ удовлетворяют пунктам 1), 2) и 4) леммы 1.3.8. Приступим к доказательству пункта 3).

Пусть x_0 — некоторый элемент из Q, тогда либо $x_0 \in Q_m \setminus Q_{m+1}$ для некоторого $m \in \{0, 1, \dots, k\}$, либо $x_0 \in Q_{k+1}$. Если $x_0 \in Q_0 \setminus Q_1$, то для всех функциий $h \in \mathscr{H}(Q_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, имеем, что $h(x_0) = 0$. Поэтому из (1.3.7) получим, что

$$\tilde{P}_Q(x_0) = \tilde{F}_{Q_0}(x_0) \le C_3 \le \frac{C_3}{\varepsilon}.$$

Если же $x_0 \in Q_m \setminus Q_{m+1}$ и $1 \le m \le k$, то из (1.3.5) и (1.3.10) следует, что $l_i F_{Q_i}(x_0) < 0$ для всх $i \in 0, 1, \dots, m-1$, так как $l_i > 0$, а $F_{Q_i}(x_0) < 0$ поэтому, учитывая также (1.3.6), получим

$$0 = \int_Q \sum_{i=0}^{m-1} l_i F_{Q_i} d\mu = \mu(Q \setminus Q_m) + \int_{Q_m} \sum_{i=0}^{m-1} l_i F_{Q_i} d\mu \le \mu(Q) - \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \mu(Q_m).$$

Откуда с учетом (1.3.9) получим

$$\sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \le \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно (см. также (1.3.10))

$$\sum_{i=0}^{k} |l_i F_{Q_i}(x_0)| = \sum_{i=0}^{m} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \le \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| + 1 + \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \le \frac{3}{\varepsilon}.$$

Пусть теперь $x_0 \in Q_{k+1}$, тогда из (1.3.5) и (1.3.6) получим

$$0 = \int_Q \sum_{i=0}^{k} l_i F_{Q_i} d\mu = \mu(Q \setminus Q_{k+1}) + \int_{Q_{k+1}} \sum_{i=0}^{k} l_i F_{Q_i} d\mu \le \mu(Q) - \sum_{i=0}^{k} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \mu(Q_{k+1}).$$

Учитывая (1.3.4) и (1.3.9), получим

$$\sum_{i=0}^{k} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \le \frac{\mu(Q)}{\mu(Q_{k+1})} \le \frac{C_1 \mu(Q)}{\mu(Q_k)} \le \frac{C_1}{\varepsilon}.$$

Из последних неравенств и (1.3.7) следует, что для всех $x \in Q$

$$\tilde{P}_Q(x) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{h\in\mathscr{H}(Q_i)} |l_i d_{Q_i,h} h(x)| \le C_3 \sum_{i=0}^{k} |l_i| |F_{Q_i}(x)| \le \frac{C_4}{\varepsilon}.$$

Лемма 1.3.8 доказана. $\square$

Лемма 1.3.9 *Пусть $Q \in \mathscr{D}$ и f — некоторая измеримая почти всюду конечная функция на Q. Тогда для любых $N \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ и $\varepsilon \in (0,1)$ существуют множество $R \subset Q$ и полином*

$$P(x) = \sum_{h\in\Omega} d_h h(x)$$

по $\mathscr{H}$-системе, удовлетворяющие следующим условиям:

1. *$j(h) > N$ для всех $h \in \Omega$ (см. (h1));*
2. *$\mu(R) > (1-\varepsilon)\mu(Q)$;*
3. *$|P(x) - f(x)| < \delta$ для всех $x \in R$;*
4. *$\sum_{h\in\Omega} |d_h h(x)| \le \frac{C|f(x)|}{\varepsilon}$, если $x \in R$;*
5. *$\sum_{h\in\Omega} |d_h h(x)| = 0$, если $x \notin Q$.*

Доказательство. Из формулировки леммы следует, что, не нарушая общности, можно считать функцию f неотрицательной. Допустим, число M выбрано так, чтобы

$$\mu\{x \in Q:\ f(x) > M\} < \frac{\varepsilon}{10}\mu(Q). \tag{1.3.11}$$

Выберем числа $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, удовлетворяющие условиям

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_n = M, \qquad \beta_i - \beta_{i-1} < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.3.12}$$

и обозначим

$$m := \min_{1\le i\le n} \mu(E_i), \quad \text{где } E_i := \{x \in Q:\ \beta_{i-1} \le f(x) < \beta_i\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3.13}$$

Без ограничения общности можем считать, что $m > 0$ (в противном случае будем рассматривать только те множества E_i, для которых $\mu(E_i) > 0$). Поскольку множества E_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ измеримые, а мера μ регулярная, то для каждого i существует открытое множество G_i такое, что

$$E_i \subset G_i \qquad \text{и} \qquad \mu(G_i \setminus E_i) < \frac{\varepsilon}{10n} m. \tag{1.3.14}$$

Можно установить (см., например, [31, лемма 2.3]), что для каждого i ($i = 1, 2, \dots, n$) существуют попарно непересекающиеся множества $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I_i}$ такие, что

$$\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I_i} \subset \bigcup_{j>N} \mathscr{D}^j, \qquad \bigcup_{\alpha \in I_i} Q_\alpha \subset G_i \qquad \text{и} \qquad \mu\Big(G_i \setminus \Big(\bigcup_{\alpha \in I_i} Q_\alpha\Big)\Big) = 0. \tag{1.3.15}$$

Так как множества Q_α, $\alpha \in I_i$, попарно не пересекаются, а $\mu G_i < \infty$ (см. (1.3.13) и (1.3.14)), то из (1.3.15) следует, что существует конечное подмножество $\tilde{I}_i$ множества индексов I_i такое, что

$$\mu\Big(\bigcup_{\alpha \in \tilde{I}_i} Q_\alpha\Big) = \sum_{\alpha \in \tilde{I}_i} \mu Q_\alpha > \mu G_i - \frac{\varepsilon}{10} \mu E_i. \tag{1.3.16}$$

Пусть $\alpha \in \tilde{I}_i$. Очевидно, что если $Q_\alpha \cap Q = \varnothing$, то $Q_\alpha \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (G_k \setminus E_k)$. Ясно также, что если $Q_\alpha \subset Q_\beta$ для некоторого $\beta \in \tilde{I}_j$, то $Q_\alpha \subset G_i \cap G_j \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (G_k \setminus E_k)$, так как множества E_i, $i = 1, 2, \dots, n$, попарно не пересекаются. Заметим также, что из определения диадической системы следует: если $Q', Q'' \in \mathscr{D}$, то либо $Q' \cap Q'' = \varnothing$, либо одно из них является подмножеством другого. Поэтому, если из $\tilde{I}_i$ исключим те α, для которых $Q_\alpha \cap Q = \varnothing$ или $Q_\alpha \subset Q_\beta$ для некоторого $\beta \in \tilde{I}_j$, $j \neq i$, и обозначим оставшееся подмножество индексов $\tilde{I}_i$ через I'_i, то с учетом (1.3.13)–(1.3.16) получим, что $Q_\alpha \subset Q$ для всех $\alpha \in I'_i$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$Q_\alpha \cap Q_\beta = \varnothing \qquad \text{для всех} \quad \alpha, \beta \in \bigcup_{i=1}^{n} I'_i, \qquad \alpha \neq \beta, \tag{1.3.17}$$

$$\begin{aligned} \mu\Big(E_i \cap \Big(\bigcup_{\alpha \in I'_i} Q_\alpha\Big)\Big) \geq \mu(E_i) - \mu\Big(\bigcup_{\alpha \in I_i \setminus I'_i} Q_\alpha\Big) > \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10}\mu(E_i) - \\ - \sum_{k=1}^{n} \mu(G_k \setminus E_k) > \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10}\mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10}\mu(E_i) > \Big(1 - \frac{\varepsilon}{4}\Big)\, \mu(E_i). \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

Для каждого $\alpha \in \bigcup_{i=1}^{n} I'_i$, применяя лемму 1.3.8 для множества Q_α и числа $\frac{\varepsilon}{2}$, получим множество $Q'_\alpha \subset Q_\alpha$ и полином $P_{Q_\alpha} = \sum\limits_{h \in \Gamma_\alpha} b_h h$, удовлетворяющие условиям

$$Q'_\alpha \in \mathscr{D} \qquad \text{и} \quad \mu(Q'_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \mu(Q_\alpha), \tag{1.3.19}$$

$$P_{Q_\alpha}(x) = 1 \qquad \text{для всех} \quad x \in Q_\alpha \setminus Q'_\alpha, \tag{1.3.20}$$

$$\tilde{P}_{Q_\alpha}(x) = \sum_{h \in \Gamma_\alpha} |b_h h(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \qquad \text{для всех} \quad x \in Q_\alpha, \tag{1.3.21}$$

$$\tilde{P}_{Q_\alpha}(x) = 0, \qquad \text{если} \quad x \notin Q_\alpha. \tag{1.3.22}$$

Рассмотрим множество

$$R := \bigcup_{i=1}^{n} \Big(E_i \bigcap \Big(\bigcup_{\alpha \in I_i'} Q_\alpha \setminus Q_\alpha' \Big) \Big). \tag{1.3.23}$$

Из (1.3.11), (1.3.18) и (1.3.19) следует, что

$$\mu(R) \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\Big(1 - \frac{\varepsilon}{4}\Big) \mu(E_i) - \sum_{\alpha \in I_i'} \frac{\varepsilon}{2} \mu(Q_\alpha) \right) \geq (1-\varepsilon)\mu(Q).$$

Положим

$$P(x) := \sum_{h \in \Omega} d_h h(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \beta_{i-1} \sum_{\alpha \in I_i'} P_{Q_\alpha}(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i-1} \sum_{\alpha \in I_i'} \sum_{h \in \Gamma_\alpha} b_h h(x). \tag{1.3.24}$$

Из (1.3.12), (1.3.13), (1.3.17), (1.3.20)–(1.3.23) следует, что полином $P(x)$ удовлетворяет всем пунктам леммы 1.3.9.

Лемма 1.3.9 доказана. □

Замечание 1.3.10 *Если в формулировке леммы 1.3.9 функция f удовлетворяет условию $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in Q$, то пункт 4 леммы 1.3.9 можно заменить условием*

$$\sum_{h \in \Omega} |d_h h(x)| \leq \frac{CM}{\varepsilon} \quad \text{для всех} \quad x \in Q,$$

которое следует из (1.3.21), (1.3.22) и (1.3.24).

1.3.3 Доказательство теоремы 1.3.5

Пусть f – некоторая п.в. конечная, измеримая функция, а $k_0 \in \mathbb{Z}$. Для каждого $Q \in \mathscr{D}^{k_0}$ обозначим

$$f_Q(x) := f(x)\mathbb{1}_Q(x).$$

Поскольку множества Q в $\mathscr{D}^{k_0}$ попарно не пересекаются, то достаточно доказать, что для каждой функции f_Q существует ряд $\sum\limits_{h \in \Gamma_Q} a_h h$, где Γ_Q – множество тех функций из $\mathscr{H}$, для которых $\{x: \ h(x) \neq 0\} \subset Q$, который абсолютно сходится и

$$\sum_{h \in \Gamma_Q} a_h h(x) = f_Q(x) \qquad \text{п.в. на} \ \ X.$$

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ – некоторая последовательность положительных чисел с условием

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty. \tag{1.3.25}$$

Положим $d_h = 0$ для всех $h \in \mathscr{H}(Q) =: \Omega_0$ (см. (h2)) и $P_0 := \sum_{h\in\Omega_0} d_h h \equiv 0$.

Допустим, уже определены полиномы $P_k = \sum\limits_{h\in\Omega_k} d_h h$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, и числа $N_k := \max\{j(h) : \ h \in \Omega_k\}$. Применяя лемму 1.3.9 к функции $f_Q(x) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} P_k(x)$ и числам $N = N_{m-1}$, $\delta = \varepsilon_{m+1}^2$ и $\varepsilon = \varepsilon_m$, получим множество $R_m \subset Q$ и полином $P_m(x) = \sum\limits_{h\in\Omega_m} d_h h(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$\min\{j(h) : \ h \in \Omega_m\} > N_{m-1}, \tag{1.3.26}$$

$$\mu(R_m) > (1-\varepsilon_m)\mu(Q), \tag{1.3.27}$$

$$\Big|f_Q(x) - \sum_{k=0}^{m} P_k(x)\Big| < \varepsilon_{m+1}^2 \quad \text{для всех } x \in R_m, \tag{1.3.28}$$

$$\sum_{h\in\Omega_m} |d_h h(x)| \le \frac{C}{\varepsilon_m}\Big|f_Q(x) - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(x)\Big|, \quad \text{если } x \in R_m, \tag{1.3.29}$$

$$\sum_{h\in\Omega_m} |d_h h(x)| = 0, \quad \text{если } x \notin Q. \tag{1.3.30}$$

Таким образом, по индукции определяются полиномы P_m и множества R_m, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие условиям (1.3.26)–(1.3.30).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{h\in\Gamma_Q} a_h h(x) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{h\in\Omega_m} d_h h(x) \tag{1.3.31}$$

и множество $R := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} R_m$. Из (1.3.25) и (1.3.27) следует, что $\mu(R) = \mu(Q)$.

Учитывая (1.3.28) и (1.3.29), для всех $x \in R_m \cap R_{m-1}$ получим неравенство

$$\sum_{h\in\Omega_m} |d_h h(x)| \le \frac{C}{\varepsilon_m}\varepsilon_m^2 = C\varepsilon_m,$$

которое вмете с (1.3.25) и (1.3.30) обеспечивают абсолютную сходимость ряда (1.3.31) п.в. на X. Из (1.3.25), (1.3.28) и (1.3.30) получим, что сумма ряда (1.3.31) на множестве R является $f_Q(x)$.

Теорема 1.3.5 доказана. $\square$

1.4 Представление функций пространства $L^p(0,1)$, $p \in (0,1)$, рядами Уолша

1.4.1 Постановка задачи и вспомогательные утверждения

В этом разделе рассматриваются вопросы представления рядами Уолша функций пространства $L^p(0,1)$, $p \in (0,1)$, в смысле сходимости этого пространства. В работе [40] А.А. Талаляном был получен следующий результат: для каждой функции $f \in L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$, существует ряд по любой полной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, сходящийся к f в метрике $L^p[0,1]$. Затем М.Г. Григоряном была доказана следующая теорема.

Теорема 1.4.A (М.Г. Григорян, [41]). *По произвольной полной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^r < +\infty \quad \text{при всех} \;\; r > 2,$$

который универсален во всех пространствах $L^p[0,1]$, $0 < p \leq 1$, одновременно относительно перестановок и подрядов в смысле сходимости пространства L^p.

Для системы Уолша справедлива следующая

Теорема 1.4.1 ([135]). *Пусть последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty$. Тогда существуют числа $\gamma_n = \pm 1$ такие, что для любого $p \in (0,1)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n W_n(x)$ является универсальным относительно подрядов в классе $L^p(0,1)$ в смысле сходимости пространства $L^p(0,1)$.*

Аналогичные вопросы для системы Хаара были рассмотрены в работе [136]. Там доказана следующая теорема.

Теорема 1.4.2 ([136]). *Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что для почти всех $x \in [0,1]$ выполняются условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x) = \infty \quad \text{и} \quad a_n \chi_n(x) \to 0.$$

Тогда для любого $p \in (0,1)$ ряд по системе Хаара $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ является универсальным относительно подрядов в классе $L^p(0,1)$ в смысле сходимости пространства $L^p(0,1)$.

При доказательстве теоремы 1.4.1 мы пользуемся следующей леммой.

Лемма 1.4.3 *Пусть последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty$, а $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{j} l_k \mathbb{1}_{I_k}(x)$ – ступенчатая функция, определенная на $[0,1]$, где $\{I_k\}_{k=1}^{j}$ – непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда для любых чисел $N \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$ и $\alpha > 0$ существует полином*

$$Q(x) = \sum_{n=N}^{M} \delta_n a_n W_n(x), \quad \textit{где} \quad \delta_n = 0 \ \textit{или} \ \pm 1,$$

удовлетворяющий условиям:

1) $\displaystyle\int_0^1 |\varphi(x) - Q(x)|^p dxy < \alpha$;

2) $\displaystyle\sup_{m \le M} \int_0^1 \left| \sum_{n=N}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx \le C \int_0^1 |\varphi(x)|^p dx.$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{j} l_k \mathbb{1}_{I_k}(x)$ – ступенчатая функция, а $p \in (0,1)$, $N \in \mathbb{N}$, и $\alpha > 0$ – некоторые числа. Выберем положительное число $\varepsilon \in (0,1)$ так, чтобы

$$(2(C+1)|l_k|)^p \varepsilon^{1-p} < \frac{\alpha}{4}, \quad k = 1, 2, \ldots, j, \tag{1.4.1}$$

где C – постоянная из леммы 1.1.13.

Без ограничения общности будем считать, что для всех $k = 1, 2, \ldots, j$

$$\left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon} + 1 \right)^p \operatorname{mes}(I_k) < \int_0^1 |\varphi(x)|^p dx =: A_p. \tag{1.4.2}$$

В противном случае представим интервалы I_k в виде объединения двоичных интервалов, для которых выполняются (1.4.2). Выберем $\delta \in (0,1)$ так, чтобы

$$\delta < \min\{|l_k| : \ |l_k| \ne 0, \ k = 1, 2, \ldots, j\}, \tag{1.4.3}$$

$$\sum_{k=1}^{j} \left(\varepsilon \delta^2 \operatorname{mes}(I_k) \right)^{p/2} < \min\{\alpha/2, \ A_p\}, \tag{1.4.4}$$

$$\delta^p < \min\{\alpha/4, A_p\}. \tag{1.4.5}$$

Согласно лемме 1.1.13, для любого $k=1,2,\dots,j$ существуют множества E_k и полиномы по системе Уолша

$$Q_k(x)=\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}\delta_n a_n W_n(x),\quad P_k(x)=\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} b_n W_n(x)$$

(где $\delta_n=0,\pm1$) такие, что

$$P_k(x)=0,\quad \text{если}\quad x\notin I_k, \tag{1.4.6}$$

$$|P_k(x)-l_k|<\delta,\quad \text{если}\quad x\in E_k\subset I_k,\ \mathrm{mes}(E_k)>(1-\varepsilon)\mathrm{mes}(I_k), \tag{1.4.7}$$

$$S^*(P_k,x)<\delta,\quad \text{если}\quad x\notin I_k, \tag{1.4.8}$$

$$S^*(P_k,x)<\frac{C|l_k|}{\varepsilon}+\delta,\quad \text{если}\quad x\in I_k, \tag{1.4.9}$$

$$\|Q_k-P_k\|_2^2<\varepsilon\delta^2\mathrm{mes}(I_k). \tag{1.4.10}$$

Из (1.4.1), (1.4.3), (1.4.5)–(1.4.7) и (1.4.9) получаем

$$\begin{aligned}\int_0^1|P_k(x)-l_k\mathbb{1}_{I_k}(x)|^p dx&=\int_{I_k}|P_k(x)-l_k|^p dx\le\\ &\le\delta^p\mathrm{mes}(E_k)+\left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon}+\delta\right)^p\mathrm{mes}(I_k\setminus E_k)+|l_k|^p\mathrm{mes}(I_k\setminus E_k)\le\\ &\le\delta^p\mathrm{mes}(I_k)+\left(\left(\frac{(C+1)|l_k|}{\varepsilon}\right)^p+|l_k|^p\right)\varepsilon\mathrm{mes}(I_k)\le\\ &\le(\delta^p+(2(C+1)|l_k|)^p\varepsilon^{1-p})\mathrm{mes}(I_k)<\frac{\alpha}{2}\mathrm{mes}(I_k).\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

Так как (см. (1.4.10))

$$\int_0^1|Q_k(x)-P_k(x)|^p dx\le\left\{\int_0^1|Q_k(x)-P_k(x)|^2dx\right\}^{p/2}\le\left(\varepsilon\delta^2\mathrm{mes}(I_k)\right)^{p/2}, \tag{1.4.12}$$

то с учетом (1.4.11) получаем

$$\int_0^1|Q_k(x)-l_k\mathbb{1}_{I_k}(x)|^p dx\le\frac{\alpha}{2}\mathrm{mes}(I_k)+\left(\varepsilon\delta^2\mathrm{mes}(I_k)\right)^{p/2}. \tag{1.4.13}$$

Положим

$$Q(x)=\sum_{n=N}^{M}\delta_n a_n W_n(x)\equiv\sum_{k=1}^{j}Q_k(x). \tag{1.4.14}$$

Из (1.4.14), (1.4.13) и (1.4.4) следует, что

$$\int_0^1|Q(x)-\varphi(x)|^p dx\le\sum_{k=1}^{j}\int_0^1|Q_k(x)-l_k\mathbb{1}_{I_k}(x)|^p\,dx\le\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{\alpha}{2}\mathrm{mes}(I_k)+\left(\varepsilon\delta^2\mathrm{mes}(I_k)\right)^{p/2}\right)\le$$

$$\leq \frac{\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{j} \left(\varepsilon\delta^2 \mathrm{mes}(I_k)\right)^{p/2} < \alpha.$$

Из (1.4.3), (1.4.6), (1.4.7) и (1.4.9) имеем

$$\int_0^1 |P_k(x)|^p dx \leq (|l_k| + \delta)^p \mathrm{mes}(E_k) + \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta\right)^p \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I_k) \leq$$

$$\leq \left((|l_k| + \delta)^p + ((C+1)|l_k|)^p\right) \mathrm{mes}(I_k) \leq C_1 |l_k|^p \mathrm{mes}(I_k).$$

Следовательно, учитывая также (1.4.12), получаем

$$\int_0^1 |Q_k(x)|^p dx \leq \int_0^1 |P_k(x)|^p dx + \int_0^1 |Q_k(x) - P_k(x)|^p dx \leq C_1 |l_k|^p \mathrm{mes}(I_k) + \left(\varepsilon\delta^2 \mathrm{mes}(I_k)\right)^{p/2}.$$

Пусть

$$\sup_{m \leq N_j} \int_0^1 \left|\sum_{n=N}^{m} \delta_n a_n W_n(x)\right|^p dx = \int_0^1 \left|\sum_{n=N}^{m_0} \delta_n a_n W_n(x)\right|^p dx$$

и $N_k < m_0 \leq N_{k+1}$. Тогда, с учетом последнего неравенства, (1.4.9), (1.4.8), (1.4.4), (1.4.12), (1.4.2) и (1.4.5) получаем

$$\sup_m \int_0^1 \left|\sum_{n=N}^{m} \delta_n a_n W_n(x)\right|^p dx \leq \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{k-1} Q_i(x)\right|^p dx + \int_0^1 \left|\sum_{n=N_k+1}^{m_0} \delta_n a_n W_n(x)\right|^p dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^1 |Q_i(x)|^p dx + \int_0^1 \left|\sum_{n=N_k+1}^{m_0} (\delta_n a_n - b_n) W_n(x)\right|^p dx + \int_0^1 \left|\sum_{n=N_k}^{m_0} b_n W_n(x)\right|^p dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k-1} \left(C_1 |l_i|^p \mathrm{mes}(I_i) + (\varepsilon\delta^2 \mathrm{mes}(I_i))^{p/2}\right) + \|Q_k - P_k\|_2^p + \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon} + \delta\right)^p \mathrm{mes}(I_k) +$$

$$+ \delta^p \mathrm{mes}([0,1] \setminus I_k) \leq C_3 A_p.$$

Лемма 1.4.3 доказана. □

1.4.2 Доказательство теоремы 1.4.1

Пусть $p \in (0,1)$ – произвольное число, а $\{\alpha_n\}$ – последовательность положительных чисел, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Рассмотрим последовательность всех ступенчатых функций

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{M_n} \beta_k^{(n)} \mathbb{1}_{I_k^{(n)}}(x) \tag{1.4.15}$$

с рациональными значениями $\beta_k^{(n)}$ и двоичными интервалами постоянства $I_k^{(n)}$ (где $I_k^{(n)} \cap I_m^{(n)} = \varnothing$ при $k \neq m$). Тогда, в силу леммы 1.4.3, для каждой функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots,$

из последовательности (1.4.15) существует полином

$$P_k(x) = \sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n W_n(x), \quad \delta_n = 0 \text{ или } \pm 1,$$

удовлетворяющий условиям

$$\int_0^1 |f_k(x) - P_k(x)|^p dx < \alpha_k, \tag{1.4.16}$$

$$\sup_{N_k < m \leq N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx < C \int_0^1 |f_k(x)|^p dx. \tag{1.4.17}$$

Положим

$$\gamma_n = \begin{cases} \delta_k, & \text{если } \delta_k \neq 0, \\ 1, & \text{если } \delta_k = 0, \end{cases}$$

и покажем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n a_n W_n(x) \tag{1.4.18}$$

является универсальным относительно подрядов в пространстве $L^p(0,1)$, $p \in (0,1)$.

Пусть $f \in L^p(0,1)$ и $\{\eta_k\}$ – такая последовательность, что

$$\eta_1 > \eta_2 > \dots, \quad \eta_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{1.4.19}$$

Выберем n_1 настолько большим, чтобы выполнялись $\int_0^1 |f(x) - f_{n_1}(x)|^p dx < \eta_1$ и $\alpha_{n_1} < \eta_1$. Ясно, что

$$\int_0^1 |f(x) - P_{n_1}(x)|^p dx \leq \int_0^1 |f(x) - f_{n_1}(x)|^p dx + \int_0^1 |f_{n_1}(x) - P_{n_1}(x)|^p dx < 2\eta_1.$$

Допустим, что уже определены числа $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$, для которых

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i}(x) \right|^p < 2\eta_{k-1}. \tag{1.4.20}$$

Выберем число n_k так, чтобы выполнялись

$$\alpha_{n_k} < \eta_k \quad \text{и} \quad \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i}(x) - f_{n_k}(x) \right|^p < \eta_k. \tag{1.4.21}$$

Из (1.4.16) и (1.4.21) непосредственно следует

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{i=1}^{k} P_{n_i}(x) \right|^p \leq \eta_k + \alpha_{n_k} < 2\eta_k. \tag{1.4.22}$$

Далее, из (1.4.21) с учетом (1.4.19) и (1.4.20) получаем

$$\int_0^1 |f_{n_k}(x)|^p dx \le \eta_k + 2\eta_{k-1} < 3\eta_{k-1}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (1.4.17), получим

$$\sup_{N_{n_k} < m \le N_{n_k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_{n_k}+1}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx < C\eta_{k-1}. \tag{1.4.23}$$

Таким образом, по индукции определим полиномы P_{n_k}, удовлетворяющие условиям (1.4.22) и (1.4.23).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n W_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} P_{n_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{N_{n_k}+1}^{N_{n_k+1}} \delta_n a_n W_n(x), \tag{1.4.24}$$

который является подрядом ряда (1.4.18) и докажем, что он сходится к f.

Пусть M – некоторое натуральное число и для некоторого k имеет место $N_{n_k} < M \le N_{n_{k+1}}$. Тогда из (1.4.22) и (1.4.23) следует, что

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=1}^{M} b_n W_n(x) \right|^p dx \le \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} P_{n_i}(x) \right|^p dx + \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{M} \delta_n a_n W_n(x) \right|^p dx \le$$

$$\le 2\eta_{k-1} + C\eta_{k-1} = C_1\eta_{k-1},$$

откуда с учетом (1.4.19) получаем, что ряд (1.4.24) сходится к f в метрике $L^p(0,1)$.

Теорема 1.4.1 доказана. □

Глава 2

Теоремы исправления

2.1 Теоремы исправления в пространстве $L^1(0,1)$

2.1.1 Введение

Настоящая глава посвящена вопросам "исправления" функции с целью улучшения ее свойств. Напомним, что эта идея принадлежит Н. Лузину (см. [42]). Им в 1912 г. был получен знаменитый результат (C-свойство Лузина), согласно которому любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в непрерывную функцию.

Теорема 2.1.A (C-свойство Лузина). *Для любой измеримой, п.в. конечной на* $[0,1]$ *функции* $f(x)$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют измеримое множество* E *с мерой* $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$ *и непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $g(x)$*, совпадающая с* $f(x)$ *на* E*.*

Далее в этом направлении получены интересные результаты (см. [43]–[56]).

В 1939 г. Д.Е. Меньшов [43] доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема 2.1.B (усиленное C-свойство Меньшова). *Пусть* $f(x)$ *– измеримая функция, конечная почти всюду на* $[0,2\pi]$*. Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$*, можно определить непрерывную функцию* $g(x)$*, совпадающую с* $f(x)$ *на некотором множестве* E*,* $\mathrm{mes}(E) > 2\pi - \varepsilon$*, и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на* $[0,2\pi]$*.*

Заметим, что в этих теоремах множество E зависит от функции f. Затем теоремы исправления развивались в разных направлениях: 1) возможность выбора "исключительного" множества E_0 (на котором "исправляется" функция f некоторого класса функций $\mathscr{F}$) независящим от f; 2) изменить функцию на множестве малой меры с целью улучшения свойств коэффициентов разложения новой функции (например, монотонность модулей всех или ненулевых коэффициентов).

В 1988 г. М.Г. Григорян доказал, что тригонометрическая система обладает усиленным L^1-свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0, 2\pi]$ с мерой $\mathrm{mes}(E) > 2\pi - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[0, 2\pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0, 2\pi]$, совпадающую с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1[0, 2\pi]$-норме (см. [50]).

Более того, в работе [54] доказано, что произвольная ортонормированная система обладает усиленным L^1-свойством.

Отметим, что существует функция $f \in L^1(0, 1)$, ряд Фурье–Уолша которой не сходится в $L^1(0, 1)$ (см., например, [9]). М.Г. Григоряном доказана следующая

Теорема 2.1.C (М.Г. Григорян, [57], [58]). *Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существует измеримое множество $E \subset [0, 1]$ с мерой $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(0, 1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0, 1)$, совпадающую с f на E, такую, что ее ряд Фурье–Уолша сходится по норме $L^1(0, 1)$ и почти всюду на $[0, 1]$, и все ненулевые члены в последовательности модулей коэффициентов Фурье вновь полученной функции по системе Уолша расположены в убывающем порядке.*

Для системы Фабера–Шаудера $\{\varphi_n(x)\}$ в [80] доказана следующая

Теорема 2.1.D (М.Г. Григорян, В.Г. Кротов, [80]). *Пусть $b_k \searrow 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{b_k}{k} = \infty$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ и для любой измеримой, почти всюду конечной на $[0, 1]$ функции $f(x)$ можно определить непрерывную функцию*

$$\tilde{f}(x) \stackrel{C}{=} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tilde{f}) \varphi_k(x)$$

с мерой $\mathrm{mes}\{x : \ f(x) \neq \tilde{f}(x)\} < \varepsilon$ такую, что $|A_k(\tilde{f})| = b_k \ \ \forall \ k \in Spec(\tilde{f})$.

В этом разделе рассматриваются ряды по системе Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n W_n(x)$, коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{2.1.1}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \infty. \tag{2.1.2}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1.1 ([135]). *Пусть для последовательности $\{a_n\}$ выполняются* (2.1.1) *и* (2.1.2). *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \in [0,1]$, $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$, такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существуют функция $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ и числа $\delta_n = 0$ или ± 1 такие, что $\tilde{f}(x) = f(x)$ для $x \in E$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ сходится к функции $\tilde{f}$ в метрике $L^1(0,1)$.*

Напомним определение жадного (greedy) алгоритма.

Пусть $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – базис в банаховом пространстве X. Для каждого $f \in X$ будем иметь разложение

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\psi_k.$$

Перестановку неотрицательных целых чисел $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем *убывающей*, если

$$|c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Множество таких перестановок обозначим через $D(f,\Psi)$. В случае строгих неравенств $D(f,\Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку. Для каждого элемента $f \in X$ и для любой перестановки $\sigma \in D(f,\Psi)$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f,\Psi,\sigma)\}_{m=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$G_m(x,f) = G_m(x,f,\Psi,\sigma) := \sum_{k=0}^{m} c_{\sigma(k)}(f)\psi_{\sigma(k)}(x).$$

Заметим, что оператор $G_m(x,f)$ зависит от σ. Метод приближения элемента $f \in X$ последовательностью $\{G_m(f,\Psi,\sigma)\}_{m=0}^{\infty}$ называется *жадным алгоритмом.* Говорят, что жадный алгоритм функции f по системе Ψ *сходится* в X, если при некотором $\sigma \in D(f,\Psi)$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \|G_m(f,\Psi,\sigma) - f\|_X = 0.$$

Жадные алгоритмы для банаховых пространств относительно нормированных базисов изучены В.Н. Темляковым, С.В. Конягиным, Р. ДеВором, П. Войтащиком, Т.В. Корнером и другими авторами (см. [59]–[73]).

Заметим, что из теоремы 2.1.1 непосредственно следует следующая

Теорема 2.1.2 ([135]). *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$ такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существует $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, которая совпадает с f на E и жадный алгоритм которой по системе Уолша сходится к $\tilde{f}$ по норме $L^1(0,1)$.*

Действительно, для этого достаточно в теореме 2.1.1 положить $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Отметим, что если $f \in L^1(0,1)$, то $G_m(f)$ не обязан сходиться (см. [74]). Поэтому в теореме 2.1.2 "исправление" функции f вне множества E по существу.

Аналогичные теоремы для системы Хаара были получены в работе [136], где рассматривались ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, для которых почти всюду выполняются условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x) = +\infty \quad \text{и} \quad a_n\chi_n(x) \to 0. \tag{2.1.3}$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1.3 ([136]). *Пусть для почти всех $x \in [0,1]$ выполняется (2.1.3). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$, такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существует $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ такая, что $\tilde{f}(x) = f(x)$ для $x \in E$, а ряд Фурье–Хаара функции $\tilde{f}$ является подрядом ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, т.е. существуют числа $\delta_n = 0$ или 1 такие, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n a_n\chi_n(x)$ сходится к функции $\tilde{f}$ в метрике $L^1(0,1)$.*

Известно (см. [75]), что если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ удовлетворяет первому условию (2.1.3). Если, кроме того, $a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, когда $n \to \infty$, то выполняется и второе условие (2.1.3).

Из теоремы 2.1.3 в частности следующая теорема.

Теорема 2.1.4 ([136]).*Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$, $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$, такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существует $\tilde{f} \in L^1(0,1)$,* *которая совпадает с f на E и жадный алгоритм которой по системе Хаара сходится в $L^1(0,1)$.*

Действительно, для этого достаточно в теореме 2.1.3 положить $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n\ln(n+1)}}$. Отметим, что если $f \in L^1(0,1)$, то $G_m(f)$ не обязан сходиться (см. [76]). Поэтому в теореме 2.1.4 "исправление" функции f вне множества E по существу.

Рассмотрим такие подсистемы $\{\chi_{n_k}(x)\}$ системы Хаара, для которых

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty}\Delta_{n_k}\Big) = 1, \qquad \Delta_m := \operatorname{supp}(\chi_m). \tag{2.1.4}$$

Очевидно, что если для $\{\chi_{n_k}(x)\}$ не выполняется условие (2.1.4), то она не полна по мере. То есть (2.1.4) является необходимым условием для представления функций рядами по системе $\{\chi_{n_k}(x)\}$. Ясно также, что если условие (2.1.4) не выполняется и если положить $a_n = 0$ для $n \notin \{n_k\}$, то не выполнится и (2.1.3).

Нетрудно установить, что если (2.1.4) выполняется, то числа a_{n_k} можно выбрать так, чтобы условие (2.1.3) также выполнялось. При этом a_{n_k} можно подобрать монотонными, т.е. $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$.

Действительно, из (2.1.4) следует существование чисел N_k, $N_k < N_{k+1}$, таких, что

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcup_{k=N_i+1}^{N_{i+1}}\Delta_{n_k}\Big) > 1 - 2^{-i}.$$

Ясно, что для любого j имеет место

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcap_{i=j}^{\infty}\bigcup_{k=N_i+1}^{N_{i+1}}\Delta_{n_k}\Big) > 1 - 2^{1-j},$$

и, следовательно, множество $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{i=j}^{\infty}\bigcup\limits_{k=N_i+1}^{N_{i+1}}\Delta_{n_k}$ имеет меру 1. Рассмотрим последовательность $\{a_{n_k}\}$, где $a_{n_k} = \dfrac{1}{\sqrt{i\cdot n_k}}$, если $N_i < k \leq N_{i+1}$. Очевидно, что последовательность $\{a_{n_k}\}$ монотонная. Пусть $x \in E$. Тогда для некоторого j точка x принадлежит множеству $\bigcap\limits_{i=j}^{\infty}\bigcup\limits_{k=N_i+1}^{N_{i+1}}\Delta_{n_k}$ и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}^2\chi_{n_k}^2(x) \geq \sum_{i=j}^{\infty}\sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}}a_{n_k}^2\chi_{n_k}^2(x) \geq \sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{2i} = \infty.$$

Поэтому из теоремы 2.1.3 следует

Теорема 2.1.5 ([136]). *Для любой подсистемы $\{\chi_{n_k}\}$ системы Хаара с условием (2.1.4) существует ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\chi_{n_k}(x)$ с $a_k \downarrow 0$ такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$, $\operatorname{mes}(E) > 1-\varepsilon$, такое, что для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существует $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, которая совпадает с f на E и ряд Фурье–Хаара имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k a_{n_k}\chi_{n_k}(x)$, где $\delta_k = 0$ или 1.*

Из этой теоремы, в частности, следует один результат М. Г. Григоряна и С. Л. Гогяна, доказанный в раборе [77].

2.1.2 Вспомогательная лемма и доказательство теоремы 2.1.1

Для доказательства теоремы 2.1.1 нам понадобится следующая

Лемма 2.1.6 *Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям (2.1.1) и (2.1.2), а $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{j} l_k \mathbb{1}_{I_k}(x)$ – ступенчатая функция, определенная на $[0,1]$, где $\{I_k\}_{k=1}^{j}$ – непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда для любых чисел $\varepsilon, \delta \in (0,1)$ и $N \in \mathbb{N}$ существуют функция $g \in L^1(0,1)$, измеримое множество $E \subset [0,1]$ и полином*

$$P(x) = \sum_{n=N}^{M} \delta_n a_n W_n(x), \quad \text{где} \quad \delta_n = 0, \pm 1,$$

которые удовлетворяют условиям:

1) $\operatorname{mes}(E) > (1-\varepsilon)$;

2) $g(x) = \varphi(x)$ *для всех* $x \in E$;

3) $\|g - P\|_1 < \delta$;

4) $\|g\|_1 \le C\|\varphi\|_1$;

5) $\sup\limits_{m \le M} \displaystyle\int_0^1 \left| \sum_{n=N}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right| dx \le C\|\varphi\|_1.$

Доказательство леммы 2.1.6. Пусть $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{j} l_k \mathbb{1}_{I_k}(x)$ – ступенчатая функция, а $\varepsilon, \delta \in (0,1)$, $N \in \mathbb{N}$ – некоторые числа. Без ограничения общности будем считать, что

$$\frac{C|l_k|\operatorname{mes}(I_k)}{\varepsilon} < \|\varphi\|_1, \quad k = 1, 2, \ldots, j, \tag{2.1.5}$$

где C – постоянная из леммы 1.1.13 (в противном случае интервалы I_k представим в виде объединения двоичных интервалов, для которых выполняются условия (2.1.5)).

Выберем число δ_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$\max\left\{\delta_1,\ \delta_1\sum_{k=1}^{j}\sqrt{\varepsilon\cdot\mathrm{mes}(I_k)}\right\}<\min\{\|\varphi\|_1,\ \delta/2\}. \tag{2.1.6}$$

Согласно лемме 1.1.13, для любого $k=1,2,\ldots,j$ существуют множество $E_k\subset I_k$ и полиномы

$$P_k(x)=\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}\delta_n a_n W_n(x),\quad P'_k(x)=\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}b_n W_n(x)$$

(где $\delta_n=0,\pm1,\ N_1=N$), такие что:

$$\mathrm{mes}(E_k)>(1-\varepsilon)\mathrm{mes}(I_k), \tag{2.1.7}$$

$$P'_k(x)=0,\quad \text{если}\quad x\notin I_k, \tag{2.1.8}$$

$$|P'_k(x)-l_k|<\delta_1,\quad \text{если}\quad x\in E_k, \tag{2.1.9}$$

$$S^*(P'_k,x)<\delta_1,\quad \text{если}\quad x\notin I_k, \tag{2.1.10}$$

$$S^*(P'_k,x)<\frac{C|l_k|}{\varepsilon}+\delta_1,\quad \text{если}\quad x\in I_k, \tag{2.1.11}$$

$$\|P_k-P'_k\|_2<\delta_1\sqrt{\varepsilon\cdot\mathrm{mes}(I_k)}. \tag{2.1.12}$$

Положим

$$P(x)=\sum_{k=1}^{j}P_k(x),\quad E=\bigcup_{k=1}^{j}E_k,\quad P'(x)=\sum_{k=1}^{j}P'_k(x), \tag{2.1.13}$$

$$g(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если}\quad x\in E,\\ P(x), & \text{если}\quad x\in[0,1]\setminus E.\end{cases} \tag{2.1.14}$$

Тогда условия 1) и 2) леммы 2.1.6 немедленно следуют из (2.1.7), (2.1.13) и (2.1.14). Из (2.1.6) и (2.1.12) получаем, что

$$\sum_{k=1}^{j}\|P_k-P'_k\|_1\le\sum_{k=1}^{j}\|P_k-P'_k\|_2\le\min\{\|\varphi\|_1,\delta/2\}. \tag{2.1.15}$$

Поэтому, учитывая также (2.1.13), получаем

$$\|P-P'\|_1\le\min\{\|\varphi\|_1,\delta/2\}. \tag{2.1.16}$$

Из (2.1.7)–(2.1.9), (2.1.11) и (2.1.13) следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{j}\|P'_k\|_1 \le \sum_{k=1}^{j}\left((|l_k|+\delta_1)\mathrm{mes}(I_k)+\left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon}+\delta_1\right)\varepsilon\mathrm{mes}(I_k)\right) \le \\ \le \sum_{k=1}^{j}(|l_k|+2\delta_1+C|l_k|)\mathrm{mes}(I_k) \le 2\delta_1+(C+1)\|\varphi\|_1.\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Откуда, с учетом (2.1.6) получаем, что

$$\|P'\|_1 \le C_1\|\varphi\|_1. \tag{2.1.18}$$

Из (2.1.13)–(2.1.16), (2.1.6) и (2.1.9) следует, что

$$\begin{aligned}\|g-P\|_1 = \int_E |P(x)-\varphi(x)|dx \le \|P-P'\|_1 + \int_E |P'(x)-\varphi(x)|dx \le \\ \le \frac{\delta}{2}+\delta_1\sum_{k=1}^{j}\mathrm{mes}(I_k) \le \frac{\delta}{2}+\delta_1 \le \delta.\end{aligned}$$

Ясно, что (см. (2.1.14), (2.1.16) и (2.1.18))

$$\|g\|_1 \le \|\varphi\|_1+\|P\|_1 \le \|\varphi\|_1+\|P'\|_1+\|P-P'\|_1 \le C_2\|\varphi\|_1.$$

Остается проверить последный пункт леммы 2.1.6. Пусть

$$\sup_{m\le N_{j+1}}\int_0^1\left|\sum_{n=N}^{m}\delta_n a_n W_n(x)\right|dx = \int_0^1\left|\sum_{n=N}^{m_0}\delta_n a_n W_n(x)\right|dx$$

для некоторого m_0 и $N_k < m_0 \le N_{k+1}$. Тогда, учитывая также (2.1.15), (2.1.17), (2.1.10)–(2.1.12), (2.1.6) и (2.1.5), получим

$$\begin{aligned}\sup_{m\le N_{j+1}}\int_0^1\left|\sum_{n=N}^{m}\delta_n a_n W_n(x)\right|dx \le \sum_{i=1}^{k-1}\|P_i(x)\|_1 + \int_0^1\left|\sum_{n=N_k+1}^{m_0}\delta_n a_n W_n(x)\right|dx \le \\ \le \sum_{i=1}^{k-1}\|P_i-P'_i\|_1+\sum_{i=1}^{k-1}\|P'_i\|_1+\int_0^1\left|\sum_{n=N_k+1}^{m_0}(\delta_n a_n-b_n)W_n(x)\right|dx + \\ + \int_0^1\left|\sum_{n=N_k+1}^{m_0}b_n W_n(x)\right|dx \le \|\varphi\|_1+C_1\|\varphi\|_1+\|P_k-P'_k\|_2 + \\ + \left(\frac{C|l_k|}{\varepsilon}+\delta_1\right)\mathrm{mes}(I_k)+\delta_1 \le C_3\|\varphi\|_1.\end{aligned}$$

Лемма 2.1.6 доказана. □

Доказательство теоремы 2.1.1. Пусть $\{\eta_k\}$ – монотонная последовательность положительных чисел с условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < +\infty. \tag{2.1.19}$$

Рассмотрим последовательность всех ступенчатых функций $\{f_n(x)\}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{M_n} \alpha_k^{(n)} \mathbb{1}_{I_k^{(n)}}(x), \tag{2.1.20}$$

с рациональными значениями $\alpha_k^{(n)}$ и двоичными интервалами постоянства $I_k^{(n)}$ (где $I_k^{(n)} \cap I_m^{(n)} = \varnothing$ при $k \neq m$).

Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ – произвольное число. Тогда, в силу леммы 2.1.6, для каждой функции $f_k(x)$ из последовательности (2.1.20) существуют функция $g_k \in L^1(0,1)$, измеримое множество $E_k \subset [0,1]$ и полином

$$P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \delta_n a_n W_n(x),$$

где $\delta_n = 0$ или ± 1, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\operatorname{mes}(E_k) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}, \tag{2.1.21}$$

$$g_k(x) = f_k(x), \quad \text{если} \quad x \in E_k, \tag{2.1.22}$$

$$\|g_k - P_k\|_1 < \eta_k, \tag{2.1.23}$$

$$\|g_k\|_1 \leq C\|f_k\|_1, \tag{2.1.24}$$

$$\sup_{N_k < m \leq N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_k+1}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right| dx \leq C\|f_k\|_1. \tag{2.1.25}$$

Обозначим

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k. \tag{2.1.26}$$

Из (2.1.21) и (2.1.26) следует, что $\operatorname{mes}(E) > 1 - \varepsilon$.

