

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
АРМЕНИЯ**

**Институт механики НАН РА
Ширакский государственный университет
им. М. Налбандяна**

АСЛАНЯН НАИРА САМВЕЛОВНА

**ПРИКЛАДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ
ПЛАСТИН И БАЛОК**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по
специальности 01.02.04 -Механика деформируемого твердого тела

Научный руководитель:
член-корреспондент НАН Армении,
доктор физико-математических наук,
профессор С. О. Саркисян

Ереван-Гюмри 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Основные уравнения и соотношения трехмерной микрополярной термоупругости ортотропного тела. Подход для построения прикладных моделей термоупругости микрополярных тонких пластин	13
§1.1. Модель трехмерной микрополярной термоупругости ортотропного тела с независимыми полями перемещений и вращений	13
§1.2. Основные уравнения трехмерной микрополярной термоупругости ортотропного тела со стесненным вращением.....	26
§1.3. Основной подход построения прикладных моделей термоупругости микрополярных тонких пластин.....	29
Глава 2. Модели термоупругости микрополярных ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин	31
§2.1. Модель термоупругости микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений при обобщенном плоском напряженном состоянии....	31
§2.2. Модель термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений	38
§2.3. Термоупругий изгиб прямоугольной пластинки на основе модели микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.....	51
§2.4. Температурный изгиб круглой пластинки на основе модели микрополярных упругих пластин с независимыми полями перемещений и вращений	64
§2.5. Модель термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных тонких пластин со стесненным вращением	72
§2.6. Модель термоупругой изгибной деформации микрополярных тонких пластин со стесненным вращением.....	74
§2.7. Термоупругий изгиб микрополярной изотропной прямоугольной пластинки со стесненным вращением.....	78