Пусть $f \in L^1(0,1)$. Из последовательности (2.1.20) выберем такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, чтобы выполнялись

$$\lim_{k\to\infty} \left\| f - \sum_{m=1}^{k} f_{n_m} \right\|_1 = 0 \tag{2.1.27}$$

и

$$\|f_{n_k}\|_1 \leq \eta_k, \quad k \geq 2. \tag{2.1.28}$$

Положим $\varphi_1(x) := g_{n_1}(x)$ и

$$Q_1(x) := P_{n_1}(x) = \sum_{n=N_{n_1}+1}^{N_{n_1+1}} \delta_n a_n W_n(x).$$

Допустим, что уже определены функции $\varphi_1(x), ..., \varphi_{k-1}(x)$ и полиномы $Q_1(x), ..., Q_{k-1}(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi_i(x) = f_{n_i}(x), \quad x \in E, \quad 1 \le i \le k-1,$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i(x) - \varphi_i(x)) \right| dx < 2\eta_{k-1}. \tag{2.1.29}$$

Выберем ступенчатую функцию f_{m_k} $(m_k > m_{k-1},\ m_1 = n_1)$ из последовательности (2.1.20) такую, что

$$\left\| f_{m_k} - \left(f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right) \right\|_1 < \eta_k. \tag{2.1.30}$$

Согласно (2.1.28) и (2.1.29), с учетом монотонности $\{\eta_k\}$ имеем, что

$$\left\| f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \le 3\eta_{k-1}. \tag{2.1.31}$$

Из (2.1.30) и (2.1.31) получим

$$\|f_{m_k}\|_1 \le 4\eta_{k-1}. \tag{2.1.32}$$

Положим

$$\varphi_k(x) := f_{n_k}(x) + (g_{m_k}(x) - f_{m_k}(x)), \tag{2.1.33}$$

$$Q_k(x) := P_{m_k}(x) = \sum_{n=N_{m_k}+1}^{N_{m_k+1}} \delta_n a_n W_n(x). \tag{2.1.34}$$

Ясно, что (см. (2.1.33) и (2.1.22))

$$\varphi_k(x) = f_{n_k}(x), \quad \text{если} \quad x \in E \subset E_{m_k}. \tag{2.1.35}$$

Из (2.1.33), (2.1.30), (2.1.24), (2.1.32) и (2.1.29) получим

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_1 &\le \|f_{n_k} - f_{m_k}\|_1 + \|g_{m_k}\|_1 \le \\ &\le \left\| f_{m_k} - \left(f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right) \right\|_1 + \|g_{m_k}\|_1 + \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \le \\ &\le \eta_k + 4C\eta_{k-1} + 2\eta_{k-1} \le (3+4C)\eta_{k-1} = C_1\eta_{k-1}. \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

С учетом (2.1.33), (2.1.30) и (2.1.23) получаем

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 = \left\| P_{m_k} + f_{m_k} - g_{m_k} - f_{n_k} + \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \leq$$
$$\leq \left\| f_{m_k} - \left(f_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right) \right\|_1 + \|P_{m_k} - g_{m_k}\|_1 \leq 2\eta_k. \tag{2.1.37}$$

Из (2.1.25) и (2.1.32) следует, что

$$\sup_{N_k < m \leq N_{k+1}} \int_0^1 \left| \sum_{n=N_{m_k}+1}^{m} \delta_n a_n W_n(x) \right| dx \leq C\|f_{m_k}\|_1 \leq 4C\eta_{k-1}. \tag{2.1.38}$$

Таким образом, по индукции определяются последовательности функций $\{\varphi_k(x)\}$ и полиномов $\{Q_k(x)\}$, удовлетворяющие условиям (2.1.35)–(2.1.38).

Теперь определим функцию $g(x)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta'_n a_n W_n(x)$ следующим образом:

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

$$\delta'_n = \begin{cases} \delta_n, & \text{если } \ N_{m_k} + 1 \leq n \leq N_{m_{k+1}} \ \text{ для некоторого } \ k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.1.39}$$

Ясно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta'_n a_n W_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x).$$

Из (2.1.36), (2.1.19), (2.1.35) и (2.1.27) следует, что $g \in L^1(0,1)$ и $g(x) = f(x)$, когда $x \in E$. Пусть N – любое натуральное число, тогда для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеет место $N_{m_k} + 1 \leq N < N_{m_{k+1}}$. Следовательно, с учетом (2.1.36)–(2.1.39) получим

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \delta'_n a_n W_n(x) - g \right\|_1 \leq \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 + \left\| \sum_{i=k}^{\infty} \varphi_i \right\|_1 +$$
$$+ \left\| \sum_{n=N_{m_k}+1}^{N} \delta'_n a_n W_n(x) \right\|_1 \leq 2\eta_{k-1} + C_1 \sum_{i=k}^{\infty} \eta_{i-1} + 4C\eta_{k-1} \leq C_2 \sum_{i=k-1}^{\infty} \eta_i.$$

Отсюда с учетом (2.1.19) получаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta'_n a_n W_n(x)$ в метрике L^1 сходится к $g(x)$.

Теорема 2.1.1 доказана. □

2.2 Универсальные функции в задачах "исправления", обеспечивающего сходимость рядов Фурье–Уолша

2.2.1 Введение

В настоящем разделе мы изучим класс тех суммируемых функций, модули коэффициентов Фурье которых по системе Уолша по модулю расположены в убывающем порядке. Отметим, что в связи с изучением сходимости жадного алгоритма вновь полученной, исправленной функции возник следующий вопрос, который представляет самостоятельный интерес.

Вопрос 1. Можно ли изменить значения любой функции $f(x)$ класса $L^p(0,1)$, $p \geq 1$, на множестве малой меры так, чтобы *все члены* в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по классическим системам (в частности по системам Уолша и Хаара и по тригонометрической системе) по модулю были бы расположены в убывающем порядке?

Ряд работ (см., например, [57], [58], [77]–[80], [135], [136]) были посвящены теоремам исправления, в которых модули ненулевых коэффициентов Фурье вновь полученной функции (по системам Хаара, Уолша, Фабера–Шаудера) монотонно убывали. Отметим, что из доказательств результатов этих работ (а также теорем 2.1.C, 2.1.1 и 2.1.3) не ясно, можно ли исправленную функцию выбрать так, чтобы *все члены* в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по модулю были расположены в убывающем порядке. Здесь мы докажем, что для системы Уолша это возможно, т.е. исправляемую функцию $\tilde{f}(x)$ можно выбрать так, чтобы

$$|c_k(\tilde{f})| > |c_{k+1}(\tilde{f})|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2.1 ([137]). *Для любого $0 < \varepsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\operatorname{mes}(E) > 1 - \varepsilon$ и функция $g \in L^1(0,1)$ с коэффициентами Фурье–Уолша*

$$0 < c_{k+1}(g) < c_k(g), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

такие, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, *совпадающую с* f *на* E, *такую, что ряд Фурье–Уолша функции* $\tilde{f}(x)$ *сходится к ней по норме* $L^1(0,1)$ *и для всех членов последовательности коэффициентов Фурье–Уолша вновь полученной функции имеет место*

$$|c_k(\tilde{f})| = c_k(g), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Из этой теоремы следует

Теорема 2.2.2 ([137]). *Для любого* $0 < \varepsilon < 1$ *существует функция* $g(x) \in L^1(0,1)$,

$$\mathrm{mes}\{x : g(x) \neq 0\} < \varepsilon,$$

такая, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ *можно найти числа* $\delta_k = \pm 1$, $k = 0, 1, ...,$ *и функцию* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, *совпадающую с* f *на множестве* $E = \{x : g(x) = 0\}$, *такие, что жадный алгоритм функции* $\tilde{f}(x)$ *по системе Уолша* $\Phi = \{W_k(x)\}$ *сходится к ней по* $L^1(0,1)$*-норме и*

$$G_m(x, \tilde{f}, \Phi) = \sum_{k=0}^{m} \delta_k c_k(g) W_k(x) = S_m(x, \tilde{f}, \Phi) \ \forall x \in (0,1), \ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Определение 2.2.3 *Пусть* $\varepsilon > 0$ *– некоторое число. Будем говорить, что функция* $g \in L^1(0,1)$ *и измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon$ *образуют универсальную пару* (g, E) *в* $L^1(E)$ *в смысле модификации относительно знаков коэффициентов Фурье по системе* $\{\varphi_k\}$, *если для каждой функции* $f \in L^1(E)$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, *совпадающую с* f *на* E, *ряд Фурье которой по системе* $\{\varphi_k\}$ *сходится к ней по* $L^1(0,1)$*-норме и*

$$|c_k(\tilde{f})| = |c_k(g)|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Отметим, что из теоремы 2.2.1 непосредственно следует следующая теорема.

Теорема 2.2.4 ([137]). *Пусть* $\varepsilon > 0$ *– некоторое число. Тогда существуют функция* $g \in L^1(0,1)$ *с коэффициентами Фурье–Уолша*

$$0 < c_{k+1}(g) < c_k(g), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$, которые образуют универсальную пару (g, E) в $L^1(E)$ в смысле модификации относительно знаков коэффициентов Фурье по системе Уолша.

Плотностью подмножества B неотрицательных целых чисел называется величина

$$\rho(B) = \limsup_{n\to\infty} \frac{B_n}{n},$$

где B_n – число элементов из B, не превышающих n.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.5 ([138]). *Для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\mathrm{mes}(E) > 1-\varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ вида $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x)$, совпадающую с f на E, такую, что*

1) все члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции $\tilde{f}(x)$ по системе Уолша по модулю расположены в убывающем порядке;

2) ряд Фурье–Уолша функции $\tilde{f}_2(x)$ сходится к ней по норме $L^1(0,1)$, а ряд Фурье–Уолша функции $\tilde{f}_1$ абсолютно сходится к ней;

3) плотность $\rho(Spec(\tilde{f}_1))$ равна 1 и

$$Spec(\tilde{f}_1) \cup Spec(\tilde{f}_2) = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad Spec(\tilde{f}_1) \cap Spec(\tilde{f}_2) = \varnothing.$$

Возникает следующий вопрос, ответ на который нам не известен.

Вопрос 2. Верны ли теоремы 2.2.1–2.2.5 для тригонометрической системы?

В связи с вопросом 1 отметим, что в случае системы Хаара исправленную функцию $\tilde{f}$ (когда исключительное множество E_0, на котором происходит изменение, не зависит от исправляемой функции f) невозможно выбрать так, чтобы для коэффициентов Фурье–Хаара функции $\tilde{f}$ имели место

$$c_k(\tilde{f}) \geq c_{k+1}(\tilde{f}), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Это следует из следующей теоремы, доказанной в работе [75].

Теорема 2.2.А (П. Л. Ульянов). *Пусть $p > 1$ и последовательность положительных чисел $\{a_k\}$ такова, что*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \quad \text{и} \quad a_k \geq a_{k+1} \quad \text{для всех натуральных} \;\; k.$$

Тогда, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$$

является рядом Фурье–Хаара некоторой функции $f \in L^p(0,1)$, то функция $\left|f\right|$ интегрируема в любой степени $q \in [1, \infty)$.

Действительно, согласно этой теореме, для любого множества $E \subset [0,1]$ с $\mathrm{mes}(E) > 0$, если выбрать функцию f таким образом, чтобы имело место $\displaystyle\int_E f^2(t)dt = \infty$, то ни для какой функции $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающей с f на E, последовательность коэффициентов Фурье–Хаара функции $\tilde{f}$ не может монотонно стремиться к нулю.

2.2.2 Вспомогательные утверждения

Напомним некоторые свойства системы Уолша (см., например, [25]). Из определения системы Уолша следует, что если $k < 2^m$ и $n \geq m$, то для любого натурального числа i имеет место

$$W_{i2^n}(x) \cdot W_k(x) = W_{i2^n+k}(x). \tag{2.2.1}$$

Известно также, что для любого натурального m имеем

$$\sum_{k=0}^{2^m-1} W_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad x \in (2^{-m}; 1], \\ 2^m & \text{если} \quad x \in [0; 2^{-m}), \end{cases} \tag{2.2.2}$$

а для любого натурального числа M и для любого $x \in (0,1)$ выполняется

$$\left|\sum_{k=0}^{M} W_k(x)\right| \leq \frac{1}{x}.$$

Из последнего неравенства получаем, что для любых натуральных чисел M, N и n, $0 \leq M < N < 2^n$, имеет место

$$\left\|\sum_{k=M}^{N} W_k(x)\right\|_1 \leq \int_0^{2^{-n}} 2^n dx + \int_{2^{-n}}^1 \frac{2}{x} dx = 1 + 2n\ln 2 < 3n. \tag{2.2.3}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2.6 *Пусть n_0 – некоторое натуральное число, а $\Delta \subset [2^{-n_0}; 1]$ – двоичный интервал с длиной $2^{-\sigma}$, тогда для любых чисел $\varepsilon, b > 0$, $p \geq 1$ и $l \neq 0$ существуют множество $E \subset \Delta$ с мерой $\mathrm{mes}(E) > (1-\varepsilon)\mathrm{mes}(\Delta)$ и многочлены по системе Уолша*

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} a_k W_k(x), \quad R(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = 0, 1,$$

такие, что

1) $|a_{k+1}| \leq |a_k| \leq b$ *для всех* k, $\;2^{n_0} \leq k < 2^n - 1$;

2) $P(x) = R(x) = l$, *если* $x \in E$;

3) $P(x) = 0$, *если* $x \in [2^{-n_0}; 1] \setminus \Delta$;

4) $\sup\limits_M \left\| \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right\|_1 \leq C|l|\mathrm{mes}(\Delta)$;

5) $\tilde{P}(x) = \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{2^n-1} |a_k| W_k(x) = 0$, *если* $x > 2^{-n_0}$;

6) $\sup\limits_M \left\| \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{M} |a_k| W_k(x) \right\|_1 \leq b$;

7) $R(x) = 0$, *если* $x \notin \Delta$;

8) $\int_0^1 |R(x)|^p dx \leq \dfrac{2^p |l|^p}{\varepsilon^{p-1}} \mathrm{mes}(\Delta)$.

Доказательство леммы 2.2.6. Выберем натуральное число σ_1, удовлетворяющее условиям

$$\sigma_1 \geq \sigma + 2, \quad |l| 2^{-\sigma_1} < b. \tag{2.2.4}$$

Интервал Δ представим в виде объединения двоичных интервалов

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{r_1} \Delta_i^{(1)}, \quad \mathrm{mes}(\Delta_i^{(1)}) = 2^{-\sigma_1}, \quad i = 1, 2, \ldots, r_1, \tag{2.2.5}$$

не имеющих общих внутренних точек. Очевидно, что $r_1 = 2^{\sigma_1 - \sigma}$.

Выберем натуральное число $m_1 > \max\{\sigma_1 + 2\sigma;\ n_0\}$ так, чтобы $(m_1 - \sigma_1)$ было четным и

$$2^{\frac{m_1}{2}} > (m_1 + \sigma_1) 2^{\frac{\sigma_1}{2}}. \tag{2.2.6}$$

Пусть $n_1 = m_1 + \sigma_1 - \sigma + 1$ и

$$Q_1'(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} a_k W_k(x) \equiv \frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1}-1} W_k(x).$$

Из (2.2.4) следует, что

$$a_k = \frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} < |l|2^{-\sigma_1} \le b \quad \text{для всех} \quad 2^{n_0} \le k < 2^{n_1}. \tag{2.2.7}$$

А из (2.2.1)–(2.2.4) получаем, что

$$Q_1'(x) = 0, \quad \text{если} \quad x > 2^{-n_0}, \tag{2.2.8}$$

$$\|Q_1'(x)\|_1 \le 2\frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} < \min\left\{b; \frac{|l|\mathrm{mes}(\Delta)}{2}\right\}, \tag{2.2.9}$$

$$\sup_{M<2^{n_1}} \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right\|_1 \le 3n_1 \frac{|l|2^{-\sigma_1}}{n_1} < \min\{3b; |l|\mathrm{mes}(\Delta)\}.$$

Теперь для каждого $i \in \{1, 2, \dots, r_1\}$, применив лемму 1.1.9 для интервала $\Delta = \Delta_i^{(1)}$ и числа $n = m_1$, получаем полином по системе Уолша

$$P_i^{(1)}(x) = \sum_{k=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} l\alpha_k^{(i)} W_k(x)$$

с коэффициентами (см. также (2.2.6))

$$|l\alpha_k^{(i)}| = |l|2^{-\frac{m_1+\sigma_1}{2}} \le |l|\frac{2^{-\sigma_1}}{m_1+\sigma_1} \le |l|\frac{2^{-\sigma_1}}{n_1}, \quad 2^{m_1} \le k < 2^{m_1+1}. \tag{2.2.10}$$

Обозначим

$$P_1'(x) := \sum_{i=1}^{r_1} P_i^{(1)}(x) W_{2^{n_1}+(i-1)2^{m_1+1}}(x).$$

Из определения полинома $P_1'(x)$ следует, что (см. лемму 1.1.9, (2.2.1) и (2.2.5))

$$P_1'(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin \Delta, \\ l, & \text{если} \quad x \in E_1', \\ -l, & \text{если} \quad x \in E_1'', \end{cases} \tag{2.2.11}$$

где E_1' и E_1'' являются конечными объединениями двоичных интервалов, а $\mathrm{mes}(E_1') = \mathrm{mes}(E_1'') = 2^{-\sigma-1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{mes}(\Delta)$. Ясно, что

$$\|P_1'\|_1 = \sum_{i=1}^{r_1} \left\|P_i^{(1)}\right\|_1 = \sum_{i=1}^{r_1} |l|\mathrm{mes}(\Delta_i^{(1)}) = |l|\mathrm{mes}(\Delta).$$

Обозначим

$$Q_1(x) := \sum_{k=0}^{2^{m_1}-1} |l| 2^{-\frac{m_1+\sigma_1}{2}} W_k(x),$$

$$Q_1''(x) := \sum_{i=1}^{r_1} Q_1(x) W_{2^{n_1}+(i-1)2^{m_1+1}}(x).$$

Из (2.2.1), (2.2.2) и определения Q_1'' следует, что

$$Q_1''(x) = 0 \quad \text{при} \quad x > 1/2^{n_0} > 1/2^{m_1}. \tag{2.2.12}$$

Рассмотрим следующий полином

$$P_1(x) := \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1+1}-1} a_k W_k(x) \equiv Q_1'(x) + Q_1''(x) + P_1'(x).$$

Ясно, что $P_1(x) = -l$, если $x \in E_1''$ (см. (2.2.8), (2.2.11) и (2.2.12)), а модули коэффициентов a_k при $2^{n_1} \le k < 2^{n_1+1}$ равны $|l| 2^{-\frac{m_1+\sigma_1}{2}}$ (см. (2.2.1)), поэтому для коэффициентов полинома $P_1(x)$ получаем (см. также (2.2.7) и (2.2.10))

$$b > |a_{2^{n_0}}| = |a_{2^{n_0}+1}| = \dots = |a_{2^{n_1}-1}| \ge |a_{2^{n_1}}| = \dots = |a_{2^{n_1+1}-1}|. \tag{2.2.13}$$

Из (2.2.1), (2.2.2), (2.2.8) и (2.2.13) следует, что

$$\tilde{P}_1(x) := \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_1+1}-1} |a_k| W_k(x) = 0, \quad \text{если} \quad x > 2^{-n_0}.$$

Допустим, что уже построены многочлены $P_1(x), P_2(x), \dots, P_{q-1}(x)$, множества $E_{q-1}'' \subset E_{q-2}'' \subset \dots \subset E_1'' \subset E_0'' = \Delta$ и числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{q-1}$, m_1, $m_2, \dots$, m_{q-1}, удовлетворяющие условиям

$$\sigma_j > \frac{m_{j-1} + \sigma_{j-1}}{2} + 2 \ (\sigma_0 = m_0 = \sigma), \quad j = 1, 2, \dots, q-1,$$

$$\sigma_j \ge \sigma_{j-1} + 2 \ge \sigma + 2j, \quad j = 1, 2, \dots, q-1, \tag{2.2.14}$$

$$m_j > \sigma_j + 2\sigma, \quad j = 1, 2, \dots, q-1, \tag{2.2.15}$$

$$P_j(x) = \sum_{k=2^{n_{j-1}+1}}^{2^{n_j+1}-1} a_k W_k(x) = -2^{j-1} l \quad \text{при} \quad x \in E_j'', \quad j = 1, 2, \dots, q-1,$$

где E_j'' является конечным объединением двоичных интервалов с мерой

$$\text{mes}(E_j'') = 2^{-j} \text{mes}(\Delta) = 2^{-j-\sigma},$$

а

$$|a_k| \geq |a_{k+1}| \geq |a_{2^{n_j+1}-1}| = 2^{j-1}|l|2^{-\frac{m_j+\sigma_j}{2}}, \quad k \in [2^{n_{j-1}+1}; 2^{n_j+1}-1),$$

при $j = 1$ под $2^{n_{j-1}+1}$ понимаем 2^{n_0}.

Выберем натуральное число σ_q так, чтобы

$$\sigma_q > \frac{m_{q-1}+\sigma_{q-1}}{2} + 2, \tag{2.2.16}$$

и множество E''_{q-1} представим в виде

$$E''_{q-1} = \bigcup_{i=1}^{r_q} \Delta_i^{(q)},$$

где $\Delta_i^{(q)}$ – непересекающиеся двоичные интервалы с мерой $\mathrm{mes}(\Delta_i^{(q)}) = 2^{-\sigma_q}$, $i = 1, 2, ..., r_q$, $r_q = 2^{\sigma_q - \sigma - (q-1)}$.

Из (2.2.14)–(2.2.16) следует, что $\sigma_q > \sigma_{q-1} + 2 \geq \sigma_1 + 2(q-1) \geq \sigma + 2q$. Ясно, что (см. также (2.2.4))

$$|l|2^{-\sigma_q} \leq |l|2^{-\sigma_1 - 2(q-1)} \leq \min\left\{\frac{b}{2^{2(q-1)}}; \frac{|l|2^{-\sigma}}{2^{2q}}\right\}. \tag{2.2.17}$$

Выберем натуральное число m_q так, чтобы $(m_q - \sigma_q)$ было четным,

$$m_q > \max\{\sigma_q + 2\sigma + 2q; n_{q-1}+1\} \quad \text{и} \quad 2^{\frac{m_q}{2}} > (m_q + \sigma_q)2^{\frac{\sigma_q}{2}}. \tag{2.2.18}$$

Пусть $n_q := m_q + \sigma_q - \sigma - (q-1) + 1$ и

$$Q'_q(x) := \sum_{k=2^{n_{q-1}+1}}^{2^{n_q}-1} a_k W_k(x) := \frac{2^{q-1}|l|2^{-\sigma_q}}{n_q} \sum_{k=2^{n_{q-1}+1}}^{2^{n_q}-1} W_k(x).$$

Из (2.2.16) следует, что при $2^{n_{q-1}+1} \leq k \leq 2^{n_q} - 1$

$$a_k = |a_k| = \frac{2^{q-1}|l|2^{-\sigma_q}}{n_q} < 2^{q-2}|l|2^{-\frac{m_{q-1}+\sigma_{q-1}}{2}} = |a_{2^{n_{q-1}+1}} - 1|, \tag{2.2.19}$$

т.е. коэффициенты многочлена $Q'_q(x)$ по модулю меньше, чем модули коэффициентов $P_{q-1}(x)$. В силу (2.2.1)–(2.2.3) и (2.2.17), для многочлена $Q'_q(x)$ получаем

$$Q'_q(x) = 0 \quad \text{при} \quad x > 2^{-n_0} > 2^{-(n_{q-1}+1)}, \tag{2.2.20}$$

$$\|Q'_q(x)\|_1 \leq 2\frac{2^{q-1}|l|2^{-\sigma_q}}{n_q} \leq \min\left\{\frac{b}{2^{q-1}}; \frac{|l|\mathrm{mes}(\Delta)}{2^q}\right\}, \tag{2.2.21}$$

$$\sup_{M<2^{n_q}}\left\|\sum_{k=2^{n_{q-1}+1}}^{M} a_k W_k(x)\right\|_1 \le 3n_q 2^{q-1}\frac{|l|2^{-\sigma_q}}{n_q} \le \min\left\{\frac{3b}{2^{q-1}};\frac{|l|\mathrm{mes}(\Delta)}{2^{q-1}}\right\}. \qquad (2.2.22)$$

Для каждого $i=1,2,\dots,r_q$, применив лемму 1.1.9 при $n=m_q$ и $\Delta=\Delta_i^{(q)}$, получаем полином

$$P_i^{(q)}(x)=\sum_{k=2^{m_q}}^{2^{m_q+1}-1} 2^{q-1}l\alpha_k^{(i)}W_k(x),$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующему условию (см. также (2.2.18)):

$$2^{q-1}\left|l\alpha_k^{(i)}\right| = 2^{q-1}|l|2^{-\frac{m_q+\sigma_q}{2}} \le 2^{q-1}|l|\frac{2^{-\sigma_q}}{(m_q+\sigma_q)} \le 2^{q-1}|l|\frac{2^{-\sigma_q}}{n_q}, \qquad (2.2.23)$$

т.е. они по модулю меньше, чем коэффициенты полинома $Q'_q(x)$.

Обозначим

$$P'_q(x) := \sum_{i=1}^{r_q} P_i^{(q)}(x)W_{2^{n_q}+(i-1)2^{m_q+1}}(x), \qquad (2.2.24)$$

$$E'_q := \{x\in E''_{q-1}:\ lP'_q(x)>0\},\quad E''_q := \{x\in E''_{q-1}:\ lP'_q(x)<0\}.$$

Из определения полинома $P'_q(x)$, (2.2.1) и леммы 1.1.9 следует, что

$$P'_q(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x\notin E''_{q-1},\\ 2^{q-1}l, & \text{если}\quad x\in E'_q,\\ -2^{q-1}l, & \text{если}\quad x\in E''_q,\end{cases} \qquad (2.2.25)$$

а E'_q и E''_q являются конечными объединениями двоичных интервалов с мерой

$$\mathrm{mes}(E'_q)=\mathrm{mes}(E''_q)=\frac{1}{2}\mathrm{mes}(E''_{q-1})=\frac{1}{2^q}\mathrm{mes}(\Delta). \qquad (2.2.26)$$

Так как $P_i^{(q)}(x)=0$ вне интервала $\Delta_i^{(q)}$, то (см. также (2.2.24))

$$||P'_q||_1=\sum_{i=1}^{r_q}||P_i^{(q)}||_1=\sum_{i=1}^{r_q}2^{q-1}|l|\mathrm{mes}(\Delta_i^{(q)})=2^{q-1}|l|\mathrm{mes}(E''_{q-1})=|l|\mathrm{mes}(\Delta). \qquad (2.2.27)$$

Обозначим

$$Q_q(x):=\sum_{k=0}^{2^{m_q}-1}2^{q-1}|l|2^{-\frac{m_q+\sigma_q}{2}}W_k(x),$$

$$Q''_q(x):=\sum_{i=1}^{r_q}Q_q(x)W_{2^{n_q}+(i-1)2^{m_q+1}}(x).$$

Из определения полинома $Q''_q(x)$, (2.2.2) и первого неравенства (2.2.18) следует, что

$$Q''_q(x)=0,\quad \text{если}\quad x>2^{-n_0}>2^{-m_q}, \qquad (2.2.28)$$

$$||Q''_q(x)||_1 \le r_q 2^{q-1}|l|2^{-\frac{m_q+\sigma_q}{2}} = 2^{-\frac{m_q-\sigma_q}{2}-\sigma}|l| < 2^{-q}|l|\mathrm{mes}(\Delta). \tag{2.2.29}$$

Рассмотрим следующие полиномы

$$P_q(x) := \sum_{k=2^{n_{q-1}+1}}^{2^{n_q+1}-1} a_k W_k(x) \equiv Q'_q(x) + Q''_q(x) + P'_q(x),$$

$$\tilde{P}_q(x) := \sum_{k=2^{n_{q-1}+1}}^{2^{n_q+1}-1} |a_k| W_k(x) = Q'_q(x) + \sum_{k=2^{n_q}}^{2^{n_q+1}-1} |a_k| W_k(x). \tag{2.2.30}$$

Ясно, что модули коэффициентов a_k при $2^{n_q} \le k < 2^{n_q+1}$ равны $2^{q-1}|l|2^{-\frac{m_q+\sigma_q}{2}}$ (см. (2.2.1)), поэтому для коэффициентов полинома $P_q(x)$ получаем (см. также (2.2.19) и (2.2.23))

$$|a_{2^{n_{q-1}+1}-1}| \ge |a_{2^{n_{q-1}+1}}| = \cdots = |a_{2^{n_q}-1}| \ge |a_{2^{n_q}}| = \cdots = |a_{2^{n_q+1}-1}|. \tag{2.2.31}$$

Из (2.2.1), (2.2.2), (2.2.20) и (2.2.31) следует, что

$$\tilde{P}_q(x) = 0 \quad \text{при} \quad x > 2^{-n_0}. \tag{2.2.32}$$

Если $M \in [2^{n_q}; 2^{n_q+1})$, то из (2.2.3), (2.2.17), (2.2.18), (2.2.21) и (2.2.30) получаем

$$\left\| \sum_{k=2^{n_{q-1}+1}}^{M} |a_k| W_k(x) \right\|_1 \le \frac{b}{2^{q-1}} + 2^{q-1}|l|2^{-\frac{m_q+\sigma_q}{2}} \cdot 3n_q \le$$
$$\le \frac{b}{2^{q-1}} + \frac{2^{q-1}|l|2^{-\sigma_q} \cdot 3n_q}{m_q+\sigma_q} \le \frac{4b}{2^{q-1}},$$

поскольку $a_k > 0$ при $2^{n_{q-1}+1} \le k < 2^{n_q}$. Поэтому с учетом (2.2.22) получаем

$$\sup_{M<2^{n_q+1}} \left\| \sum_{k=2^{n_{q-1}+1}}^{M} |a_k| W_k(x) \right\|_1 \le \frac{Cb}{2^{q-1}}. \tag{2.2.33}$$

Таким образом, по индукции определяются полиномы $\{Q'_j\}$, $\{Q''_j\}$, $\{P'_j\}$, $\{P_j\}$, $\{\tilde{P}_j\}$ и множества $E''_1 \supset E''_2 \supset \cdots$, удовлетворяющие условиям (2.2.20)–(2.2.33).

Обозначим

$$s = \left[\log_2 \varepsilon^{-1}\right] + 1 \tag{2.2.34}$$

и рассмотрим многочлен

$$P(x) := \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_s+1}-1} a_k W_k(x) = \sum_{j=1}^{s} P_j(x) = \sum_{j=1}^{s} Q'_j(x) + \sum_{j=1}^{s} Q''_j(x) + \sum_{j=1}^{s} P'_j(x).$$

Из (2.2.11) и (2.2.25) следует, что при всех $r \le s$

$$\sum_{j=1}^{r} P'_j(x) = \begin{cases} l, & \text{если} \quad x \in \Delta \setminus E''_r, \\ -(2^r-1)l, & \text{если} \quad x \in E''_r, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin \Delta. \end{cases} \tag{2.2.35}$$

Обозначим

$$\delta_k := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k \in Spec(P'_j), \quad j = 1, 2, \dots, s, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$R(x) := \sum_{j=1}^{s} P'_j(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_s+1}-1} \delta_k a_k W_k(x),$$

$$E := \Delta \setminus E''_s.$$

Отсюда и из (2.2.34), (2.2.26) и (2.2.35) вытекает

$$\mathrm{mes}(E) = \mathrm{mes}(\Delta) - 2^{-s}\mathrm{mes}(\Delta) > (1-\varepsilon)\mathrm{mes}(\Delta),$$

$$\int_0^1 |R(x)|^p dx \le |l|^p \mathrm{mes}(\Delta) + (2^s l)^p \mathrm{mes}(E''_s) \le \frac{2^p}{\varepsilon^{p-1}} |l|^p \mathrm{mes}(\Delta).$$

Учитывая также (2.2.13), (2.2.20), (2.2.28), (2.2.31), и (2.2.35), получаем, что полиномы $P(x), R(x)$ и множество E удовлетворяют пунктам 1)–3), 7) и 8) леммы 2.2.6. Ясно также, что при всех $r \le s$

$$\left\| \sum_{j=1}^{r} P'_j \right\|_1 = |l|\mathrm{mes}(\Delta \setminus E''_r) + (2^r - 1)|l|\mathrm{mes}(E''_r) < 2|l|\mathrm{mes}(\Delta). \tag{2.2.36}$$

Пусть M – некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $2^{n_0} \le M < 2^{n_s+1}$. Тогда для некоторого r, $1 \le r \le s$, имеем $M \in [2^{n_{r-1}+1}; 2^{n_r+1})$ (при $r = 1$ вместо $2^{n_{r-1}+1}$ нужно понимать 2^{n_0}). В случае, когда $2^{n_{r-1}+1} \le M < 2^{n_r}$, полином $\sum\limits_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x)$ имеет вид

$$\sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) = \sum_{j=1}^{r-1} Q'_j(x) + \sum_{j=1}^{r-1} Q''_j(x) + \sum_{j=1}^{r-1} P'_j(x) + \sum_{k=2^{n_{r-1}+1}}^{M} a_k W_k(x),$$

поэтому из (2.2.9) и (2.2.21) получаем, что L^1-норма первого слагаемого меньше, чем $|l|\mathrm{mes}(\Delta)$. Аналогичная оценка получается и для нормы второго слагаемого (см. (2.2.29)). Следовательно, с учетом (2.2.36) и (2.2.22) имеем

$$\left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right\|_1 \le 5|l|\mathrm{mes}(\Delta). \tag{2.2.37}$$

Если же $2^{n_r} \le M < 2^{n_r+1}$, то при некотором числе i, $\quad 0 \le i < 2^{n_r-m_r}$, имеем $M \in [2^{n_r}+i2^{m_r}; 2^{n_r}+(i+1)2^{m_r})$, следовательно, для нормы полинома $\sum\limits_{k=2^{n_0}}^{M} a_kW_k(x)$ получаем

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_kW_k(x)\right\|_1 \le \left\|\sum_{j=1}^{r} Q'_j\right\|_1 + \left\|\sum_{j=1}^{r-1} Q''_j\right\|_1 + \left\|\sum_{j=1}^{r-1} P'_j\right\|_1 + \\ + \left\|\sum_{k=2^{n_r}}^{2^{n_r}+i2^{m_r}-1} a_kW_k(x)\right\|_1 + \left\|\sum_{k=2^{n_r}+i2^{m_r}}^{M} a_kW_k(x)\right\|_1 .\end{aligned} \tag{2.2.38}$$

Сумма первых трех слагаемых , как и в прежнем случае, меньше чем $4|l|\mathrm{mes}(\Delta)$. Четвертое слагаемое оценивается как в (2.2.27) и (2.2.29) – меньше чем $2|l|\mathrm{mes}(\Delta)$. Для последнего слагаемого рассмотрим два случая.

В случае, когда число i четное, из определения многочлена $Q''_r(x)$, (2.2.1), (2.2.3), (2.2.17) и (2.2.18) получаем, что

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=2^{n_r}+i2^{m_r}}^{M} a_kW_k(x)\right\|_1 = 2^{r-1}|l|2^{-\frac{m_r+\sigma_r}{2}} \left\|\sum_{k=0}^{M-2^{n_r}-i2^{m_r}} W_k(x)\right\|_1 \le \\ \le 2^{r-1}|l|2^{-\frac{m_r+\sigma_r}{2}} \cdot 3m_r < 2|l|\mathrm{mes}(\Delta).\end{aligned}$$

А если число i нечетное, то с учетом пунктов 5) и 6) леммы 1.1.9, (2.2.18), (2.2.26) и определения полинома $P_i^{(r)}(x)$, получаем, что

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=2^{n_r}+i2^{m_r}}^{M} a_kW_k(x)\right\|_1 = \int_{E''_{r-1}} + \int_{[0,1]\setminus E''_{r-1}} \le C2^{r-1}|l|\mathrm{mes}(E''_{r-1}) + \\ 2^{r-1}|l|2^{-\frac{m_r-\sigma_r}{2}} \le C|l|\mathrm{mes}(\Delta) + 2^{r-1}|l|2^{-(\sigma+r)} < (C+1)|l|\mathrm{mes}(\Delta),\end{aligned}$$

где C – постоянная из леммы 1.1.9. Следовательно, с учетом (2.2.37) и (2.2.38) получаем, что существует C_1 такое, что для любого натурального числа M из промежутка $[2^{n_0}; 2^{n_s+1})$ имеем

$$\left\|\sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_kW_k(x)\right\|_1 < C_1|l|\mathrm{mes}(\Delta).$$

Пусть

$$\tilde{P}(x) := \sum_{k=2^{n_0}}^{2^{n_s+1}-1} |a_k|W_k(x) = \sum_{j=1}^{s} \tilde{P}_j(x).$$

Тогда из (2.2.32) следует, что $\tilde{P}(x) = 0$ при $x > 2^{n_0}$, а из (2.2.33) получаем

$$\sup_{M<2^{n_s+1}} \left\|\sum_{k=2^{n_0}}^{M} |a_k|W_k(x)\right\|_1 \le Cb.$$

Лемма 2.2.6 доказана. $\square$

Лемма 2.2.7 *Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, n_0 – натуральное число, а b_0 – некоторое положительное число. Далее, пусть $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{j} l_k \mathbb{1}_{\Delta_k}(x)$ – ступенчатая функция, имеющая ненулевое значение в некоторой точке из интервала $(2^{-n_0}, 1)$, и $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_j$ – непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда существуют многочлен по системе Уолша*

$$P(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^m-1} a_k W_k(x)$$

и множество $E \subset [2^{-n_0}, 1]$ такие, что

1) $|a_{k+1}| \le |a_k| \le b_0$ *для всех* $k, \quad 2^{n_0} \le k < 2^m - 1$;

2) $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon - 2^{-n_0}$;

3) $P(x) = f(x)$, *если* $x \in E$;

4) $\left\| \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right\|_1 \le C\|f(x)\|_1$ *для всех натуральных* $M \in [2^{n_0}; 2^m)$;

5) $\tilde{P}(x) := \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{2^m-1} |a_k| W_k(x) = 0$, *если* $x > 2^{-n_0}$;

6) $\sup\limits_{M<2^m} \left\| \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{M} |a_k| W_k(x) \right\|_1 \le b_0$.

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию

$$\tilde{f}(x) := f(x) \cdot \mathbb{1}_{[2^{-n_0},1]}(x) = \sum_{k=1}^{r} l'_k \mathbb{1}_{\Delta'_k}(x),$$

где $l'_k \ne 0, \quad 1 \le k \le r$. Для каждого $k, \quad 1 \le k \le r$, поочередно применяя лемму 2.2.6 для интервала Δ'_k, чисел ε, $b = \min\{\frac{b_0}{2^{k-1}}; |a_{2^{n_{k-1}}-1}|\}$ (при $k = 1$ возьмем $b = b_0$) и $l = l'_k$, получаем многочлены по системе Уолша

$$P_k(x) = \sum_{i=2^{n_{k-1}}}^{2^{n_k}-1} a_i W_i(x), \qquad \tilde{P}_k(x) = \sum_{i=2^{n_{k-1}}}^{2^{n_k}-1} |a_i| W_i(x)$$

и множества E_k со следующими свойствами:

A) $E_k \subset \Delta'_k, \quad \mathrm{mes}(E_k) > (1-\varepsilon)\mathrm{mes}(\Delta'_k)$;

B) $b_0 \ge |a_{2^{n_0}}| \ge |a_{2^{n_0}+1}| \ge \dots \ge |a_{2^{n_r}-1}|$;

C) $P_k(x) = l'_k, \quad$ если $\quad x \in E_k$;

D) $P_k(x) = 0, \quad$ если $\quad x \in [2^{-n_0}; 1] \setminus \Delta'_k$;

E) $\sup\limits_{2^{n_{k-1}} \le M < 2^{n_k}} \left\| \sum\limits_{i=2^{n_{k-1}}}^{M} a_i W_i(x) \right\|_1 \le C|l'_k|\mathrm{mes}(\Delta'_k)$;

F) $\tilde{P}_k(x) = 0$ при $x > 2^{n_0}$;

G) $\sup\limits_{M<2^{n_k}} \left\| \sum\limits_{i=2^{n_{k-1}}}^{M} |a_i| W_i(x) \right\|_1 \leq \dfrac{b_0}{2^{k-1}}$.

Обозначим

$$E := [2^{-n_0}; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{r} (\Delta'_k \setminus E_k),$$

$$P(x) := \sum_{k=1}^{r} P_k(x).$$

Из условия A) следует, что $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon - 2^{-n_0}$. Поскольку на множестве E функции $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ совпадают, то, в силу C) и D), получаем $P(x) = \tilde{f}(x) = f(x)$ при всех $x \in E$.

Для доказательства утверждения 4) леммы 2.2.7 заметим, что $||\tilde{f}||_1 \leq ||f||_1$, а для любого $M < 2^{n_r}$ (см. E))

$$\left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{r} C|l'_k| \mathrm{mes}(\Delta'_k) = C||\tilde{f}||_1 \leq C||f||_1.$$

Остальные утверждения непосредственно следуют из B), F) и G).

Лемма 2.2.7 доказана. □

Лемма 2.2.8 *Пусть* $\varepsilon \in (0,1)$, n_0 *– натуральное число, а* b_0 *– некоторое положительное число. Пусть, далее,* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{j} l_k \mathbb{1}_{\Delta_k}(x)$ *– ступенчатая функция с условием* $\mathrm{supp}(f) \bigcap (2^{-n_0}, 1) \neq \varnothing$ *и* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_j$ *– непересекающиеся двоичные интервалы. Тогда существуют функция* $g \in L^1(0,1)$*, многочлен по системе Уолша*

$$Q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^m-1} c_k W_k(x)$$

и множество $E \subset [2^{-n_0}, 1]$ *такие, что*

1. $|c_{k+1}| < |c_k| < b_0$ *для всех* k, $\quad 2^{n_0} \leq k < 2^m - 1$;
2. $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon - 2^{-n_0}$;
3. $g(x) = f(x)$, *если* $x \in E$;
4. $\|g\|_1 \leq C\|f\|_1$;
5. $\|Q(x) - g(x)\|_1 \leq \varepsilon$;
6. $\left\| \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{M} c_k W_k(x) \right\|_1 \leq C\|f(x)\|_1 + \varepsilon$ *для всех натуральных* $M \in [2^{n_0}, 2^m)$.

Доказательство леммы 2.2.8. В силу леммы 2.2.7, существуют многочлен по системе Уолша

$$g(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^m-1} a_k W_k(x)$$

и множество $E \subset [2^{-n_0}, 1]$ такие, что

A) $|a_{k+1}| \le |a_k| \le b_0/2$ для всех k, $2^{n_0} \le k < 2^m - 1$;

B) $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon - 2^{n_0}$;

C) $g(x) = f(x)$, если $x \in E$;

D) $\left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right\|_1 \le C\|f(x)\|_1$ для всех натуральных $M \in [2^{n_0}, 2^m)$.

Положим $\alpha_i := 2^{-i}\min\{b_0;\varepsilon\}$, $c_i := a_i + \alpha_i$, $2^{n_0} \le i < 2^m$ и рассмотрим многочлен

$$Q(x) = \sum_{i=2^{n_0}}^{2^m-1} c_i W_i(x) = g(x) + \sum_{i=2^{n_0}}^{2^m-1} \alpha_i W_i(x).$$

Утверждение 1 леммы непосредственно следует из A). Очевидно, что

$$\|Q(x) - g(x)\| \le \sum_{i=2^{n_0}}^{2^m-1} \alpha_i \le \varepsilon,$$

а для любого натурального $M \in [2^{n_0}, 2^m)$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} c_k W_k(x) \right\|_1 \le \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right\|_1 + \left\| \sum_{k=2^{n_0}}^{M} \alpha_k W_k(x) \right\|_1 \le C\|f\|_1 + \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_r}-1} \alpha_i \le C\|f\|_1 + \varepsilon.$$

Лемма 2.2.8 доказана. □

2.2.3 Доказательство теорем

Доказательство теоремы 2.2.1. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ – произвольное число, а $\{\beta_n\}$ – последовательность положительных чисел, для которой

$$\beta_n \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < +\infty. \tag{2.2.39}$$

Выберем натуральное число n_0 так, чтобы

$$2^{-n_0+1} < \varepsilon. \tag{2.2.40}$$

Обозначим

$$P_0(x) := \tilde{P}_0(x) = \sum_{i=0}^{2^{n_0}-1} a_i W_i(x) \equiv \sum_{i=0}^{2^{n_0}-1} \beta_1 W_i(x). \tag{2.2.41}$$

Рассмотрим последовательность всех ступенчатых функций $\{f_n(x)\}$,

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{M_n} \alpha_k^{(n)} \mathbb{1}_{I_k^{(n)}}(x), \tag{2.2.42}$$

с рациональными значениями $\alpha_k^{(n)} \neq 0$ и двоичными интервалами постоянства $I_k^{(n)}$, для которых существуют интервалы $I_{\tilde{k}}^{(n)}$ с условием $I_{\tilde{k}}^{(n)} \cap (2^{-n_0}, 1) \neq \varnothing$. Применяя лемму 2.2.7 для каждой функции $f_n(x)$ из последовательности (2.2.42), получаем полином по системе Уолша $P_n(x) = \sum_{i=2^{k_{n-1}}}^{2^{k_n}-1} a_i W_i(x)$, $k_0 = n_0$, и множество $E_n \subset [2^{-n_0}, 1]$, удовлетворяющие условиям

$$\mathrm{mes}(E_n) > 1 - 2^{-n_0} - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \tag{2.2.43}$$

$$|a_{i+1}| \le |a_i| \le \min\{\beta_n; |a_{2^{k_{n-1}}-1}|\} \text{ при } 2^{k_{n-1}} \le i < 2^{k_n} - 1, \tag{2.2.44}$$

$$P_n(x) = f_n(x), \quad \text{если } \ x \in E_n, \tag{2.2.45}$$

$$\sup_{M<2^{k_n}} \left\| \sum_{i=2^{k_{n-1}}}^{M} a_i W_i(x) \right\|_1 \le C\|f_n\|_1, \tag{2.2.46}$$

$$\tilde{P}_n(x) := \sum_{i=2^{k_{n-1}}}^{2^{k_n}-1} |a_i| W_i(x) = 0, \quad \text{если } \ x > 2^{-n_0}, \tag{2.2.47}$$

$$\sup_{M<2^{k_n}} \left\| \sum_{i=2^{k_{n-1}}}^{M} |a_i| W_i(x) \right\|_1 \le \beta_n. \tag{2.2.48}$$

Из последнего неравенства и (2.2.39) следует, что ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i W_i(x) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \left(|a_i| + \frac{1}{2^{i+3}} \right) W_i(x)$$

сходится по норме $L^1(0,1)$. Положим

$$g(x) := \sum_{i=0}^{\infty} b_i W_i(x). \tag{2.2.49}$$

Очевидно, что $g \in L^1(0,1)$. Докажем, что множество

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \tag{2.2.50}$$

и функция $g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.2.1. Из (2.2.40), (2.2.43) и (2.2.50) следует, что $\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon$. А из (2.2.44) получаем, что последовательность коэффициентов ряда (2.2.49) монотонно убывает.

Из (2.2.39) следует, что существует натуральное число $l_1 > n_0$ такое, что

$$\sum_{k=l_1}^{\infty} \beta_k < 2^{-1}.$$

Рассмотрим полиномы

$$\varphi_0(x) := \sum_{i=0}^{2^{k_{l_1}}-1} |a_i| W_i(x) = \sum_{j=0}^{l_1} \tilde{P}_j(x), \quad Q_0(x) := \sum_{i=0}^{2^{k_{l_1}}-1} b_i W_i(x). \tag{2.2.51}$$

Из (2.2.2), (2.2.41) (2.2.47) и (2.2.51) следует, что

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \text{если} \quad x > 2^{-n_0}.$$

Пусть $f \in L^1(0,1)$ – некоторая функция. Из последовательности (2.2.42) выберем подпоследовательность $f_{n_k}(x)$ так, чтобы $n_1 > l_1$,

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f - \varphi_0 - \sum_{k=1}^{m} f_{n_k} \right\|_1 = 0, \tag{2.2.52}$$

$$\|f_{n_k}\|_1 \le 2^{-k} \quad \text{при} \quad k \ge 2. \tag{2.2.53}$$

Выберем натуральное число $l_2 > n_1$ так, чтобы (см.(2.2.39)) $\sum\limits_{k=l_2}^{\infty} \beta_k < 2^{-2}$, и обозначим

$$\varphi_1(x) := \sum_{i=2^{k_{l_1}}}^{2^{k_{l_2}}-1} d_i W_i(x) \equiv \sum_{j=l_1+1}^{n_1-1} \tilde{P}_j(x) + P_{n_1}(x) + \sum_{j=n_1+1}^{l_2} \tilde{P}_j(x), \tag{2.2.54}$$

$$Q_1(x) := \sum_{i=2^{k_{l_1}}}^{2^{k_{l_2}}-1} \left(|d_i| + \frac{1}{2^{i+3}} \right) (\operatorname{sgn}\, d_i) W_i(x). \tag{2.2.55}$$

Из (2.2.45), (2.2.47) и (2.2.54) следует, что

$$\varphi_1(x) = f_{n_1}(x), \quad \text{если} \quad x \in E,$$

а из (2.2.49) и (2.2.55) получаем, что

$$Q_1(x) = \sum_{i=2^{k_{l_1}}}^{2^{k_{l_2}}-1} \delta_i b_i W_i(x), \text{ где } \delta_i = \pm 1,$$

кроме того (см. также (2.2.51) и (2.2.54))

$$\|Q_0 - \varphi_0 + Q_1 - \varphi_1\|_1 \le \sum_{i=0}^{2^{k_{l_2}}-1} \frac{1}{2^{i+3}} < 2^{-2}.$$

Допустим, что уже определены числа $l_1, l_2, \ldots, l_r$, функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{r-1}(x)$ и полиномы $Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_{r-1}(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{i=l_r}^{\infty} \beta_i < 2^{-r}, \tag{2.2.56}$$

$$\varphi_i(x) = f_{n_i}(x), \quad x \in E, \quad 1 \le i \le r-1,$$
$$\left\| \sum_{i=0}^{r-1} (Q_i(x) - \varphi_i(x)) \right\|_1 < 2^{-(r-1)}. \tag{2.2.57}$$

Выберем ступенчатую функцию f_{m_r}, $m_r > l_r$, из (2.2.42) такую, что

$$\left\| f_{m_r} - (f_{n_r} - \sum_{i=0}^{r-1} (Q_i - \varphi_i)) \right\|_1 < 2^{-(r+1)}. \tag{2.2.58}$$

Согласно (2.2.53) и (2.2.57), имеем

$$\left\| f_{n_r} - \sum_{i=0}^{r-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 \le \frac{3}{2^r}. \tag{2.2.59}$$

Из (2.2.58) и (2.2.59) получим

$$\|f_{m_r}\|_1 \le \frac{4}{2^r}. \tag{2.2.60}$$

Возьмем натуральное число $l_{r+1} \ge m_r$ настолько большим, чтобы $\sum\limits_{i=l_{r+1}}^{\infty} \beta_i < \dfrac{1}{2^{r+1}}$ и рассмотрим функцию

$$g_r(x) := \sum_{i=2^{k_{l_r}}}^{2^{k_{l_{r+1}}}-1} d_i W_i(x) \equiv \sum_{j=l_r+1}^{m_r-1} \tilde{P}_j(x) + P_{m_r}(x) + \sum_{j=m_r+1}^{l_{r+1}} \tilde{P}_j(x). \tag{2.2.61}$$

Из (2.2.45), (2.2.47) (2.2.50) и (2.2.61) следует, что на множестве E имеем $g_r(x) = P_{m_r}(x) = f_{m_r}(x)$, поэтому

$$\varphi_r(x) := f_{n_r}(x) + (g_r(x) - f_{m_r}(x)) = f_{n_r}(x), \quad \text{если} \quad x \in E. \tag{2.2.62}$$

Из (2.2.46), (2.2.48), (2.2.56), (2.2.60) и (2.2.61) получаем, что

$$\|g_r\|_1 \le \sum_{j=l_r+1}^{l_{r+1}} \|\tilde{P}_j(x)\|_1 + \|P_{m_r}(x)\|_1 \le \sum_{j=l_r}^{\infty} \beta_j + C\|f_{m_r}\|_1 \le C_1 2^{-r}.$$

Поэтому, учитывая также (2.2.57), (2.2.58) и (2.2.62), получаем

$$\begin{gathered} \|\varphi_r\|_1 \le \|f_{m_r} - f_{n_r}\|_1 + \|g_r\|_1 \le \left\| f_{m_r} - (f_{n_r} - \sum_{i=0}^{r-1} (Q_i - \varphi_i)) \right\|_1 + \\ + \left\| \sum_{i=0}^{r-1} (Q_i - \varphi_i) \right\|_1 + \|g_r\|_1 \le 2^{-r} + 2^{-r+1} + C_1 2^{-r} = C_2 2^{-r}. \end{gathered} \tag{2.2.63}$$

Пусть (см. (2.2.49) и (2.2.61))

$$Q_r(x) := \sum_{i=2^{k_{l_r}}}^{2^{k_{l_{r+1}}}-1} \left(|d_i| + \frac{1}{2^{i+3}}\right)(\mathrm{sgn}\ d_i)W_i(x) = \sum_{i=2^{k_{l_r}}}^{2^{k_{l_{r+1}}}-1} \delta_i b_i W_i(x), \tag{2.2.64}$$

где $\delta_i = \mathrm{sgn}\ d_i$. Очевидно, что

$$\|Q_r - g_r\|_1 \le \sum_{i=2^{k_{l_r}}}^{2^{k_{l_{r+1}}}-1} \frac{1}{2^{i+3}} < 2^{-(r+1)},$$

поэтому (см. (2.2.58) и (2.2.62))

$$\left\|\sum_{i=0}^{r}(Q_i(x) - \varphi_i(x))\right\|_1 \le \left\|f_{m_r} - (f_{n_r} - \sum_{i=0}^{r-1}(Q_i - \varphi_i))\right\|_1 + \|Q_r - g_r\|_1 < 2^{-r}. \tag{2.2.65}$$

Пусть натуральное число M удовлетворяет условию $2^{k_{l_r}} \le M < 2^{k_{l_{r+1}}}$, тогда, учитывая также (2.2.46), (2.2.48),(2.2.56), (2.2.60), (2.2.61), (2.2.64) и монотонность последовательности $\{\beta_n\}$, получаем

$$\begin{gathered}\left\|\sum_{i=2^{k_{l_r}}}^{M} \delta_i b_i W_i(x)\right\|_1 \le \left\|\sum_{i=2^{k_{l_r}}}^{M} d_i W_i(x)\right\|_1 + 2^{-(r+1)} \le \sum_{j=l_r+1}^{l_{r+1}} \|\tilde{P}_j(x)\|_1 + \\ + \beta_{l_r} + C\|f_{m_r}\|_1 + 2^{-(r+1)} \le 2^{-r} + 4C2^{-r} + 2^{-(r+1)} < C_3 2^{-r}.\end{gathered} \tag{2.2.66}$$

Таким образом, по индукции определяются последовательности функций $\{\varphi_r(x)\}$ и полиномов $\{Q_r(x)\}$, удовлетворяющие условиям (2.2.62)–(2.2.66). Теперь определим функцию $\tilde{f}(x)$ следующим образом:

$$\tilde{f}(x) := \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_r(x).$$

Из (2.2.52), (2.2.62) и (2.2.63) следует, что $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ и $\tilde{f}(x) = f(x)$, когда $x \in E$. Докажем, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n b_n W_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} Q_r(x)$$

сходится к $\tilde{f}(x)$ в метрике L^1. Пусть M – любое натуральное число. Тогда для некоторого натурального числа r имеем $k_{l_r} \le M < k_{l_{r+1}}$. Следовательно, с учетом (2.2.63)–(2.2.66) получаем

$$\left\|\sum_{i=0}^{M} \delta_i b_i W_i(x) - \tilde{f}(x)\right\|_1 \le \left\|\sum_{i=0}^{r-1}(Q_i - \varphi_i)\right\|_1 + \left\|\sum_{i=r}^{\infty} \varphi_i\right\|_1 + \left\|\sum_{i=k_{l_r}}^{M} \delta_i b_i W_i(x)\right\|_1 \le$$

$$\leq 2^{-(r-1)} + \sum_{i=r}^{\infty} C_2 2^{-i} + C_3 2^{-r} \leq C_4 2^{-r}.$$

Отсюда получаем, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \delta_i b_i W_i(x)$ является рядом Фурье функции $\tilde{f}$ и сходится к ней в метрике L^1.

Теорема 2.2.1 доказана. □

Доказательство теоремы 2.2.5. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$ произвольное число, а

$$n_0 = [\log_2 \varepsilon^{-1}] + 1. \tag{2.2.67}$$

Рассмотрим последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полиномов по системе Уолша с рациональными коэффициентами и условием $\operatorname{supp}(f_k) \cap (2^{-n_0}, 1) \neq \varnothing$. Если последовательно применим лемму 2.2.8, то можем найти последовательности функций $\{\bar{g}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, множеств $\{G_n\}$, $(G_n \subset [2^{-n_0}, 1])$, натуральных чисел $\{m_n\} \nearrow$, $\{l_n\} \nearrow$ и полиномов вида

$$\overline{Q}_n(x) = \sum_{k=2^{m_{n-1}}}^{2^{m_n}-1} a_k^{(n)} W_k(x) = \sum_{k=2^{m_{n-1}}}^{2^{m_n}-1} a_k W_k(x)$$

$(m_0 = n_0,\ l_1 = 1,\ a^{(0)}_{2^{m_0}-1} = 1)$, которые для всех чисел $n \geq 1$ и $k \in [2^{m_{n-1}}, 2^{m_n} - 1)$ удовлетворяют условиям:

$$|a_{k+1}^{(n)}| < |a_k^{(n)}| < 2^{-2m_{n-1}-l_n} < \frac{1}{2}|a^{(n-1)}_{2^{m_{n-1}}-1}|, \tag{2.2.68}$$

$$\overline{g}_n(x) = f_n(x), \quad \text{если } x \in G_n, \quad \left\|\overline{Q}_n(x) - \overline{g}_n(x)\right\|_1 \leq 2^{-n-2}, \tag{2.2.69}$$

$$\operatorname{mes}(G_n) > 1 - 2^{-n-2} - 2^{-n_0}, \tag{2.2.70}$$

$$\max_{2^{m_{n-1}} \leq k < 2^{m_n}} \left\| \sum_{j=2^{m_{n-1}}}^{k} a_j^{(n)} W_j(x) \right\|_1 \leq C \left\| f_n(x) \right\|_1 + 2^{-n-2}, \tag{2.2.71}$$

$$\left\|\overline{g}_n(x)\right\|_1 \leq C \left\| f_n(x) \right\|_1. \tag{2.2.72}$$

Положим $G := \bigcap\limits_{n=n_0}^{\infty} G_n$. Очевидно, что (см. (2.2.67), (2.2.70)) $\operatorname{mes}(G) > 1 - \varepsilon$.

Рассмотрим полином

$$R_0(x) := \sum_{k=0}^{2^{m_0}-1} b_k^{(0)} W_k(x), \quad \text{где } b_k := b_k^{(0)} = 1 + 2^{-k}, \ \ k = 0, 1, \ldots, 2^{m_0} - 1. \tag{2.2.73}$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $k_1 > n_0$,

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} f_{k_n}(x) - (f(x) - R_0(x)) \right| dx = 0, \quad \left\|f_{k_n}(x)\right\|_1 < 2^{-n}, \quad n \geq 2. \tag{2.2.74}$$

Положим

$$g_1(x) := \overline{g}_{k_1}(x), \quad Q_1(x) := \overline{Q}_{k_1}(x) = \sum_{j=2^{m_{k_1-1}}}^{2^{m_{k_1}}-1} a_j^{(k_1)} W_j(x), \tag{2.2.75}$$

$$b_j := b_j^{(1)} = 2^{-2m_{k_1-1}-l_{k_1}}(1+2^{-j}), \quad j \in [2^{m_0}, 2^{m_{k_1-1}}),$$

$$R_1(x) := \sum_{j=2^{m_0}}^{2^{m_{k_1-1}}-1} b_j^{(1)} W_j(x).$$

Очевидно, что коэффициенты полинома $R_1(x)$ монотонно убывают, меньше коэффициентов полинома $R_0(x)$ и (см. (2.2.68) и (2.2.75)) больше, чем коэффициенты полинома $Q_1(x)$. Также имеем

$$\|R_1(x)\|_1 \le \sum_{j=2^{m_0}}^{2^{m_{k_1-1}}-1} b_j^{(1)} \le \sum_{j=2^{m_0}}^{2^{m_{k_1-1}}-1} 2^{-2m_{k_1-1}-l_{k_1}+1} \le 2^{-m_{k_1-1}} \le 2^{-1}.$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < \cdots < \nu_{q-1}$, функции $f_{\nu_1}, \ldots, f_{\nu_{q-1}}$, $g_1, \ldots, g_{q-1}$ и полиномы

$$Q_n(x) = \overline{Q}_{\nu_n}(x) = \sum_{j=2^{m_{\nu_n-1}}}^{2^{m_{\nu_n}}-1} a_j^{(\nu_n)} W_j(x), \quad 1 \le n \le q-1,$$

$$R_n(x) = \sum_{j=2^{m_{\nu_{n-1}}}}^{2^{m_{\nu_n-1}}-1} b_j^{(n)} W_j(x), \quad 1 \le n \le q-1,$$

удовлетворяющие условиям:

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad \text{если } x \in G, \quad 1 \le n \le q-1, \quad \text{и}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} [(R_k(x) + Q_k(x)) - g_k(x)] \right\|_1 < 2^{-(n-1)}, \quad 1 \le n \le q-1. \tag{2.2.76}$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ так, чтобы

$$\left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right) \right\|_1 < 2^{-q-2}, \tag{2.2.77}$$

$$m_{\nu_q-1} > m_{\nu_{q-1}} + q. \tag{2.2.78}$$

В силу (2.2.74) и (2.2.76), имеем

$$\left\| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [(R_i(x) + Q_i(x)) - g_i(x)] \right\|_1 < 2^{-q} + 2^{-q+2} = 5 \cdot 2^{-q}. \tag{2.2.79}$$

Из (2.2.77) и (2.2.79) вытекает

$$\left\| f_{\nu_q}(x) \right\|_1 < 6 \cdot 2^{-q}. \tag{2.2.80}$$

Поэтому (см. также (2.2.72))

$$\left\|\overline{g}_{\nu_q}(x)\right\|_1 < 6\cdot 2^{-q}C = 2^{-q}C_1. \tag{2.2.81}$$

Положим

$$g_q(x) := f_{k_q}(x) + (\overline{g}_{\nu_q}(x) - f_{\nu_q}(x)), \tag{2.2.82}$$

$$Q_q(x) := \overline{Q}_{\nu_q}(x) = \sum_{k=2^{m_{\nu_q-1}}}^{2^{m_{\nu_q}}-1} a_k^{(\nu_q)} W_k(x), \tag{2.2.83}$$

$$b_j := b_j^{(q)} = 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}}(1+2^{-j}) \le 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}+1}, \quad j\in[2^{m_{\nu_{q-1}}}, 2^{m_{\nu_q-1}}), \tag{2.2.84}$$

$$R_q(x) := \sum_{j=2^{m_{\nu_{q-1}}}}^{2^{m_{\nu_q-1}}-1} b_j^{(q)} W_j(x). \tag{2.2.85}$$

Из (2.2.68), (2.2.77), (2.2.84) и монотонности последовательностей $\{m_n\}$ и $\{l_n\}$ следует, что для всех $j\in(2^{m_{\nu_{q-1}}}, 2^{m_{\nu_q-1}})$

$$|a^{(\nu_q)}_{2^{m_{\nu_q-1}}}| < 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}} < b_j^{(q)} < b_{j-1}^{(q)} < 2^{-2m_{\nu_{q-1}}-l_{\nu_{q-1}+1}+1} \le |a^{(\nu_{q-1})}_{2^{m_{\nu_{q-1}}}-1}| \tag{2.2.86}$$

и

$$\sum_{j=2^{m_{\nu_{q-1}}}}^{2^{m_{\nu_q-1}}-1} b_j^{(q)} = \sum_{j=2^{m_{\nu_{q-1}}}}^{2^{m_{\nu_q-1}}-1} 2^{-2m_{\nu_q-1}-l_{\nu_q}}(1+2^{-j}) < 2^{-m_{\nu_{q-1}}} < 2^{-q}. \tag{2.2.87}$$

Учитывая соотношения (2.2.82) и (2.2.69), получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x\in G. \tag{2.2.88}$$

В силу (2.2.82), (2.2.76), (2.2.77) и (2.2.81), имеем

$$\begin{aligned}\|g_q(x)\|_1 \le \left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1}[(R_i(x)+Q_i(x)) - g_i(x)]\right)\right\|_1 + \|\overline{g}_{\nu_q}(x)\|_1 + \\ + \left\|\sum_{i=1}^{q-1}[(R_i(x)+Q_i(x)) - g_i(x)]\right\|_1 < 2^{-q-2} + C_1 2^{-q} + 2^{-(q-2)} = C_2 2^{-q}.\end{aligned} \tag{2.2.89}$$

А из (2.2.82), (2.2.69), (2.2.77) и (2.2.87) получаем

$$\left\|\sum_{i=1}^{q}[(R_i(x)+Q_i(x)) - g_i(x)]\right\|_1 \le \left\|\overline{Q}_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x)\right\|_1 + \|R_q(x)\|_1 +$$

$$+\left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1}[R_i(x)+Q_i(x) - g_i(x)]\right)\right\|_1 < 2^{-(q-1)}.$$

В силу (2.2.71) и (2.2.80), имеем

$$\max_{2^{m_{\nu_q-1}}\le k<2^{m_{\nu_q}}}\left\|\sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^{k} a_j^{(\nu_q)}W_j(x)\right\|_1 \le C\left\|f_{\nu_q}(x)\right\|_1+2^{-q-2}<C_3 2^{-q}. \tag{2.2.90}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ ($g_1(x) = f_{k_1}(x)$) и полиномов $\{Q_q(x)\}$, $\{R_q(x)\}$, удовлетворяющих условиям (2.2.85)–(2.2.90) для всех $q\ge 1$. Из (2.2.89) вытекает, что

$$\sum_{q=1}^{\infty}\int_0^1 |g_q(x)|dx<\infty. \tag{2.2.91}$$

Определим функцию $\tilde f(x)$ и последовательность чисел $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tilde f(x)=R_0(x)+\sum_{q=1}^{\infty} g_q(x), \tag{2.2.92}$$

$$d_k=\begin{cases} a_k, & k\in\bigcup_{q=1}^{\infty}[2^{m_{\nu_q-1}},2^{m_{\nu_q}}),\\ b_k & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Из (2.2.74), (2.2.88), (2.2.91) и (2.2.92) следует

$$\tilde f(x)\in L^1(0,1),\quad \tilde f(x)=f(x),\quad x\in G.$$

А из определения последовательности $\{d_n\}$ имеем (см. также (2.2.68), (2.2.73) и (2.2.86))

$$|d_n|>|d_{n+1}|>0\ \ \text{для всех } n\ge 0.$$

Пусть дано произвольное натуральное число $n>2^{m_0}$, тогда для некоторого q имеем $n\in[2^{m_{\nu_q-1}},2^{m_{\nu_q}})$, а из соотношений (2.2.83), (2.2.85), (2.2.87), (2.2.89), (2.2.90) и (2.2.92) получим

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=0}^{n} d_k W_k(x)-\tilde f(x)\right\|_1 &\le \left\|\sum_{i=1}^{q-1}[(R_i(x)+Q_i(x))-g_i(x)]\right\|_1+\\ &+\sum_{i=q}^{\infty}\|g_i(x)\|_1+\max_{2^{m_{\nu_q-1}}\le k<2^{m_{\nu_q-1}}}\left\|\sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^{k} b_j^{(q)}W_j(x)\right\|_1+\\ &+\max_{2^{m_{\nu_q-1}}\le k<2^{m_{\nu_q}}}\left\|\sum_{j=2^{m_{\nu_q-1}}}^{k} a_j^{(\nu_q)}W_j(x)\right\|_1<2^{-q}C_4,\end{aligned} \tag{2.2.93}$$

следовательно,

$$d_k=\int_0^1\tilde f(x)W_k(x)dx=c_n(\tilde f),\quad k=1,2,\ldots$$

Положим
$$\tilde{f}_1(x) := \sum_{i=0}^{\infty} R_i(x), \quad \tilde{f}_2(x) := \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(x). \tag{2.2.94}$$
Из (2.2.93), (2.2.94), (2.2.83), (2.2.85) и (2.2.87) следует
$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x), \quad Spec(\tilde{f}_1) \cup Spec(\tilde{f}_2) = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad Spec(\tilde{f}_1) \cap Spec(\tilde{f}_2) = \varnothing.$$
и
$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\tilde{f}_1)| = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{j=2^{m_{\nu_{q-1}}}}^{2^{m_{\nu_q -1}}-1} b_j^{(q)} \le \sum_{j=0}^{2^{m_0}-1} b_j^{(0)} + \sum_{q=1}^{\infty} 2^{-q} < \infty.$$
Из (2.2.94), (2.2.85) и (2.2.78) следует, что $\rho(Spec(\tilde{f}_1)) = 1$.

Теорема 2.2.5 доказана. $\square$

2.3 Теоремы исправления в пространствах $L^p(0,1)$, $p \ge 1$

2.3.1 Постановка задачи и вспомогательные утверждения

В этом разделе рассматриваются вопросы исправления функций в пространствах $L^p(0,1), p \ge 1$, с точки зрения универсальных функций. Отметим один результат М.Г. Григоряна, доказанный в работе [58].

Теорема 2.3.A (М.Г. Григорян, [58]). *Для любых $0 < \varepsilon < 1$, $p \ge 1$ и для каждой функции $f \in L^p(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(0,1)$, $\mathrm{mes}\{x : f(x) \ne \tilde{f}(x)\} < \varepsilon$, чтобы все ненулевые члены в последовательности $\{|c_k(\tilde{f})|\}$ были расположены в убывающем порядке (здесь $c_k(\tilde{f})$ – коэффициенты Фурье исправленной функции $\tilde{f}(x)$ по системе Уолша).*

Здесь мы докажем следующее усиление теоремы 2.3.A.

Теорема 2.3.1 ([137]). *Существует функция $g \in L^1(0,1)$ с коэффициентами Фурье–Уолша*
$$c_k(g) > c_{k+1}(g) > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

такая, что для каждой функции $f \in L^p(0,1)$, $p \geq 1$, *и для любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^p(0,1)$ *с мерой* $\mathrm{mes}\{x \in [0,1]: \ f(x) = \tilde{f}(x)\} > 1 - \varepsilon$, *ряд Фурье которой по системе Уолша сходится к ней по* $L^p(0,1)$*-норме и*

$$|c_k(\tilde{f})| = c_k(g) \quad \textit{для всех } k \in Spec(\tilde{f}).$$

Функцию g (встречающуюся в фомулировке теоремы 2.3.1) будем назвать *универсальной функцией* в $L^p(0,1)$, $p \geq 1$, в смысле модификации относительно знаков коэффициентов Фурье по системе Уолша.

Из теоремы 2.3.1 следует, что *для любых* $0 < \varepsilon < 1$, $p > 1$ *и для каждой функции* $f \in L^p(0,1)$ *можно найти числа* $\delta_k = \pm 1, 0$, $k = 0, 1, \dots$, *и такую функцию* $\tilde{f} \in L^p(0,1)$, $\mathrm{mes}\{x: \ f(x) \neq \tilde{f}(x)\} < \varepsilon$, *что*

$$G_m(x, \tilde{f}, \Phi) = \sum_{k=0}^{m} \delta_k c_k(g) W_k(x) = S_m(x, \tilde{f}, \Phi), \ \forall x \in (0,1), \forall m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\Phi = \{W_k\}$ – система Уолша. Следовательно, *жадный алгоритм функции* $\tilde{f}$ *по системе Уолша сходится к ней как по* $L^p(0,1)$*-норме, так и почти всюду на* $[0,1]$.

Отметим, что в работе [65] построены ортонормированная система $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных функций и непрерывная функция g такие, что если при некоторой функции $f \in L^p$, $p > 2$, $\mathrm{mes}\{x \in [0,1]: \ f(x) = g(x)\} > 0$, то ее жадный алгоритм $\{G_m(x, f, \Psi)\}$ по системе Ψ расходится в $L^p(0,1)$.

Возникает следующий вопрос, ответ на который нам не известен.

Вопрос 3. Можно ли в теореме 2.3.1 “исключительное” множество выбрать независящим от исправляемой функции $f(x)$?

Для доказательства теоремы 2.3.1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.3.2 *Пусть даны числа* $n_0 \in \mathbb{N}$, $0 < \delta, \varepsilon < 1$, $p \geq 1$ *и полином* $f(x)$ *по системе Уолша такой, что* $\mathrm{supp}(f) \cap (2^{-n_0}, 1) \neq \varnothing$. *Тогда можно найти измеримое множество* $E \subset [2^{-n_0}; 1]$, *функцию* $g(x)$ *и полиномы по системе Уолша*

$$H(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n - 1} a_k W_k(x), \quad a_k > 0,$$

$$Q(x) = \sum_{k=2^{n_0}}^{2^n - 1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1, 0,$$

удовлетворяющие условиям:

1) $\mathrm{mes}(E) > 1 - 2^{-n_0} - \varepsilon$;

2) $g(x) = f(x)$, *если* $x \in E$;

3) $\int_0^1 |g(x)|^p dx \le \frac{2^p}{\varepsilon^{p-1}} \int_0^1 |f(x)|^p dx$;

4) $\max\limits_{2^{n_0} \le M < 2^n} \int_0^1 \left| \sum\limits_{k=2^{n_0}}^{M} a_k W_k(x) \right| dx < \delta$;

5) $\|Q(x) - g(x)\|_p < \delta$;

6) $0 < a_{k+1} < a_k < \delta$ *для всех* $k \in [2^{n_0}, 2^n - 1)$.

Доказательство леммы 2.3.2. Пусть f – некоторый полином по системе Уолша, а $\tilde{f}(x) = f(x) \cdot \mathbb{1}_{[2^{-n_0},1]}(x)$. Допустим, $\tilde{f}(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} l_k \mathbb{1}_{\Delta_k}(x)$, где $l_k \ne 0$ и Δ_k – непересекающиеся двоичные интервалы, $k = 1, 2, \ldots, m$. Для каждого k, $1 \le k \le m$, поочередно применяя лемму 2.2.6 для интервала Δ_k и чисел $l = l_k$, $b = \min\left\{\frac{\delta}{2^{k+1}}; d_{2^{n_{k-1}}-1}\right\}$ (при $k = 1$ имеем $b = \delta/2$), получаем множества $F_k \subset \Delta_k$ с мерой $\mathrm{mes}(F_k) < \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(\Delta_k)$ и полиномы

$$\tilde{P}_k(x) = \sum_{i=2^{n_{k-1}}}^{2^{n_k}-1} d_i W_i(x), \quad d_i > 0,$$

$$R_k(x) = \sum_{i=2^{n_{k-1}}}^{2^{n_k}-1} \delta_i d_i W_i(x), \quad \delta_i = \pm 1, 0,$$

удовлетворяющие условиям

$$R_k(x) = l_k, \quad \text{если } x \in \Delta_k \setminus F_k, \tag{2.3.1}$$

$$R_k(x) = 0, \quad \text{если } x \notin \Delta_k, \tag{2.3.2}$$

$$\int_0^1 |R_k(x)|^p dx \le \frac{2^p}{\varepsilon^{p-1}} |l_k|^p \mathrm{mes}(\Delta_k), \tag{2.3.3}$$

$$\max_{2^{n_{k-1}} \le M < 2^{n_k}} \left\| \sum_{i=2^{n_{k-1}}}^{M} d_i W_i(x) \right\|_1 \le \frac{\delta}{2^{k+1}}, \tag{2.3.4}$$

$$d_{i+1} \le d_i \le d_{2^{n_{k-1}}-1} < \frac{\delta}{2}, \quad \text{если } \ i \in [2^{n_{k-1}}; 2^{n_k} - 1). \tag{2.3.5}$$

Обозначим

$$E := [2^{-n_0}; 1] \setminus \bigcup_{k=1}^{m} F_k,$$

$$g(x) := \sum_{k=1}^{m} R_k(x) = \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_m}-1} \delta_i d_i W_i(x). \tag{2.3.6}$$

Ясно, что $\mathrm{mes}(E) > 1 - 2^{-n_0} - \varepsilon$ и (см. также (2.3.1), (2.3.2))

$$g(x) = \tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{для всех } x \in E.$$

Из (2.3.2), (2.3.3) и (2.3.6) следует, что

$$\int_0^1 |g(x)|^p dx = \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 |R_k(x)|^p dx \le \frac{2^p}{\varepsilon^{p-1}} \int_0^1 |\tilde{f}(x)|^p dx \le \frac{2^p}{\varepsilon^{p-1}} \int_0^1 |f(x)|^p dx.$$

Положим

$$a_i := d_i + \frac{\delta}{2^i}, \quad i \in [2^{n_0}; 2^{n_m}), \tag{2.3.7}$$

$$H(x) := \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_m}-1} a_i W_i(x) = \sum_{k=1}^{m} \tilde{P}_k(x) + \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_m}-1} \frac{\delta}{2^i} W_i(x),$$

$$Q(x) := \sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_m}-1} \delta_i a_i W_i(x), \tag{2.3.8}$$

где $\delta_i = \pm 1, 0$ – числа из определения полиномов $R_k(x)$. Ясно, что числа a_k монотонно убывают и меньше δ (см. (2.3.5) и (2.3.7)), т.е. удовлетворяют условию 6) леммы 2.3.2.

Из (2.3.4) и (2.3.7) следует, что

$$\max_{2^{n_0} < M < 2^{n_m}} \left\| \sum_{i=2^{n_0}}^{M} a_i W_i(x) \right\|_1 \le \max_{2^{n_0} < M < 2^{n_m}} \left\| \sum_{i=2^{n_0}}^{M} d_i W_i(x) \right\|_1 + \sum_{i=2^{n_0}}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} < \delta.$$

Учитывая (2.3.6)–(2.3.8), получаем

$$\int_0^1 |Q(x) - g(x)|^p dx \le \left(\sum_{i=2^{n_0}}^{2^{n_m}} \frac{\delta}{2^i} \right)^p < \delta^p.$$

Лемма 2.3.2 доказана. □

2.3.2 Доказательство теоремы 2.3.1

Пусть

$$H_0(x) = \sum_{k=0}^{2^5-1} a_k W_k(x) \equiv \sum_{k=0}^{2^5-1} (1 + 2^{-k}) W_k(x). \tag{2.3.9}$$

Пронумеровав все полиномы Уолша с рациональными коэффициентами, носители которых имеют непустое пересечение с интервалом $(2^{-5}, 1)$, мы можем представить их в виде последовательности

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{x : x \in (2^{-5}, 1), f_n(x) \ne 0\right\} \ne \varnothing. \tag{2.3.10}$$

Для каждой функции f_n из (2.3.10), n раз последовательно применив лемму 2.3.2, можем найти функции $\left\{g_n^{(j)}(x)\right\}_{j=1}^n$, множества $\left\{E_n^{(j)}\right\}_{j=1}^n$ и полиномы вида

$$H_n^{(j)}(x) = \sum_{k=M_n^{(j-1)}}^{M_n^{(j)}-1} a_k W_k(x) = \sum_{k=M_n^{(j-1)}}^{M_n^{(j)}-1} a_k^{(n,j)} W_k(x), \quad a_k > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$Q_n^{(j)}(x) = \sum_{k=M_n^{(j-1)}}^{M_n^{(j)}-1} \delta_k a_k W_k(x), \quad \delta_k = \pm 1, 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$M_n^{(j)} = 2^{m_n^{(j)}}, \quad 5 = m_1^{(0)} < m_1^{(1)} = m_2^{(0)} < m_2^{(1)} < m_2^{(2)} = m_3^{(0)} < \dots <$$
$$< m_{n-1}^{(n-1)} = m_n^{(0)} < m_n^{(1)} < \dots < m_n^{(n)} = m_{n+1}^{(0)} < m_{n+1}^{(1)} \cdots ,$$

которые для всех $n \geq 1$ и $1 \leq j \leq n$ удовлетворяют условиям:

$$g_n^{(j)}(x) = f_n(x) \ \text{ при } x \in E_n^{(j)}, \tag{2.3.11}$$

$$\operatorname{mes}(E_n^{(j)}) > 1 - 2^{-m_n^{(j-1)}} - 2^{-(j+1)} > 1 - 2^{-j}, \tag{2.3.12}$$

$$a_{k+1} < a_k < 2^{-2n} \ \text{ для всех } k \in [M_n^{(0)}; M_n^{(n)} - 1], \quad (a_{M_{n+1}^{(0)}} < a_{M_n^{(n)}-1}), \tag{2.3.13}$$

$$\left\|Q_n^{(j)}(x) - g_n^{(j)}(x)\right\|_p < 2^{-4n}, \tag{2.3.14}$$

$$\left\|H_n^{(j)}(x)\right\|_1 \leq \max_{k' \in (M_n^{(j-1)}, M_n^{(j)})} \left\| \sum_{k=M_n^{(j-1)}}^{k'} a_k W_k(x) \right\|_1 < 2^{-4n}, \tag{2.3.15}$$

$$\left\|g_n^{(j)}(x)\right\|_p < 2^{j+2} \left\|f_n\right\|_p . \tag{2.3.16}$$

Очевидно (см. (2.3.15)), что

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} H_n^{(j)}(x) \right| dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 |H_n^{(j)}(x)| dx < \infty. \tag{2.3.17}$$

Положим

$$g(x) := H_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} H_n^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x). \tag{2.3.18}$$

Очевидно, что последовательность $\left\{a_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ убывающая (см. (2.3.9) и (2.3.13)).

Учитывая соотношения (2.3.15), (2.3.17) и (2.3.18), получим, что

$$g(x) \in L^1(0, 1)$$

и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x)$ сходится к $g(x)$ по $L^1(0,1)$-норме. Следовательно

$$a_k = c_k(g) = \int_0^1 g(t) W_k(t) dt, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Пусть $p \geq 1$, $0 < \varepsilon < 1$ и $f(x) \in L^p(0,1)$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из последовательности (2.3.10) такую, что

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} f_{k_n}(x) - f(x) \right\|_p = 0 \ , \tag{2.3.19}$$

$$||f_{k_n}(x)||_p \leq 2^{-2(n+2)}, \quad n \geq 2, \tag{2.3.20}$$

где

$$k_1 > j_0 := [\log_2 \varepsilon^{-1}] + 1. \tag{2.3.21}$$

Положим

$$g_1(x) := g_{k_1}^{(j_0+1)}(x), \quad Q_1(x) := Q_{k_1}^{(j_0+1)}(x) \quad \text{и} \quad E_1 := E_{k_1}^{(j_0+1)}.$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 = \nu_1 < \cdots < \nu_{q-1}$ (функции $f_{\nu_n}(x)$ из последовательности (2.3.10)), множества $E_1, \ldots, E_{q-1}$, функции $g_n(x)$, $1 \leq n \leq q-1$, и полиномы

$$Q_n(x) := Q_{\nu_n}^{(n+j_0)}(x) = \sum_{k=M_{\nu_n}^{(n+j_0-1)}}^{M_{\nu_n}^{(n+j_0)}-1} \delta_k a_k W_k(x),$$

которые для всех $n \leq q-1$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad \text{если } x \in E_n, \\ \left\| \sum_{k=1}^{n} [(Q_k(x)) - g_k(x)] \right\|_p < 2^{-2(n+3)}, \\ \mathrm{mes}(E_n) > 1 - 2^{-(n+j_0)}. \end{gathered} \tag{2.3.22}$$

Нетрудно увидеть, что можно выбрать натуральное число $\nu_q > \nu_{q-1}$ (функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (2.3.10)) таким образом, чтобы

$$\left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right) \right\|_p < 2^{-2(q+4)}. \tag{2.3.23}$$

В силу (2.3.20) и (2.3.22), имеем

$$\left\| f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x) - g_i(x)] \right\|_p < 2^{-2(q+1)}.$$

Отсюда и из (2.3.23) получаем

$$\left\|f_{\nu_q}(x)\right\|_p < 2^{-2q}. \tag{2.3.24}$$

Положим

$$g_q(x) := f_{k_q}(x) + [g_{\nu_q}^{(q+j_0)}(x) - f_{\nu_q}(x)], \tag{2.3.25}$$

$$Q_q(x) := Q_{\nu_q}^{(q+j_0)}(x) = \sum_{k=M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}}^{M_{\nu_q}^{(q+j_0)}-1} \delta_k a_k W_k(x), \tag{2.3.26}$$

$$E := \bigcap_{q=1}^{\infty} E_q, \quad \text{где} \quad E_q := E_{\nu_q}^{(q+j_0)}. \tag{2.3.27}$$

Учитывая соотношения (2.3.11), (2.3.12), (2.3.21), (2.3.25) и (2.3.27), получаем

$$\mathrm{mes}(E) > 1 - \varepsilon.$$

$$g_q(x) = f_{k_q}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in E, \quad q = 1, 2, \ldots. \tag{2.3.28}$$

В силу (2.3.14), (2.3.23), (2.3.25) и (2.3.26) имеем

$$\begin{gathered}\left\|\sum_{j=1}^{q}[Q_j(x) - g_j(x)]\right\|_p = \left\|\sum_{j=1}^{q-1}[Q_j(x) - g_j(x)] + Q_q(x) - g_q(x)\right\|_p \leq \\ \leq \left\|f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1}[Q_i(x) - g_i(x)]\right)\right\|_p + \\ + ||g_{\nu_q}^{(q+j_0)} - Q_{\nu_q}^{(q+j_0)}||_p < 2^{-2(q+3)}.\end{gathered} \tag{2.3.29}$$

Из (2.3.16), (2.3.23)–(2.3.25) и (2.3.29) вытекает, что

$$\begin{gathered}||g_q(x)||_p \leq \left\|f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{i=1}^{q-1}[Q_i(x) - g_i(x)]\right)\right\|_p + \\ + ||g_{\nu_q}^{(q+j_0)}||_p + \left\|\sum_{j=1}^{q-1}[(Q_j(x)) - g_j(x)]\right\|_p < \\ < 2^{-2(q+4)} + 2^{(q+j_0)+2}||f_{\nu_q}(x)||_p + 2^{-2(2+q)} < 2^{-q+j_0+3}.\end{gathered} \tag{2.3.30}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}$, удовлетворяющие условиям (2.3.28)–(2.3.30) для всех $q \geq 1$.

Из (2.3.30) вытекает, что

$$\left\|\sum_{q=1}^{\infty} g_q(x)\right\|_p \leq \sum_{q=1}^{\infty} \|g_q(x)\|_p < \infty. \tag{2.3.31}$$

Определим функцию $\tilde{f}(x)$ и последовательность чисел $\{\gamma_k\}$ следующим образом:

$$\tilde{f}(x) := \sum_{q=1}^{\infty} g_q(x), \tag{2.3.32}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \delta_k, & k \in [M_{\nu_q}^{(q+j_0-1)}, M_{\nu_q}^{(q+j_0)}), \quad q = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из (2.3.19), (2.3.28), (2.3.31) и (2.3.32) следует

$$\tilde{f}(x) \in L^p(0,1), \quad \tilde{f}(x) = f(x), \quad x \in E,$$

и (см. также (2.3.29) и (2.3.30))

$$\left\| \sum_{n=1}^{q} \sum_{k=M_{\nu_n}^{(n+j_0-1)}}^{M_{\nu_n}^{(n+j_0)}-1} \gamma_k a_k W_k(x) - \tilde{f}(x) \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=1}^{q} (Q_n(x) - g_n(x)) \right\|_p +$$

$$+ \sum_{n=q+1}^{\infty} \|g_n(x)\|_p < 2^{-2(q+3)} + 2^{-q+j_0+3} < 2^{-q+j_0+4}.$$

Следовательно, с учетом (2.3.15) получаем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k a_k W_k(x)$ сходится к $\tilde{f}$ в пространстве $L^p(0,1)$ и

$$\gamma_k a_k = \int_0^1 \tilde{f}(x) W_k(x) dx = c_k(\tilde{f}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 2.3.1 доказана. $\square$

Глава 3

Теоремы единственности

3.1 О рядах Хаара A-интегрируемых функций

3.1.1 Введение

В этой главе рассматриваются теоремы единственности некототых ортогональных рядов. Известно, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду, за исключением, быть может, некоторого счетного множества, то все коэффициенты ряда равны нулю.

Пусть $\{\varphi_n\}$ – ортонормированная система. Напомним, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ называется нуль-рядом по этой системе, если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x) = 0$ почти всюду и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \neq 0$. Первый пример тригонометрического нуль-ряда был построен Д.Е. Мемньшовым в 1916 г. (см. [81] или [82, с. 804]). В работах разных авторов (см. [83]–[90], [20]) был рассмотрен вопрос о том, с какой скоростью могут стремиться к нулю коэффициенты тригонометрических нуль-рядов. В работах [83], [87] и [89] доказана следующая теорема, которая дает положительный ответ на соответствующий вопрос, поставленный Ульяновым ([91]).

Теорема 3.1.A *Пусть $c_n \downarrow 0$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 = +\infty$. Тогда существует тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, который почти всюду сходится к нулю, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| > 0$ и $|a_n| \leq c_{|n|}$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Подобные вопросы для систем Хаара и Уолша были рассмотрены в работах [92]–[94]. В

[84] Арутюняном отмечено, что для системы Уолша проблема Ульянова также решается положительно. Заметим, что это следует также из теоремы 1.1.4. Нуль-ряды по кратным системам Уолша были построены также в работах [129]–[132], где ,в частности, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1.1 ([130], [132]). *Пусть последовательность положительных действительных чисел $\left\{c_{\mathbf{n}}\right\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d}$ удовлетворяет следующим условиям: $0 < c_{\mathbf{m}} \leq c_{\mathbf{n}}$ при $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$ и ряд $\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} c_{\mathbf{n}}^2$ расходится. Тогда существует кратный ряд $\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{n}} W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, который почти всюду по прямоугольникам сходится к нулю, $\sum\limits_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} |a_{\mathbf{n}}| > 0$ и $|a_{\mathbf{n}}| \leq c_{\mathbf{n}}$ для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$.*

Рассмотрим следующую задачу. Пусть ортогональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ или некоторая подпоследовательность частичных сумм этого ряда сходится к некоторой функции $f(x)$. Как по $f(x)$ восстановить коэффициенты ряда? В случае сходимости почти всюду таких рядов может быть несколько, например нуль-ряды, отмеченные выше. Поэтому надо накладывать дополнительные условия на ряд, обеспечивающие его единственность. Если же единственность есть, то в общем случае коэффициенты не восстанавливаются по формулам Фурье, поскольку $f(x)$ может оказаться не интегрируемой по Лебегу. В этом случае можно попытаться вместо интеграла Лебега рассматривать его обобщения. Одним из наиболее часто применяемых обобщений интеграла Лебега является A-интеграл, определение которого приведено ниже. Впервые теоремы единственности для п.в. сходящихся тригонометрических рядов были рассмотрены в работах [95], [96]. В этом разделе рассматриваются вопросы единственности для кратных рядов по системе Хаара.

Пусть $\{\chi_n(x)\}$ – классическая система Хаара. Как обычно, положим $\Delta_n = \operatorname{supp}(\chi_n)$. Ясно, что если $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то $\Delta_n = [\frac{i-1}{2^k}; \frac{i}{2^k}]$.

Для $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in [0,1]^d$ обозначим $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) := \chi_{n_1}(x_1)\chi_{n_2}(x_2)\cdots\chi_{n_d}(x_d)$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \chi_{n_1}(x_1)\chi_{n_2}(x_2)\cdots\chi_{n_d}(x_d). \tag{3.1.1}$$

Для натурального числа N через $S_N(\mathbf{x})$ обозначим кубические частичные суммы ряда (3.1.1), т. е. $S_N(\mathbf{x}) := \sum\limits_{\mathbf{n}:\ n_i \leq N} a_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$.

Для функции $\varphi(x)$ и положительного числа λ через $[\varphi(x)]_\lambda$ будем обозначать следующую функцию

$$[\varphi(x)]_\lambda = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } |\varphi(x)| \le \lambda, \\ 0, & \text{если } |\varphi(x)| > \lambda. \end{cases}$$

В работе [97] Геворкяном была доказана следующая

Теорема 3.1.B (Г.Г. Геворкян [97]). *Пусть кубические частичные суммы $S_k(\mathbf{x})$ кратного ряда $\sum\limits_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ почти всюду сходятся к $f(\mathbf{x})$ и для некоторой последовательности $\lambda_m \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{m\to+\infty} \lambda_m \cdot \mathrm{mes}\left\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \quad \sup_k |S_k(\mathbf{x})| > \lambda_m\right\} = 0,$$

тогда для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})]_{\lambda_m^{\mathbf{n}}}\, d\mathbf{x},$$

где $\lambda_m^{\mathbf{n}} = \lambda_m \|\chi_{\mathbf{n}}\|_\infty$.

Аналогичные вопросы для одномерного ряда по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара были рассмотрены в работах Костина [98], [99], а для рядов по системе Франклина – в работах Геворкяна [100] и [101].

Справедливо следующее усиление теоремы 3.1.B.

Теорема 3.1.2 ([139]). *Пусть $\{q_j\}$ – некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\dfrac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность кубических частичных сумм $S_{q_j}(\mathbf{x})$ ряда (3.1.1) почти всюду сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x})$ при $j \to \infty$ и для некоторой последовательности $\{\lambda_m\}$, $\lambda_m \to \infty$,*

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_m \cdot \mathrm{mes}\big\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda_m\big\} = 0. \tag{3.1.2}$$

Тогда для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ выполняются

$$a_{\mathbf{n}} = \lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]^d} \big[f(\mathbf{x})\big]_{\lambda_m} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Напомним следующее определение.

Определение 3.1.3 *Функция $f(x)$ называется А-интегрируемой на множестве G, если $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot mes\{x \in G : \quad |f(x)| > \lambda\} = 0$ и существует предел*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_G [f(x)]_\lambda dx =: (A) \int_G f(x)dx,$$

которое называется А-интегралом функции f.

Определение 3.1.4 *Пусть $\{\varphi_n\}$ – некоторая ортонормированная система на $[0,1]$. Скажем, что ряд $\sum_n a_n\varphi_n(x)$ является рядом Фурье А-интегрируемой функции, если существует такая А-интегрируемая функция f, определенная на $[0,1]$, что коэффициенты a_n определяются следующим образом:*

$$a_n = (A) \int_{[0,1]} f(x)\varphi_n(x)dx.$$

Из теоремы 3.1.2 немедленно следуют теоремы 3.1.5 и 3.1.6.

Теорема 3.1.5 ([139]). *Пусть $\{q_j\}$ – некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\dfrac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность кубических частичных сумм $S_{q_j}(\mathbf{x})$ ряда (3.1.1) почти всюду сходится к некоторой п.в. конечной функции $f(\mathbf{x})$ и*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot \text{mes}\left\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda\right\} = 0.$$

Тогда все функции $f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, А-интегрируемы и

$$a_{\mathbf{n}} = (A) \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Теорема 3.1.6 ([139]). *Пусть $\{q_j\}$ – некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что отношение $\dfrac{q_{j+1}}{q_j}$ ограниченно, последовательность кубических частичных сумм $S_{q_j}(\mathbf{x})$ ряда (3.1.1) почти всюду сходится к некоторой функции $f(\mathbf{x}) \in L^1[0,1]^d$ и для некоторой последовательности $\{\lambda_k\}$, $\lambda_k \nearrow \infty$*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \cdot \text{mes}\left\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \quad \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})| > \lambda_k\right\} = 0.$$

Тогда

$$a_{\mathbf{n}} = \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Оказывается, в теоремах 3.1.2–3.1.6 ограниченность отношения $\dfrac{q_{n+1}}{q_n}$ существенна. Действительно, верна следующая

Теорема 3.1.7 ([139]). *Пусть $\{q_n\}$ – некоторая монотонная последовательность натуральных чисел такая, что $\sup\limits_n \dfrac{q_{n+1}}{q_n} = +\infty$. Тогда существует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ такой, что*

1) $a_1 \neq 0, \qquad S_{q_n}(x) \to 0$ п.в. при $n \to \infty$;
2) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}\left\{x \in [0,1] : \quad \sup\limits_n |S_{q_n}(x)| > \lambda\right\} = 0.$

Хорошо известно, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ является рядом Фурье интегрируемой функции, то, вообще говоря, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$, где $\varepsilon_n = \pm 1$, может не сходиться в пространстве L^1. Известно, что (см. [9], [102] и [103]) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$ безусловно сходится в L^1 тогда и только тогда, когда

$$P(x) := \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \chi_n^2(x)\right\}^{1/2} \in L^1[0,1]$$

или

$$S^*(x) := \sup_N \left|\sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x)\right| \in L^1[0,1].$$

В работе [97] доказано, что для рядов Хаара следующие условия эквивалентны:

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}\{x : \quad S^*(x) > \lambda\} = 0, \tag{3.1.3}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}\{x : \quad P(x) > \lambda\} = 0.$$

Там же доказано, что если выполняется условие (3.1.3), то для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ является рядом Фурье некоторой A-интегрируемой функции.

Здесь мы докажем обратное утверждение.

Теорема 3.1.8 ([139]). *Если для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд по системе Хаара $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ является рядом Фурье A-интегрируемой функции, то выполняется условие* (3.1.3).

Отметим, что (см. [97]) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ является рядом Фурье A-интегрируемой функции, то мажоранта частичных сумм этого ряда может не удовлетворять условию (3.1.3). Следовательно, существует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$, который является рядом Фурье A-интегрируемой функции, но при некоторых $\varepsilon_n = 0; 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ не является рядом Фурье A-интегрируемой функции.

Таким образом, получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ являлся рядом Фурье A-интегрируемой функции.

Справедлива следующая

Теорема 3.1.9 *Для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд по системе Хаара $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)$ будет рядом Фурье A-интегрируемой функции тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.1.3).

3.1.2 Доказательство теорем

Доказательство теоремы 3.1.2. Пусть $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$ – некоторый элемент из $\mathbb{N}^d$, а число M выбрано так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{q_{j+1}}{q_j} \le M \quad \text{для всех } j \in \mathbb{N}. \tag{3.1.4}$$

Нетрудно заметить, что для любого $k \ge 1$ функция $\sup\limits_{j\ge k} |S_{q_j}(\mathbf{x})|$ удовлетворяет условию (3.1.2) с теми же λ_m. Поэтому без ограничения общности будем считать, что для всех $i,\ i = 1, 2, \dots, d$, выполняется $n_i \le q_1$. Ясно, что

$$a_{\mathbf{n}} = \int_{[0,1]^d} S_{q_1}(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Delta_{\mathbf{n}}} S_{q_1}(\mathbf{x})\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

где $\Delta_{\mathbf{n}} = \mathrm{supp}(\chi_{\mathbf{n}})$.

Напомним, что двоичный параллелепипед $\Delta \subset [0,1]^d$ называется параллелепипедом постоянства для $S_j(\mathbf{x})$, если $S_j(\mathbf{x})$ постоянна на Δ и непостоянна на любом двоичном параллелепипеде Δ', который содержит Δ. Ясно, что если $\Delta \subset [0,1]^d$ – параллелепипед постоянства для $S_j(\mathbf{x})$, то

$$\int_{\Delta} S_i(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Delta} S_j(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \text{для любого } i > j. \tag{3.1.5}$$

Допустим $\Delta_{\mathbf{n}} = \bigcup\limits_{k=1}^{r} I_k$, где I_k – параллелепипеды постоянства для $S_{q_1}(x)$, входящие в $\Delta_{\mathbf{n}}$. Очевидно, что на I_k функция $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ постоянная, (принимает значения $\pm\|\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\|_\infty$). Обозначим через $\chi_{\mathbf{n}}(I_k)$ значение $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ на I_k. Тогда

$$a_{\mathbf{n}} = \sum_{k=1}^{r} \chi_{\mathbf{n}}(I_k) \int_{I_k} S_{q_1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{3.1.6}$$

Для каждого $k,\ k = 1, 2, \dots, r$, и числа $m \in \mathbb{N}$ обозначим

$$S^*(\mathbf{x}) = \sup_j |S_{q_j}(\mathbf{x})|, \qquad E_m^k = \{\mathbf{x} \in I_k : \quad S^*(\mathbf{x}) > \lambda_m\}.$$

Пусть ε – произвольное положительное число, удовлетворяющее условию

$$\varepsilon < 2^{-d(M+1)}. \tag{3.1.7}$$

Выберем натуральное число m настолько большым, чтобы $\lambda_m > 1$ и (см. (3.1.2))

$$\lambda_m \cdot \mathrm{mes}(E_m^k) < \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I_k), \quad k = 1, 2, \dots, r. \tag{3.1.8}$$

Поскольку $S_{q_j}(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$ п.в. при $j \to \infty$, то для этого m можно найти $p_0 \in \mathbb{N}$ такое, чтобы для всех $k,\ k = 1, 2, \dots, r$,

$$\mathrm{mes}\left\{\mathbf{x} \in I_k : \quad |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| > \varepsilon\right\} < \frac{\varepsilon}{\lambda_m} \cdot \mathrm{mes}(I_k). \tag{3.1.9}$$

Заметим, что для всех $\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{n}}$ выполняется неравенство $|S_{q_2}(\mathbf{x})| \le \lambda_m$. Действительно, допустим $\Delta \subset I_k$ – некоторый папаллелепипед постоянства для $S_{q_2}(\mathbf{x})$ и на нем выполняется неравенство $|S_{q_2}(\mathbf{x})| > \lambda_m$, тогда из определения множества E_m^k следует, что $\Delta \subset E_m^k$, откуда с учетом (3.1.4) получаем неравенство

$$\mathrm{mes}(E_m^k) \ge \mathrm{mes}(\Delta) \ge 2^{-d(M+1)} \mathrm{mes}(I_k) > \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I_k),$$

которое противоречит условию (3.1.8). Пусть $I_k = \bigcup\limits_i \Delta_{k,i}^2$, где $\{\Delta_{k,i}^2\}$ – параллелепипеды постоянства для $S_{q_2}(\mathbf{x})$, входящие в I_k. Параллелепипед $\Delta_{k,i}^2$ назовем параллелепипедом первого рода, если выполняется неравенство $|S_{q_3}(\mathbf{x})| \le \lambda_m$ для $\mathbf{x} \in \Delta_{k,i}^2$. В противном случае $\Delta_{k,i}^2$ назовем параллелепипедом второго рода. Обозначим:

$$\Gamma_2' = \{i : \ \Delta_{k,i}^2 \text{ – параллелепипед первого рода}\},$$

$$\Gamma''_2 = \{i : \Delta^2_{k,i} \text{ – параллелепипед второго рода}\}.$$

Ясно, что $I_k = \Big(\bigcup\limits_{i\in\Gamma'_2} \Delta^2_{k,i} \Big) \bigcup \Big(\bigcup\limits_{i\in\Gamma''_2} \Delta^2_{k,i} \Big)$. Допустим, что уже определены параллелепипеды $\{\Delta^2_{k,i}\}, \{\Delta^3_{k,i}\}, \ldots, \{\Delta^{p-1}_{k,i}\}$ и множества $\Gamma'_2, \Gamma''_2, \ldots, \Gamma'_{p-1}, \Gamma''_{p-1}$, а I_k представлено в виде

$$I_k = \Big(\bigcup_{s=2}^{p-1} \bigcup_{i\in\Gamma''_s} \Delta^s_{k,i} \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\Gamma'_{p-1}} \Delta^{p-1}_{k,i} \Big).$$

Представим $\bigcup\limits_{i\in\Gamma'_{p-1}} \Delta^{p-1}_{k,i}$ в виде объединения $\bigcup\limits_j \Delta^p_{k,j}$, где $\{\Delta^p_{k,j}\}_j$ – параллелепипеды постоянства для $S_{q_p}(\mathbf{x})$. Параллелепипед $\Delta^p_{k,j}$ назовем параллелепипедом первого рода, если для $\mathbf{x} \in \Delta^p_{k,j}$ выполняется неравенство $|S_{q_{p+1}}(\mathbf{x})| \le \lambda_m$, в противном случае $\Delta^p_{k,j}$ назовем параллелепипедом второго рода. Обозначим:

$$\Gamma'_p := \{i :\ \Delta^p_{k,i} \text{ – параллелепипед первого рода}\},$$

$$\Gamma''_p := \{i :\ \Delta^p_{k,i} \text{ – параллелепипед второго рода}\}.$$

Таким образом, по индукции будем определять параллелепипеды $\{\Delta^2_{k,i}\}, \cdots, \{\Delta^{p_0}_{k,i}\}$ и множества $\Gamma'_2, \Gamma''_2, \cdots, \Gamma'_{p_0}, \Gamma''_{p_0}$. Ясно, что

$$I_k = \Big(\bigcup_{s=2}^{p_0} \bigcup_{i\in\Gamma''_s} \Delta^s_{k,i} \Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in\Gamma'_{p_0}} \Delta^{p_0}_{k,i} \Big).$$

Из определения следует, что если для некоторого $p \in \{2, 3, \ldots, p_0\}$, $\Delta^p_{k,i}$ является параллелепипедом второго рода, то некоторое подмножество параллелепипеда $\Delta^p_{k,i}$ (некоторый параллелепипед постоянства для $S_{q_{p+1}}(\mathbf{x})$), мера которого не меньше чем $\frac{1}{2^{d(M+1)}}$ часть меры множества $\Delta^p_{k,i}$, является подмножеством множества E^k_m. Поэтому

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcup_{s=2}^{p_0} \bigcup_{i\in\Gamma''_s} \Delta^s_{k,i} \Big) \le 2^{d(M+1)} \cdot \operatorname{mes}(E^k_m). \tag{3.1.10}$$

Ясно также, что для всех $p \in \{2, 3, \ldots, p_0\}$ и для любого i выполняется неравенство

$$|S_{q_p}(\mathbf{x})| \le \lambda_m \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in \Delta^p_{k,i}. \tag{3.1.11}$$

Обозначим:

$$G_{k1} := \left\{ \mathbf{x} \in \bigcup_{i\in\Gamma'_{p_0}} \Delta^{p_0}_{k,i} :\quad |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \le \varepsilon \right\},$$

$$G_{k2} := \left\{ \mathbf{x} \in \bigcup_{i\in\Gamma'_{p_0}} \Delta^{p_0}_{k,i} :\quad |S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| > \varepsilon \right\}.$$

Очевидно, что для всех $k,\ 1 \le k \le r$,

$$\left|\int_{I_k} S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m} d\mathbf{x}\right| \le \left|\sum_{s=2}^{p_0} \sum_{i\in\Gamma''_s} \int_{\Delta^s_{k,i}} S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right| + \left|\sum_{s=2}^{p_0} \sum_{i\in\Gamma''_s} \int_{\Delta^s_{k,i}} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m} d\mathbf{x}\right| +$$

$$+ \int_{G_{k1}} \left|S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}\right| d\mathbf{x} + \int_{G_{k2}} \left|S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}\right| d\mathbf{x}. \tag{3.1.12}$$

Из (3.1.10), (3.1.8), (3.1.11) и (3.1.5) следует, что

$$\sum_{s=2}^{p_0} \sum_{i\in\Gamma''_s} \int_{\Delta^s_{k,i}} \left|[f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}\right| d\mathbf{x} \le \lambda_m 2^{d(M+1)} \cdot \mathrm{mes}(E^k_m) \le 2^{d(M+1)} \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I_k), \tag{3.1.13}$$

$$\left|\sum_{s=2}^{p_0} \sum_{i\in\Gamma''_s} \int_{\Delta^s_{k,i}} S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right| = \left|\sum_{s=2}^{p_0} \sum_{i\in\Gamma''_s} \int_{\Delta^s_{k,i}} S_{q_s}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right| \le 2^{d(M+1)} \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I_k). \tag{3.1.14}$$

Очевидно, что предпоследнее слагаемое в (3.1.12) не больше чем $\varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I_k)$. Для последнего слагаемого в (3.1.12) с учетом (3.1.11) и (3.1.9) получаем

$$\int_{G_{k2}} \left|S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}\right| d\mathbf{x} \le 2\lambda_m \frac{\varepsilon}{\lambda_m} \cdot \mathrm{mes}(I_k) \le 2\varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I_k). \tag{3.1.15}$$

Учитывая также (3.1.6) и (3.1.5), из (3.1.12)–(3.1.15), получаем

$$\left|a_{\mathbf{n}} - \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\right| = \left|\sum_{k=1}^{r} \chi_{\mathbf{n}}(I_k) \int_{I_k} \left(S_{q_{p_0}}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_m}\right) d\mathbf{x}\right| \le$$

$$\le \|\chi_{\mathbf{n}}\|_\infty \sum_{k=1}^{r} \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I_k)(2^{d(M+1)+1} + 3) \le \|\chi_{\mathbf{n}}\|_\infty \cdot \mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{n}}) 2^{d(M+1)+2} \varepsilon,$$

чем заканчивается доказательство теоремы 3.1.2. $\square$

Для доказательства теоремы 3.1.7 нам нужна следующая

Лемма 3.1.10 *Пусть* $\{q_n\}$ *– возрастающая подпоследовательность натуральных чисел с условием* $\sup\limits_n \left\{\dfrac{q_{n+1}}{q_n}\right\} = +\infty$, *а* $F(x)$ *– некоторая неотрицательная функция, определенная на* $[0,1]$, *и* $E := \mathrm{supp}(F)$ *– является конечным объединением непересекающихся двоичных интервалов, на каждом из которых* $F(x)$ *– постоянная. Тогда для любых* $\varepsilon, \delta > 0$ *и* $N_0 \in \mathbb{N}$ *существует полином по системе Хаара*

$$P(x) = \sum_{k=N_0}^{M} a_k \chi_k(x)$$

такой, что:

1) $\mathrm{supp}(P) \subset E$;

2) $\min_x\{P(x)+F(x): \quad P(x)+F(x)\neq 0\} > \max_x F(x)$;

3) $\operatorname{mes}(\operatorname{supp}(P+F)) \le \delta$;

4) *для всех* $\lambda > \max F(x)$ *выполняется неравенство*

$$\lambda\cdot\operatorname{mes}\left\{x: \quad \max_{n:q_n\le M}\left|F(x)+\sum_{k=N_0}^{q_n} a_k\chi_k(x)\right| > \lambda\right\} < \varepsilon;$$

5) *для каждого* $x\in[0,1]$ *и* $n\in\mathbb{N}$ *с условием* $N_0 \le q_n \le M$ *либо* $\sum_{k=N_0}^{q_n} a_k\chi_k(x) = 0$, *либо* $\sum_{k=N_0}^{q_n} a_k\chi_k(x) = P(x)$.

Доказательство леммы 3.1.10. Пусть множество $E = \operatorname{supp}(F)$ является конечным объединением непересекающихся двоичных интервалов, длина которых больше чем h, а $\gamma := \max_{x\in[0,1]} F(x)$. Выберем натуральное число d так, чтобы выполнялись условия

$$2^d > N_0, \qquad \frac{1}{2^d} < \min\left\{\delta;\ \frac{h}{2};\ \frac{\varepsilon}{2\gamma}\right\}. \tag{3.1.16}$$

Из последнего неравенства следует, что множество E можно представить в виде объединения непересекающихся двоичных интервалов длины 2^{-d}:

$$E = \bigcup_{k=1}^{m} I_k, \quad \text{где} \quad I_k = \left[\frac{\alpha_k}{2^d};\frac{\alpha_k+1}{2^d}\right]. \tag{3.1.17}$$

Пусть $\gamma_k := F(I_k)$ – значение функции F на множестве I_k. Выберем натуральные числа r_k, $\quad k=1,2,\dots,m$, так, чтобы выполнялись условия

$$\gamma_1\cdot 2^{r_1} > \gamma, \tag{3.1.18}$$

$$r_k > r_{k-1}, \qquad \gamma_k\cdot 2^{r_k} > \gamma_{k-1}\cdot 2^{r_{k-1}}, \qquad k=2,3,\dots,m. \tag{3.1.19}$$

Поскольку $\sup_n\left\{\frac{q_{n+1}}{q_n}\right\} = +\infty$, то из последовательности $\{q_n\}$ можно выбрать числа $q_{n_1}, q_{n_2},\dots,q_{n_m}$, удовлетворяющие условиям

$$2^d < q_{n_1} < q_{n_2} < \dots < q_{n_m}, \qquad \frac{q_{n_k+1}}{q_{n_k}} > 2^{r_k+2}, \quad k=1,2,\dots,m. \tag{3.1.20}$$

Из последнего неравенства следует, что для каждого k, $\quad k=1,2,\dots,m$, существует натуральное число i_k такое, что $q_{n_k} < 2^{i_k}$ и $2^{i_k+r_k} < q_{n_k+1}$.

Ясно, что (см. (3.1.17) и (3.1.20)) каждый интервал I_k, $k=1,2,\dots,m$, можно представить в виде объединения непересекающихся двоичных интервалов длины 2^{-i_k}:

$$I_k = \bigcup_{s\in\Lambda_k} J_s^{(k)} = \bigcup_{s\in\Lambda_k}\left[\frac{l_s}{2^{i_k}};\frac{l_s+1}{2^{i_k}}\right].$$

Пусть n – натуральное число и $1 \le i \le 2^n$, обозначим $\tilde{\chi}_i^{(n)}(x) := 2^{-n/2}\chi_i^{(n)}(x)$ (функция Хаара, нормированная в L_∞). Рассмотрим полиномы по системе Хаара

$$P_k(x) := \sum_{s\in\Lambda_k}\sum_{j=0}^{r_k-1} 2^j \tilde{\chi}_{2^j l_s+1}^{(i_k+j)}(x) \qquad k=1,2,\dots,m.$$

Ясно, что

$$\mathbb{1}_{I_k}(x) + P_k(x) = \begin{cases} 2^{r_k}, & \text{если } x \in E_k \subset I_k, \\ 0, & \text{если } x \in [0,1]\setminus E_k, \end{cases} \tag{3.1.21}$$

где $\mathbb{1}_{I_k}$ – характеристическая функция множества I_k, а E_k является конечным объединением двоичных интервалов и

$$\mathrm{mes}(E_k) = \sum_{s\in\Lambda_k} \frac{1}{2^{r_k}} \cdot \mathrm{mes}(J_s^{(k)}) = \frac{1}{2^{r_k}}\mathrm{mes}(I_k) = \frac{1}{2^{d+r_k}}. \tag{3.1.22}$$

Обозначим

$$P(x) := \sum_{k=N_0}^{M} a_k\chi_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} \gamma_k P_k(x). \tag{3.1.23}$$

Утверждения 1) и 5) леммы 3.1.10 непосредственно следуют из (3.1.17), (3.1.21) и (3.1.23).

Из определения чисел γ_k $(\gamma_k = F(I_k))$, (3.1.21) и (3.1.23) получаем, что

$$F(x) + P(x) = \begin{cases} \gamma_k 2^{r_k}, & \text{если } x \in E_k, \quad k = 1,2,\dots,m, \\ 0, & \text{если } x \in [0,1]\setminus\left(\bigcup_{k=1}^m E_k\right). \end{cases} \tag{3.1.24}$$

Комбинируя последнее равенство с (3.1.18) и (3.1.19), получаем утверждение 2) леммы 3.1.10. Из (3.1.24), (3.1.22), (3.1.16) и первого неравенства (3.1.19) следует, что

$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}(F+P)) = \sum_{k=1}^{m}\mathrm{mes}(E_k) = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^{d+r_k}} \le \frac{2}{2^{d+r_1}} \le \frac{1}{2^d} \le \delta.$$

Приступим к доказательству утверждения 4) леммы 3.1.10. При $\lambda \ge \gamma_m 2^{r_m}$ множество $\{x:\ F(x)+P(x) > \lambda\} = \varnothing$ (см. (3.1.19) и (3.1.24)), тогда утверждение 4) очевидно. Допустим, λ – некоторое число из промежутка $(\gamma; \gamma_m 2^{r_m})$, тогда для некоторого числа s, $s = 1,2,\dots,m$, выполняется неравенство $\gamma_{s-1}2^{r_{s-1}} \le \lambda < \gamma_s 2^{r_s}$ $(\gamma_0 2^{n_0} := \gamma)$, следовательно, из (3.1.24), (3.1.18) и (3.1.19) получаем

$$\mathrm{mes}\left\{x:\ \max_{n: q_n \le M}\left|F(x) + \sum_{k=N_0}^{q_n} a_k\chi_k(x)\right| > \lambda\right\} = \mathrm{mes}\left(\bigcup_{k=s}^{m} E_k\right) = \sum_{k=s}^{m}\frac{1}{2^{d+r_k}} < \frac{2}{2^{d+r_s}}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (3.1.16), получаем

$$\lambda \cdot \operatorname{mes}\left\{x: \max_{n: q_n \le M}\left|F(x)+\sum_{k=N_0}^{q_n} a_k\chi_k(x)\right|>\lambda\right\}<\frac{2\lambda}{2^{d+r_s}} \le \frac{2\gamma_s 2^{r_s}}{2^{d+r_s}} \le \frac{\varepsilon\gamma_s}{\gamma} \le \varepsilon.$$

Лемма 3.1.10 доказана. □

Доказательство теоремы 3.1.7. Пусть последовательность $\{q_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1.7, а $F_0(x) \equiv 1$ при $x \in E_0 := [0,1]$. Применяя лемму 3.1.10 для функции $F_0(x)$ и чисел $\varepsilon_1 = \delta_1 = 2^{-1}$, $N_0 = 2$, получаем полином по системе Хаара

$$P_1(x) = \sum_{k=N_0}^{N_1-1} a_k\chi_k(x),$$

удовлетворяющий утверждениям 1)–5) леммы 3.1.10. Обозначим $F_1(x) := F_0(x)+P_1(x)$ и $E_1 := \operatorname{supp}(F_1)$. Ясно, что $\operatorname{mes}(E_1) < 2^{-1}$. Допустим, что для чисел $i = 1,2,\dots,m-1$ уже определены полиномы $P_i(x) = \sum\limits_{k=N_{i-1}}^{N_i-1} a_k\chi_k(x)$, функции $F_i(x) := F_{i-1}(x)+P_i(x)$ и множества $E_i := \operatorname{supp}(F_i)$ так, что E_i можно представить в виде объединения двоичных интервалов, на каждом из которых функция $F_i(x)$ постоянная. Пусть $\Gamma_{m-1} := \max\limits_x F_{m-1}(x)$.

Применяя лемму 3.1.10 для функции $F_{m-1}(x)$, чисел $\varepsilon_m = 2^{-m}$, $\delta_m = \dfrac{1}{2^m\Gamma_{m-1}}$ и N_{m-1}, получаем полином по системе Хаара

$$P_m(x) = \sum_{k=N_{m-1}}^{N_m-1} a_k\chi_k(x),$$

удовлетворяющий условиям:

$A)$ $\operatorname{supp}(P_m) \subset E_{m-1}$;

$B)$ $\min\limits_x\{F_m(x): \quad F_m(x) \ne 0\} > \Gamma_{m-1}$, где $F_m(x) := F_{m-1}(x) + P_m(x)$;

$C)$ $\operatorname{mes}(E_m) \le \dfrac{1}{2^m\Gamma_{m-1}}$, где $E_m := \operatorname{supp}(F_m)$;

$D)$ для всех $\lambda > \Gamma_{m-1}$ выполняется неравенство

$$\lambda \cdot \operatorname{mes}\left\{x: \quad \max_{n: N_{m-1} \le q_n < N_m}\left|F_{m-1}(x)+\sum_{k=N_{m-1}}^{q_n} a_k\chi_k(x)\right|>\lambda\right\}<2^{-m};$$

$E)$ для каждого $x \in [0,1]$ и натурального числа n с условием $N_{m-1} \le q_n < N_m$ либо $\sum\limits_{k=N_{m-1}}^{q_n} a_k\chi_k(x) = 0$, либо $\sum\limits_{k=N_{m-1}}^{q_n} a_k\chi_k(x) = P_m(x)$.

Так, по индукции построим последовательности полиномов $\{P_m(x)\}$, функций $\{F_m(x)\}$, множеств $\{E_m\}$ и чисел $\{\Gamma_m\}$, удовлетворяющие условиям $A) - E)$. Из $A)$ и $C)$ следует, что $F_m(x) \to 0$ п.в. на $[0,1]$.

Рассмотрим ряд

$$1+\sum_{k=2}^{\infty} a_k\chi_k(x) \equiv F_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty} P_m(x). \tag{3.1.25}$$

Ясно, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$1+\sum_{k=2}^{N_m-1} a_k\chi_k(x) = F_m(x),$$

поэтому частичные суммы $S_{q_n}(x)$ ряда (3.1.25) удовлетворяют следующему условию (см. E)): для каждого натурального числа n, если $q_n \in [N_{m-1}; N_m)$, то для каждого $x \in [0,1]$ значение $S_{q_n}(x)$ совпадает либо с $F_m(x)$, либо с $F_{m-1}(x)$. Следовательно,

$$S_{q_n}(x) \to 0 \quad \text{п.в. на } [0,1] \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть λ – некоторое положительное число больше 1. Тогда для некоторого натурального числа m выполняется неравенство $\Gamma_{m-1} < \lambda \le \Gamma_m$. Учитывая A), B) и E), получаем

$$\big\{x : \quad \sup_n |S_{q_n}(x)| > \lambda\big\} = \big\{x : \quad \max_{n: N_{m-1}\le n < N_m} |S_{q_n}(x)| > \lambda\big\} \cup E_{m+1}.$$

Комбинируя последнее равенство с C) и D), получаем

$$\lambda \cdot \operatorname{mes}\big\{x : \quad \sup_n |S_{q_n}(x)| > \lambda\big\} \le 2^{-m} + \frac{\lambda}{2^{m+1}\Gamma_m} < 2^{-(m-1)}.$$

Теорема 3.1.7 доказана. □

Для доказательства теоремы 3.1.8 нам нужна следующая

Лемма 3.1.11 *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ *– некоторый ряд по системе Хаара,* $N_0 \in \mathbb{N}$ *и* $\sup\limits_N \left|\sum\limits_{n=N_0}^{N} a_n\chi_n(x)\right| > M$ *на некотором множестве* E *положительной меры. Тогда для любого* $\alpha \in (0,1)$ *существуют* $N_1 \in \mathbb{N}$ *и* $\varepsilon_n \in \{0,1\}$ *такие, что*

$$\operatorname{mes}\left\{x \in E : \quad \left|\sum_{n=N_0}^{N_1} \varepsilon_n a_n\chi_n(x)\right| > M\right\} > \alpha \cdot \operatorname{mes}(E).$$

Доказательство леммы 3.1.11. Пусть i_1 – наименьшее натуральное число, для которого существует двоично иррациональное число $x_1 \in E$ с условием $\left|\sum\limits_{n=N_0}^{i_1} a_n\chi_n(x_1)\right| > M$. Обозначим через Δ_1' тот интервал постоянства функции $\chi_{i_1}(x)$, который содержит точку x_1. Ясно, что

$$\left|\sum_{n=N_0}^{i_1} a_n\chi_n(x)\right| > M \qquad \text{для всех } x \in \Delta_1'.$$

Допустим, уже определены возрастающие натуральные числа $i_1, i_2, \dots, i_{p-1}$ и непересекающиеся множества $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_{p-1}$. Пусть i_p – наименьшее натуральное число, для которого существует двоично иррациональная точка $x_p \in E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p-1} \Delta'_k$, удовлетворяющая условию $\left|\sum\limits_{n=N_0}^{i_p} a_n \chi_n(x_p)\right| > M$. Допустим, Δ'_p – тот интервал постоянства функции $\chi_{i_p}(x)$ который, содержит точку x_p. Ясно, что

$$\left|\sum_{n=N_0}^{i_p} a_n \chi_n(x)\right| > M \qquad \text{для всех } x \in \Delta'_p. \tag{3.1.26}$$

Так, по индукции определим числа $\{i_k\}$ и множества $\{\Delta'_k\}$, удовлетворяющие условию (3.1.26). Причем, если при некотором p имеем $\operatorname{mes}\Big(E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p-1} \Delta'_k\Big) = 0$, то на этом шаге выбор чисел i_k и множеств Δ'_k останавливается. В любом случае, из построения следует, что

$$\Delta'_i \cap \Delta'_j = \varnothing \quad (i \neq j) \qquad \text{и} \qquad E \subset \bigcup_k \Delta'_k.$$

Выберем натуральное число p_0 так, чтобы для множества $E_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{p_0} \Delta'_k$ выполнялось $\operatorname{mes}(E_1 \cap E) > \alpha \cdot \operatorname{mes}(E)$. Положим

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \Delta_n := \operatorname{supp}(\chi_n) \subset E_1, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из (3.1.26) и определения множества E_1 следует, что

$$\left|\sum_{n=N_0}^{i_{p_0}} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)\right| > M \qquad \text{для всех} \quad x \in E_1.$$

Лемма 3.1.11 доказана. □

Доказательство теоремы 3.1.8. Теорему докажем от противного. Допустим, для любой ограниченной последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ сходится п. в. к некоторой A-интегрируемой функции, но для некоторого положительного числа δ выполняется неравенство

$$\limsup_{\lambda \to +\infty} \lambda \cdot \operatorname{mes}\{x \in [0,1] : \quad S^*(x) > \lambda\} \geq 2\delta > 0, \tag{3.1.27}$$

где $S^*(x) := \sup\limits_N \left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x)\right|$. Рассмотрим два случая.

1°. Пусть $S^*(x) < +\infty$ п. в.

Для каждого k положим $E_k := \{x \in [0,1]: \ S^*(x) > \lambda_k\}$, где возрастающая последовательность $\{\lambda_k\}$ будет определена по индукции ниже. Очевидно, что $E_k \subset E_{k-1}$ и E_k можно представить в виде объединения двоичных интервалов. Допустим, $E_k = \bigcup\limits_m I_{k,m}$ и $E'_k := \bigcup\limits_m I'_{k,m}$, где $I_{k,m}$ и $I'_{k,m}$ – двоичные интервалы такие, что $I_{k,m} \subset I'_{k,m}$, $\quad \mathrm{mes}(I'_{k,m}) = 2 \cdot \mathrm{mes}(I_{k,m})$ и, кроме того, $I'_{k,m} \not\subset E_k$.

Возьмем такое число λ_1, чтобы $\lambda_1 \cdot \mathrm{mes}(E_1) > \delta$ (см. (3.1.27)). Согласно лемме 3.1.11, существуют $N_1 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_n = 0,1$ такие, что для функции $\varphi_1(x) := \sum\limits_{n=1}^{N_1} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ выполняется неравенство

$$\mathrm{mes}\{x \in E_1: \quad |\varphi_1(x)| > \lambda_1\} > \frac{\mathrm{mes}(E_1)}{2}. \tag{3.1.28}$$

Допустим, что уже определены числа λ_i и функции $\varphi_i(x) = \sum\limits_{n=N_{i-1}+1}^{N_i} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Пусть $M_{k-1} = \max\limits_x \sum\limits_{n=1}^{N_{k-1}} |a_n \chi_n(x)|$. Выберем такое число λ_k, чтобы выполнялись неравенства (см. (3.1.27))

$$\lambda_k > 2(M_{k-1} + \lambda_{k-1}), \tag{3.1.29}$$

$$\mathrm{mes}(E_k) < \frac{\mathrm{mes}(E_{k-1})}{16} \quad \text{и} \quad \lambda_k \cdot \mathrm{mes}(E_k) > \delta. \tag{3.1.30}$$

Заметим, что

$$\sup_N \left| \sum_{n: \Delta_n \not\subset E'_{k-1}} a_n \chi_n(x) \right| \le \lambda_{k-1} \quad \text{для всех } x \in [0,1]. \tag{3.1.31}$$

Действительно, если бы для некоторого $x_1 \in [0,1]$ в (3.1.31) выполнялось обратное неравенство, то это означало бы, что $x_1 \in E_{k-1}$, т.е. $x_1 \in I_{k-1,m}$ для некоторого m. Но для всех N сумма $\sum\limits_{\substack{n=1 \\ \Delta_n \not\subset E'_{k-1}}}^{N} a_n \chi_n(x)$ постоянна на интервале $I'_{k-1,m}$, значит для всех $x \in I'_{k-1,m}$ $\sup\limits_N \left| \sum_{\substack{n=1 \\ \Delta_n \not\subset E'_{k-1}}}^N a_n \chi_n(x) \right| > \lambda_{k-1}$, что невозможно, поскольку $I'_{k-1,m} \not\subset E_{k-1}$.

Из (3.1.29), (3.1.31) и определения числа M_{k-1} следует, что для всех $x \in E_k$ выполняется неравенство

$$\sup_N \left| \sum_{\substack{n=N_{k-1}+1 \\ \Delta_n \subset E'_{k-1}}}^{N} a_n \chi_n(x) \right| \ge S^*(x) - M_{k-1} - \sup_N \left| \sum_{\substack{n=1 \\ \Delta_n \not\subset E'_{k-1}}}^{N} a_n \chi_n(x) \right| \ge$$

$$\ge \lambda_k - M_{k-1} - \lambda_{k-1} > \frac{\lambda_k}{2}.$$

Отсюда, применяя лемму 3.1.11 , получаем числа $N_k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_n = 0;1$ такие, что для функции $\varphi_k(x) := \sum\limits_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\{x \in [0,1]: \quad \varphi_k(x) > \lambda_k/2\} > \frac{\operatorname{mes}(E_k)}{2}. \tag{3.1.32}$$

Ясно, что

$$\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset E'_{k-1} \quad \text{и} \quad \operatorname{mes}(\operatorname{supp}(\varphi_k)) \leq \operatorname{mes}(E'_{k-1}) \leq 2 \cdot \operatorname{mes}(E_{k-1}). \tag{3.1.33}$$

Так, по индукции будем определять числа $\{\lambda_k\}$, множества E_k, E'_k и функции $\varphi_k(x)$, удовлетворяющие условиям (3.1.29), (3.1.30), (3.1.32) и (3.1.33).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon'_n a_n \chi_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{2k-1}+1}^{N_{2k}} \varepsilon_n a_n \chi_n(x).$$

Из (3.1.33) и (3.1.30) следует, что этот ряд п. в. сходится к некоторой функции $f(x)$. Из определения чисел M_k и (3.1.29) следует, что для всех натуральных $k > 1$

$$\left\{x: \ |f(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4}\right\} \supset \left\{x: \ |\varphi_{2k}(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4} + M_{2k-2}\right\} \setminus \bigcup_{n=k+1}^{\infty} \operatorname{supp}(\varphi_{2n}(x)) \supset$$

$$\supset \left\{x: \ |\varphi_{2k}(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{2}\right\} \setminus \bigcup_{n=k+1}^{\infty} \operatorname{supp}(\varphi_{2n}(x)).$$

Поэтому, учитывая также (3.1.32), (3.1.33) и (3.1.30), получаем

$$\operatorname{mes}\left\{x: \ |f(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4}\right\} \geq \frac{\operatorname{mes}(E_{2k})}{2} - \frac{\operatorname{mes}(E_{2k})}{4} \geq \frac{\operatorname{mes}(E_{2k})}{4}.$$

Комбинируя последнее неравенство с вторым неравенством из (3.1.30), получим

$$\lambda_{2k} \cdot \operatorname{mes}\left\{x: \ |f(x)| > \frac{\lambda_{2k}}{4}\right\} \geq \frac{\lambda_{2k} \cdot \operatorname{mes}(E_{2k})}{4} > \frac{\delta}{4} > 0,$$

которое означает, что $f(x)$ не является A-интегрируемой функцией, вопреки нашему предположению. Тем самым теорема 3.1.8 в случае 1° доказана.

2°. Пусть теперь множество $B := \{x: \quad S^*(x) = +\infty\}$ имеет положительную меру. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем двоичный интервал I_k так, чтобы

$$I_k \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} I_j\right) = \varnothing, \quad \operatorname{mes}(I_k \cap B) > 0,9 \cdot \operatorname{mes}(I_k) \quad \text{и} \quad \operatorname{mes}(I_k) < \frac{\operatorname{mes}(B)}{2^k}. \tag{3.1.34}$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n:\Delta_n\subset I_k} a_n\chi_n(x)$. Ясно, что во всех точках $x \in I_k \cap B$ выполняется $\sup\limits_N \left|\sum\limits_{n:n\le N,\Delta_n\subset I_k} a_n\chi_n(x)\right| = +\infty$, поэтому, применяя лемму 3.1.11 получаем полином $\varphi_k(x) := \sum\limits_{n:\Delta_n\subset I_k} \varepsilon_n^{(k)} a_n\chi_n(x)$, (начиная с некоторого номера все $\varepsilon_n^{(k)}$ равны нулю), удовлетворяющий условию

$$\operatorname{mes}\left\{x \in I_k : \quad |\varphi_k(x)| > \frac{1}{\operatorname{mes}(I_k)}\right\} > 0,8 \cdot \operatorname{mes}(I_k). \tag{3.1.35}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n:\Delta_n\subset I_k} \varepsilon_n^{(k)} a_n\chi_n(x).$$

Заметим, что ряд, стоящий в правой части сходится, поскольку $I_k \cap I_j = \varnothing$ при $k \ne j$, и конечное число слагаемых отличны от нуля для каждой точки x. Очевидно, что (см. (3.1.35))

$$\operatorname{mes}\left\{x : \ |f(x)| > \frac{1}{\operatorname{mes}(I_k)}\right\} \ge \operatorname{mes}\left\{x : \ |\varphi_k(x)| > \frac{1}{\operatorname{mes}(I_k)}\right\} > 0,8 \cdot \operatorname{mes}(I_k).$$

Которое означает, что $f(x)$ не является A-интегрируемой, так как из (3.1.34) имеем, что $\operatorname{mes}(I_k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Теорема 3.1.8 доказана. □

3.2 Теоремы единственности для рядов по системе Франклина

3.2.1 Введение

В настоящее время общая система Франклина активно исследуется многими авторами. Некоторые свойства этой системы, полученные в работах [104]–[107], мы укажем по мере необходимости. Начнем с определения общей системы Франклина.

Определение 3.2.1 *Последовательность (разбиение) $\mathcal{T} = \{t_n : n \ge 0\}$ называется допустимой на $[0,1]$, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0,1)$, $n \ge 2$, $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0,1]$ и каждая точка $t \in (0,1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем два раза.*

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ – допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : \ 0 \leq i \leq n\}$. Допустим, π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n-1\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через $\mathcal{S}_n$ обозначим пространство функций, определенных на $[0,1]$, которые непрерывны слева, линейны на $(\tau_i^n; \tau_{i+1}^n)$ и непрерывны в τ_i^n, если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$. Ясно, что $\dim \mathcal{S}_n = n+1$ и $\mathcal{S}_{n-1} \subset \mathcal{S}_n$. Следовательно существует (с точностью до знака) единственная функция $f \in \mathcal{S}_n$, которая ортогональна $\mathcal{S}_{n-1}$ и $\|f\|_2 = 1$. Эту функцию называют n-ой функцией Франклина, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$. Известно, что $f(t_n)$ отличен от нуля. Следовательно, можно предполагать, что $f(t_n) > 0$.

Определение 3.2.2 *Общая система Франклина $\{f_n(x) : n \geq 0\}$, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$, определяется по правилу $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$, $x \in [0,1]$, и для $n \geq 2$ функция $f_n(x)$ есть n-ая функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.*

При последовательности $t_n = \dfrac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $1 \leq m \leq 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, получается классическая система Франклина, которая эквивалентным образом определена Ф. Франклином в работе [108]. Исследованию системы Франклина посвящено много работ. Систематическое исследование этой системы началось с работ [109] и [110]. Здесь мы приведем только результаты, непосредственно связанные с теоремами, которые будут доказаны в настояшем разделе.

Для рядов по классической системе Франклина доказана теорема единственности, в условиях которой присутствует одно необходимое условие на мажоранту частичных сумм ряда (см. [100], теорема 3).

Теорема 3.2.А (Геворкян Г.Г., [100]). *Для того чтобы ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$$

был рядом Фурье–Франклина некоторой интегрируемой функции f, необходимо и достаточно, чтобы этот ряд п.в. сходился к $f(x)$ и

$$\liminf_{\lambda \to \infty} \left(\lambda \cdot \operatorname{mes} \left\{ x \in [0,1] : \sup_N \left| \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(x) \right| > \lambda \right\} \right) = 0.$$

Аналогичная теорема для общей системы Франклина доказана М. П. Погосяном в работе [111]. В [101], [112]–[114] рассмотрены кратные ряды по системе Франклина.

Пусть d – некоторое натуральное число. Рассмотрим кратные ряды Франклина

$$\sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \tag{3.2.1}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}_0^d$ – вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in [0,1]^d$ и $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = f_{m_1}(x_1)\cdots f_{m_d}(x_d)$. В работах [112]–[114] для ряда (3.2.1) по классической системе Франклина введены обозначения

$$\sigma_\nu(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}:m_i\le 2^\nu} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \quad \sigma^*(\mathbf{x}) = \sup_\nu |\sigma_\nu(\mathbf{x})|,$$

и доказаны следующие тоеремы.

Теорема 3.2.B (Геворкян Г.Г., [112], [114]). *Для того чтобы кратный ряд* (3.2.1) *по классической системе Франклина был бы рядом Фурье–Франклина некоторой функции* $f \in L([0,1]^d)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. *суммы* $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ *по мере сходились бы к* f;
2. $\liminf\limits_{\lambda\to+\infty} \left(\lambda \cdot \operatorname{mes}\left\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda\right\}\right) = 0.$

Теорема 3.2.C (Геворкян Г.Г., Погосян М.П., [113]). *Пусть суммы* $\sigma_\nu(\boldsymbol{x})$ *кратного ряда* (3.2.1) *по классической системе Франклина сходятся по мере к некоторой функции* f *и для некоторой последовательности* $\lambda_k \to \infty$ *выполняется*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\lambda_k \cdot \operatorname{mes}\left\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda\right\}\right) = 0.$$

Тогда для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ *имеет место*

$$a_{\mathbf{m}} = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Здесь доказывается аналогичная теорема для рядов по общей системе Франклина, порожденной парно регулярным разбиением отрезка $[0,1]$. При этом вместо частичных сумм $\sigma_\nu(\mathbf{x})$ и функции $\sigma^*(\mathbf{x})$ приходится рассматривать всю последовательность квадратичных частичных сумм и мажоранту этой последовательности.

При исследовании свойств общей системы Франклина рассматриваются различные условия регулярности разбиения $\mathcal{T}$, введенные в работах [105]–[107] и [118].

Определение 3.2.3 *Допустимая последовательность $\mathcal{T}$ называется регулярной по парам (парно регулярна) с параметром $\gamma > 1$, если для каждого $n \geq 2$ и $1 \leq i \leq n$ имеем*

$$\frac{1}{\gamma} \leq \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_{i-1}^n}{\tau_i^n - \tau_{i-2}^n} \leq \gamma,$$

где $\tau_{-1}^n = \tau_0^n = 0$, $\tau_{n+1}^n = \tau_n^n = 1$.

В теоремах 3.2.4 и 3.2.5 полагается, что разбиение $\mathcal{T}$ регулярное по парам с параметром $\gamma > 1$ и $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – соответствующая ему общая система Франклина. Для ряда (3.2.1) введем обозначения

$$S_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}: m_i \leq n} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}), \quad S^*(\mathbf{x}) = \sup_n |S_n(\mathbf{x})|. \tag{3.2.2}$$

Верна следующая теорема.

Теорема 3.2.4 ([141]). *Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – общая система Франклина, соответствующая парно регулярному разбиению $\mathcal{T}$ с параметром $\gamma > 1$. Далее, пусть кубические частичные суммы $S_n(\mathbf{x})$ по мере сходятся к некоторой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_k \to \infty$ выполняется*

$$\lim_{k \to +\infty} (\lambda_k \cdot \mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : S^*(\mathbf{x}) > \lambda_k\}) = 0. \tag{3.2.3}$$

Тогда для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ имеет место

$$a_{\mathbf{m}} = \lim_{k \to \infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Из теоремы 3.2.4 следует

Теорема 3.2.5 ([141]). *Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – общая система Франклина, соответствующая парно регулярному разбиению $\mathcal{T}$ с параметром $\gamma > 1$. Пусть кубические частичные суммы $S_n(\mathbf{x})$ по мере сходятся к некоторой функции f и выполняется условие*

$$\lim_{\lambda \to \infty} (\lambda \cdot \mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in [0;1]^d : S^*(\mathbf{x}) > \lambda\}) = 0,$$

тогда функция f является A-интегрируемой и ряд (3.2.1) является рядом Фурье–Франклина в смысле A-интегрирования, т.е. для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ имеет место

$$a_{\mathbf{m}} = (A) \int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Отметим, что аналогичная теорема для классической системы Франклина доказана в работе [113]. Однако из теоремы 3.2.5 не следует результат работы [113], так как там вместо $S^*(\mathbf{x})$ рассматривается $\sigma^*(\mathbf{x})$.

Для классической системы Франклина в работах [140] и [142] доказаны теоремы, аналогичные теоремам 3.1.2–3.1.7. В частности получено следующее усиление теоремы 3.2.C.

Теорема 3.2.6 ([140]). *Пусть* (3.2.1) *– кратный ряд по классической системе Франклина и пусть* $\{K_n\}$ *– возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой отношение* $\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$ *ограничено. Если кубические частичные суммы этого ряда* $S_{K_n}(\mathbf{x})$ *сходятся по мере к некоторой функции* f *и для некоторой последовательности* $\lambda_k \to +\infty$ *выполняется*

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\lambda_k \cdot \operatorname{mes}\big\{\mathbf{x}\in[0,1]^d:\ \sup_n |S_{K_n}(\mathbf{x})| > \lambda_k\big\}\Big) = 0, \tag{3.2.4}$$

то для всех $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d$ *имеет место*

$$a_{\mathbf{m}} = \lim_{k\to+\infty}\int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{3.2.5}$$

Заметим, что, как и в предыдущем случае, из теоремы 3.2.6 получаются следующие следствия.

Следствие 3.2.7 *Пусть* $\{K_n\}$ *– возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой отношение* $\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$ *ограничено. Если кубические частичные суммы* $S_{K_n}(\mathbf{x})$ *ряда* (3.2.1) *по классической системе Франклина сходятся по мере к некоторой функции* f *и*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Big(\lambda \cdot \operatorname{mes}\big\{\mathbf{x}\in[0,1]^d:\ \sup_n |S_{K_n}(\mathbf{x})| > \lambda\big\}\Big) = 0,$$

то все функции $f(\mathbf{x})f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d$, *A-интегрируемы и*

$$a_{\mathbf{m}} = (A)\int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x})f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{m}\in\mathbb{N}_0^d.$$

Следствие 3.2.8 *Пусть* $\{K_n\}$ *– возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой отношение* $\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$ *ограничено. Если кубические частичные суммы* $S_{K_n}(\mathbf{x})$

ряда (3.2.1) *по классической системе Франклина сходятся по мере к некоторой функции* $f \in L[0,1]^d$ *и для некоторой последовательности* $\lambda_k \to +\infty$ *выполняется* (3.2.4), *то* (3.2.1) *является рядом Фурье–Франклина функции* f.

Оказывается, что, как и в случае системы Хаара (см. теорему 3.1.7), ограниченность отношения $\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$ в теореме 3.2.6 существенна. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2.9 ([142]). *Существуют ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ *по системе Франклина и монотонная последовательность натуральных чисел* $\{K_m\}$ *такие, что частичные суммы*

$$S_{K_m}(x) := \sum_{n=0}^{K_m} a_n f_n(x) \to 0 \quad \text{п.в. при} \quad m \to \infty$$

и

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Big(\lambda \cdot \operatorname{mes}\big\{x \in [0,1] : \sup_m |S_{K_m}(x)| > \lambda\big\}\Big) = 0.$$

Отметим, что в отличии от теоремы 3.1.7, доказанной для рядов по системе Хаара, здесь не удалось доказать теорему для любой последовательности $\{K_m\}$ с условием $\sup\limits_m \dfrac{K_{m+1}}{K_m} = \infty$, т.е. теорема 3.2.9 не является полным аналогом теоремы 3.1.7.

3.2.2 Вспомогательные утверждения и доказательство теоремы 3.2.4

При доказательстве теорем этого раздела нам пригодится следующая лемма, доказанная в работе [114].

Лемма 3.2.10 *Пусть функция* G *определена на* $\Delta := [\alpha_1; \beta_1] \times \dots \times [\alpha_d; \beta_d]$, $d \in \mathbb{N}$, *и линейна по каждой переменной. Тогда если* $L = \max\limits_{\boldsymbol{t}\in\Delta} |G(\boldsymbol{t})|$, *то*

$$\operatorname{mes}\left\{\boldsymbol{t} \in \Delta : |G(\boldsymbol{t})| \geq \frac{L}{2^d}\right\} \geq \frac{\operatorname{mes}(\Delta)}{3^d}.$$

Введем некоторые обозначения. Положим $\delta_i^n = (\tau_{i-1}^n, \tau_{i+1}^n) \cup \{\tau_i^n\}$, когда $0 \leq i \leq n$. Ясно, что δ_i^n имеет вид $(\tau_{i-1}^n, \tau_i^n]$ или $[\tau_i^n, \tau_{i+1}^n)$, если τ_i^n – кратная точка, и $\delta_i^n = (\tau_{i-1}^n, \tau_{i+1}^n)$, если τ_i^n – простая точка. Функции φ_i^n определим следующим образом. Если $i = 0$ или n, а также если $1 \leq i \leq n-1$ и $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$, то $\varphi_i^n(\tau_j^n) = \delta_{ij}$, $j = 0, 1, ..., n$, и φ_i^n линейна на $[\tau_{j-1}^n, \tau_j^n]$, $j = 1, ..., n$, где δ_{ij} – символ Кронекера, т.е. $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если

$i \neq j$. Если же $\tau^n_{i-1} = \tau^n_i$, $1 < i < n$, то функции φ^n_{i-1} и φ^n_i – единственные непрерывные на $[0,1] \setminus \{\tau^n_i\}$ кусочно-линейные функции с узлами τ^n_j, принимающие значение 0 в узлах, отличных от двойного узла $\tau^n_{i-1} = \tau^n_i$, непрерывные слева в $\tau^n_{i-1} = \tau^n_i$, $\varphi^n_{i-1}(\tau^n_{i-1}) = 1$, $\varphi^n_{i-1}(\tau^n_{i-1}+0) = 0$, $\varphi^n_i(\tau^n_i) = 0$, $\varphi^n_i(\tau^n_i + 0) = 1$.

Для натурального n положим $\mathbb{N}^d_n = \{0,1,...,n\}^d$. Для вектора $\mathbf{j} = (j_1,...,j_d) \in \mathbb{N}^d_n$ обозначим

$$\Delta^n_{\mathbf{j}} := \delta^n_{j_1} \times \cdots \times \delta^n_{j_d}, \quad \tau^n_{\mathbf{j}} := (\tau^n_{j_1}, ..., \tau^n_{j_d})$$

и

$$\phi^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{t}) := \phi^n_{\mathbf{j}}(t_1,...,t_d) := \varphi^n_{j_1}(t_1) \cdots \varphi^n_{j_k}(t_d). \tag{3.2.6}$$

Тогда

$$S_n(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d_n} a_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}).$$

Нетрудно заметить, что $\sum\limits_{j=0}^{n} \varphi^n_j(x) = 1$, когда $x \in [0,1]$. Следовательно,

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d_n} \phi^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{когда} \ \ \mathbf{x} \in [0,1]^d, \quad \text{и} \ \ \mathrm{supp}(\phi^n_{\mathbf{j}}) = \overline{\Delta^n_{\mathbf{j}}}.$$

Очевидно, что система функций $\{\phi^n_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d_n}$ образует базис в линейном пространстве

$$\mathscr{S}_n := \left\{ \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d_n} b_{\mathbf{m}} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) : b_{\mathbf{m}} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Поэтому верно следующее утверждение.

Лемма 3.2.11 *Если $G \in \mathscr{S}_\nu$ и $G \neq 0$, то существует $\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}^d_n$ такое, что*

$$(G, \phi^n_{\boldsymbol{j}}) := \int_{[0,1]^d} G(\boldsymbol{x}) \phi^n_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \neq 0.$$

Имеем также

$$\int_{[0,1]^d} \phi^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Delta^n_{\mathbf{j}}} \phi^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \prod_{i=1}^{d} \int_{\delta^n_{j_i}} \varphi^n_{j_i}(x_i) dx_i = \prod_{i=1}^{d} \frac{\mathrm{mes}(\delta^n_{j_i})}{2} = \frac{\mathrm{mes}(\Delta^n_{\mathbf{j}})}{2^d}.$$

Обозначив

$$M^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \frac{2^d}{\mathrm{mes}(\Delta^n_{\mathbf{j}})} \phi^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \tag{3.2.7}$$

получим другой базис в $\mathscr{S}_n$ с условием

$$\int_{[0,1]^d} M^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \tag{3.2.8}$$

Верна следующая лемма.

Лемма 3.2.12 *Для любых $M^{n_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x})$ и $n > n_0$ существуют числа $\alpha_{\mathbf{j}}$ такие, что*

$$M^{n_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_n} \alpha_{\mathbf{j}} M^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}),$$

причем

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_n} \alpha_{\mathbf{j}} = 1, \quad \alpha_{\mathbf{j}} \geq 0, \quad \text{и} \quad \alpha_{\mathbf{j}} = 0, \quad \text{если} \quad \Delta^n_{\mathbf{j}} \not\subset \Delta^{n_0}_{\mathbf{j}_0}.$$

Доказательство. Поскольку $n > n_0$, то для каждого $l \in \{1, 2, \ldots, d\}$ имеем $\varphi^{n_0}_{j^0_l} \in \mathcal{S}_n$, где $\mathbf{j}_0 = (j^0_1, ..., j^0_d)$. Поэтому существуют $\beta^{(l)}_i$ такие, что

$$\varphi^{n_0}_{j^0_l}(x_l) = \sum_i \beta^{(l)}_i \varphi^n_i(x_l). \tag{3.2.9}$$

Из определения функций φ^n_i нетрудно заметить, что $\beta^{(l)}_i \geq 0$ и $\beta^{(l)}_i = 0$, если $\delta^n_i \not\subset \delta^{n_0}_{j^0_l}$. Тогда, из (3.2.6), (3.2.7) и (3.2.9) получим

$$M^{n_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_n} \alpha_{\mathbf{j}} M^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}), \tag{3.2.10}$$

где $\alpha_{\mathbf{j}} \geq 0$, и $\alpha_{\mathbf{j}} = 0$, если $\Delta^n_{\mathbf{j}} \not\subset \Delta^{n_0}_{\mathbf{j}_0}$. Из (3.2.10) и (3.2.8) следует, что $\sum\limits_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_n} \alpha_{\mathbf{j}} = 1$.

Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.2.4. Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – общая система Франклина, соответствующая парно регулярному разбиению $\mathcal{T}$ с параметром $\gamma > 1$. Пусть, далее, кубические частичные суммы $S_n(\mathbf{x})$ ряда (3.2.1) по мере сходятся к некоторой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_k \to \infty$ выполняется (3.2.3). Заметим, что для доказательства теоремы 3.2.4 достаточно доказать, что для любых m_0, $\mathbf{j}^0 = (j^0_1, ..., j^0_d) \in \mathbb{N}^d_{m_0}$ и $n \geq m_0$ имеет место

$$(S_n, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}) = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{3.2.11}$$

Действительно, если $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d_0$, то для $n = \max\limits_i m_i$ имеем, что $f_{\mathbf{m}} \in \mathscr{S}_n$. Следовательно, для некоторых $\gamma_{\mathbf{j}}$ имеет место $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_n} \gamma_{\mathbf{j}} M^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})$. Тогда, в силу (3.2.11), имеем

$$a_{\mathbf{m}} = (S_n, f_{\mathbf{m}}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_n} \gamma_{\mathbf{j}} (S_n, M^n_{\mathbf{j}}) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d_n} \gamma_{\mathbf{j}} \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} M^n_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}((x))(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Приступим к доказательству (3.2.11). Сначала напомним определение максимальной функции $\mathcal{M}(g,\mathbf{x})$ интегрируемой функции g. Полагаем

$$\mathcal{M}(g,\mathbf{x}) = \sup_{Q:Q\ni\mathbf{x}} \frac{1}{\mathrm{mes}(Q)} \int_Q |g(\mathbf{x})|d\mathbf{x},$$

где верхняя грань рассматривается по всем прямоугольникам с гранями, параллельными координатным граням и с центром в точке $\mathbf{x}$. Далее, под прямоугольником с центром $\mathbf{x}$ будем подразумевать множество вида $\times_{l=1}^{d}[x_l-\eta_l, x_l+\eta_l]$. Из известной теоремы Йессена-Марцинкевича-Зигмунда следует, что (см. [119], §2.3) если $\mathbb{1}_A(\mathbf{x})$ – характеристическая функция множества A, то для множества $B := \{\mathbf{x} : \mathcal{M}(\mathbb{1}_A,\mathbf{x}) > \zeta\}$ выполняется $\mathrm{mes}(B) \le C_d(\zeta)^{-1}\mathrm{mes}(A)$, где C_d – постоянная, зависящая только от размерности d.

Пусть m_0 – произвольное натуральное число и $\mathbf{j}^0 \in \mathbb{N}^d_{m_0}$. Заметим, что если $\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_d)$ и $i_{\nu_0} := \max\limits_{\nu} i_\nu > m_0$, то $(f_\mathbf{i}, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}) = 0$. Действительно, поскольку $i_{\nu_0} > m_0$, то $\displaystyle\int_0^1 f_{i_{\nu_0}}(x_{\nu_0})\phi^{m_0}_{j_{\nu_0}}(x_{\nu_0})dx_{\nu_0} = 0$, и поэтому

$$(f_\mathbf{i}, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}) = \frac{2^d}{\mathrm{mes}(\Delta^{m_0}_{\mathbf{j}^0})}\prod_{\nu=0}^{d}(f_\nu, \phi^{m_0}_{j_\nu}) = 0.$$

Следовательно, для любого $n \ge m_0$ имеем $(S_n, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}) = (S_{m_0}, M^{m_0}_{\mathbf{j}^0})$. Поэтому для доказательства (3.2.11) достаточно доказать, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^d}([f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x}))M^{m_0}_{\mathbf{j}^0}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right) = 0. \tag{3.2.12}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое k_0, что для всех $k \ge k_0$ выполняются неравенства

$$C_d(12\gamma^2)^d\lambda_k \cdot \mathrm{mes}(E_k) < \varepsilon \tag{3.2.13}$$

и

$$\mathrm{mes}(E_k) < \frac{(12\gamma^3)^{-d}}{C_d}\mathrm{mes}(\Delta^{m_0}_{\mathbf{j}^0}), \tag{3.2.14}$$

где

$$E_k := \{\mathbf{x} \in [0,1]^d : S^*(\mathbf{x}) > \lambda_k\}.$$

Обозначим

$$B_k := \{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \mathcal{M}(\mathbb{1}_{E_k},\mathbf{x}) > (12\gamma^2)^{-d}\}. \tag{3.2.15}$$

Тогда

$$\mathrm{mes}(B_k) \le C_d(12\gamma^2)^d \cdot \mathrm{mes}(E_k). \tag{3.2.16}$$

Лемма 3.2.13 *Если* $\Delta^n_{\mathbf{j}} \not\subset B_k$, *то* $|S_n(\mathbf{x})| < 2^d\lambda_k$, *когда* $\mathbf{x} \in \Delta^n_{\mathbf{j}}$.

Доказательство. Допустим обратное: для некоторой точки $\mathbf{x}^0 \in \Delta^n_{\mathbf{j}}$ имеет место $|S_n(\mathbf{x^0})| \geq 2^d\lambda_k$. Поскольку функция $S_n(\mathbf{x})$ линейная по каждой переменной x_l, $l = 1, \ldots, d$, на прямоугольнике $\times_{l=1}^d(\tau^n_{\nu_l}, \tau^n_{\nu_l+1})$, где ν_l принимает значения $j_l - 1$ и j_l, $l = 1, \ldots, d$, то для некоторого $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d)$ имеем $\sup\limits_{\mathbf{x}\in\Delta^n_{\mathbf{j}}} |S_n(\mathbf{x})| = L_{\mathbf{i}} \geq 2^d\lambda_k$, где $L_{\mathbf{i}} := \lim\limits_{\substack{\mathbf{x}\to\tau^n_{\mathbf{i}} \\ \mathbf{x}\in\Delta^n_{\mathbf{j}}}} |S_n(\mathbf{x})|$, а $\tau^n_{\mathbf{i}} \in \overline{\Delta^n_{\mathbf{j}}}$. Ясно, что если $\tau^n_{\mathbf{i}}$ – простая точка, то $L_{\mathbf{i}} = |S_n(\tau^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}})|$. В силу леммы 3.2.10, имеет место

$$\mathrm{mes}\{\mathbf{x} \in \Delta^n_{\mathbf{i}} : |S_n(\mathbf{x})| > \lambda_k\} \geq \frac{\mathrm{mes}(\Delta^n_{\mathbf{i}})}{3^d}. \tag{3.2.17}$$

Поскольку разбиение $\mathcal{T}$ регулярное по парам с параметром γ, то для любой точки $\mathbf{x} \in \Delta^n_{\mathbf{j}}$ прямоугольник

$$Q := \times_{l=1}^d[x_l - (\gamma+1)(\tau^n_{i_l+1} - \tau^n_{i_l-1}), x_l + (\gamma+1)(\tau^n_{i_l+1} - \tau^n_{i_l-1})]$$

с центром $\mathbf{x}$ содержит $\Delta^n_{\mathbf{i}}$. Очевидно, что $\mathrm{mes}(Q) = 2^d(\gamma+1)^d\mathrm{mes}(\Delta^n_{\mathbf{i}})$. Поэтому из (3.2.17) следует

$$\mathcal{M}(\mathbb{1}_{E_k}, \mathbf{x}) \geq \frac{1}{2^d(\gamma+1)^d\mathrm{mes}(\Delta^n_{\mathbf{i}})} \cdot \frac{\mathrm{mes}(\Delta^n_{\mathbf{i}})}{3^d} \geq (12\gamma)^{-d} \geq (12\gamma^2)^{-d}, \quad \mathbf{x} \in \Delta^n_{\mathbf{j}}.$$

Следовательно, $\Delta^n_{\mathbf{j}} \subset B_k$. Лемма доказана. □

Фиксируем некоторое k, для которого выполняются (3.2.13) и (3.2.14). Пусть m_1 – наименьшее натуральное число со свойством

$$\{\mathbf{i} : \tau^{m_1}_{\mathbf{i}} \in \Delta^{m_0}_{\mathbf{j}^0} \ \text{ и } \ \Delta^{m_1}_{\mathbf{i}} \subset B_k\} \neq \varnothing. \tag{3.2.18}$$

Заметим, что $m_1 > m_0$. Действительно, если бы выполнилось (3.2.18) для некоторого $m_1 \leq m_0$, то выполнилось бы и

$$\mathrm{mes}(B_k) \geq \mathrm{mes}(\Delta^{m_1}_{\mathbf{i}}) \geq \frac{1}{\gamma^d}\mathrm{mes}(\Delta^{m_0}_{\mathbf{j}_0}).$$

Но из (3.2.14) и (3.2.16) имеем, что $\mathrm{mes}(B_k) < \gamma^{-d}\mathrm{mes}(\Delta^{m_0}_{\mathbf{j}_0})$. Полученное противоречие доказывает, что $m_1 > m_0$.

Обозначим

$$\mathcal{I}_{m_1} = \{\mathbf{i} : \tau^{m_1}_{\mathbf{i}} \in \Delta^{m_0}_{\mathbf{j}^0}\}$$

$$\mathcal{J}_{m_1} := \{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_{m_1} : \quad \Delta_{\mathbf{i}}^{m_1} \subset B_k\}, \qquad \mathcal{K}_{m_1} := \mathcal{I}_{m_1} \backslash \mathcal{J}_{m_1}.$$

Очевидно, что $\mathcal{J}_{m_1} \bigcap \mathcal{K}_{m_1} = \varnothing$ и $\mathcal{J}_{m_1} \bigcup \mathcal{K}_{m_1} = \{\mathbf{i} : \tau_{\mathbf{i}}^{m_1} \in \Delta_{\mathbf{j}^0}^{m_0}\}$. Поэтому, применяя лемму 3.2.12, найдем представление

$$M_{\mathbf{j}^0}^{m_0} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_{m_1}} \alpha_{\mathbf{i}}^{(m_1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1}} \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1}, \tag{3.2.19}$$

где

$$\alpha_{\mathbf{i}}^{(m_1)} \geq 0, \quad \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1)} \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_{m_1}} \alpha_{\mathbf{i}}^{(m_1)} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1}} \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1)} = 1.$$

Применяя лемму 3.2.12, для каждой функции $M_{\mathbf{i}}^{m_1}$, $\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1}$, найдем представление

$$M_{\mathbf{i}}^{m_1} = \sum_{\mathbf{j} : \Delta_{\mathbf{j}}^{m_1+1} \subset \Delta_{\mathbf{i}}^{m_1}} \alpha_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}} M_{\mathbf{j}}^{m_1+1}, \quad \alpha_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}} \geq 0. \tag{3.2.20}$$

Отметим, что для многих $\mathbf{i}$ в сумме (3.2.20) только одинь коэффициент $\alpha_{\mathbf{j}}^{\mathbf{i}}$ отличен от нуля и равен единице.

Обозначим

$$\mathcal{I}_{m_1+1} := \left\{ \mathbf{j} : \tau_{\mathbf{j}}^{m_1+1} \in \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1}} \Delta_{\mathbf{i}}^{m_1} \right\},$$

$$\mathcal{J}_{m_1+1} := \left\{ \mathbf{j} \in \mathcal{I}_{m_1+1} : \Delta_{\mathbf{j}}^{m_1+1} \subset B_k \right\} \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_{m_1+1} := \mathcal{I}_{m_1+1} \backslash \mathcal{J}_{m_1+1}.$$

Подставив выражения для $M_{\mathbf{i}}^{m_1}$, $\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1}$, из (3.2.20) во вторую сумму из (3.2.19) и сгруппировов подобные члены, получим

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1}} \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_{m_1+1}} \alpha_{\mathbf{i}}^{(m_1+1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1+1} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1+1}} \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1+1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1+1}. \tag{3.2.21}$$

Из (3.2.19) и (3.2.21) имеем

$$M_{\mathbf{j}^0}^{m_0} = \sum_{l=m_1}^{m_1+1} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_l} \alpha_{\mathbf{i}}^{(l)} M_{\mathbf{i}}^{l} + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{m_1+1}} \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1+1)} M_{\mathbf{i}}^{m_1+1}, \tag{3.2.22}$$

где $\alpha_{\mathbf{i}}^{(l)} \geq 0, \quad l = m_1, m_1+1, \quad \beta_{\mathbf{i}}^{(m_1+1)} \geq 0.$

По индукции для всех $n > m_1$ определим

$$\mathcal{I}_n := \left\{ \mathbf{j} : \tau_{\mathbf{j}}^{n} \in \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_{n-1}} \Delta_{\mathbf{i}}^{n-1} \right\}, \tag{3.2.23}$$

$$\mathcal{J}_n := \left\{ \mathbf{j} \in \mathcal{I}_n : \Delta_{\mathbf{j}}^{n} \subset B_k \right\} \quad \text{и} \quad \mathcal{K}_n := \mathcal{I}_n \backslash \mathcal{J}_n. \tag{3.2.24}$$

Аналогично (3.2.22) получим

$$M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}=\sum_{l=m_1}^{n}\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_l}\alpha_{\mathbf{i}}^{(l)}M_{\mathbf{i}}^{l}+\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{K}_n}\beta_{\mathbf{i}}^{(n)}M_{\mathbf{i}}^{n},$$

где $\alpha_{\mathbf{i}}^{(l)}\ge 0,\quad l=m_1,\dots,n,\quad \beta_{\mathbf{i}}^{(n)}\ge 0$. Из леммы 3.2.13, (3.2.23) и (3.2.24) следует, что

$$|S_n(\mathbf{x})|\le 2^d\lambda_k,\quad \text{когда}\ \ \mathbf{x}\in\Delta_{\mathbf{j}}^{n},\ \ \mathbf{j}\in\mathcal{K}_n.$$

Очевидно, что для любого n имеет место (см. (3.2.15))

$$D_n:=\bigcup_{l=m_1}^{n}\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}_l}\Delta_{\mathbf{i}}^{l}\subset B_k.$$

С учетом (3.2.13) и (3.2.16) получим

$$\lambda_k\cdot\mathrm{mes}(D_n)<\varepsilon. \tag{3.2.25}$$

Докажем, что для любого l, $m_1\le l\le n$, выполняется

$$|S_l(\mathbf{x})|\le 2^d\lambda_k,\quad \text{когда}\ \ \mathbf{x}\in\Delta_{\mathbf{i}}^{l},\ \ \mathbf{i}\in\mathcal{J}_l. \tag{3.2.26}$$

Допустим обратное. Для некоторых $l\in\{m_1,...,n\}$, $\mathbf{i}\in\mathcal{J}_l$ и $\mathbf{x}\in\Delta_{\mathbf{i}}^{l}$ выполняется $|S_l(\mathbf{x})|>2^d\lambda_k$. А из этого, как мы заметили при доказательстве леммы 3.2.13, следует, что существует $\mathbf{j}$ такое, что $\tau_{\mathbf{j}}^{l}\in\overline{\Delta_{\mathbf{i}}^{l}}$ и

$$\mathrm{mes}\{\mathbf{x}\in\Delta_{\mathbf{j}}^{l}:|S_l(\mathbf{x})|>\lambda_k\}\ge\frac{\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^{l})}{3^d}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^{l}\bigcap E_k)\ge\frac{\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^{l})}{3^d}. \tag{3.2.27}$$

Пусть $\mathbf{m}\in\mathcal{K}_{l-1}$ такое (см (3.2.23) и (3.2.24)), что $\Delta_{\mathbf{i}}^{l}\subset\Delta_{\mathbf{m}}^{l-1}$, и $\mathbf{y}$ – любая точка из $\Delta_{\mathbf{m}}^{l-1}$. Из регулярности по парам разбиения $\mathcal{T}$ и $\tau_{\mathbf{j}}^{l}\in\overline{\Delta_{\mathbf{i}}^{l}}$ следует, что прямоугольник $Q:=[\epsilon_1,\eta_1]\times...\times[\epsilon_d,\eta_d]$ с центром $\mathbf{y}$ и ребрами с длинами

$$\eta_\nu-\epsilon_\nu=(\gamma(\gamma+1)+1)(\tau_{j_\nu+1}^{l}-\tau_{j_\nu-1}^{l})<3\gamma^2(\tau_{j_\nu+1}^{l}-\tau_{j_\nu-1}^{l}),\quad \nu=1,2,\dots,d,$$

содержит в себе $\Delta_{\mathbf{m}}^{l-1}$. Ясно, что

$$\mathrm{mes}(Q)<(3\gamma^2)^d\mathrm{mes}(\Delta_{\mathbf{j}}^{l}). \tag{3.2.28}$$

Из (3.2.27), (3.2.28) и $\mathbf{y} \in \Delta_{\mathbf{m}}^{l-1} \subset Q$ следует, что

$$\mathcal{M}(\chi_{E_k}, \mathbf{y}) > (9\gamma^2)^{-d}.$$

По определению множества B_k (см. (3.2.15)), имеем $\mathbf{y} \in B_k$. Следовательно, $\Delta_{\mathbf{m}}^{l-1} \subset B_k$, что означает $\mathbf{m} \notin \mathcal{K}_{l-1}$. Полученное противоречие доказывает (3.2.26).

Обозначим

$$H_n := \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_n} \Delta_{\mathbf{i}}^n.$$

Тогда из (3.2.23) и (3.2.24) следует, что

$$|S_n(\mathbf{x})| \leq 2^d \cdot \lambda_k, \quad \text{когда} \quad \mathbf{x} \in H_n. \tag{3.2.29}$$

Обозначим

$$\varrho_1^{(n)}(\mathbf{x}) := \sum_{l=m_1}^{n} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}_l} \alpha_{\mathbf{i}}^{(l)} M_{\mathbf{i}}^l(\mathbf{x}) \ \text{ и } \ \varrho_2^{(n)}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{K}_n} \beta_{\mathbf{i}}^{(n)} M_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{x}).$$

Поскольку $\alpha_{\mathbf{i}}^{(l)} \geq 0$, $\beta_{\mathbf{i}}^{(n)} \geq 0$ и $M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}(\mathbf{x}) = \varrho_1^{(n)}(\mathbf{x}) + \varrho_2^{(n)}(\mathbf{x})$, то

$$0 \leq \varrho_1^{(n)}(\mathbf{x}) \leq M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}(\mathbf{x}) \leq \frac{2^d}{\operatorname{mes}(\Delta_{\mathbf{j}^0}^{m_0})} =: C_{m_0, \mathbf{j}^0} \tag{3.2.30}$$

и

$$0 \leq \varrho_2^{(n)}(\mathbf{x}) \leq M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}(\mathbf{x}) \leq C_{m_0, \mathbf{j}^0}. \tag{3.2.31}$$

Перейдем к оценке

$$\omega_n := \int_{[0,1]^d} |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})| \, M_{\mathbf{j}^0}^{m_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} =: \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \xi_3^{(n)}, \tag{3.2.32}$$

где

$$\xi_1^{(n)} = \int_{D_n} |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})| \varrho_1^{(n)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{3.2.33}$$

$$\xi_2^{(n)} = \int_{H_n \bigcap E_k} |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})| \varrho_2^{(n)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{3.2.34}$$

$$\xi_3^{(n)} = \int_{H_n \setminus E_k} |[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})| \varrho_2^{(n)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{3.2.35}$$

Из (3.2.26) и (3.2.29)–(3.2.31) следует, что подынтегральные функции в (3.2.33)–(3.2.35) ограничены числом $C_{m_0,\mathbf{j}^0}(2^d+1)\lambda_k$. Поэтому из (3.2.25) и (3.2.13) следует, что

$$\xi_1^{(n)} < \varepsilon \cdot C_{m_0,\mathbf{j}^0,d} \ \text{ и } \ \xi_2^{(n)} < \varepsilon \cdot C_{m_0,\mathbf{j}^0,d}. \tag{3.2.36}$$

Учитывая, что $f(\mathbf{x}) = [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}$ для $\mathbf{x} \notin E_k$ и последовательность $S_n(\mathbf{x})$ по мере сходится к $f(\mathbf{x})$, получим, что последовательность $|[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} - S_n(\mathbf{x})| \mathbb{1}_{H_n \setminus E_k}(\mathbf{x}) \varrho_2^{(n)}(\mathbf{x})$ по мере сходится к нулю и ограничена числом $C_{m_0,\mathbf{j}^0}(2^d+1)\lambda_k$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \xi_3^{(n)} = 0. \tag{3.2.37}$$

Из (3.2.32)–(3.2.37) следует, что при достаточно больших n выполняется неравенство $\omega_n < 3\varepsilon \cdot C_{m_0,\mathbf{j}^0,d}$. Из этого следует (3.2.12).

Теорема 3.2.4 доказана. □

3.2.3 Доказательство теорем 3.2.6 и 3.2.9

Пусть $\{K_n\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условиям теоремы 3.2.6. Допустим, число M выбрано так, чтобы

$$\frac{K_{n+1}}{K_n} \le M \qquad \text{для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.38}$$

Обозначим $\hat{S}^*(\mathbf{x}) := \sup\limits_n |S_{K_n}(\mathbf{x})|$, где $S_n(\mathbf{x})$ – кубическая частичная сумма ряда (3.2.1) по классической системе Франклина (см. (3.2.2)). Предположим, что для последовательности $\lambda_k \nearrow +\infty$ выполняется условие

$$\lim_{k\to+\infty} \Big(\lambda_k \cdot \operatorname{mes}\big\{\mathbf{x} \in [0,1]^d : \hat{S}^*(\mathbf{x}) > \lambda_k\big\}\Big) = 0. \tag{3.2.39}$$

Пусть $M_{\mathbf{j}}^n$ – функции, определенные в предыдущем пункте, а $\Delta_{\mathbf{j}}^n$ – соответствующие параллелепипеды (см. (3.2.6)–(3.2.8)). Для краткости введем следующие обозначения:

$$\hat{M}_{\mathbf{j}}^n := M_{\mathbf{j}}^{K_n}, \quad \hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^n := \Delta_{\mathbf{j}}^{K_n}.$$

Ясно, что для классической системы Франклина, если $n = 2^\mu + \nu$, $1 \le \nu \le 2^\mu$, то

$$\tau_i^n = \begin{cases} \dfrac{i}{2^{\mu+1}}, & \text{если } 0 \le i \le 2\nu, \\ \dfrac{i-\nu}{2^\mu}, & \text{если } 2\nu < i \le n. \end{cases}$$

Поэтому, из определений функций $\hat{M}_{\mathbf{j}}^n$ и множеств $\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^n$ имеем, что для всех $\nu \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_d) \in \mathbb{N}_{K_\nu}^d := \{1, 2, \ldots, K_\nu\}^d$ выполняются: $\operatorname{supp}(\hat{M}_{\mathbf{j}}^\nu) = \overline{\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^\nu}$,

$$\left(\frac{1}{2K_\nu}\right)^d \le \operatorname{mes}(\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^\nu) \le \left(\frac{4}{K_\nu}\right)^d, \tag{3.2.40}$$

$$\int_{[0,1]^d} \hat{M}^{\nu}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1 \qquad \text{и} \qquad |\hat{M}^{\nu}_{\mathbf{j}}(\mathbf{x})| \leq (4K_\nu)^d, \quad \nu \in \mathbb{N}, \;\; \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d_{K_\nu}. \tag{3.2.41}$$

Теперь допустим, что условия (3.2.38) и (3.2.39) выполняются и частичные суммы $S_{K_\nu}(\mathbf{x})$ сходятся по мере к функции f при $\nu \to \infty$. Сначала докажем, что для каждого $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d_0$ и $\mathbf{j}_0 \in \mathbb{N}^d_{K_{\nu_0}}$ с условием $\max\limits_{1\le i\le d}\{m_i\} \leq K_{\nu_0}$ выполняется равенство

$$\int_{[0,1]^d} S_{K_{\nu_0}}(\mathbf{x})\hat{M}^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim_{k\to+\infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} \hat{M}^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{3.2.42}$$

Для каждого натурального k положим

$$E_k := \left\{\mathbf{x} \in \operatorname{supp}(\hat{M}^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}) = \overline{\hat{\Delta}^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}} : \; \hat{S}^*(\mathbf{x}) > \lambda_k\right\}.$$

Пусть ε – некоторое положительное число. Выберем натуральное число k_0 так (см. (3.2.39)), чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$(4^7 K_{\nu_0} M)^d \lambda_k \cdot \operatorname{mes}(E_k) < \varepsilon, \qquad \text{если} \qquad k \geq k_0, \tag{3.2.43}$$

$$\operatorname{mes}(E_k) < (4^4 M)^{-d} \operatorname{mes}(\hat{\Delta}^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}), \qquad \text{если} \qquad k \geq k_0. \tag{3.2.44}$$

Для каждого натурального числа $\nu \geq \nu_0$ положим

$$\Omega_\nu := \left\{A : \; A = \left(\tau^{K_\nu}_{j_1-1}, \tau^{K_\nu}_{j_1}\right) \times \cdots \times \left(\tau^{K_\nu}_{j_d-1}, \tau^{K_\nu}_{j_d}\right), \; A \subset \hat{\Delta}^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}\right\}. \tag{3.2.45}$$

Ясно, что

$$\left(\frac{1}{2K_\nu}\right)^d \leq \operatorname{mes}(A) \leq \left(\frac{2}{K_\nu}\right)^d \qquad \text{для всех} \quad A \in \Omega_\nu. \tag{3.2.46}$$

Заметим, что если для некоторого $A \in \Omega_\nu, \; \nu \geq \nu_0$, выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}(E_k \cap A) \leq 2^{-2d} \operatorname{mes}(A), \tag{3.2.47}$$

то

$$|S_{K_\nu}(\mathbf{x})| \leq 2^d \lambda_k \qquad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in A. \tag{3.2.48}$$

Действительно, допустим, в некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in A$, где $A \in \Omega_\nu$, неравенство (3.2.48) нарушается, т.е. $|S_{K_\nu}(\mathbf{x}_0)| > 2^d \lambda_k$. Поскольку $S_{K_\nu}(\mathbf{x})$ линейна по каждой переменной на прямоугольнике A, то из леммы 3.2.10 получим

$$\operatorname{mes}\left\{\mathbf{x} \in A : \; |S_{K_\nu}(\mathbf{x})| \geq \lambda_k\right\} \geq 3^{-d} \operatorname{mes}(A),$$

которое противоречит неравенству (3.2.47).

Из (3.2.44) и (3.2.45) следует, что

$$\operatorname{mes}(E_k \cap A) \leq \big(4^4 M\big)^{-d} \operatorname{mes}\big(\hat{\Delta}_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}\big) < \big(4^3 M\big)^{-d} \operatorname{mes}(A), \quad \text{если} \quad A \in \Omega_{\nu_0}. \tag{3.2.49}$$

Теперь, для $\nu \geq \nu_0$ по индукции определим семейства Ω_ν^1 и Ω_ν^2. Если $\nu = \nu_0$, то положим

$$\Omega_{\nu_0}^1 := \{A \in \Omega_{\nu_0} : \ \operatorname{mes}(E_k \cap A) > (4^3 M)^{-d} \cdot \operatorname{mes}(A)\}, \qquad Q_{\nu_0} := \bigcup_{A \in \Omega_{\nu_0}^1} A,$$

$$\Omega_{\nu_0}^2 := \{A \in \Omega_{\nu_0} : \ A \not\subset Q_{\nu_0}\}, \qquad P_{\nu_0} := \bigcup_{A \in \Omega_{\nu_0}^2} A.$$

Из (3.2.49) имеем, что $Q_{\nu_0} = \varnothing$, а замыканием множества P_{ν_0} является $\operatorname{supp}(\hat{M}_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0})$, т.е. $\overline{P_{\nu_0}} = \overline{\hat{\Delta}_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}}$. Допустим, мы уже определили множества Ω_n^1, Ω_n^2, Q_n и P_n для всех n, $\nu_0 \leq n < \nu$. Положим

$$\Omega_\nu^1 := \Big\{A \in \Omega_\nu : \ \operatorname{mes}(E_k \cap A) > (4^3 M)^{-d} \cdot \operatorname{mes}(A) \text{ и } A \not\subset \bigcup_{n=\nu_0}^{\nu-1} Q_n\Big\}, \tag{3.2.50}$$

$$Q_\nu := \bigcup_{A \in \Omega_\nu^1} A,$$

$$\Omega_\nu^2 := \Big\{A \in \Omega_\nu : \ A \not\subset \bigcup_{n=\nu_0}^{\nu} Q_n\Big\}, \qquad P_\nu := \bigcup_{A \in \Omega_\nu^2} A.$$

Таким образом, мы определили семейства Ω_ν^1, Ω_ν^2 и множества P_ν, Q_ν $(\nu \geq \nu_0)$, удовлетворяющие следующим условиям: $\Omega_\nu^1 \subset \Omega_\nu$, $\Omega_\nu^2 \subset \Omega_\nu$,

$$\operatorname{supp}(\hat{M}_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}) = \overline{\hat{\Delta}_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}} = \overline{P_\nu} \bigcup \left(\bigcup_{n=\nu_0}^{\nu} \overline{Q_n}\right), \qquad P_\nu \bigcap \left(\bigcup_{n=\nu_0}^{\nu} Q_n\right) = \varnothing, \tag{3.2.51}$$

$$Q_\nu \cap Q_n = \varnothing, \qquad \text{если} \qquad \nu \neq n. \tag{3.2.52}$$

Из (3.2.52) и (3.2.50) следует, что

$$\operatorname{mes}\left(\bigcup_{n=\nu_0}^{\nu} Q_n\right) < (4^3 M)^d \operatorname{mes}(E_k) \qquad \text{для всех} \quad \nu \geq \nu_0. \tag{3.2.53}$$

Для каждого $\nu > \nu_0$ обозначим

$$J_\nu := \Big\{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_{K_\nu}^d : \ \hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^\nu \cap Q_\nu \neq \varnothing \ \text{ и } \ \hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^\nu \subset \overline{P_{\nu-1}}\Big\}. \tag{3.2.54}$$

Заметим, что если $\mathbf{j} \in J_\nu$ и $B \in \Omega_\nu$ – подмножество прямоугольника $\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^\nu$, то

$$\operatorname{mes}(E_k \cap B) < 4^{-d} \operatorname{mes}(B). \tag{3.2.55}$$

Действительно, допустим, существует такой параллелепипед $B \in \Omega_\nu$, что $B \subset \hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^{\nu}$, но неравенство (3.2.55) не выполняется. Обозначим через D тот элемент из $\Omega_{\nu-1}$, который содержит B. Учитывая (3.2.38) и (3.2.46), получим

$$\mathrm{mes}(B) \geq \left(\frac{1}{2K_\nu}\right)^d \geq \left(\frac{1}{2MK_{\nu-1}}\right)^d \geq \left(\frac{1}{4M}\right)^d \mathrm{mes}(D).$$

Поэтому

$$\mathrm{mes}(E_k \cap D) \geq \mathrm{mes}(E_k \cap B) \geq 4^{-d}\mathrm{mes}(B) \geq (4^2M)^{-d}\mathrm{mes}(D).$$

Из последнего неравенства с учетом (3.2.50) получим, что $B \subset D \subset \bigcup\limits_{n=\nu_0}^{\nu-1} Q_n$, следовательно, $\Delta_{\mathbf{j}}^{\nu} \bigcap \left(\bigcup\limits_{n=\nu_0}^{\nu-1} Q_n\right) \neq \varnothing$. Но это противоречит (3.2.54) и (3.2.51). Таким образом, если $\mathbf{j} \in J_\nu$, то для всех $B \in \Omega_\nu$ с условием $B \subset \Delta_{\mathbf{j}}^{\nu}$ выполняется неравенство (3.2.55), следовательно,

$$\mathrm{mes}(E_k \cap \hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^{\nu}) < 4^{-d}\mathrm{mes}(\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^{\nu}).$$

Поэтому, учитывая также (3.2.47) и (3.2.48), получим

$$|S_{K_\nu}(\mathbf{x})| \leq 2^d\lambda_k, \qquad \text{если} \quad \mathbf{x} \in \hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^{\nu}, \quad \mathbf{j} \in J_\nu. \tag{3.2.56}$$

Аналогичными рассуждениями получим (см. определение множества P_ν и (3.2.50)), что если $\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^{\nu} \subset P_\nu$, то

$$\mathrm{mes}(E_k \cap \hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^{\nu}) \leq (4^3M)^{-d}\mathrm{mes}(\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^{\nu}),$$

следовательно,

$$|S_{K_\nu}(\mathbf{x})| \leq 2^d\lambda_k, \qquad \text{если} \quad \mathbf{x} \in \hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^{\nu} \subset P_\nu. \tag{3.2.57}$$

Теперь, по индукции определим разные представления φ_n, $n \geq \nu_0$, для функции $\hat{M}_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\hat{M}_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0} = \varphi_n = \sum_{\nu=\nu_0}^{n} \sum_{\mathbf{j}\in J_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n \hat{M}_{\mathbf{j}}^{\nu} + \sum_{\mathbf{j}:\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^n \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^n \hat{M}_{\mathbf{j}}^n, \tag{3.2.58}$$

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{n} \sum_{\mathbf{j}\in J_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n + \sum_{\mathbf{j}:\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^n \subset P_n} \alpha_{\mathbf{j}}^n = 1, \qquad \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n \geq 0, \quad \alpha_{\mathbf{j}}^n \geq 0. \tag{3.2.59}$$

Положим $\varphi_{\nu_0} := \hat{M}_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}$. Ясно, что φ_{ν_0} удовлетворяет (3.2.58) и (3.2.59).

Допустим, мы уже определили представления $\varphi_{\nu_0}, \dots, \varphi_n$, удовлетворяющие условиям (3.2.58) и (3.2.59). В силу леммы 3.2.12, для каждого $\mathbf{j}$, $\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^n \subset P_n$, имеем разложение

$$\hat{M}_{\mathbf{j}}^n = \sum_{\mathbf{i}:\hat{\Delta}_{\mathbf{i}}^{n+1} \subset \hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^n} \beta_{\mathbf{i}} \hat{M}_{\mathbf{i}}^{n+1}, \qquad \text{где} \quad \beta_{\mathbf{i}} \geq 0. \tag{3.2.60}$$

Отметим, что если $\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^n \subset P_n$ и для $\hat{M}_{\mathbf{j}}^n$ имеем разложение (3.2.60), то либо $\hat{\Delta}_{\mathbf{i}}^{n+1} \cap Q_{n+1} \neq \varnothing$, и следовательно, $\mathbf{i} \in J_{n+1}$, либо $\hat{\Delta}_{\mathbf{i}}^{n+1} \subset P_{n+1}$. Поэтому, подставляя выражение (3.2.60) в (3.2.58) и группируя подобные слагаемые, получим

$$\hat{M}_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0} = \varphi_{n+1} = \sum_{\nu=\nu_0}^{n+1} \sum_{\mathbf{j} \in J_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n+1} \hat{M}_{\mathbf{j}}^\nu + \sum_{\mathbf{j}:\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^{n+1} \subset P_{n+1}} \alpha_{\mathbf{j}}^{n+1} \hat{M}_{\mathbf{j}}^{n+1}. \tag{3.2.61}$$

Очевидно, что все коэффициенты в (3.2.61) неотрицательные. Поскольку интегралы всех функций $\hat{M}_{\mathbf{j}}^\nu$ равны 1 (см. (3.2.41)), то из (3.2.61) имеем

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{n+1} \sum_{\mathbf{j} \in J_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^{n+1} + \sum_{\mathbf{j}:\hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^{n+1} \subset P_{n+1}} \alpha_{\mathbf{j}}^{n+1} = 1.$$

Таким образом, для всех $n \geq \nu_0$ мы доказали возможность разложения (3.2.58) с коэффициентами (3.2.59).

Из определения множеств J_ν и Q_ν (см. (3.2.54)) следует, что

$$\operatorname{mes}\left(\bigcup_{\mathbf{j} \in J_\nu} \hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^\nu\right) \leq 4^d \operatorname{mes}(Q_\nu).$$

Следовательно, учитывая также (3.2.52) и неравенство (3.2.53), для меры множества $D_n := \bigcup_{\nu \leq n} \bigcup_{\mathbf{j} \in J_\nu} \hat{\Delta}_{\mathbf{j}}^\nu$ получим

$$\operatorname{mes}(D_n) \leq 4^d \operatorname{mes}\left(\bigcup_{\nu \leq n} Q_\nu\right) \leq (4^4 M)^d \operatorname{mes}(E_k). \tag{3.2.62}$$

Ясно также (см. (3.2.41), (3.2.58), (3.2.59) и (3.2.62)), что для каждого $n \geq \nu_0$ имеем

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{n} \sum_{\mathbf{j} \in J_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n = \sum_{\nu=\nu_0}^{n} \sum_{\mathbf{j} \in J_\nu} \alpha_{\nu,\mathbf{j}}^n \int\limits_{D_n} \hat{M}_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int\limits_{D_n} \hat{M}_{\mathbf{j}_0}^{\nu_0}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq (4^5 M K_{\nu_0})^d \operatorname{mes}(E_k). \tag{3.2.63}$$

Из определений системы Франклина и функции $\hat{M}_{\mathbf{j}}^\nu$ следует, что для любого элемента $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d) \in \mathbb{N}_0^d$, если $\max_i\{p_i\} > K_\nu$ то

$$(f_{\mathbf{p}}, \hat{M}_{\mathbf{j}}^\nu) = \int_{[0,1]^d} f_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \hat{M}_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \qquad \text{для всех} \quad \mathbf{j} \in \mathbb{N}_{K_\nu}^d.$$

Следовательно, для любого $n \geq \nu$ и для всех $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d_{K_\nu}$ имеем

$$(S_{K_n}, \hat{M}^\nu_{\mathbf{j}}) = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{N}^d_{K_n}} a_{\mathbf{p}}(f_{\mathbf{p}}, \hat{M}^\nu_{\mathbf{j}}) = \sum_{\mathbf{p}\in\mathbb{N}^d_{K_\nu}} a_{\mathbf{p}}(f_{\mathbf{p}}, \hat{M}^\nu_{\mathbf{j}}) = (S_{K_\nu}, \hat{M}^\nu_{\mathbf{j}}). \tag{3.2.64}$$

Поэтому с учетом (3.2.58) для любого $n \geq \nu_0$ получим

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{[0,1]^d} S_{K_{\nu_0}}(\mathbf{x})\hat{M}^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{[0,1]^d}[f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}\hat{M}^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right| = \\
&= \left|\left(S_{K_n} - [f]_{\lambda_k}, \hat{M}^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0}\right)\right| = \left|\left(S_{K_n} - [f]_{\lambda_k}, \sum_{\nu=\nu_0}^{n}\sum_{\mathbf{j}\in J_\nu}\alpha^n_{\nu,\mathbf{j}}\hat{M}^\nu_{\mathbf{j}} + \sum_{\mathbf{j}:\hat{\Delta}^n_{\mathbf{j}}\subset P_n}\alpha^n_{\mathbf{j}}\hat{M}^n_{\mathbf{j}}\right)\right| \leq \\
&\leq \left|\sum_{\nu=\nu_0}^{n}\sum_{\mathbf{j}\in J_\nu}\alpha^n_{\nu,\mathbf{j}}\left(S_{K_\nu} - [f]_{\lambda_k}, \hat{M}^\nu_{\mathbf{j}}\right)\right| + \left|\sum_{\mathbf{j}:\hat{\Delta}^n_{\mathbf{j}}\subset P_n}\alpha^n_{\mathbf{j}}\left(S_{K_n} - [f]_{\lambda_k}\hat{M}^n_{\mathbf{j}}\right)\right| =: I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{3.2.65}$$

Теперь будем отдельно оценивать I_1 и I_2. Учитывая (3.2.56), (3.2.41), (3.2.63) и (3.2.43), для I_1 получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \sum_{\nu=\nu_0}^{n}\sum_{\mathbf{j}\in J_\nu}\alpha^n_{\nu,\mathbf{j}}\left|\left(S_{K_\nu} - [f]_{\lambda_k}, \hat{M}^\nu_{\mathbf{j}}\right)\right| \leq (2^d\lambda_k + \lambda_k)\sum_{\nu=\nu_0}^{n}\sum_{\mathbf{j}\in J_\nu}\alpha^n_{\nu,\mathbf{j}} \leq \\
&\leq (4^6MK_{\nu_0})^d\lambda_k\mathrm{mes}(E_k) < 4^{-d}\varepsilon \qquad \text{для любого} \quad n \geq \nu_0.
\end{aligned} \tag{3.2.66}$$

Положим

$$H_n := \bigcup_{\mathbf{j}:\Delta^n_{\mathbf{j}}\subset P_n}\Delta^n_{\mathbf{j}}, \qquad T_k := \{\mathbf{x}\in\Delta^{\nu_0}_{\mathbf{j}_0} :\ |f(\mathbf{x})| > \lambda_k\}.$$

Ясно, что (см. также (3.2.43))

$$\mathrm{mes}(T_k) \leq \mathrm{mes}(E_k) \leq (4^7MK_{\nu_0})^{-d}\lambda_k^{-1}\varepsilon.$$

Из (3.2.41) и (3.2.58) следует, что

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq (4K_{\nu_0})^d\int_{H_n}\left|S_{K_n}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}\right|d\mathbf{x} = (4K_{\nu_0})^d\int_{H_n\cap T_k}\left|S_{K_n}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}\right|d\mathbf{x} + \\
&+ (4K_{\nu_0})^d\int_{H_n\setminus T_k}\left|S_{K_n}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}\right|d\mathbf{x} := I_3 + I_4.
\end{aligned} \tag{3.2.67}$$

Учитывая (3.2.57) и (3.2.43), для I_3 получим следующую оценку:

$$I_3 \leq (4K_{\nu_0})^d(2^d\lambda_k + \lambda_k)(4^7MK_{\nu_0})^{-d}\lambda_k^{-1}\varepsilon < 4^{-d}\varepsilon. \tag{3.2.68}$$

Поскольку $S_{K_n}(\mathbf{x}) - [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k}$ на множестве $H_n \setminus T_k$ ограничено и сходится по мере к 0 при $n \to \infty$, то для достаточно больших n получим $I_4 < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Следовательно, с учетом (3.2.65)–(3.2.68) получим (3.2.42).

Теперь докажем, что для всех $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$ коэффициенты $a_{\mathbf{m}}$ можно вычислить по формуле (3.2.5). Пусть $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}_0^d$, а натуральное число ν выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $\max\limits_{1 \le i \le d} \{m_i\} \le K_\nu$. Поскольку $f_{\mathbf{m}} \in \mathscr{S}_{K_\nu}$, а функции $\left\{\hat{M}_{\mathbf{j}}^\nu\right\}_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_{K_\nu}^d}$ образуют базис в $\mathscr{S}_{K_\nu}$, то существуют числа $\beta_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{j} \in \mathbb{N}_{K_\nu}^d$, такие, что

$$f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_{K_\nu}^d} \beta_{\mathbf{j}} \hat{M}_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}). \tag{3.2.69}$$

Из (3.2.69) и (3.2.42) получим

$$a_{\mathbf{m}} = (S_{K_\nu}, f_{\mathbf{m}}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_{K_\nu}^d} \beta_{\mathbf{j}} (S_{K_\nu}, \hat{M}_{\mathbf{j}}^\nu) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}_{K_\nu}^d} \beta_{\mathbf{j}} \lim_{k \to \infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} \hat{M}_{\mathbf{j}}^\nu(\mathbf{x}) d\mathbf{x} =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_{[0,1]^d} [f(\mathbf{x})]_{\lambda_k} f_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

что завершает доказательство теоремы 3.2.6. □

Для доказательства теоремы 3.2.9 нам нужны некоторые вспомогательные утверждения. Пусть $n \in \mathbb{N}_0$ и $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Положим $\Delta_n^{(i)} := \left[\dfrac{i}{2^n}, \dfrac{i+1}{2^n}\right)$ и

$$h_n^{(i)}(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Delta_{n+1}^{(2i)}, \\ -1, & \text{если } x \in \Delta_{n+1}^{(2i+1)}, \\ 0, & \text{если } x \notin \Delta_n^{(i)}. \end{cases} \tag{3.2.70}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.2.14 *Пусть $\{P_n\}$ – последовательность функций вида*

$$P_n(x) = \sum_{m=1}^{k_n} h_n^{(i_{nm})}(x),$$

где $0 \le i_{n1} < i_{n2} < \cdots < i_{nk_n} < 2^n$. Тогда для любой непрерывной на $[0,1]$ функции g выполняется

$$\lim_{n \to \infty} (g, P_n) := \lim_{n \to \infty} \int_0^1 g(x) P_n(x) dx = 0.$$

Доказательство. Пусть g – непрерывная функция, определенная на $[0,1]$. Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ и $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ положим

$$\alpha_n^{(i)} := \frac{1}{\mathrm{mes}(\Delta_n^{(i)})} \int_{\Delta_n^{(i)}} g(t) dt$$

и рассмотрим ступенчатую функцию $g_n(x) := \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_n^{(i)} \mathbb{1}_{\Delta_n^{(i)}}(x)$, где, как обычно, $\mathbb{1}_{\Delta_n^{(i)}}(x)$ – характеристическая функция множества $\Delta_n^{(i)}$. Очевидно, что $(g_n, P_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому из определения функций P_n и (3.2.70) получим неравенство

$$|(g, P_n)| = |(g - g_n, P_n)| \le \sup_x |g(x) - g_n(x)|,$$

которое завершает доказательство леммы 3.2.14, так как $g_n(x)$ сходится к $g(x)$ равномерно на $[0,1]$ при $n \to \infty$. $\square$

Для каждой интегрируемой функции F обозначим через $c_n(F)$ коэффициенты Фурье–Франклина функции F.

Лемма 3.2.15 *Пусть* $\Delta := \left[\frac{s}{2^r}, \frac{s+1}{2^r}\right)$ *– некоторый двоичный интервал. Для любых натуральных чисел M, k и для каждого положительного числа α существуют ступенчатая функция H и множество $E \subset \Delta$ такие, что*

1. $H(x) + \mathbb{1}_\Delta(x) = \begin{cases} 2^k, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin E, \end{cases}$

2. *E является конечным объединением двоичных интервалов и* $\mathrm{mes}(E) = \dfrac{\mathrm{mes}(\Delta)}{2^k}$,

3. $c_0(H) = 0$ *и* $\sum_{n=0}^{M} |c_n(H) f_n(x)| < \alpha$ *для всехх* $x \in [0,1]$.

Доказательство. В силу леммы 3.2.14, можно выбрать натуральное число $m > r$ настолько большим, чтобы для функции

$$H(x) = H_m(x) := \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \sum_{j=0}^{2^{m-r}-1} h_{m+i}^{(2^i(s2^{m-r}+j))}(x)$$

выполнялось неравенство

$$\sum_{n=0}^{M} |c_n(H) f_n(x)| < \alpha \quad \forall x \in [0,1].$$

Из (3.2.70) непосредственно следует, что для любого натурального числа p, $0 \le p < 2^m$, имеем

$$\sum_{i=0}^{k-1} 2^i h_{m+i}^{(2^i p)}(x) = \begin{cases} 2^k - 1, & \text{если } x \in \left[\frac{p}{2^m}, \frac{p}{2^m} + \frac{1}{2^{m+k}}\right), \\ -1, & \text{если } x \in \left[\frac{p}{2^m} + \frac{1}{2^{m+k}}, \frac{p+1}{2^m}\right), \\ 0, & \text{если } x \notin \left[\frac{p}{2^m}, \frac{p+1}{2^m}\right). \end{cases}$$

Поэтому, полагая

$$E := \bigcup_{j=0}^{2^{m-r}-1} \left[\frac{s2^{m-r}+j}{2^m}, \frac{s2^{m-r}+j}{2^m} + \frac{1}{2^{m+k}}\right),$$

получим, что

$$H(x) + \mathbb{1}_\Delta(x) = \begin{cases} 2^k, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin E \end{cases} \qquad \text{для всех } x \in [0,1].$$

Ясно также, что $\operatorname{mes}(E) = \dfrac{\operatorname{mes}(\Delta)}{2^k}$ и $c_0(H) = 0$.

Лемма 3.2.15 доказана. □

Лемма 3.2.16 *Пусть g – неотрицательная ступенчатая функция, определенная на $[0,1)$, и пусть $E := \operatorname{supp}(g)$ – конечное объединение двоичных интервалов. Тогда для любого натурального числа M и любых положительных чисел α и ε существует ступенчатая функция P такая, что*

1) $\operatorname{supp}(P) \subset E$;

2) $\operatorname{mes}(\operatorname{supp}(P+g)) < \alpha$;

3) $\min\limits_x\{P(x)+g(x):\ P(x)+g(x) \neq 0\} > 4 \max\limits_{x\in[0,1)} g(x)$;

4) $\lambda \cdot \operatorname{mes}\{x:\ P(x)+g(x) > \lambda\} < \varepsilon$ *для любого положительного числа* λ;

5) $c_0(P) = 0$ *и* $\displaystyle\sum_{n=0}^{M} |c_n(P) f_n(x)| < \alpha$ *для всех* $x \in [0,1]$;

6) для любого $\delta > 0$ существует множество $G \subset [0,1]$ такое, что $\operatorname{mes}(G) > 1-\delta$ и ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(P+g) f_n(x)$ сходится равномерно к $P+g$ на множестве G;

7) существует $M_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $\displaystyle\sum_{n=M_1}^{\infty} |c_n(P+g) f_n(x)| < \alpha$ для всех $x \in G$.

Доказательство. Пусть α, ε и δ – положительные числа. Допустим, что множество $E = \operatorname{supp}(g)$ является конечным объединением непересекающихся двоичных интервалов с длинами больше чем h. Положим $\gamma := \max\limits_x g(x)$ и выберем натуральное число d, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{1}{2^d} < \min\left\{\alpha, \frac{h}{2}, \frac{\varepsilon}{2\gamma}\right\}. \tag{3.2.71}$$

Представим множество E в форме $E = \bigcup_{i=1}^{m} \Delta_i$, где $\Delta_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$, являются непересекающимся двоичными интервалами с длинами $\mathrm{mes}(\Delta_i) = \dfrac{1}{2^d}$. Заметим, что g постоянна на каждом интервале $\Delta_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через γ_i значение функции g на интервале Δ_i. Теперь поочередно выберем натуральные числа $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$, удовлетворяющие неравенствам

$$2^{k_1}\gamma_1 > 4\gamma, \qquad 2^{k_i}\gamma_i > 2^{k_{i-1}}\gamma_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, m. \tag{3.2.72}$$

Для каждого $i,\ i = 1, 2, \ldots, m$, применяя лемму 3.2.15, получим ступенчатые функции $H_1, H_2, \ldots, H_m$ и множества (объединения двоичных интервалов) $E_1, E_2, \ldots, E_m$, удовлетворяющие условиям:

$$H_i(x) + \mathbb{1}_{\Delta_i}(x) = \begin{cases} 2^{k_i}, & \text{если } x \in E_i, \\ 0, & \text{если } x \notin E_i, \end{cases} \tag{3.2.73}$$

$$\mathrm{mes}(E_i) = \frac{\mathrm{mes}(\Delta_i)}{2^{k_i}} = \frac{1}{2^{d+k_i}}, \tag{3.2.74}$$

$$c_0(H_i) = 0, \qquad \sum_{n=0}^{M} |c_n(H_i) f_n(x)| < \frac{\alpha}{2^i \gamma_i} \quad \text{для всех} \ \ x \in [0, 1]. \tag{3.2.75}$$

Положим

$$P(x) := \sum_{i=1}^{m} \gamma_i H_i(x). \tag{3.2.76}$$

Ясно, что (см. (3.2.73))

$$P(x) + g(x) = \begin{cases} \gamma_i 2^{k_i}, & \text{если } \ x \in E_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ 0, & \text{если } \ x \notin \bigcup_{i=1}^{m} E_i. \end{cases} \tag{3.2.77}$$

Из (3.2.71), (3.2.74) и (3.2.77) следует, что

$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}(P + g)) = \mathrm{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{d+k_i}} < \frac{2}{2^{d+k_1}} < \frac{1}{2^d} < \alpha.$$

Итак, функция $P(x)$ удовлетворяет утверждениям 1)– 3) леммы 3.2.16 (см. также (3.2.72)). Утверждение 5) немедленно следует из (3.2.75) и (3.2.76).

Приступим к доказательству пункта 4). Пусть λ – некоторое положительное число. Если $\lambda < \gamma_m 2^{k_m}$, то, полагая $s := \min\{i : \ \lambda < \gamma_i 2^{k_i}\}$ и учитывая (3.2.72) и (3.2.77), получим, что $\{x \in [0,1]: \ P(x)+g(x) > \lambda\} = \bigcup\limits_{i=s}^{m} E_i$. Поэтому, имея в виду также (3.2.71) и (3.2.74), получим

$$\lambda \cdot \mathrm{mes}\{x \in [0,1]: \ P(x)+g(x) > \lambda\} < \lambda \sum_{i=s}^{m} \frac{1}{2^{d+k_i}} < \frac{2\gamma_s}{2^d} \leq \frac{2\gamma}{2^d} < \varepsilon.$$

В случае $\lambda \geq \gamma_m 2^{k_m}$ утверждение 4) очевидно, поскольку $\{x: \ P(x)+g(x) > \lambda\} = \varnothing$ (см. (3.2.72) и (3.2.77)).

Утверждения 6) и 7) леммы 3.2.16 получаются как следствия из более общих результатов, полученных в работе [120], где, в частности, доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.D (Геворкян Г.Г., [120, теорема 3.2]). *Пусть $\varphi, \psi \in L^1[0,1]$. Если $\varphi(x) = \psi(x)$, когда $x \in [\alpha, \beta]$, то для любого интервала $[\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$ ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(\varphi) - c_n(\psi)||f_n(x)|$$

равномерно сходится на $[\alpha', \beta']$.

Лемма 3.2.16 доказана. □

Доказательство теоремы 3.2.9. Пусть $g_0 := \mathbb{1}_{[0,1]}$ – характеристическая функция множества $E_0 := [0,1]$, а $M_0 := 1$. Поочередно применяя лемму 3.2.16 для $g = g_{k-1}$, $M = M_{k-1}$ и $E = E_{k-1}$, для каждого натурального k получим ступенчатую функцию P_k, натуральное число M_k и множество $G_k \subset [0,1]$, удовлетворяющие условиям:

$$\mathrm{supp}(P_k) \subset E_{k-1}, \tag{3.2.78}$$

$$\min_x \{g_k(x): \ g_k(x) \neq 0\} > 4 \max_x g_{k-1}(x), \quad \text{где} \ \ g_k(x) := P_k(x) + g_{k-1}(x), \tag{3.2.79}$$

$$\mathrm{mes}(E_k) < \frac{1}{2^{k+2}}, \quad \text{где} \quad E_k := \mathrm{supp}(g_k), \tag{3.2.80}$$

$$\lambda \cdot \mathrm{mes}\{x: \ g_k(x) > \lambda\} < \frac{1}{2^k} \quad \forall \lambda > 0, \tag{3.2.81}$$

$$c_0(P_k) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{M_{k-1}} |c_n(P_k) f_n(x)| < \frac{1}{2^{k+2}} \qquad \forall x \in [0,1], \tag{3.2.82}$$

$$\mathrm{mes}(G_k) > 1 - \frac{1}{2^{k+2}\Gamma_k}, \qquad \text{где} \ \ \Gamma_k := \max_x g_k(x), \tag{3.2.83}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(g_k) f_n(x) \quad \text{равномерно сходится к} \ \ g_k \ \ \text{на множестве} \ \ G_k, \tag{3.2.84}$$

$$\sum_{n=M_k}^{\infty} |c_n(g_k)f_n(x)| < \frac{1}{2^{k+2}} \quad \forall x \in G_k. \tag{3.2.85}$$

Таким образом мы определим последовательности $\{P_k\}$, $\{g_k\}$, $\{M_k\}$ и $\{G_k\}$, удовлетворяющие условиям (3.2.78)–(3.2.85). Положим

$$X := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} X_k, \quad \text{где} \quad X_k := G_k \cap E_k^c, \quad k = 1, 2, \dots \tag{3.2.86}$$

Из соотношений (3.2.80) и (3.2.83) следует, что

$$\operatorname{mes}(X_k) > 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

поэтому, с учетом (3.2.86), получим, что $\operatorname{mes}(X) = 1$.

Нетрудно заметить из (3.2.82), что если $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, то для достаточно больших k справедливо неравенство $|c_n(P_k)| < \frac{1}{2^{k+2}}$. Поэтому для любого натурального n ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n(P_k)$ абсолютно сходится. Положим

$$A_0 := 1, \qquad A_n := \sum_{k=1}^{\infty} c_n(P_k), \quad n = 1, 2, \dots$$

и докажем, что частичные суммы $S_{M_q}(x)$ ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n f_n(x)$$

сходятся к 0 в любой точке $x \in X$ при $q \to \infty$. Во-первых, заметим, что из определения функций g_k (см. (3.2.79)) следует, что для всех $x \in [0, 1]$ имеем

$$S_{M_q}(x) = \sum_{n=0}^{M_q} A_n f_n(x) = \sum_{n=0}^{M_q} c_n(g_q) f_n(x) + \sum_{n=1}^{M_q} \left(\sum_{k=q+1}^{\infty} c_n(P_k) \right) f_n(x). \tag{3.2.87}$$

В силу (3.2.82) имеем, что для любого $x \in [0, 1]$ выполняется

$$\left| \sum_{n=1}^{M_q} \left(\sum_{k=q+1}^{\infty} c_n(P_k) \right) f_n(x) \right| \le \sum_{k=q+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{M_q} |c_n(P_k) f_n(x)| \le \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2}} \le \frac{1}{2^{q+1}}. \tag{3.2.88}$$

Поэтому с учетом (3.2.84), (3.2.85), (3.2.87) и (3.2.88) получим, что для любого $x \in G_q$

$$\left| S_{M_q}(x) - g_q(x) \right| \le \sum_{n=M_q}^{\infty} |c_n(g_q) f_n(x)| + \frac{1}{2^{q+1}} < \frac{1}{2^q} \quad \text{для всех} \quad x \in G_q. \tag{3.2.89}$$

Пусть $x \in X$ – некоторая точка. Тогда существует натуральное число n_0 такое, что $x \in X_q = G_q \cap E_q^c$ для всех $q > n_0$. Следовательно, пользуясь также неравенством (3.2.80), получим, что $|S_{M_q}(x)| < \frac{1}{2^q}$ для любого $q > n_0$, а это означает, что

$$S_{M_q}(x) \to 0 \quad \forall x \in X.$$

Пусть теперь λ – положительное число больше Γ_2. Тогда для некоторого q имеем $4\Gamma_{q-1} \le \lambda < 4\Gamma_q$. Заметим, что если $k < q$, то $g_k(x) \le \Gamma_k \le \Gamma_{q-1}$ для всех $x \in [0,1]$. Поэтому, используя знаменитый результат, полученный Чиселским в [110], получим

$$\left|\sum_{n=0}^{M_k} c_n(g_k) f_n(x)\right| \le 3\Gamma_{q-1} \quad \forall x \in [0,1].$$

Из последнего неравенства, (3.2.87) и (3.2.88) выводим, что

$$\{x : \ |S_{M_k}(x)| > \lambda\} = \varnothing \quad \text{для всех} \ \ k < q,$$

следовательно,

$$\left\{x : \ \sup_k |S_{M_k}(x)| > \lambda\right\} \subset \bigcup_{k=q}^{\infty} \{x : \ |S_{M_k}(x)| > \lambda\}. \tag{3.2.90}$$

Комбинируя (3.2.90) с (3.2.89), (3.2.83) и (3.2.81), получим

$$\lambda \cdot \operatorname{mes}\left\{x : \ \sup_k |S_{M_k}(x)| > \lambda\right\} \le \lambda \cdot \sum_{k=q}^{\infty} \operatorname{mes}\{x : \ |S_{M_k}(x)| > \lambda\} \le$$

$$\le \sum_{k=q}^{\infty} \lambda \left(\operatorname{mes}\left\{x : \ g_k(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} + \operatorname{mes}(G_k^c)\right) \le \sum_{k=q}^{\infty} \left(\frac{2}{2^k} + \lambda \frac{1}{2^{k+2}\Gamma_k}\right) \le \frac{5}{2^q},$$

что завершает доказательство теоремы 3.2.9.

□

3.3 Теоремы единственности для системы Виленкина и обобщенной системы Хаара

3.3.1 Метод суммирования рядов по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара

Известно, что ряд Фурье интегрируемой на $[0,1]$ функции по системе Виленкина, а также по обобщенной системе Хаара может расходиться почти всюду (см. [121], [122]). Здесь мы приведем новый метод суммирования таких рядов и докажем некоторые свойства этого метода. В частности докажем почти всюду суммируемость этим методом рядов Фурье интегрируемых функций (см. [143], [144]). В следующем пункте с помощью этого метода суммирования докажем теоремы единственности для этих систем.

Напомним определение системы Виленкина (определение обобщенной системы Хаара приведено в разделе 1.3). Пусть $\mathbf{P} := \{p_k\}$ – некоторая последовательность натуральных чисел с условием $p_k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}$. Положим $m_0 = 1$, $m_k = m_{k-1}p_k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда любое неотрицательное целое число n единственным образом представляется в виде

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \quad \text{где} \ \ n_k \in \{0, 1, \dots, p_k - 1\}.$$

Любое число $x \in [0, 1)$ тоже единственным образом представляется в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \quad \text{где} \quad x_k \in \{0, 1, \dots, p_k - 1\},\ k \in \mathbb{N}, \tag{3.3.1}$$

и для бесконечно многих $k \in \mathbb{N}$ имеет место $x_k \neq p_k - 1$. Обобщенные функции Радемахера определяются по формуле

$$R_k(x) := \exp\left(\frac{2\pi i x_k}{p_k}\right). \tag{3.3.2}$$

Система Виленкина $\Psi := \{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется по правилу

$$\Psi_0(x) \equiv 1 \quad \text{и} \quad \Psi_n(x) := \prod_{k=1}^{\infty} R_k^{n_k}(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k x_k}{p_k}\right). \tag{3.3.3}$$

Эта система введена в 1947 г. Н.Я. Виленкиным [123]. Когда $p_k = 2$, $k \in \mathbb{N}$, система Виленкина совпадает с системой Уолша. Если $p_k = a \in \mathbb{N}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то эта система называется системой Крестенсона–Леви. Если последовательность p_k ограничена, то говорят, что система Ψ порождена ограниченной последовательностью. Свойства таких систем во многом совпадают со свойствами системы Уолша. Однако в некоторых случаях это не так (см., например, [124]).

Систему Виленкина или обобщенную систему Хаара, построенную по последовательности $\mathbf{P}$, будем называть $\mathbf{P}$-системой; обозначим ее через $\{f_n\}$. Положим

$$\mathcal{I}_k := \left\{ \left[\frac{j}{m_k}, \frac{j+1}{m_k}\right) : \quad j = 0, 1, \dots, m_k - 1 \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для интервала $J \in \mathcal{I}_k,\ k \in \mathbb{N}$, обозначим через $\tilde{J}$ тот интервал из $\mathcal{I}_{k-1}$, который содержит J и определим интервалы $(J)_l$ $(l \in \mathbb{Z})$ следующим образом:

1) $(J)_0 = J, \quad (J)_l \in \mathcal{I}_k, \quad (J)_l \subset \tilde{J};$

2) правый конец интервала $(J)_l$ совпадает с левым концом интервала $(J)_{l+1}$, причем концы отрезка $\tilde{J}$ отождествляются, т.е. если правый конец интервала $(J)_l$ совпадает с правым концом $\tilde{J}$ и есть $\dfrac{j}{m_{k-1}}$, то левый конец интервала $(J)_{l+1}$ будет $\dfrac{j-1}{m_{k-1}}$.

Для каждого интервала $J \in \mathcal{I}_k$ и натурального числа $q \le \dfrac{p_k}{2}$ положим

$$(J)^q := \bigcup_{l=-q}^{q} (J)_l, \qquad (J)^0 = (J)_0 = J,$$

$$\varphi_J^{(q)}(t) := \begin{cases} \dfrac{m_k}{q}\left(1 - \dfrac{|l|}{q}\right), & \text{если} \quad t \in (J)_l, \quad |l| < q, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin (J)^{q-1}. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

Ясно, что

$$\varphi_J^{(1)}(t) = m_k \mathbb{1}_J(t), \quad \int_0^1 \varphi_J^{(q)}(t)dt = \int_{(J)^{q-1}} \varphi_J^{(q)}(t)dt = 1 \quad \text{для всех } q \le \frac{p_k}{2}. \tag{3.3.5}$$

Для каждого натурального числа k и для каждого $x \in [0,1)$ обозначим через $I_{k,x}$ тот интервал из $\mathcal{I}_k$, который содержит точку x. Иногда, если $J = I_{k,x}$, то для функции, определенной в (3.3.4), будем использовать обозначение $\varphi_{k,x}^{(q)}(t)$, т.е. $\varphi_{k,x}^{(q)}(t) := \varphi_{I_{k,x}}^{(q)}(t)$. Учитывая определение **P**-системы ($\{f_n(x)\} = \{\Psi_n(x)\}$ или $\{f_n(x)\} = \{\chi_n(x)\}$), очевидно, что при любом $\varphi_{k,x}^{(q)}$ имеем

$$\left(f_n, \varphi_{k,x}^{(q)}\right) := \int_0^1 f_n(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt = 0, \quad \text{когда} \quad n \ge m_k.$$

Поэтому для любого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \tag{3.3.6}$$

и любого $x \in [0,1)$, при любых натуральных k и q, $2q \le p_k$, определены суммы

$$\sigma_{k,q}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 f_n(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt. \tag{3.3.7}$$

Пусть

$$S_m(x) := \sum_{n=0}^{m} a_n f_n(x)$$

– частичная сумма ряда (3.3.6). Ясно, что для всех $x \in [0,1)$ имеем

$$\sigma_{k,1}(x) = S_{m_k - 1}(x) \quad \text{и} \quad \sigma_{k,q}(x) = \int_0^1 S_{m_r - 1}(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt, \quad \text{если} \quad r \ge k. \tag{3.3.8}$$

Положим

$$S^*(x) := \sup_m |S_m(x)|, \qquad \sigma^*(x) := \sup_{k,q} |\sigma_{k,q}(x)|. \tag{3.3.9}$$

Нетрудно заметить, что формулами (3.3.7) определяется некоторый линейный метод суммирования, т.е.

1. $\sigma_{k,q}(x) = \sum\limits_{n=0}^{m_k-1} \alpha_n^{k,q} a_n \Psi_n(x)$, когда $\{f_n(x)\} = \{\Psi_n(x)\}$;

2. $\sigma_{k,q}(x) = \sum\limits_{n=0}^{m_k-1} \beta_n^{k,q} a_n \chi_n(x)$, когда $\{f_n(x)\} = \{\chi_n(x)\}$,

где числа $\alpha_n^{k,q}$ и $\beta_n^{k,q}$ не зависят от последовательности коэффициентов a_n. Заметим, что этот метод отличается от известных методов суммирования для рядов по **P**-системам (см. [125]).

Ясно, что если ряд (3.3.6) является рядом Фурье некоторой интегрируемой функции f, то имеем

$$\sigma_{k,q}(f,x) := \sigma_{k,q}(x) = \int_0^1 f(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt \tag{3.3.10}$$

и

$$\sigma^*(f,x) := \sigma^*(x) \le \sup_{\substack{k,q:\\ 1\le q\le p_k/2}} \int_{(I_{k,x})^q} |f(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)|dt. \tag{3.3.11}$$

Обозначим

$$\mathcal{M}^*(f,x) := \sup_{\substack{k,q:\\ 1\le q\le p_k/2}} \frac{1}{\mathrm{mes}((I_{k,x})^q)} \int_{(I_{k,x})^q} |f(t)|dt.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.3.1 *Для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ и для любого $x \in [0,1)$ выполняется неравенство*

$$\sigma^*(f,x) \le \mathcal{M}^*(f,x).$$

Доказательство леммы 3.3.1. Пусть f – интегрируемая функция и $x \in [0,1)$. Из (3.3.4) следует, что для любых натуральных чисел k и q, $2q \le p_k$, имеем неравенство

$$\int_{(I_{k,x})^q} |f(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)|dt = \frac{m_k}{q^2}\sum_{\nu=0}^{q-1}\int_{(I_{k,x})^\nu}|f(t)|dt \le \mathcal{M}^*(f,x)\frac{m_k}{q^2}\sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{2\nu+1}{m_k} = \mathcal{M}^*(f,x),$$

которое вместе с (3.3.11) завершает доказательство. □

Теорема 3.3.2 ([144]). *Для любого положительного числа* λ *и любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *выполняются неравенства:*

1) $\mathrm{mes}\{x \in [0,1): \ \mathcal{M}^*(f,x) > \lambda\} \le \dfrac{3}{\lambda}\|f\|_1$;

2) $\mathrm{mes}\{x \in [0,1): \ \sigma^*(f,x) > \lambda\} \le \dfrac{3}{\lambda}\|f\|_1$.

Доказательство. Заметим, что второе утверждение теоремы непосредственно следует из первого неравенства и леммы 3.3.1. Приступим к доказательству первого неравенства.

Пусть λ – некоторое положительное число. Положим

$$F_\lambda := \{x \in [0,1): \ \mathcal{M}^*(f,x) > \lambda\}.$$

Из определения функции $\mathcal{M}^*(f,x)$ следует, что для каждого $x \in F_\lambda$ существует интервал $(I_{k,x})^q$, $2q \le p_k$, такой, что

$$\frac{1}{\mathrm{mes}((I_{k,x})^q)} \int_{(I_{k,x})^q} |f(t)|dt > \lambda. \tag{3.3.12}$$

Обозначим через G множество всех $(I_{k,x})^q$, удовлетворяющих неравенству (3.3.12). Ясно, что $F_\lambda = \bigcup\limits_{I \in G} I$. Пусть I_1 – элемент из множества G с наибольшей мерой (возможно, не единственный). Отметим, что такой элемент существует, поскольку $\mathrm{mes}((I_{k,x})^q) = \dfrac{2q+1}{m_k}$ и $0 \le q \le p_k/2$.

Допустим, что уже выбраны множества $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$. Положим

$$G_n := \{I \in G: \ I \cap I_\nu = \varnothing, \quad \nu = 1,2,\ldots,n-1\}, \tag{3.3.13}$$

и выберем множество $I_n \in G_n$ с условием

$$\mathrm{mes}(I_n) = \max\{\mathrm{mes}(I): \ I \in G_n\}. \tag{3.3.14}$$

Так, по индукции получаем последовательность $\{I_n\}$, удовлетворяющую условию (3.3.14). Пусть I – некоторый элемент из G и m – наименьшее натуральное число, для которого $I \cap I_m \ne \varnothing$. Допустим, $I_m = (I_{k',x'})^{q'}$ для некоторых k', x' и q'. Положим $\widehat{I_m} := (I_{k',x'})^{3q'}$. Из (3.3.13) и (3.3.14) вытекает, что $I \subset \widehat{I_m}$, следоватеьно, $F_\lambda \subset \bigcup\limits_n \widehat{I}_n$. Поэтому, учитывая также (3.3.12) и (3.3.13), получим

$$\mathrm{mes}(F_\lambda) \le 3\sum_n \mathrm{mes}(I_n) < \frac{3}{\lambda}\sum_n \int_{I_n} |f(t)|dt = \frac{3}{\lambda}\int_{\cup I_n} |f(t)|dt \le \frac{3}{\lambda}\|f\|_1.$$

Теорема 3.3.2 доказана. $\square$

Следующая теорема доказывается с применением стандартных методов (см. [119]).

Теорема 3.3.3 ([144]). *Для любой интегрируемой функции f выполняется*

$$\operatorname{mes}\{x \in [0,1): \ \sigma^*(f,x) > \lambda\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \textit{при} \ \ \lambda \to +\infty.$$

Доказательство. Пусть $f \in L^1(0,1)$ и пусть λ – некоторое положительное число. Положим

$$f_{1,\lambda}(t) := [f(t)]_{\lambda/2}, \quad f_{2,\lambda}(t) := f(t) - f_{1,\lambda}(t).$$

Из (3.3.4) и (3.3.10) следует, что для всех $x \in [0,1)$ имеем $\sigma^*(f_{1,\lambda},x) \le \lambda/2$. Поэтому, учитывая также теорему 3.3.2, получаем

$$\operatorname{mes}\{x \in [0,1): \ \sigma^*(f,x) > \lambda\} \le \operatorname{mes}\left\{x \in [0,1): \ \sigma^*(f_{1,\lambda},x) > \frac{\lambda}{2}\right\} +$$

$$+\operatorname{mes}\left\{x \in [0,1): \ \sigma^*(f_{2,\lambda},x) > \frac{\lambda}{2}\right\} = \operatorname{mes}\left\{x \in [0,1): \ \sigma^*(f_{2,\lambda},x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \le \frac{6}{\lambda}\|f_{2,\lambda}\|_1.$$

Поскольку f – интегрируемая функция, то $\|f_{2,\lambda}\|_1 \to 0$ при $\lambda \to \infty$, которое вместе с последним неравенством завершает доказательство теоремы 3.3.3. $\square$

Ясно, что если f – непрерывная функция на $[0,1)$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{k,q}(f,x) = f(x)$ равномерно на $[0,1)$. С помощью этого факта можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.3.4 ([144]). *Для каждой интегрируемой на $[0,1)$ функции f имеем*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{k,q}(f,x) = f(x) \quad \textit{для п.в.} \ x \in [0,1).$$

Доказательство. Пусть ε – произвольное положительное число и $f \in L^1(0,1)$. Выберем непрерывную функцию g так, чтобы выполнялось неравенство $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Для каждого положительного числа z обозначим через $\mathcal{P}_z$ следующее множество:

$$\mathcal{P}_z := \left\{x \in [0,1): \ \limsup_{k\to\infty} |\sigma_{k,q}(x) - f(x)| > z\right\}.$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{k,q}(g,x) = g(x)$ равномерно на $[0,1)$, то

$$\operatorname{mes}(\mathcal{P}_z) = \operatorname{mes}\left\{x \in [0,1): \ \limsup_{k\to\infty} |\sigma_{k,q}(f-g,x) - (f(x)-g(x))| > z\right\} \le$$

$$\le \operatorname{mes}\left\{x\in[0,1):\limsup_{k\to\infty}|\sigma_{k,q}(f-g,x)|>\frac{z}{2}\right\}+\operatorname{mes}\left\{x\in[0,1):|(f(x)-g(x))|>\frac{z}{2}\right\}\le$$
$$\le\frac{6}{z}\|f-g\|_1+\frac{2}{z}\|f-g\|_1<\frac{8\varepsilon}{z}.$$

Из последнего неравенства следует, что $\operatorname{mes}(\mathcal{P}_z)=0$ для любого положительного числа z, а это завершает доказательство теоремы 3.3.4. □

Теперь докажем, что метод суммирования, определенный выше, является регулярным. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3.5 ([145], [146]). *Существует постоянная $C>0$ такая, что для любого ряда вида* (3.3.6) *(по* **P***-системе) выполняется неравенство*

$$\sigma^*(x)\le CS^*(x)\quad \textit{для всех}\ \ x\in[0,1). \tag{3.3.15}$$

Более того, если ряд (3.3.6) *в точке x сходится и $S(x)$ – сумма ряда в этой точке, то*

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{k,q}(x)=S(x).$$

Доказательство. Так как доказательство этой теоремы зависит от того, является ли $\{f_n\}$ обобщенной системой Хаара или системой Виленкина, то мы обсудим эти случаи отдельно.

1°. Пусть $\{f_n\}=\{\chi_n\}$ – обобщенная система Хаара. Пусть, далее, $x\in[0,1)$, $k,q\in\mathbb{N}$ и $2q\le p_k$. Допустим, $I_{k,x}$ (интервал из $\mathcal{I}_k$, который содержит точку x) имеет вид

$$I_{k,x}=\left[\frac{r}{m_{k-1}}+\frac{s}{m_k},\frac{r}{m_{k-1}}+\frac{s+1}{m_k}\right), \tag{3.3.16}$$

где $r\in\{0,1,\dots,m_{k-1}-1\}$, $s\in\{0,1,\dots,p_k-1\}$. В силу того, что частичная сумма $S_{m_{k-1}-1}(t)$ ряда (3.3.6) постоянна на интервале $\tilde{I}_{k,x}=\left[\frac{r}{m_{k-1}},\frac{r+1}{m_{k-1}}\right)$, из (1.3.3), (3.3.4), (3.3.5) и (3.3.8) получим (для краткости записи коэффициент при $\chi_{r,n}^{k-1}(t)$ в (3.3.6) обозначен через α_n):

$$\begin{aligned}
\sigma_{k,q}(x) &= S_{m_{k-1}-1}(x) + \sum_{n=1}^{p_k-1} \alpha_n \int\limits_{(I_{k,x})^{q-1}} \chi_{r,n}^{k-1}(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt = \\
&= S_{m_{k-1}-1}(x) + \sum_{n=1}^{p_k-1} \alpha_n \sum_{l=-(q-1)}^{q-1} \int\limits_{(I_{k,x})_l} \chi_{r,n}^{k-1}(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt = \\
&= S_{m_{k-1}-1}(x) + \sum_{n=1}^{p_k-1} \alpha_n \sum_{l=-(q-1)}^{q-1} \sqrt{m_{k-1}} \exp\left(\frac{2\pi i(s+l)n}{p_k}\right) \frac{1}{q}\left(1-\frac{|l|}{q}\right) = \\
&= S_{m_{k-1}-1}(x) + \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{p_k-1} \alpha_n \chi_{r,n}^{k-1}(x) \sum_{l=-(q-1)}^{q-1} \exp\left(\frac{2\pi i l n}{p_k}\right)\left(1-\frac{|l|}{q}\right).
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{l=-(q-1)}^{q-1} \exp(ixl)\left(1-\frac{|l|}{q}\right) = 2K_{q-1}(x) = \frac{1}{q}\left(\frac{\sin\frac{qx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2,$$

где $K_{q-1}(x)$ – ядро Фейера для тригонометрической системы (см. например [9]). Следовательно, из (3.3.17) получим, что

$$\sigma_{k,q}(x) = S_{m_{k-1}-1}(x) + \frac{2}{q}\sum_{n=1}^{p_k-1} \alpha_n \chi_{r,n}^{k-1}(x) K_{q-1}\left(\frac{2\pi n}{p_k}\right) =: S_{m_{k-1}-1}(x) + A. \tag{3.3.18}$$

Положим $B_0 = 0$ и

$$B_m := \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \chi_{r,n}^{k-1}(x), \quad m = 1, 2, \ldots, p_k - 1, \quad \lambda := \max_{1\le m<p_k} |B_m|. \tag{3.3.19}$$

Применяя преобразование Абеля ко второму слагаемому в (3.3.18), получим

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2}{q}\left(\sum_{n=1}^{p_k-2} B_n\left(K_{q-1}\left(\frac{2\pi n}{p_k}\right) - K_{q-1}\left(\frac{2\pi(n+1)}{p_k}\right)\right) + B_{p_k-1}K_{q-1}\left(\frac{2\pi(p_k-1)}{p_k}\right)\right) \\
&= -\frac{2}{q}\sum_{n=1}^{p_k-2} B_n \int_{\frac{2\pi n}{p_k}}^{\frac{2\pi(n+1)}{p_k}} K'_{q-1}(t)dt + \frac{2}{q}B_{p_k-1}K_{q-1}\left(\frac{2\pi(p_k-1)}{p_k}\right) =: A_1 + A_2.
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Поскольку ядро Фейера удовлетворяет условию $0 \le K_{q-1}(t) \le \dfrac{q}{2}$ для всех $t \in [0, 2\pi]$, то из (3.3.19) и (3.3.20) следует, что

$$|A_2| \le \lambda. \tag{3.3.21}$$

Ясно, что

$$|A_1| \le \frac{2\lambda}{q}\int_0^{2\pi} |K'_{q-1}(t)|dt = \frac{4\lambda}{q}\int_0^{\pi} |K'_{q-1}(t)|dt = \frac{4\lambda}{q^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\left(\frac{\sin^2(qu)}{\sin^2 u}\right)'\right| du. \tag{3.3.22}$$

Производную функции $g(u) = \dfrac{\sin^2(qu)}{\sin^2 u}$ представим в следующем виде:

$$g'(u) = \left(\frac{\sin^2(qu)}{u^2} \cdot \frac{u^2}{\sin^2 u}\right)' = \frac{2qu\sin(qu)\cos(qu) - 2\sin^2(qu)}{u^3} \cdot \frac{u^2}{\sin^2 u} +$$

$$+ \frac{\sin^2(qu)}{u^2} \cdot \frac{2u\sin u - 2u^2\cos u}{\sin^3 u} =: g_1(u) + g_2(u). \tag{3.3.23}$$

Учитывая, что на интервале $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ имеет место $\sin u \geq \dfrac{2}{\pi}u$, для интеграла функции $|g_1(u)|$ получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g_1(u)|du \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{qu\sin(2qu) - 2\sin^2(qu)}{u^3}\right| du = \\ = \frac{\pi^2 q^2}{4} \int_0^{\frac{\pi q}{2}} \left|\frac{t\sin(2t) - 2\sin^2 t}{t^3}\right| dt \leq \frac{\pi^2 q^2}{4} \int_0^{\infty} \left|\frac{t\sin(2t) - 2\sin^2 t}{t^3}\right| dt \leq C_1 q^2.\end{gathered} \tag{3.3.24}$$

Ясно также, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g_2(u)|du \leq q^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{2u\sin u - 2u^2\cos u}{\sin^3 u}\right| du \leq C_2 q^2. \tag{3.3.25}$$

Следовательно, из (3.3.20)–(3.3.25) получим, что

$$|A| \leq \lambda + \frac{4\lambda}{q^2}(C_1 q^2 + C_2 q^2) = C_3 \lambda. \tag{3.3.26}$$

Из (3.3.19) имеем, что $\lambda \leq 2S^*(x)$, поэтому, (см. (3.3.9), (3.3.18) и (3.3.26)),

$$|\sigma_{k,q}(x)| \leq C_4 S^*(x),$$

тем самым первая часть теоремы 3.3.5 доказана.

Пусть теперь ряд (3.3.6) в точке x сходится и $S(x)$ – сумма ряда. Тогда $\lambda \to 0$ при $k \to \infty$, следовательно, из (3.3.18) и (3.3.26) получим, что

$$\sigma_{k,q}(x) \to S(x) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Теорема 3.3.5 в случае $\{f_n(x)\} = \{\chi_n(x)\}$ доказана.

2°. Пусть теперь $\{f_n\} = \{\Psi_n\}$ – система Виленкина. Допустим, $x \in [0,1)$, $k, q \in \mathbb{N}$, $2q \leq p_k$ и интервал $I_{k,x}$ имеет вид (3.3.16). Сумму $S_{m_k - 1}(x)$ сгруппируем следующим образом:

$$S_{m_k-1}(x) = \sum_{n=0}^{m_k-1} a_n \Psi_n(x) = \sum_{j=0}^{p_k-1} \sum_{\nu=0}^{m_{k-1}-1} a_{\nu + j m_{k-1}} \Psi_{\nu + j m_{k-1}}(x) =: \sum_{j=0}^{p_k-1} \theta_{k,j}(x). \tag{3.3.27}$$

Из определения функций $\Psi_n(x)$ (см. (3.3.1)–(3.3.3) и (3.3.16)) для $\Psi_{\nu+jm_{k-1}}(x)$ имеем

$$\Psi_{\nu+jm_{k-1}}(x) = \Psi_\nu(x)R_k^j(x) = \Psi_\nu(x)\exp\left(2\pi i\frac{js}{p_k}\right), \quad \text{когда} \;\; \nu < m_{k-1}, \; j < p_k. \qquad (3.3.28)$$

Заметим, что функция Ψ_ν, $0 \le \nu < m_{k-1}$, постоянна на

$$\widetilde{I}_{k,x} = \left[\frac{r}{m_{k-1}}, \frac{r+1}{m_{k-1}}\right).$$

Поэтому

$$(\Psi_{\nu+jm_{k-1}}, \varphi_{k,x}^{(q)}) = \Psi_\nu(\widetilde{I}_{k,x})(R_k^j, \varphi_{k,x}^{(q)}), \qquad (3.3.29)$$

где $\Psi_\nu(\widetilde{I}_{k,x})$ – значение функции Ψ_ν на $\widetilde{I}_{k,x}$, т.е. $\Psi_\nu(\widetilde{I}_{k,x}) = \Psi_\nu(x)$, $x \in \widetilde{I}_{k,x}$, $\nu < m_{k-1}$.

Из определения функций R_k, $\varphi_{k,x}^{(q)}$ и интервала $I_{k,x}$ имеем

$$\begin{aligned}(R_k^j, \varphi_{k,x}^{(q)}) &= \frac{1}{q}\sum_{l=-q+1}^{q-1}\left(1-\frac{|l|}{q}\right)\exp\left(2\pi i\frac{j(s+l)}{p_k}\right) = \\ &= \frac{1}{q}\exp\left(2\pi i\frac{js}{p_k}\right)\sum_{l=-q+1}^{q-1}\left(1-\frac{|l|}{q}\right)\exp\left(2\pi i\frac{jl}{p_k}\right) = \\ &= R_k^j(x)\frac{1}{q}\sum_{l=-q+1}^{q-1}\left(1-\frac{|l|}{q}\right)\exp\left(2\pi i\frac{jl}{p_k}\right) = \frac{2}{q}R_k^j(x)K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right),\end{aligned} \qquad (3.3.30)$$

где, как и в предыдущем случае, $K_{q-1}(u)$ – ядро Фейера для тригонометрической системы.

Следовательно, из (3.3.8), (3.3.27)–(3.3.30) получим, что

$$\sigma_{k,q}(x) = \int_0^1 S_{m_k-1}(t)\varphi_{k,x}^{(q)}(t)dt = \sum_{j=0}^{p_k-1}\sum_{\nu=0}^{m_{k-1}-1} a_{\nu+jm_{k-1}}(\Psi_{\nu+jm_{k-1}}, \varphi_{k,x}^{(q)}) = \qquad (3.3.31)$$

$$= \frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-1}\sum_{\nu=0}^{m_{k-1}-1} a_{\nu+jm_{k-1}}\Psi_\nu(x)R_k^j(x)K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right) = \frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-1}\theta_{k,j}(x)K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right).$$

Обозначим

$$\Theta_{k,j}(x) := \sum_{p=0}^{j}\theta_{k,p}(x), \qquad \Theta_{k,-1}(x) := 0.$$

Ясно, что

$$|\Theta_{k,j}(x)| \le S^*(x), \quad 0 \le j < p_k. \qquad (3.3.32)$$

Применяя преобразование Абеля, из (3.3.31), получим

$$\sigma_{k,q}(x) = \frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-1}(\Theta_{k,j}(x) - \Theta_{k,j-1}(x))K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right) = \qquad (3.3.33)$$

$$\frac{2}{q}\sum_{j=0}^{p_k-2}\Theta_{k,j}(x)\left(K_{q-1}\left(\frac{2\pi j}{p_k}\right)-K_{q-1}\left(\frac{2\pi(j+1)}{p_k}\right)\right)+$$

$$\frac{2}{q}\Theta_{k,p_k-1}(x)K_{q-1}\left(\frac{2\pi(p_k-1)}{p_k}\right)=:A_1+A_2.$$

Ясно, что

$$|A_1|\le\frac{2S^*(x)}{q}\sum_{j=0}^{p_k-2}\int_{\frac{2\pi j}{p_k}}^{\frac{2\pi(j+1)}{p_k}}|K'_{q-1}(t)|dt\le\frac{2S^*(x)}{q}\int_0^{2\pi}|K'_{q-1}(t)|dt= \tag{3.3.34}$$

$$\frac{4S^*(x)}{q}\int_0^{\pi}|K'_{q-1}(t)|dt=\frac{4S^*(x)}{q^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\left(\frac{\sin^2(qu)}{\sin^2 u}\right)'\right|du.$$

Следовательно, аналогично (3.3.21)–(3.3.25) получим (см. также(3.3.32))

$$|A_1|\le CS^*(x)\quad\text{и}\quad|A_2|\le S^*(x).$$

Из последних неравенств и (3.3.33) выводим

$$|\sigma_{k,q}(x)|<C_4S^*(x)\ \ \text{для всех}\ \ k\in\mathbb{N},\ \ 0<q\le\frac{p_k}{2}.$$

Тем самым соотношение (3.3.15) доказано.

Теперь допустим, для $x\in[0,1)$ выполняется

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n\Psi_n(x)=S. \tag{3.3.35}$$

Обозначим

$$S^{(k)}(x):=\sum_{n=m_{k-1}}^{m_k-1}a_n\Psi_n(x)\quad\text{и}\quad S^{k,*}(x):=\max_{m_{k-1}\le m<m_k}\left|\sum_{m_{k-1}}^{m}a_n\Psi_n(x)\right|.$$

Тогда из (3.3.35) имеем

$$\lim_{k\to\infty}S^{k,*}(x)=0.$$

Поэтому из уже доказанной части теоремы получим

$$\lim_{k\to\infty}|\sigma_{k,q}(x)-(S_{m_{k-1}-1},\varphi_{k,x}^{(q)})|=\lim_{k\to\infty}|(S^{(k)},\varphi_{k,x}^{(q)})|\le C\lim_{k\to\infty}S^{k,*}(x)=0.$$

Поскольку сумма $S_{m_{k-1}-1}$ на носителе функции $\varphi_{k,x}^{(q)}$ постоянна и $\left\|\varphi_{k,x}^{(q)}\right\|_1=1$ (см. (3.3.5)), то $(S_{m_{k-1}-1},\varphi_{k,x}^{(q)})=S_{m_{k-1}-1}(x)$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_{k,q}(x)=S.$$

Теорема 3.3.5 доказана. □

3.3.2 Основные результаты

В настоящем пункте рассматриваются теоремы единственности для рядов вида (3.3.6) по **P**-системам. При доказательстве применяется метод суммирования для таких рядов, введенный в предыдущем пункте. Мы будем пользоваться также обозначениями (3.3.7)–(3.3.9).

В работах [98] и [99] рассматривались вопросы единственности для рядов по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара, порожденных ограниченной последовательностью $p_k,\ k \in \mathbb{N}$. В работе [98] доказан следующий аналог теоремы 3.1.B.

Теорема 3.3.A (В.В. Костин). *Пусть $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – некоторая* **P***-система, порожденная ограниченной последовательностью $p_k,\ k \in \mathbb{N}$. Тогда, если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда* (3.3.6) *почти всюду сходятся к некоторой функции $f(x)$ и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p \cdot \operatorname{mes}\left\{x \in [0,1):\ \sup_k |S_{m_k-1}(x)| > \lambda_p\right\} = 0, \tag{3.3.36}$$

то для всех n имеют место

$$a_n = \lim_{p\to\infty} \int_0^1 [f(t)]_{\lambda_p} \overline{f_n(t)} dt. \tag{3.3.37}$$

В той же работе [98] приведен пример системы $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, порожденной неограниченной последовательностью $p_k,\ k \in \mathbb{N}$, для которой теорема 3.3.A не верна.

Оказывается, что если в теореме 3.3.A в условии (3.3.36) мажоранту частичных сумм $S_{m_k-1}(x)$ заменить мажорантой всей последовательности частичных сумм $S^*(x)$, то формулы (3.3.37) верны для любой **P**-системы. Точнее, верна следующая

Теорема 3.3.6 ([145], [146]). *Если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда* (3.3.6) *по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p \cdot \operatorname{mes}\{x \in [0,1):\ S^*(x) > \lambda_p\} = 0, \tag{3.3.38}$$

то для всех n имеют место формулы (3.3.37).

Теорема 3.3.6 следует из теоремы 3.3.5 и следующей, более общей, теоремы 3.3.7.

Теорема 3.3.7 ([145], [146]). *Если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда* (3.3.6) *по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется*

$$\lim_{p\to\infty} \lambda_p \cdot \operatorname{mes}\{x \in [0,1): \ \sigma^*(x) > \lambda_p\} = 0, \tag{3.3.39}$$

то для всех n имеют место формулы (3.3.37).

В частности, если функция f интегрируема по Лебегу, то ряд (3.3.6) *является рядом Фурье функции f.*

Из теоремы 3.3.7 следует

Теорема 3.3.8 *Если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда* (3.3.6) *по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и выполняется*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \operatorname{mes}\{x \in [0,1) : \sigma^*(x) > \lambda\} = 0, \tag{3.3.40}$$

то функция f является A-интегрируемой функцией, а ряд (3.3.6) *является рядом Фурье этой функции в смысле A-интегрирования.*

Заметим, что в предыдущем пункте мы доказали (см. 3.3.3 и 3.3.4), что если ряд (3.3.6) является рядом Фурье интегрируемой функции f, то суммы $S_{m_k-1}(x)$ почти всюду сходятся к f и выполняется (3.3.40). Поэтому из теоремы 3.3.7 следует следующая теорема.

Теорема 3.3.9 *Для того чтобы ряд* (3.3.6) *являлся рядом Фурье интегрируемой функции f, необходимо и достаточно, чтобы суммы $S_{m_k-1}(t)$ по мере сходились к f и выполнялось* (3.3.40).

3.3.3 Вспомогательные утверждения

Пусть семейства $\mathscr{X} = \{x_k\}_{k=1}^n$ и $\mathscr{Q} = \{q_k\}_{k=1}^n \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ удовлетворяют условиям

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b, \tag{3.3.41}$$

$$x_{k+q_k} - x_{k-q_k} \le b - a, \text{ где } x_{k\pm n} := x_k \pm (b-a), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3.42}$$

Для каждого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ обозначим

$$h_k^*(x) := \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_k, \\ 0, & \text{если } x \notin (x_{k-q_k}, x_{k+q_k}), \\ \text{линейная на отрезках } [x_{k-q_k}, x_k] \text{ и } [x_k, x_{k+q_k}], \end{cases}$$

$$h_k(x) := h_k^*(x) + h_k^*(x + (b-a)) + h_k^*(x - (b-a)),$$

$$H_{\mathscr{X},\mathscr{Q},k}(x) \equiv H_k(x) := h_k(x)\mathbb{1}_{[a,b]}(x). \tag{3.3.43}$$

Следующая лемма по формулировке и доказательству похожа на лемму 3 работы [126].

Лемма 3.3.10 *Пусть семейства* $\mathscr{X} = \{x_k\}_{k=1}^n$ *и* $\mathscr{Q} = \{q_k\}_{k=1}^n \subset \{1, 2, \dots, n\}$ *удовлетворяют условиям* (3.3.41) *и* (3.3.42). *Тогда существуют неотрицательные числа* α_k, $k = 1, 2, \dots, n$, *такие, что*

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k H_k(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

Доказательство. Сначала докажем, что для любого $P \subset \{1, 2, \dots, n\}$ существуют неотрицательные числа $\{\beta_k\}_{k \in P}$ такие, что

$$\sum_{k \in P} \beta_k h_k(x_j) = 1 \quad \text{для всех } j \in P, \tag{3.3.44}$$

$$\sum_{k \in P} \beta_k h_k(x) \le 1 \quad \text{для всех } x. \tag{3.3.45}$$

В случае, когда $\operatorname{card}(P) = 1$ и $P = \{k_0\}$, достаточно взять $\beta_{k_0} = 1$. Допустим, утверждение верно при $\operatorname{card}(P) < s$, и докажем, что оно верно и при $\operatorname{card}(P) = s$. Пусть $P = \{k_1, k_2, \dots, k_s\}$ и $k_1 < k_2 < \dots < k_s$. Для каждого набора чисел $\{\varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $j = 1, 2, \dots, s$, положим

$$R_{\{\varepsilon_j\}} = \left\{ (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s) \in [0,1]^s : \ \varepsilon_j \left(\sum_{m=1}^s \gamma_m h_{k_m}(x_{k_j}) - 1 \right) \ge 0, \ j = 1, 2, \dots, s \right\}.$$

Убедимся, что $R_{\{\varepsilon_j\}} \ne \varnothing$ при любом наборе чисел $\varepsilon_j = \pm 1$. В случае когда все $\varepsilon_j = -1$, очевидно, что $(0, 0, \dots, 0) \in R_{\{\varepsilon_j\}}$. Когда все $\varepsilon_j = 1$, то $(1, 1, \dots, 1) \in R_{\{\varepsilon_j\}}$ так как $h_k(x) \ge 0$ для всх x и $h_k(x_k) = 1, \ k = 1, 2, \dots, n$. Пусть теперь для набора $\varepsilon_j = \pm 1$

$$I^+ := \{j : \ \varepsilon_j = 1\}, \qquad I^- := \{j : \ \varepsilon_j = -1\}$$

и $1 \le \mathrm{card}(I^+) < s$. В силу нашего предположения, существуют неотрицательные числа $\beta'_m, \ \ m \in I^+$, такие, что

$$\sum_{m\in I^+} \beta'_m h_{k_m}(x_{k_j}) = 1 \quad \text{для всех} \ \ j \in I^+, \tag{3.3.46}$$

$$\sum_{m\in I^+} \beta'_m h_{k_m}(x) \le 1 \quad \text{для всех} \ \ x. \tag{3.3.47}$$

Положим $\beta_{k_m} = \beta'_m$, если $m \in I^+$ и $\beta_{k_m} = 0$, если $m \in I^-$. Из (3.3.46) и (3.3.47) следует, что $\beta_k \in [0,1]$ и для всех $j, \ j = 1, 2, \ldots, s$,

$$\varepsilon_j \left(\sum_{m=1}^{s} \beta_{k_m} h_{k_m}(x_{k_j}) - 1 \right) = \varepsilon_j \left(\sum_{m\in I^+} \beta_{k_m} h_{k_m}(x_{k_j}) - 1 \right) \ge 0.$$

Поэтому $(\beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \ldots, \beta_{k_s}) \in R_{\{\varepsilon_j\}}$. Итак, для любого набора $\{\varepsilon_j\}$, $\varepsilon_j = \pm 1, \ \ j = 1, 2, \ldots, s$, множество $R_{\{\varepsilon_j\}}$ не пусто.

Допустим, не существуют такие неотрицательные числа $\beta_k, \ k \in P$, чтобы выполнялось условие (3.3.44). Тогда множество

$$A := \left\{ \left(\sum_{m=1}^{s} \gamma_m h_{k_m}(x_{k_1}) - 1, \ldots, \sum_{m=1}^{s} \gamma_m h_{k_m}(x_{k_s}) - 1 \right) : \ (\gamma_1, \ldots, \gamma_s) \in [0,1]^s \right\} \subset \mathbb{R}^s$$

не содержит точку $(0, 0, \ldots, 0)$. Ясно, что A – выпуклое и компактное множество в $\mathbb{R}^s$. В силу второй теоремы об отделимости выпуклых множеств (см. [127, с. 210]), существует линейный функционал $\mathcal{L}$, определенный на $\mathbb{R}^s$, который принимает отрицательные значения на A. Пусть $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_s) = \sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i a_i$ и

$$\varepsilon'_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_i \ge 0, \\ -1, & \text{если } \alpha_i < 0. \end{cases}$$

Тогда из непустоты множества $R_{\{\varepsilon'_j\}}$ следует, что функционал $\mathcal{L}$ на множестве A может принимать неотрицательные значения, что противоречит определению функционала $\mathcal{L}$. Полученное противоречие доказывает, что существуют неотрицательные числа β_k, удовлетворяющие условию (3.3.44).

Из определения функций $h_k(x)$ следует, что $h_k(x) = h_k(x \pm (b-a))$ для любых $x \in [a, b]$ и $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому из (3.3.42) получим, что

$$\sum_{k\in P} \beta_k h_k(x_{j\pm n}) = 1 \qquad \text{для всех} \ \ j \in P. \tag{3.3.48}$$

Заметим, что на интервалах $[x_{k_s-n}, x_{k_1}]$, $[x_{k_1}, x_{k_2}], \ldots$, $[x_{k_{s-1}}, x_{k_s}]$ и $[x_{k_s}, x_{k_1+n}]$ функция $\sum\limits_{k\in P} \beta_k h_k(x)$ выпуклая, следовательно, с учетом (3.3.48) получим, что

$$\sum_{k\in P} \beta_k h_k(x) \le 1 \qquad \text{для всех} \ \ x \in [x_{k_s-n}, x_{k_1+n}].$$

В частности выполняется неравенство (3.3.45).

Таким образом, (3.3.44) и (3.3.45) доказаны для любого $P \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, в частности, для $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ существуют неотрицательные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ такие, что (см. также (3.3.48))

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k h_k(x_j) = 1 \qquad \text{для всех} \ \ j = 0, 1, \ldots n, n+1.$$

Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k h_k(x)$ линейная на каждом интервале $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, n$, поэтому из последних равенств получим

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k h_k(x) = 1 \qquad \text{для всех} \ \ x \in [x_0, x_{n+1}],$$

которое вместе с (3.3.43) завершает доказательство.

Лемма 3.3.10 доказана. $\square$

Лемма 3.3.11 *Пусть $\Delta \in \mathcal{I}_{k-1}$ и $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{p_k} \Delta_i$, где $\Delta_i \in \mathcal{I}_k$ и пронумерованы слева направо, а $\mathcal{P} = \{\Delta_{r_1}, \Delta_{r_2}, \ldots, \Delta_{r_s}\}$ – некоторое подмножество множества $\{\Delta_i\}_{i=1}^{p_k}$. Если натуральные числа $\{q_1, q_2, \ldots, q_s\}$ удовлетворяют условиям:*

$$q_i \le \frac{p_k}{2} \quad \text{и} \quad \left(\Delta_{r_i}\right)_{\pm q_i} \in \mathcal{P} \quad \text{для всех} \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

то существуют неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \varphi_{\Delta_{r_i}}^{(q_i)}(t) = \mathbb{1}_\Delta(t).$$

Доказательство. Пусть x_i – средняя точка отрезка Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, p_k$. Нетрудно заметить, что если положить $\mathscr{X} = \{x_{r_i}\}_{i=1}^{s}$ и $\mathscr{Q} = \{q_i\}_{i=1}^{s}$, то для функций $H_i(t) = H_{\mathscr{X},\mathscr{Q},i}(t)$ (см. (3.3.43)) и интервала Δ можно применить лемму 3.3.10. Следовательно, существуют неотрицательные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i H_i(t) = \mathbb{1}_\Delta(t).$$

Ясно, что (см. (3.3.4) и (3.3.43)) для всех $j=1,2,\ldots,p_k$ и $i=1,2,\ldots,s$

$$\varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(x_j)=\frac{m_k}{q_i}H_i(x_j).$$

Из последних равенств следует, что

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{q_i}{m_k}\beta_i\varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(x_j)=1 \quad \text{для всех} \;\; j=1,2,\ldots,p_k.$$

В силу того, что функция $\varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(t)$, $i=1,2,\ldots,s$, постоянна на каждом интервале Δ_j, $j=1,2,\ldots,p_k$, получим, что

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{q_i}{m_k}\beta_i\varphi_{k,x_{r_i}}^{(q_i)}(t)=\sum_{i=1}^{s}\frac{q_i}{m_k}\beta_i\varphi_{\Delta_{r_i}}^{(q_i)}(t)=\mathbb{1}_{\Delta}(t).$$

Лемма 3.3.11 доказана. $\square$

Лемма 3.3.12 *Пусть* $I=\left[\frac{r}{m_s},\frac{r+1}{m_s}\right)\in\mathcal{I}_s$, $E\subset I$, $E^c:=I\setminus E$ *и*

$$\operatorname{mes}(E)<\varepsilon\cdot\operatorname{mes}(I), \tag{3.3.49}$$

где $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{20p_{s+1}}\right)$. *Тогда для любого* $\nu>s$ *существует разложение*

$$\mathbb{1}_I(t)=\sum_{k=s+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\Omega_k^1}\alpha_\Delta\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)+\sum_{k=s+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\Omega_k^2}\beta_\Delta\varphi_\Delta^{(1)}(t)+\sum_{\Delta\in\Omega_\nu^3}\gamma_\Delta\varphi_\Delta^{(1)}(t), \tag{3.3.50}$$

где $\Omega_k^i\subset\mathcal{I}_k$, $\quad i=1,2,3$, *которое обладает следующими свойствами:*

$$\alpha_\Delta\geq 0,\quad \beta_\Delta\geq 0,\quad \gamma_\Delta\geq 0,$$

$$\operatorname{mes}(\operatorname{supp}(\varphi_\Delta^{(q_\Delta)})\cap E)>\frac{1}{6}\operatorname{mes}(\operatorname{supp}(\varphi_\Delta^{(q_\Delta)})),\quad \text{\textit{если} } \Delta\in\Omega_k^1,\ k=s+1,\ldots,\nu, \tag{3.3.51}$$

$$\operatorname{mes}(\operatorname{supp}(\varphi_\Delta^{(1)})\cap E)>\frac{1}{20}\operatorname{mes}(\operatorname{supp}(\varphi_\Delta^{(1)})),\quad \text{\textit{если} } \Delta\in\Omega_k^2,\ k=s+1,\ldots,\nu-1,$$

и если $\Delta\in\Omega_k^i$ *для некоторых* k *и* i, *то*

$$\operatorname{mes}(\Delta\cap E^c)\geq\frac{1}{2}\operatorname{mes}(\Delta). \tag{3.3.52}$$

Доказательство. Лемму докажем методом математической индукции. Когда $\nu=s+1$, из (3.3.49) и $\varepsilon<\dfrac{1}{20p_{s+1}}$ получим

$$\operatorname{mes}(\Delta\cap E^c)\geq\frac{1}{2}\operatorname{mes}(\Delta),\quad \text{если}\;\; \Delta\in\mathcal{I}_{s+1}\;\; \text{и}\;\; \Delta\subset I.$$

Очевидно, что если возьмем $\Omega^1_{s+1}=\varnothing$, $\Omega^3_{s+1}=\{\Delta\in\mathcal{I}_{s+1}:\Delta\subset I\}$ и положим $\gamma_\Delta=\dfrac{1}{m_{s+1}}$, когда $\Delta\in\Omega^3_{s+1}$, то получим (3.3.50) при $\nu=s+1$.

Докажем, что если разложение (3.3.50) возможно для ν, то оно возможно и для $\nu+1$. Обозначим

$$\Omega^2_\nu:=\left\{\Delta\in\Omega^3_\nu:\ \mathrm{mes}(\Delta\cap E)>\frac{1}{20}\mathrm{mes}(\Delta)\right\},$$

$$\beta_\Delta:=\gamma_\Delta,\quad \text{при}\quad \Delta\in\Omega^2_\nu.$$

Теперь зафиксируем некоторый интервал $\Delta\in\Omega^3_\nu\setminus\Omega^2_\nu$. Ясно, что

$$\mathrm{mes}(\Delta\cap E)\le\frac{1}{20}\mathrm{mes}(\Delta). \tag{3.3.53}$$

Положим

$$\mathcal{G}(\Delta):=\{\Delta'\in\mathcal{I}_{\nu+1}:\ \Delta'\subset\Delta,\ \mathrm{mes}(\Delta'\cap E^c)\ge\frac{1}{2}\mathrm{mes}(\Delta')\}. \tag{3.3.54}$$

Для каждого $\Delta'\in\mathcal{G}(\Delta)$ положим

$$q_{\Delta'}:=\min\{l\in\mathbb{N}:\ (\Delta')_{\pm l}\in\mathcal{G}(\Delta)\}. \tag{3.3.55}$$

Убедимся, что $q_{\Delta'}\le\dfrac{p_{\nu+1}}{2}$. Действительно, если $q_{\Delta'}>1$ (напомнин, что $p_\nu\ge 2$), то из (3.3.55) следует, что хотя бы каждый пятый из интервалов $(\Delta')_{\pm l}$, $|l|\le q_{\Delta'}$, не принадлежит $\mathcal{G}(\Delta)$. Следовательно (см. (3.3.54)),

$$\mathrm{mes}((\Delta')^{q_{\Delta'}}\cap E)>\frac{1}{10}\mathrm{mes}((\Delta')^{q_{\Delta'}}).$$

Последнее вместе с (3.3.53) дают, что $\mathrm{mes}((\Delta')^{q_{\Delta'}})\le\dfrac{1}{2}\mathrm{mes}(\Delta)$, из которого следует, что $q_{\Delta'}\le\dfrac{p_{\nu+1}}{2}$. Поэтому можем применить лемму 3.3.11, с помощью которой (см. также (3.3.5)), найдем такие неотрицательные $\eta_{\Delta'}$, что

$$\gamma_\Delta\varphi^{(1)}_\Delta(t)=\sum_{\Delta'\in\mathcal{G}(\Delta)}\eta_{\Delta'}\varphi^{(q_{\Delta'})}_{\Delta'}(t).$$

Обозначив

$$\Omega^1_{\nu+1}:=\{\Delta'\in\mathcal{G}(\Delta):\ \Delta\in\Omega^3_\nu\setminus\Omega^2_\nu,\ q_{\Delta'}>1\},\qquad \alpha_{\Delta'}:=\eta_{\Delta'}\ \text{при}\ \Delta'\in\Omega^1_{\nu+1},$$

$$\Omega^3_{\nu+1}:=\{\Delta'\in\mathcal{G}(\Delta):\ \Delta\in\Omega^3_\nu\setminus\Omega^2_\nu,\ q_{\Delta'}=1\},\qquad \gamma_{\Delta'}:=\eta_{\Delta'}\ \text{при}\ \Delta'\in\Omega^3_{\nu+1},$$

получим разложение типа (3.3.50) для $\nu+1$ с неотрицательными коэффициентами. Выполнение (3.3.52) следует из (3.3.54) (так как $\Omega_\nu^2 \subset \Omega_\nu^3$). Из того же (3.3.54) и (3.3.55) следует (3.3.51).

Лемма 3.3.12 доказана. $\square$

3.3.4 Доказателство теоремы 3.3.7

Пусть частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда (3.3.6) по мере сходятся к некоторой п.в. конечной измеримой функции f и для некоторой последовательности $\lambda_p \uparrow +\infty$ выполняется (3.3.39).

Для неотрицательного целого n выберем наименьшее натуральное число s, для которого $n < m_s$. На интервалах $I_u \in \mathcal{I}_s$, $u = 1, 2, \dots, m_s$, функция f_n принимает постоянные значения. Эти значения обозначим через $f_n(I_u)$. Ясно, что если $f_n(x) = \Psi_n(x)$ – система Виленкина, то $|f_n(I_u)| = 1$ для всех u, а если $f_n(x) = \chi_n(x)$ – обобщенная система Хаара, то $|f_n(I_u)| = \sqrt{m_{s-1}}$ для всех $I_u \subset \mathrm{supp}(f_n)$. Поэтому

$$a_n = \int_0^1 S_{m_s-1}(t)\overline{f_n(t)}dt = \sum_{u=1}^{m_s} \overline{f_n(I_u)} \int_{I_u} S_{m_s-1}(t)dt.$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно доказать, что для любого натурального s и любого $I \in \mathcal{I}_s$ имеет место

$$\lim_{p\to\infty} \int_I [f(t)]_{\lambda_p} dt = \int_I S_{m_s-1}(t)dt. \tag{3.3.56}$$

Для фиксированного $I \in \mathcal{I}_s$ докажем (3.3.56). Положим

$$E_p := \{x \in I : \sigma^*(x) > \lambda_p\} \quad \text{и} \quad E_p^c := \{x \in I : \sigma^*(x) \le \lambda_p\}.$$

Пусть $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{20p_{s+1}}\right)$. Выберем натуральное число p настолько большим, чтобы выполнялись условия: $\lambda_p > 1$,

$$|\sigma_{k,q}(t)| < \lambda_p \quad \text{для всех} \quad k \le s+1,\ q \le \frac{p_k}{2},\ t \in [0,1),$$

$$\lambda_p \cdot \mathrm{mes}(E_p) < \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I). \tag{3.3.57}$$

Применив лемму 3.3.12 к интервалу I и множеству $E = E_p$, для любого $\nu \ge s+1$ получим разложение

$$\mathbb{1}_I(t) = \sum_{k=s+1}^{\nu} \sum_{\Delta\in\Omega_k^1} \alpha_\Delta \varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t) + \sum_{k=s+1}^{\nu-1} \sum_{\Delta\in\Omega_k^2} \beta_\Delta \varphi_\Delta^{(1)}(t) + \sum_{\Delta\in\Omega_\nu^3} \gamma_\Delta \varphi_\Delta^{(1)}(t), \tag{3.3.58}$$

где $\Omega_k^i \subset \mathcal{I}_k,\ i = 1, 2, 3$, которое обладает следующими свойствами:

$$\alpha_\Delta \geq 0, \quad \beta_\Delta \geq 0, \quad \gamma_\Delta \geq 0, \tag{3.3.59}$$

$$\operatorname{mes}(\operatorname{supp}(\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}) \cap E_p) > \frac{1}{6}\operatorname{mes}(\operatorname{supp}(\varphi_\Delta^{(q_\Delta)})), \quad \text{если } \Delta \in \Omega_k^1,\ k = s+1, \ldots, \nu, \tag{3.3.60}$$

$$\operatorname{mes}(\operatorname{supp}(\varphi_\Delta^{(1)}) \cap E_p) > \frac{1}{20}\operatorname{mes}(\operatorname{supp}(\varphi_\Delta^{(1)})), \quad \text{если } \Delta \in \Omega_k^2,\ k = s+1, \ldots, \nu-1, \tag{3.3.61}$$

и если $\Delta \in \Omega_k^i$ для некоторых k и i, то

$$\operatorname{mes}(\Delta \cap E_p^c) \geq \frac{1}{2}\operatorname{mes}(\Delta). \tag{3.3.62}$$

Обозначим

$$F_\nu := \left(\bigcup_{k=s+1}^{\nu} \bigcup_{\Delta \in \Omega_k^1} \operatorname{supp}\left(\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}\right)\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=s+1}^{\nu-1} \bigcup_{\Delta \in \Omega_k^2} \operatorname{supp}\left(\varphi_\Delta^{(1)}\right)\right) \tag{3.3.63}$$

и докажем, что для любого $\nu > s$ коэффициенты в представлении (3.3.58) удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{k=s+1}^{\nu} \sum_{\Delta \in \Omega_k^1} \alpha_\Delta + \sum_{k=s+1}^{\nu-1} \sum_{\Delta \in \Omega_k^2} \beta_\Delta + \sum_{\Delta \in \Omega_\nu^3, \Delta \subset F_\nu} \gamma_\Delta \leq 60\operatorname{mes}(E_p) \quad \text{и} \quad \sum_{\Delta \in \Omega_\nu^3} \gamma_\Delta \leq \operatorname{mes}(I). \tag{3.3.64}$$

Сначала отметим, что второе неравенство в (3.3.64) следует из (3.3.5), (3.3.58) и (3.3.59).

Из (3.3.60), (3.3.61) следует, что $\mathcal{M}^*(\mathbb{1}_{E_p}, x) > \dfrac{1}{20}$, когда $x \in F_\nu$. Поэтому (см. теорему 3.3.2)

$$\operatorname{mes}(F_\nu) < 60\operatorname{mes}(E_p). \tag{3.3.65}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=s+1}^{\nu} \sum_{\Delta \in \Omega_k^1} \alpha_\Delta + \sum_{k=s+1}^{\nu-1} \sum_{\Delta \in \Omega_k^2} \beta_\Delta + \sum_{\Delta \in \Omega_\nu^3, \Delta \subset F_\nu} \gamma_\Delta =$$

$$= \sum_{k=s+1}^{\nu} \sum_{\Delta \in \Omega_k^1} \alpha_\Delta \int_I \varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt + \sum_{k=s+1}^{\nu-1} \sum_{\Delta \in \Omega_k^2} \beta_\Delta \int_I \varphi_\Delta^{(1)}(t)dt +$$

$$+ \sum_{\Delta \in \Omega_\nu, \Delta \subset F_\nu} \gamma_\Delta \int_I \varphi_\Delta^{(1)}(t)dt < \int_{F_\nu} dt < 60\operatorname{mes}(E_p).$$

Соотношения (3.3.64) доказаны. Для любого $\nu \geq s$ имеет место

$$\int_I S_{m_\nu - 1}(t)dt = \int_I S_{m_s - 1}(t)dt \tag{3.3.66}$$

и (см. (3.3.65))

$$\left|\int_I [f(t)]_{\lambda_p} dt - \int_{I\setminus F_\nu} [f(t)]_{\lambda_p} dt\right| < 60\lambda_p \mathrm{mes}(E_p). \tag{3.3.67}$$

Из (3.3.58) имеем

$$\int_I S_{m_\nu -1}(t)dt = \sum_{k=s+1}^{\nu} \sum_{\Delta\in\Omega_k^1} \alpha_\Delta \int_I S_{m_\nu -1}(t)\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt + \tag{3.3.68}$$

$$+\sum_{k=s+1}^{\nu-1} \sum_{\Delta\in\Omega_k^2} \beta_\Delta \int_I S_{m_\nu -1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt + \sum_{\Delta\in\Omega_\nu^3} \gamma_\Delta \int_I S_{m_\nu -1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt =$$

$$= \sum_{k=s+1}^{\nu} \sum_{\Delta\in\Omega_k^1} \alpha_\Delta \int_I S_{m_k -1}(t)\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt + \sum_{k=s+1}^{\nu-1} \sum_{\Delta\in\Omega_k^2} \beta_\Delta \int_I S_{m_k -1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt +$$

$$+ \sum_{\Delta\in\Omega_\nu^3, \Delta\subset F_\nu} \gamma_\Delta \int_I S_{m_\nu -1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt + \sum_{\Delta\in\Omega_\nu^3, \Delta\subset I\setminus F_\nu} \gamma_\Delta \int_I S_{m_\nu -1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt =:$$

$$\omega_{\nu,1} + \omega_{\nu,2} + \omega_{\nu,3} + \omega_{\nu,4}.$$

Из (3.3.63), (3.3.58) и (3.3.4) следует, что

$$\sum_{\Delta\in\Omega_\nu^3, \Delta\subset I\setminus F_\nu} \gamma_\Delta \varphi_\Delta^{(1)}(t) = \mathbb{1}_{I\setminus F_\nu}(t).$$

Поэтому

$$\omega_{\nu,4} = \int_{I\setminus F_\nu} S_{m_\nu -1}(t)dt. \tag{3.3.69}$$

Учитывая, что $\sigma_{k,q}(x)$ – постоянная на Δ, $\Delta \in \mathcal{I}_k$, из (3.3.62) получим, что для всех натуральных $k > s$

$$\left|\int_I S_{m_k -1}(t)\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt\right| < \lambda_p, \quad \text{если} \quad \Delta\in\Omega_k^1,$$

$$\left|\int_I S_{m_k -1}(t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt\right| < \lambda_p, \quad \text{если} \quad \Delta\in\Omega_k^2 \ \text{ или } \ \Delta\in\Omega_k^3.$$

Поэтому с учетом (3.3.64), (3.3.57) и (3.3.68) получим

$$\omega_{\nu,1} + \omega_{\nu,2} + \omega_{\nu,3} < 60\lambda_p \cdot \mathrm{mes}(E_p) < 60\varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I). \tag{3.3.70}$$

Очевидно,

$$D_p \subset E_p, \quad \text{где} \quad D_p = \{x\in I : [f(x)]_{\lambda_p} \neq f(x)\}. \tag{3.3.71}$$

Из (3.3.66)–(3.3.70) следует, что для любого $\nu > s$ имеет место

$$\left|\int_I [f(t)]_{\lambda_p} dt - \int_I S_{m_s -1}(t)dt\right| < \left|\int_{I\setminus F_\nu} ([f(t)]_{\lambda_p} - S_{m_\nu -1}(t))dt\right| + 120\varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I). \tag{3.3.72}$$

Учитывая, что $|S_{m_\nu-1}(t)|\le\lambda_p$, когда $t\in I\backslash F_\nu$, из (3.3.71), (3.3.72) получим

$$\left|\int_I [f(t)]_{\lambda_p}dt-\int_I S_{m_s-1}(t)dt\right|<\left|\int_{I\backslash(F_\nu\cup E_p)}(f(t)-S_{m_\nu-1}(t))dt\right|+122\varepsilon\cdot\mathrm{mes}(I). \qquad (3.3.73)$$

Поскольку последовательность $S_{m_\nu-1}(t)$ по мере сходится к $f(t)$, то для достаточно больших ν

$$\mathrm{mes}\{t\in I:\ |S_{m_\nu-1}(t)-f(t)|>\varepsilon\}<\varepsilon\cdot\mathrm{mes}(I).$$

Поэтому с учетом того, что $|S_{m_\nu-1}(t)-f(t)|\le 2\lambda_p$, $t\in I\backslash(F_\nu\cup E_p)$, из (3.3.73) и (3.3.57) получим

$$\left|\int_I [f(t)]_{\lambda_p}dt-\int_I S_{m_s-1}(t)dt\right|\le 125\varepsilon\cdot\mathrm{mes}(I).$$

Теорема 3.3.7 доказана. □

3.4 Теоремы единственности для кратных рядов по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара

3.4.1 Формулировка теорем и вспомогательные леммы

В этом разделе рассматриваются вопросы единственности и восстановления коэффициентов кратных рядов по $\mathbf{P}$-системам, суммируемых методом, приведенном в разделе 3.3.1. Отметим, что для тригонометрической системы в [126] Геворкяном доказано, что если кратный тригонометрический ряд п.в. методом Римана суммируется к интегрируемой функции f и удовлетворяет условую схожему с (3.3.39), то он является рядом Фурье функции f.

Пусть $\mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел. Для каждого $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_d)\in[0,1)^d$, $\mathbf{n}=(n_1,n_2,\dots,n_d)\in\mathbb{N}_0^d$, $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\dots,k_d)\in\mathbb{N}^d$ и $\mathbf{q}=(q_1,q_2,\dots,q_d)\in\mathbb{N}^d$ $(2q_i<p_{k_i},\ i=1,2,\dots,d)$ обозначим

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}):=f_{n_1}(x_1)f_{n_2}(x_2)\cdots f_{n_d}(x_d),$$

$$(f_{\mathbf{n}},\varphi^{(\mathbf{q})}_{\mathbf{k},\mathbf{x}}):=\prod_{i=1}^d(f_{n_i},\varphi^{(q_i)}_{k_i,x_i})=\prod_{i=1}^d\int_0^1 f_{n_i}(t_i)\varphi^{(q_i)}_{k_i,x_i}(t_i)dt_i$$

и рассмотрим следующий ряд

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{n}} f_{n_1}(x_1) f_{n_2}(x) \cdots f_{n_d}(x_d). \tag{3.4.1}$$

Для такого ряда положим

$$\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{n}}(f_{\mathbf{n}}, \varphi_{\mathbf{k},\mathbf{x}}^{(\mathbf{q})}).$$

В этом разделе запись $\mathbf{k} \to \infty$ будет означать, что $\min\{k_i\} \to \infty$. Мы будем обозначать через $\mathrm{mes}_d(E)$ Лебеговую меру множества E в $\mathbb{R}^d$. В случае $d = 1$ мы будем писать просто $\mathrm{mes}(E)$ взамен $\mathrm{mes}_1(E)$.

Следующая теорема анонсирована в [147] и доказана в [148].

Теорема 3.4.1 ([148]). *Если суммы $\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ ряда* (3.4.1) *почти всюду на $[0,1)^d$ сходятся к интегрируемой функции $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{k} \to \infty$ и*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}_d\Big\{\mathbf{x} \in [0,1)^d : \sup_{\mathbf{k},\mathbf{q}} |\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{x})| > \lambda\Big\} = 0,$$

то ряд (3.4.1) *является рядом Фурье функции f по системе $\{f_{\mathbf{n}}\}$, т.е.*

$$a_{\mathbf{n}} = \int_{[0,1)^d} f(\mathbf{x})\overline{f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}d\mathbf{x}.$$

Теорема 3.4.1 следует из более общей теоремы 3.4.2. Прежде чем сформулируем ее, введем некоторые обозначения. Допустим, коэффициенты $a_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\mathbf{s})$ кратного ряда

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\mathbf{s}) f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$$

по системе $\{f_n\}$ зависят от параметров $\mathbf{r} \in \mathbf{R} \subset \mathbb{N}^m$ и $\mathbf{s} \in \mathbf{S} \subset \mathbb{R}^l$. Обозначим

$$\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d} a_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\mathbf{s})(f_{\mathbf{n}}, \varphi_{\mathbf{k},\mathbf{x}}^{(\mathbf{q})}) \qquad \text{and} \qquad \sigma^*(\mathbf{x}) := \sup_{\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s}} |\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{x})|.$$

Для каждого положительного числа λ положим через E_λ следующее множество

$$E_\lambda := \{\mathbf{x} \in [0,1)^d : \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda\}.$$

Теорема 3.4.2 ([148]). *Если суммы $\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{x})$ почти всюду на кубе $[0,1)^d$ сходятся к интегрируемой функции $f(\mathbf{x})$ при $\min\{k_1,k_2,\ldots,k_d,r_1,\ldots,r_m\} \to \infty$ и*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}_d(E_\lambda) = 0,$$

то для всех $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ *имеем*

$$\lim_{\mathbf{r}\to\infty} a_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \int_{[0,1)^d} f(\mathbf{x})\overline{f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})}d\mathbf{x}.$$

Следующая лемма была доказана в [126].

Лемма 3.4.A ([126, Лемма 1]). *Пусть* $\varphi(\mathbf{x})$ *– некоторая неотрицательная функция, определенная на* d*-мерном кубе* $[a,b]^d$*, где* $d>1$ *– натуральное число. Если*

$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot \mathrm{mes}_d\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in[0,1]^d:\ \varphi(\mathbf{x})>\lambda\}=0,$$

то

$$\mathrm{mes}_{d-1}\left\{(x_2,\ldots,x_d)\in[0,1]^{d-1}:\ \liminf_{\lambda\to+\infty}\lambda\cdot\mathrm{mes}\{x_1\in[0,1]:\varphi(\mathbf{x})>\lambda\}=0\right\}=(b-a)^{d-1}.$$

Лемма 3.4.3 *Пусть коэффициенты ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r})f_n(x)$ *зависят от параметра* $\mathbf{r}\in\mathbf{R}$*,*

$$\sigma_{k,q}(\mathbf{r},x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r})(f_n,\varphi_{k,x}^{(q)}) \qquad \text{и} \qquad \sigma^*(x) := \sup_{k,q,\mathbf{r}}|\sigma_{k,q}(\mathbf{r},x)|.$$

Если для некоторых чисел $\lambda>0$ *и* $k\in\mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\mathrm{mes}\{x\in[0,1):\ \sigma^*(x)>\lambda\}<\frac{1}{m_k}, \tag{3.4.2}$$

то для любого $n<m_k$ *и* $\mathbf{r}\in\mathbf{R}$ *коэффициенты* $a_n(\mathbf{r})$ *удовлетворяют неравенству*

$$|a_n(\mathbf{r})|\le\lambda.$$

Доказательство. Допустим, что для чисел $\lambda>0$ и $k\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство (3.4.2). Отсюда следует, что

$$\mathrm{mes}\{x\in[0,1):\ \sigma_{k,1}(\mathbf{r},x)>\lambda\}<\mathrm{mes}\{x\in[0,1):\ \sigma^*(x)>\lambda\}<\frac{1}{m_k}.$$

Поскольку для каждого фиксированного $\mathbf{r}$ функция $\sigma_{k,1}(\mathbf{r},x)=S_{m_k-1}(\mathbf{r},x)$ (см. (3.3.8)) постоянна на каждом интервале $J\in\mathcal{I}_k$ с длиной $\frac{1}{m_k}$, то из последнего неравенства получим, что

$$|\sigma_{k,1}(\mathbf{r},x)|=\left|\sum_{n=0}^{m_k-1}a_n(\mathbf{r})f_n(x)\right|\le\lambda \quad \text{для всех } x\in[0,1) \ \text{ и } \ \mathbf{r}\in\mathbf{R}.$$

В силу того, что $\{f_n(x)\}$ – ортонормированная система на $[0,1)$, из последнего неравенства получим, что для всех $n<m_k$ и $\mathbf{r}\in\mathbf{R}$ выполняется неравенство

$$|a_n(\mathbf{r})|\le\lambda.$$

Лемма 3.4.3 доказана. □

3.4.2 Доказательство теорем

Теорема 3.4.2 доказывается методом математической индукции. Индукция проводится по размерности d.

Сначала отдельно сформулируем и докажем теорему 3.4.2 для случая $d = 1$.

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}) f_n(x)$ – некоторый ряд по $\mathbf{P}$-системе $\{f_n\}$, где коэффициенты $a_n(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ зависят от параметров $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_m) \in \mathbf{R} \subset \mathbb{N}^m$ и $\mathbf{s} \in \mathbf{S} \subset \mathbb{R}^l$. Допустим,

$$\sigma_{k,q}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}, \mathbf{s})(f_n, \varphi_{k,x}^{(q)}) \qquad \text{и} \qquad \sigma^*(x) := \sup_{k,q,\mathbf{r},\mathbf{s}} |\sigma_{k,q}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, x)|.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4.4 *Если суммы $\sigma_{k,q}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, x)$ почти всюду на интервале $[0, 1)$ сходятся к интегрируемой функции $f(x)$ при $\min\{k, r_1, \ldots, r_m\} \to \infty$ и*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}\{x \in [0, 1) : \ \sigma^*(x) > \lambda\} = 0, \tag{3.4.3}$$

то для всех $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{\mathbf{r} \to \infty} a_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \int_0^1 f(x)\overline{f_n(x)}dx.$$

Доказательство теоремы 3.4.4. Сначала рассмотрим случай, когда $f(x) = 0$. Допустим, суммы $\sigma_{k,q}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, x)$ почти всюду сходятся к $f(x) = 0$ и выполняется условие (3.4.3).

Пусть n – некоторое неотрицательное целое число, а i – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $n < m_i$. Ясно, что $f_n(x)$ постоянна на каждом интервале $I_u \in \mathcal{I}_i$. Обозначим через $f_n(I_u)$ значение функции f_n на интервале I_u. Заметим, что

$$a_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \int_0^1 S_{m_i-1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)\overline{f_n(t)}dt = \sum_{u=1}^{m_i} \overline{f_n(I_u)} \int_{I_u} S_{m_i-1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)dt,$$

где, как обычно,

$$S_N(\mathbf{r}, \mathbf{s}, x) := \sum_{n=0}^{N} a_n(\mathbf{r}, \mathbf{s}) f_n(x).$$

Поэтому для доказательства теоремы 3.4.4 в случае $f(x) = 0$ достаточно доказать, что для любого натурального числа i и для каждого $I \in \mathcal{I}_i$ выполняется равенство

$$\lim_{\mathbf{r} \to \infty} \int_I S_{m_i-1}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, t)dt = 0. \tag{3.4.4}$$

Пусть $I \in \mathcal{I}_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{20p_{i+1}}\right)$. Обозначим через E_λ множество

$$E_\lambda := \{x \in I : \ \sigma^*(x) > \lambda\}. \tag{3.4.5}$$

В силу (3.4.3), можно выбрать число $\lambda > 1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda \cdot \mathrm{mes}(E_\lambda) < \varepsilon \cdot \mathrm{mes}(I). \tag{3.4.6}$$

Поскольку $\mathrm{mes}(E_\lambda) < \dfrac{1}{20p_{i+1}} \cdot \mathrm{mes}(I)$, то при каждом $\nu > i$, применяя лемму 3.3.12, для характеристической функции интервала I получим представление

$$\mathbb{1}_I(t) = \sum_{k=i+1}^{\nu} \sum_{\Delta \in \Omega_k^1} \alpha_\Delta \varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t) + \sum_{k=i+1}^{\nu-1} \sum_{\Delta \in \Omega_k^2} \beta_\Delta \varphi_\Delta^{(1)}(t) + \sum_{\Delta \in \Omega_\nu^3} \gamma_\Delta \varphi_\Delta^{(1)}(t), \tag{3.4.7}$$

где $\Omega_k^i \subset \mathcal{I}_k, \ i = 1, 2, 3$, которое обладает следующими свойствами:

$$\alpha_\Delta \geq 0, \quad \beta_\Delta \geq 0, \quad \gamma_\Delta \geq 0, \tag{3.4.8}$$

$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}(\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}) \cap E_\lambda) > \frac{1}{6}\mathrm{mes}(\mathrm{supp}(\varphi_\Delta^{(q_\Delta)})), \quad \text{если} \ \ \Delta \in \Omega_k^1, \ k = i+1, \dots, \nu, \tag{3.4.9}$$

$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}(\varphi_\Delta^{(1)}) \cap E_\lambda) > \frac{1}{20}\mathrm{mes}(\mathrm{supp}(\varphi_\Delta^{(1)})), \quad \text{если} \ \ \Delta \in \Omega_k^2, \ k = i+1, \dots, \nu-1, \tag{3.4.10}$$

и если $\Delta \in \Omega_k^i$ для некоторых k и i, то

$$\mathrm{mes}(\Delta \cap E_\lambda) \leq \frac{1}{2}\mathrm{mes}(\Delta). \tag{3.4.11}$$

Из (3.3.5), (3.4.7) и (3.4.8) следует, что

$$\sum_{\Delta \in \Omega_\nu^3} \gamma_\Delta \leq \mathrm{mes}(I). \tag{3.4.12}$$

Для каждого $\nu > i$ положим

$$F_\nu := \left(\bigcup_{k=i+1}^{\nu} \bigcup_{\Delta \in \Omega_k^1} \mathrm{supp}\left(\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}\right) \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=i+1}^{\nu-1} \bigcup_{\Delta \in \Omega_k^2} \mathrm{supp}\left(\varphi_\Delta^{(1)}\right) \right). \tag{3.4.13}$$

В силу (3.4.9) и (3.4.10), получим что

$$\mathcal{M}^*(\mathbb{1}_{E_\lambda}, x) > \frac{1}{20} \quad \text{для всех } x \in F_\nu.$$

Учитывая также теорему 3.3.2, для меры множества F_ν получим следующую оценку:

$$\mathrm{mes}(F_\nu) \leq 60\mathrm{mes}(E_\lambda). \tag{3.4.14}$$

Комбинируя последнее неравенство с (3.3.5), (3.4.7) и (3.4.8), выводим, что

$$\sum_{k=i+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\Omega_k^1}\alpha_\Delta+\sum_{k=i+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\Omega_k^2}\beta_\Delta+\sum_{\Delta\in\Omega_\nu^3,\Delta\subset F_\nu}\gamma_\Delta=\sum_{k=i+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\Omega_k^1}\alpha_\Delta\int_I\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt+$$
$$+\sum_{k=i+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\Omega_k^2}\beta_\Delta\int_I\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt+\sum_{\Delta\in\Omega_\nu^3,\Delta\subset F_\nu}\gamma_\Delta\int_I\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt\le\int_{F_\nu}1dt\le 60\mathrm{mes}(E_\lambda). \tag{3.4.15}$$

Из (3.4.7), второго тождества (3.3.8) и определения функций f_n следует, что для любого $\nu>i$ имеем

$$\int_I S_{m_i-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)dt=\int_I S_{m_\nu-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)dt=\sum_{k=i+1}^{\nu}\sum_{\Delta\in\Omega_k^1}\alpha_\Delta\int_I S_{m_k-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt+$$
$$+\sum_{k=i+1}^{\nu-1}\sum_{\Delta\in\Omega_k^2}\beta_\Delta\int_I S_{m_k-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt+\sum_{\Delta\in\Omega_\nu^3,\Delta\subset F_\nu}\gamma_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt+$$
$$+\sum_{\Delta\in\Omega_\nu^3,\Delta\subset I\setminus F_\nu}\gamma_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt=:A_{\nu,1}+A_{\nu,2}+A_{\nu,3}+A_{\nu,4}. \tag{3.4.16}$$

Поскольку для любых фиксированных (допустимых) $k>i,q,\mathbf{r},\mathbf{s}$ функция $\sigma_{k,q}(\mathbf{r},\mathbf{s},x)$ постоянна на интервале $\Delta\in\mathcal{J}_k$ и

$$\sigma_{k,q}(\mathbf{r},\mathbf{s},x)=\int_0^1 S_{m_k-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)\varphi_\Delta^{(q)}(t)dt=\int_I S_{m_k-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)\varphi_\Delta^{(q)}(t)dt\quad\text{при}\quad x\in\Delta,$$

то, в силу (3.4.11) и (3.4.5), получим, что для любого натурального $k>i$

$$\left|\int_I S_{m_k-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)\varphi_\Delta^{(q_\Delta)}(t)dt\right|\le\lambda,\quad\text{если}\quad\Delta\in\Omega_k^1,$$
$$\left|\int_I S_{m_k-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt\right|\le\lambda,\quad\text{если}\quad\Delta\in\Omega_k^2\quad\text{или}\quad\Delta\in\Omega_k^3. \tag{3.4.17}$$

Поэтому из (3.4.6), (3.4.15) и (3.4.16) вытекает

$$|A_{\nu,1}|+|A_{\nu,2}|+|A_{\nu,3}|\le 60\lambda\cdot\mathrm{mes}(E_\lambda)\le 60\varepsilon\cdot\mathrm{mes}(I). \tag{3.4.18}$$

Положим $B_\nu:=B_\nu(\mathbf{r},\mathbf{s},q):=\{x\in I\setminus F_\nu:\ |\sigma_{\nu,q}(\mathbf{r},\mathbf{s},x)|>\varepsilon\}$ и $B'_\nu:=I\setminus(F_\nu\cup B_\nu)$. Так как $\sigma_{\nu,q}(\mathbf{r},\mathbf{s},x)$ п.в. сходится к $f(x)=0$, то существует число N_0 такое, что

$$\mathrm{mes}(B_\nu)<\mathrm{mes}(E_\lambda)\quad\text{для всех}\ \ \nu,\ \mathbf{r}\ \ \text{с условием}\ \min\{\nu,r_1,\dots,r_m\}>N_0. \tag{3.4.19}$$

Заметим, что как B_ν, так и B'_ν являются объединениями интервалов из $\mathcal{I}_\nu$, поскольку $\sigma_{\nu,q}(\mathbf{r},\mathbf{s},x)$ постоянна на каждом интервале $\Delta\in\mathcal{I}_\nu$. Поэтому слагаемое $A_{\nu,4}$ в (3.4.16) можно представить в виде

$$A_{\nu,4}=\sum_{\Delta\subset B_\nu}\gamma_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt+\sum_{\Delta\subset B'_\nu}\gamma_\Delta\int_I S_{m_\nu-1}(\mathbf{r},\mathbf{s},t)\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt=:A'_{\nu,4}+A''_{\nu,4}.$$

Из (3.3.5), (3.4.17), (3.4.6) (3.4.7), (3.4.12), (3.4.13) и (3.4.19) следует, что

$$|A'_{\nu,4}|\le\sum_{\Delta\subset B_\nu}\gamma_\Delta\cdot\lambda=\lambda\sum_{\Delta\subset B_\nu}\gamma_\Delta\int_I\varphi_\Delta^{(1)}(t)dt=\lambda\int_I\mathbb{I}_{B_\nu}(t)dt\le\lambda\cdot\mathrm{mes}(E_\lambda)\le\varepsilon\cdot\mathrm{mes}(I),$$

$$|A''_{\nu,4}|\le\varepsilon\sum_{\Delta\subset B'_\nu}\gamma_\Delta\le\varepsilon\cdot\mathrm{mes}(I),$$

как только $\min\{\nu,r_1,\dots,r_m\}>N_0$. Поэтому $|A_{\nu,4}|\le2\varepsilon\cdot\mathrm{mes}(I)$. Последнее неравенство вместе с (3.4.18) и (3.4.16) завершает доказательство теоремы 3.4.4 в случае $f(x)=0$.

Теперь допустим, что суммы $\sigma_{k,q}(\mathbf{r},\mathbf{s},x)$ почти всюду сходятся к интегрируемой функции f и выполняется условие (3.4.3). Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nf_n(x)$ – ряд Фурье функции f по системе $\{f_n(x)\}$ и $\tilde\sigma_{k,q}(x):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(f_n,\varphi_{k,x}^{(q)})$. В силу теорем 3.3.3 и 3.3.4, имеем

$$\lim_{k\to\infty}\tilde\sigma_{k,q}(x)=f(x)\quad\text{п.в. на}\quad[0,1)$$

и

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mathrm{mes}\{x\in[0,1):\ \sup_{k,q}|\tilde\sigma_{k,q}(x)|>\lambda\}=0.$$

Положим $c_n(\mathbf{r},\mathbf{s}):=a_n(\mathbf{r},\mathbf{s})-c_n$ и $\widehat\sigma_{k,q}(\mathbf{r},\mathbf{s},x):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(\mathbf{r},\mathbf{s})(f_n,\varphi_{k,x}^{(q)})$. Ясно, что

$$\widehat\sigma_{k,q}(\mathbf{r},\mathbf{s},x)=\sigma_{k,q}(\mathbf{r},\mathbf{s},x)-\tilde\sigma_{k,q}(x)\to0\quad\text{п.в. при }\min\{k,r_1,\dots,r_m\}\to\infty$$

и

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mathrm{mes}\{x\in[0,1):\ \sup_{k,q}|\widehat\sigma_{k,q}(x)|>\lambda\}\le\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mathrm{mes}\left\{x\in[0,1):\ \sup_{k,q}|\sigma_{k,q}(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}+$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mathrm{mes}\left\{x\in[0,1):\ \sup_{k,q}|\tilde\sigma_{k,q}(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}=0.$$

Поэтому для всех $n\in\mathbb{N}_0$ имеем

$$\lim_{\mathbf{r}\to\infty}c_n(\mathbf{r},\mathbf{s})=\lim_{\mathbf{r}\to\infty}a_n(\mathbf{r},\mathbf{s})-c_n=0,$$

которое завершает доказательство теоремы 3.4.4. □

Доказательство теоремы 3.4.2. Теорему докажем методом математической индукции по размерности d. Для случая $d=1$ теорема уже доказана. Допустим, она верна для $d=\nu-1$ и докажем ее для $d=\nu$.

Пусть $\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^\nu} a_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\mathbf{s})f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ – некоторый ν-кратный ряд по системе $\{f_n\}$ с коэффициентами $a_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\mathbf{s})$, зависящими от параметров $\mathbf{r}\in\mathbf{R}\subset\mathbb{N}^m$ и $\mathbf{s}\in\mathbf{S}\subset\mathbb{R}^l$. Предположим также, что суммы

$$\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^\nu} a_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\mathbf{s})(f_{\mathbf{n}},\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{x}}^{(\mathbf{q})})$$

п.в. на $[0,1)^\nu$ сходятся к интегрируемой функции $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{k}\to\infty$ и $\mathbf{r}\to\infty$ (т.е. $\min\{k_1,\dots,k_\nu,r_1,\dots,r_m\}\to\infty$) и выполняется условие

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mathrm{mes}_\nu\{\mathbf{x}\in[0,1)^\nu:\quad \sigma^*(\mathbf{x})>\lambda\}=0. \tag{3.4.20}$$

Для элементов $\mathbf{r}=(r_1,r_2,\dots,r_m)\in\mathbf{R}$, $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\dots,k_\nu)\in\mathbb{N}^\nu$, $\mathbf{s}=(s_1,s_2,\dots,s_l)\in\mathbf{S}$, $\mathbf{q}=(q_1,q_2,\dots,q_\nu)$ и $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_\nu)\in[0,1)^\nu$ положим

$$\widehat{\mathbf{r}}:=(r_1,r_2,\dots,r_m,k_2,\dots,k_\nu),\quad \widehat{\mathbf{s}}:=(s_1,s_2,\dots,s_l,q_2,\dots q_\nu,x_2,\dots,x_\nu).$$

Если для каждого $n_1\in\mathbb{N}_0$ обозначим

$$A_{n_1}(\widehat{\mathbf{r}},\widehat{\mathbf{s}}):=\sum_{n_i\in\mathbb{N}_0,i=2,\dots\nu} a_{\mathbf{n}}(\mathbf{r},\mathbf{s})\prod_{i=2}^{\nu}\Big(f_{n_i},\varphi_{k_i,x_i}^{(q_i)}\Big),\quad \mathbf{n}=(n_1,n_2,\dots,n_\nu), \tag{3.4.21}$$

то $\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{x})$ можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{x})=\sum_{n_1=0}^{\infty}A_{n_1}(\widehat{\mathbf{r}},\widehat{\mathbf{s}})\Big(f_{n_1},\varphi_{k_1,x_1}^{(q_1)}\Big)=:\tilde{\sigma}_{k_1,q_1}(\widehat{\mathbf{r}},\widehat{\mathbf{s}},x_1). \tag{3.4.22}$$

Заметим также, что для каждого $\mathbf{x}\in[0,1)^\nu$

$$\sigma^*(\mathbf{x})=\sup_{\mathbf{k},\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{s}}|\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{x})|=\sup_{k_1,q_1,\widehat{\mathbf{r}},\widehat{\mathbf{s}}}|\tilde{\sigma}_{k_1,q_1}(\widehat{\mathbf{r}},\widehat{\mathbf{s}},x_1)|, \tag{3.4.23}$$

где рассматриваются только те $\widehat{\mathbf{s}}$, для которых $(x_2,\dots,x_\nu)$ фиксировано. Из (3.4.20), в силу леммы 3.4.A, получим, что для п.в. $(x_2,\dots,x_\nu)\in[0,1)^{\nu-1}$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot\mathrm{mes}\{x_1\in[0,1):\quad \sigma^*(\mathbf{x})>\lambda\}=0,\quad \text{где } \mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_\nu). \tag{3.4.24}$$

Обозначим через H множество всех точек $(x_2,\dots,x_\nu)\in[0,1)^{\nu-1}$, для которых выполняются (3.4.24), $f(\cdot,x_2,\dots,x_\nu)\in L^1[0,1)$ и

$$\mathrm{mes}\left\{x_1:\ \lim_{\substack{\mathbf{k}\to\infty\\ \mathbf{r}\to\infty}}\sigma_{\mathbf{k},\mathbf{q}}(\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{x})=f(\mathbf{x})\ \text{ п.в.}\right\}=1.$$

Ясно, что $\mathrm{mes}_{\nu-1}(H) = \mathrm{mes}_{\nu-1}[0,1)^{\nu-1} = 1$.

Теперь, для каждого $(x_2, \dots, x_\nu) \in H$, применяя теорему 3.4.4, получим

$$\lim_{\widehat{\mathbf{r}} \to \infty} A_{n_1}(\widehat{\mathbf{r}}, \widehat{\mathbf{s}}) = \int_0^1 f(t, x_2, \dots, x_\nu) \overline{f_{n_1}(t)} dt \quad \text{для всех } n_1 \in \mathbb{N}_0. \tag{3.4.25}$$

Пусть n_1 – некоторое неотрицательное число, а i – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $n_1 < m_i$. Допустим,

$$A^*_{n_1}(x_2, \dots, x_\nu) := \sup_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}} |A_{n_1}(\widehat{\mathbf{r}}, \widehat{\mathbf{s}})|.$$

В силу леммы 3.4.3, (3.4.22) и (3.4.23), имеем, что если для некоторых $(x_2, \dots, x_\nu)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\mathrm{mes}\{x_1 : \ \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda\} < \frac{1}{m_i},$$

то $A^*_{n_1}(x_2, \dots, x_\nu) \le \lambda$. Поэтому, если $A^*_{n_1}(x_2, \dots, x_\nu) > \lambda$, то

$$\mathrm{mes}\{x_1 : \ \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda\} \ge \frac{1}{m_i},$$

которое означает, что

$$\mathrm{mes}_{\nu-1}\{(x_2, \dots, x_\nu) : \ A^*_{n_1}(x_2, \dots, x_\nu) > \lambda\} \le m_i \mathrm{mes}_\nu\{\mathbf{x} \in [0,1)^\nu : \ \sigma^*(\mathbf{x}) > \lambda\}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (3.4.20), получим, что для всех $n_1 \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}_{\nu-1}\{(x_2, \dots, x_\nu) : \ A^*_{n_1}(x_2, \dots, x_\nu) > \lambda\} = 0. \tag{3.4.26}$$

Из (3.4.21), (3.4.25) и (3.4.26), с учетом индуктивного предположения для $d = \nu - 1$, получим

$$\lim_{\mathbf{r} \to \infty} a_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \int_{[0,1)^\nu} f(\mathbf{x}) \overline{f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})} d\mathbf{x}.$$

Теорема 3.4.2 доказана. $\square$

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты.

- Для любой монотонной последовательности $a_n \searrow 0$, $\{a_n\} \notin l_2$, существует последовательность знаков $\delta_n = \pm 1$ такая, что ряд по системе Уолша $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$ является универсальным относительно подрядов в классе п.в. конечных измеримых функций.

- Существует универсальный относительно знаков ряд по системе Уолша, коэффициенты которого монотонно убывают и находятся над напред заданной минорантой.

- Для любой системы $\mathscr{H}$ типа Хаара, связанной с некоторой диадической системой множеств, и для любой п.в. конечной измеримой функции f существует ряд по системе $\mathscr{H}$, который п.в. абсолютно сходится к f.

- Для любой монотонной последовательности $a_n \searrow 0$, $\{a_n\} \notin l_2$, и любого положительного числа ε существует множество E с мерой $\mathrm{mes}(E) < \varepsilon$ такое, что произвольную интегрируемую на $[0,1]$ функцию можно "исправить" на множестве E так, что ряд Фурье–Уолша полученной функции сходится к нее по L^1-норме и имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n W_n(x)$, где $\delta_n = 0, \pm 1$.

- Для любого положительного ε существуют множество E с мерой $\mathrm{mes}(E) < \varepsilon$ и интегрируемая на $[0,1]$ функция g с монотонно убывающими коэффициентами Фурье–Уолша такие, что любую интегрируемую на $[0,1]$ функцию можно "исправить" на множестве E так, чтобы ряд Фурье–Уолша полученной функции сходился к нее по L^1-норме, а коэффициенты Фурье–Уолша по абсолютной величине совпадали с коэффициентами функции g.

- Существует такая интегрируемая на $[0,1]$ функция g с монотонно убывающими коэффициентами Фурье–Уолша, что для любого положительного числа ε произвольную функцию $f \in L^p[0,1]$, $p \geq 1$, можно "исправить" на множестве с мерой меньше чем ε так, чтобы ряд Фурье–Уолша полученной функции сходился к ней по L^p-норме, а ненулевые коэффициенты Фурье–Уолша по абсолютной величине совпадали с коэффициентами функции g.

- Если кубические частичные суммы кратного ряда по системе Хаара (Франклина) $S_{K_n}(x)$, где отношение $\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$ ограничено, п.в. сходятся к некоторой функции, а мажоранта этих частичных сумм удовлетворяет условию
$$\liminf_{\lambda\to+\infty} \lambda\cdot\mathrm{mes}\{x : S^*(x) > \lambda\} = 0, \tag{$*$}$$
то найдены формулы восстановления коэффициентов этого ряда. Более того, доказано, что ограниченность отношения $\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$ существенна.

- Для любой ограниченной числовой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ ряд по системе Хаара $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \chi_n(x)$ будет рядом Фурье A-интегрируемой функции тогда и только тогда, когда выполняется условие $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda \cdot \mathrm{mes}\left\{x : \sup\limits_N \left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\right| > \lambda\right\} = 0$.

- Найдены формулы восстановления коэффициентов кратного ряда по общей системе Франклина, соответствующей парно регулярному разбиению, кубические частичные суммы которого по мере сходятся к некоторой функции, а мажоранта частичных сумм $S^*(x)$ этого ряда удовлетворяет условию $(*)$.

- Для рядов по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара введен новый линейный метод суммирования и доказана регулярность этого метода.

- Если частичные суммы $S_{m_k-1}(x)$ ряда по системе Виленкина или обобщенной системе Хаара по мере сходятся к п.в. конечной функции, а мажоранта всех частичных сумм удовлетворяет условию $(*)$, то найдены формулы восстановления коэффициентов этого ряда.

Литература

[1] Лузин Н.Н., *Интеграл и тригонометрический ряд*, Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1951.

[2] Menchoff D.E., *Sur la representation des fonctions mesurables par des series trigonometriques*, Мат. сборник, 1941, т. 9(51), No 3, 667–692.

[3] Меньшов Д.Е., *О сходимости по мере тригонометрических рядов*, Тр. МИАН СССР, 1950, т. 32, 3–98.

[4] Конягин С.В., *О пределах неопределенности тригонометрических рядов*, Мат. заметки, 1988, т. 44, No 6, 770–784.

[5] Marcinkiewicz J., *Collected papers*, Warszawa, PWN, 1964.

[6] Талалян А.А., *Вопросы представления и единственности в теории ортогональных рядов*, Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал., 1970, 1971, 5–64.

[7] Талалян А.А., *Представление измеримых функций рядами*, Успехи мат. наук, 1960, т. 15, No 5, 77–141.

[8] Ульянов П.Л., *Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$*, УМН, 1972, т. 27, No 2(164), 3–52.

[9] Кашин Б.С., Саакян А.А., *Ортогональные ряды,* Москва, АФЦ, 1999.

[10] Талалян А.А., Арутюнян Ф.Г. *О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$*, Мат. сборник., 1965, т. 66(108), No 2, 240–247.

[11] Меньшов Д.Е., *Об универсальных тригонометрических рядах*, Докл. АН СССР, 1945, т. 49, 79–82.

[12] Меньшов Д.Е., *О частных суммах тригонометрических рядов*, Мат. сборник, 1947, т. 20(62), 197–237.

[13] Талалян А.А., *Тригонометрические ряды, универсальные относительно подрядов*, Изв. АН СССР, Сер. матем. 1963, т. 27, No 3, 621–660.

[14] Мушегян Г.М., *Об универсальных рядах относительно перестановок*, Изв. АН Арм. ССР, 1977, т. 12, No 4, 278–302.

[15] Погосян Н.Б., *Представление измеримых функций ортогональными рядами*, Мат. сборник, 1975, т. 98(140), 102–112.

[16] Талалян А.А., Овсепян Р.И., *Теоремы Д.Е. Меньшова о представлении и их влияние на развитие метрической теории функций*, Успехи матем. наук, 1992, т. 47, No 5, 15–42.

[17] Тиман М.Ф.,Рубинштейн А.И., *О вложении классов функций, определенных на нуль-мерных группах*, Изв. ВУЗов, Математика,1980, No 8, 66–76.

[18] Moricz F., *On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1981, vol. 38, No 1–4, 183–189.

[19] Качмаж С., Штейнгауз Г., *Теория ортогональных рядов,* Москва, Физматгиз, 1958.

[20] Gevorkian G.G., *On coefficients of null-series and on sets of uniqueness of trigonometric and Walsh systems,* Anal. Math., 1988, vol. 14, 219–251.

[21] Олевский А.М., *О продолжении последовательности функций до полной ортонормированной системы,* Матем. заметки, 1969, т. 6, No 6, 737–747.

[22] Арутюнян Ф.Г., *О рядах по системе Хаара,* Докл. АН АрмССР, 1966, т. 42, No 3, 134–140.

[23] Gundy R., *Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series,* Trans. Amer. Math. Soc. 1966, vol. 124, No 2, 228–248.

[24] Chow Y.S., *Convergence Theorems of Martingales,* Z.Wahrscheinlichkeits theorie Verw. Gebiete. 1962, Bd. 1, 340–346.

[25] Голубов Б.И., Ефимов А.Ф., Скворцов В.А., *Ряды и преобразования Уолша,* Москва, Наука, 1987.

[26] Олевский А.М., *О некоторых особенностях рядов Фурье в пространствах L^p, $p < 2$,* Матем. сборник, 1968, т. 77, No 2, 251–258.

[27] Погосян Н.Б., *Об универсальных рядах Фурье*, УМН, 1983, т. 38, No 1, 185 – 186.

[28] Macias R., Segovia C., *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type,* Adv. in Math. 1979, vol. 33, 271–309.

[29] Christ A., *A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral*, Colloquium Math. 1990, vol. 60/61, No 2, 601–628.

[30] Aimar H., Bernardis A., Iaffel B., *Comparison of Hardy-Littlewood and dyadic maximal functions on Spaces of Homogeneous Type*, J. Math. Anal. Appl., 2005, vol. 312, 105–120.

[31] Aimar H., Bernardis A., Iaffel B., *Multiresolution Approximations and Unconditional Bases on Weighted Lebesgue Spaces on Spaces of Homogeneous Type*, J. Approx. Theory. 2007, vol. 148, No. 1, 12–34.

[32] Aimar H., Bernardis A., Nowak L., *Equivalence of Haar Bases Associated to Different Dyadic Systems*, J. of Geometric Analysis. 2011, vol. 21, No 2, 288–304.

[33] Aimar H., Bernardis A., Nowak L., *Dyadic Fefferman–Stein Inequalities and the Equivalence of Haar Bases on Weighted Lebesgue Spaces*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Math. 2011, vol. 141, No 1, 1–22.

[34] Давтян Р. С., *О представлении функций ортогональными рядами, обладающими мартингальными свойствами*, Матем. заметки. 1976, т. 19, No 5, 673–680.

[35] Gevorkyan G. G., *On the Representation of Measurable Functions by Martingales* Analysis Math. 1982, vol. 8, No 4, 239–256.

[36] Gevorkyan G. G., *Representation of Measurable Functions by Absolutely Convergent Series of Translates and Dilates of One Function*, East J. Approx. 1996, vol. 2, No 4, 439–458.

[37] Голубов Б. И., *Об одном классе полных ортогональных систем*, Сибирский мат. журнал. 1968, т. 9, No 2, 297–314.

[38] Геворкян Г. Г., *О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина*, Доклады АН Арм. ССР. 1986, т. 83, No 1, 15–18.

[39] Степанян А. А., *О представлении измеримых функций рядами по общей системе Франклина*, Известия НАН Армении, Математика. 2007, т. 42, No 3, 13–22.

[40] Талалян А. А., *Представление функций классов $L^p[0,1]$, $0 < p < 1$, ортогональными рядами*, Acta. Math., Scientiarum Hungaricae Tomus, 1970, т. 21, No 1–2, 1–9.

[41] Григорян М. Г., *Об ортогональных рядах, универсальных в $L^p[0,1]$*, $p > 0$, Изв. НАН Армении, Матем., 2002, т. 37, No 2, 3–18.

[42] Лузин Н. Н., *К основной теореме интегрального исчисления*, Мат. сборник, 1912, т. 28, No 2, 266–294.

[43] Меньшов Д. Е., *О равномерной сходимости рядов Фурье*, Мат. сборник, 1942, т. 11(53), No 1-2, 67–96.

[44] Меньшов Д. Е., *О рядах Фурье от суммируемых функций*, Тр. Моск. матем. общества, 1, ГИТТЛ, М–Л, 1952, 5–38.

[45] Меньшов Д. Е., *О рядах Фурье непрерывных функций*, Уч. записки МГУ, Математика, 1951, выпуск 148, 108–132.

[46] Осколков К. И., *Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры,* ДАН СССР, 1976, т. 228, No 2, 304–306.

[47] Кашин Б. С., Кошелева Г.Г., *Об одном подходе к теоремам об исправлении,* Вестник МГУ, Сер. мат. мех., 1988, т. 1, No 4, 6–8.

[48] Price J.J., *Walsh series and adjustment of functions on small sets,* Illinois J. Math., 1969, vol. 13, 131–136.

[49] Хеладзе Ш. В., *Сходимость рядов Фурье почти всюду и в смысле метрики* L^1*,* Мат. сборник, 1978, т. 107, No 2, 245–258.

[50] Grigorian M. G., *On the convergence of Fourier series in the metric of* L^1*.* Analysis Math., 1991, vol. 17, No 3, 211–237.

[51] Grigorian M.G., *On the representation of functions by orthogonal series in weighted* L^p *spaces,* Studia. Math., 1999, vol. 134, No 3, 207–216.

[52] Grigoryan M. G., Episkoposyan S. A., L^p*-convergence of greedy algorithm by Walsh system,* Journal of Math. Anal. and Appl. 2012, vol. 389, No 2, 1374–1379.

[53] Гоголадзе Л. Д., Зерекидзе Т. Ш., *О сопряженных функциях нескольких переменных,* Сообщ. АН Груз. ССР, 1979, т. 94, No 3, 541–544.

[54] Григорян М. Г., *Об усиленном* L^p_μ *свойстве,* Матем. сборник, 2003, т. 194, No 10, 77–106.

[55] Кисляков С. В., *Количественный аспект теории об исправлении,* Иссл. по линейным операторам и теории функций. Записки научных семинаров ЛОМИ, 1979, т. 92, 182–191.

[56] Олевский А. М., *Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана,* ДАН СССР, 1978, т. 238, No 4, 796–799.

[57] Григорян М. Г., *Об усиленном* L^1*-greedy свойстве системы Уолша*, Изв. ВУЗ-ов, 2008, No 5, 26–37.

[58] Григорян М. Г., *Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация,* Математический сборник, 2012, т. 203, No 3, 49–78.

[59] Temlyakov V. N., *Nonlinear Methods of Approximation,* Found. Comput. Math., 2003, vol. 3, No 1, 33–107.

[60] DeVore R. A., Temlyakov V. N., *Some remarks on greedy algorithms,* Advances in Computational Math. 1996, vol. 5, No 1, 173–187.

[61] Konyagin S. V., Temlyakov V.N., *A remark on Greedy approximation in Banach spaces,* East Journal on Approximations, 1999, vol. 5, No 1, 1–15.

[62] Wojtaszczyk P., *Greedy Algorithm for General Biorthogonal Systems,* Journal of Approximation Theory, 2000, vol. 107, No 2, 293–314.

[63] Körner T. W., *Decreasing rearranged Fourier series,* J. Fourier Analysis and Applications, 1999, vol. 5, No 1, 1–19.

[64] Gribonval R., Nielsen M., *On the quasi-greedy property and uniformly bounded orthonormal systems,* http://www.math.auc.dk/research/reports/R-2003-09.pdf.

[65] Grigorian M. G., Kazarian K.S., Soria F., *Mean convergence of orthonormal Fourier series of modified functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 2000, vol. 352, No 8, 3777–3799.

[66] Геворкян Г. Г., Камонт А., *Два замечания о квази-гриди базисах в пространстве L^1,* Изв. НАН Армении, Матем., 2005, т. 40, No 1, 5–17.

[67] Лившиц Е. Д., *Об оптимальности жадного алгоритма для некоторых классов функций,* Мат. сборник, 2007, т. 198, No 5, 95–114.

[68] Григорян М. Г., *О сходимости в метрике L^p гриди алгоритма по тригонометрической системе,* Изв. НАН Армении, Матем., 2004, т. 39, No 5, 37–52.

[69] Gogyan S. L., *Greedy algorithm with regard to Haar subsystems,* East J. on Approx., 2005, vol. 11, No 2, 221–236.

[70] Grigorian M. G., Zink R. E., *Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system,* Proc. of the Amer. Mat. Soc., 2006, vol. 134, No 12, 3495–3505.

[71] Григорян М. Г., Саргсян А. А., *Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера-Шаудера,* Мат. сборник, 2008, т. 199, No 5, 3–26.

[72] Сильниченко А. В., *О скорости сходимости жадных алгоритмов,* Матем. заметки, 2004, т. 76, No 4, 628–632.

[73] Амирханян Г. М., *О сходимости гриди алгоритма по ситеме Уолша в пространстве L^p,* Изв. НАН Армении, Матем., 2008, т. 43, No 3, 3–12.

[74] Episkoposian S. A., *On the divergense of greedy algorithms with respect to Waish subsystems in L.* Nonlinear Analysis, 2007, vol. 66, 1782–1787.

[75] Ульянов П. Л., *О рядах по системе Хаара,* Матем. сборник, 1964, т. 63, No 3, 356–391.

[76] Wojtaszczyk P., *Greedy Type Bases in Banach Spaces,* Constructive Theory of Functions, DARBA, Sofia, 2003, 136–155.

[77] Григорян М. Г., Гогян С. Л., *О переставленных рядах по системе Хаара,* Изв. НАН Армении, Матем., 2007, т. 42, No 2, 44–64.

[78] Grigoryan M. G., Gogyan S. L., *On nonlinear approximation with respect to the Haar system and modifications of functions*, Analysis Mathematica, 2006, vol. 32, No 1, 49–80.

[79] Grigorian M. G., *On the Fourier-Walsh coefficients,* Real Analysis Exchange, 2010, vol. 35, No 1, 157–166.

[80] Григорян М. Г., Кротов В. Г., *Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложения Фурье по системе Фабера-Шаудера*, Мат. заметки, 2013, т. 93, No 2, 172–178.

[81] Menchoff D. E., *Sur l'unicite du developpement trigonometrique* C. R. Acad. Sci. (Paris). 1916, vol. 163, 433-436.

[82] Бари Н. К., *Тригонометрические ряды*, Москва.: Физматгиз, 1961.

[83] Арутюнян Ф. Г., *Представление функций из L^p, $0 < p < 1$, тригонометрическими рядами с быстро убывающими коэффициентами*, Изв. АН Арм.ССР, матем., 1984, т. 19, No 6, 448–466.

[84] Арутюнян Ф. Г., *Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами*, Докт. дисс., Тбилиси, 1986.

[85] Ивашев-Мусатов О. С., *О коэффициентах Фурье–Стильтьеса сингулярных функций*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, т. 20, No 2, 179–196.

[86] Ивашев-Мусатов О. С., *О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, т. 21, No 4, 559–578.

[87] Körner T. W., *Uniqueness for trigonometric series*, Annals of Mathematics, 1987, vol. 126, No 1, 1–34.

[88] Littlewood J. E., *On the Fourier coefficients of functions of bounded variation*, Quarterly J. of Math., 1936, vol 7, No 1, 219–226.

[89] Погосян Н. Б., *О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов*, Anal.Math. 1985, vol. 11, 139–177.

[90] Salem R., *On singular monotonic functions of Cantor type*, J. Math. Phys., 1942, vol. 21, 69–82.

[91] Ульянов П. Л., *Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов*, Успехи мат. наук, 1964, т. 19, No 1, 3–69.

[92] Скворцов В. А., *Об одном примере нуль-ряда по системе Уолша*, Матем. заметки, 1976, т. 19, No 2, 179–186.

[93] Скворцов В. А., *О h-мере M-множеств для системы Уолша*, Матем. заметки, 1977, т. 21, No 3, 335–340.

[94] Скворцов В. А., *О скорости стремления к нулю коэффициентов нуль-рядов по системам Хаара и Уолша*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1977, т. 41, No 3, 703–716.

[95] Александров А. Б., *Об A-интегрируемости граничных значеный гармонических функций*, Мат. заметки, 1981, т. 30, No. 1, 59–72.

[96] Геворкян Г. Г. *О единственности тригонометрических рядов*, Мат. сборник, 1989, т. 180, No 11, 1462–1474.

[97] Геворкян Г. Г., *О единственности аддитивных функций двоичных кубов и рядов по системе Хаара*, Изв. НАН Армении, сер. мат., 1995, т. 30, No 5, 7–21.

[98] Костин В. В., *К вопросу о восстановлении коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций*, Мат. заметки, 2003, т. 73, No 5, 704–723.

[99] Костин В. В., *Обобщение теоремы Л.А.Балашова о подрядах ряда Фурье–Хаара*, Мат. заметки, 2004, т. 76, No 5, 740–747.

[100] Геворкян Г. Г., *О единственности рядов по системе Франклина*, Мат. заметки, 1989, т. 46, No 2, 51–58.

[101] Геворкян Г. Г., *Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина*, Мат. заметки, 1996, т. 59, No 4, 521–545.

[102] Burkholder D. L., Gundy R. F., *Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales*, Acta Math., 1970, vol. 124, 249–304.

[103] Davis B., *On the integrability of the martingale square function*, Israel J. Math., 1970, vol. 8, 187–190.

[104] Ciesielski Z., Kamont A., *Projections onto piecewise linear functions*, Funct. Approx. Comment. Math., 1997, vol. 25, 129 – 143.

[105] Gevorkyan G. G., Kamont A., *On general Franklin systems*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), 1998, vol. 374, 1 – 59.

[106] Gevorkyan G. G., Kamont A., *Unconditionality of general Franklin system in* $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$, Studia Math., 2004, vol. 164, No 2, 161–204.

[107] Gevorkyan G. G., Kamont A., *General Franklin system as bases in* $H^1[0,1]$, Studia Math., 2005, vol. 167, No 3, 259–292.

[108] Franklin Ph., *A set of continuous orthogonal functions*, Math. Annalen, 1928, vol. 100, 522–529.

[109] Ciesielski Z., *Properties of the orthonormal Franklin system*, Studia Math., 1963, vol. 23, 141 – 157.

[110] Ciesielski Z., *Properties of the orthonormal Franklin system II*, Studia Math., 1966, vol. 27, 289 – 323.

[111] Погосян М. П., *О единственности рядов по общей системе Франклина*, Изв. НАН Армении, сер. матем., 2000, т. 35, No 4, 75 – 81.

[112] Геворкян Г. Г., *Теоремы единственности для рядов по системе Франклина*, Мат. заметки, 2015, т. 98, No 5, 786 – 789.

[113] Геворкян Г. Г., Погосян М. П., *О восстановлении коэффициентов ряда Франклина с "хорошей" мажорантой частичных сумм*, Изв. НАН Армении, сер. матем., 2017, т. 52, No 5, 25 – 35.

[114] Геворкян Г. Г., *Теорема единственности для кратных рядов Франклина*, Мат. заметки, 2017, т. 101, No 2, 199 – 210.

[115] Керян К. А., Мартиросян А. С., *Теорема единственности для рядов по системе Стромберга*, Изв. НАН Армении, сер. мат., 2012, т. 47, No 6, 29–52.

[116] Керян К. А., *Одна теорема единственности аддитивных функций и ее приложения к некоторым ортогональным рядам*, Матем. заметки, 2015, т. 97, No 3, 382–396.

[117] Keryan K. A., *Uniqueness theorem for sequences of piecewise polynomial functions*, Armenian Journal of Mathematics, 2017, vol. 9, No 1, 27–34.

[118] Gevorkyan G. G., Kamont A., *On the trigonometric conjugate to the general Franklin system*, Studia Math., 2009, vol. 193, No 3, 203 – 239.

[119] Гусман М., *Дифференцирование интегралов в* R^n, М., Изд-во Мир, 1978.

[120] Геворкян Г. Г., *Об абсолютной сходимости рядов по общей системе Франклина*, Изв. НАН Армении, сер. мат., 2014, т. 49, No 2, 3–24.

[121] Хеладзе Ш. В., *О расходимости всюду рядов Фурье–Уолша*. Сообщ. АН Груз. ССР, 1975, т. 77, No 2, 305–307.

[122] Хеладзе Ш. В., *О расходимости всюду рядов Фурье по ограниченным системам Виленкина*. Труды Тбил. матем. инст. АН Груз. ССР, 1978, т. 58, 225–242.

[123] Виленкин Н. Я., *Об одном классе полных ортонормальных систем*, Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, т. 11, No 4, 363–400.

[124] Скворцов В. А., Королева М. П., *О рядах по мультипликативным системам, сходящимся к функциям, интегрируемым по Данжуа*, Матем. сб., 1995, т. 186, No 12, 129–150.

[125] Weisz F., *Summation of Fourier series*, Acta Math. Acad. Paedagag. Nyhazi., 2004, vol. 20, 239–266.

[126] Геворкян Г. Г., *О единственности кратных тригонометрических рядов*, Матем. сборник, 1993, т. 184, No 11, 93–130.

[127] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, М., Наука, 1989.

* * *

[128] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А. *О рядах Уолша с монотонными коэффициентами*, Изв. РАН., сер. матем., 1999, т. 63, No 1, 41–60.

[129] Навасардян К. А., *О коэффициентах нуль-рядов и множествах единственности для двойных рядов Уолша*, Докл. НАН Армении, 1993, т. 94, No 4, 206–209.

[130] Навасардян К. А., *О нуль-рядах по двойной системе Уолша*, Изв. НАН Армении, Математика, 1994, т. 29, No 1, 59–78.

[131] Навасардян К. А., *Об универсальных рядах по двойной системе Уолша с быстро убывающими коэффициентами*, Докл. НАН Армении, 1995, т. 95, No 4, 220–223.

[132] Навасардян К. А., *Универсальные ряды по кратной системе Уолша*, Изв. НАН Армении, Математика, 1995, т. 30, No 5, 22–40.

[133] Навасардян К. А., *Универсальные ряды по системе Уолша*, Изв. НАН Армении, Математика, 2002, т. 37, No 4, 45–62.

[134] Навасардян К. А., *О представлении функций абсолютно сходящимися рядами по $\mathscr{H}$-системам*, Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика, Механика, Информатика. 2018, т. 18, No 1, 49–61.

[135] Навасардян К. А., *О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами*, Изв. НАН Армении, Математика, 2007, т. 42, No 5, 51–64.

[136] Навасардян К. А., Степанян А. А., *О рядах по системе Хаара*, Изв. НАН Армении. Математика, 2007, т. 42, No 4, 53–66.

[137] Григорян М. Г., Навасардян К. А. *Универсальные функции в задачах "исправления", обеспечивающего сходимость рядов Фурье–Уолша*, Изв. РАН., Сер. матем., 2016, т. 80, No 6, 65–91.

[138] Григорян М. Г., Навасардян К. А. *О поведении коэффициентов Фурье по системе Уолша*, Изв. НАН Армении, Математика, 2016, т. 51, No 1, 3–20.

[139] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А. *О рядах Хаара A-интегрируемых функций*, Изв. НАН Армении, Математика, 2017, т. 52, No 3, 30–45.

[140] Navasardyan K. A., *Uniqueness theorems for multiple Franklin series*, Proceedings of YSU, Math., 2017, vol. 51, No 3, 241–249.

[141] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А., *О единственности рядов по общей системе Франклина*, Изв. НАН Армении, Математика, 2018, т. 53, No 4, 3–14.

[142] Navasardyan K. A., *On a uniqueness theorem for the Franklin system*, Proceedings of YSU, Math., 2018, vol. 52, No 2, 93–100.

[143] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А., *Об одном методе суммирования рядов по системам Виленкина и Хаара*, Док. НАН Армении, Математика, 2017, т. 117, No 1, 20–25.

[144] Gevorkyan G. G., Navasardyan K. A., *On a summation method for Vilenkin and generalized Haar systems*, Proceedings of YSU, Math., 2017, vol. 51, No 1, 13–17.

[145] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А. *Теоремы единственности для обобщенной системы Хаара*, Матем. заметки, 2018, т. 104, No 1, 11–24.

[146] Геворкян Г. Г., Навасардян К. А. *Теоремы единственности для системы Виленкина*, Изв. НАН Армении, Математика, 2018, т. 53, No 2, 15–30.

[147] Навасардян К. А., *Теоремы единственности для кратных рядов по системе Виленкина и обобщенной системе Хаара*, Док. НАН Армении, Математика, 2017, т. 117, No 4, 292–296.

[148] Navasardyan K. A., *Uniqueness Theorems for Multiple Series by Vilenkin and Generalized Haar Systems*, Armenian Journal of Mathematics, 2018, vol. 10, No 6, 1–15.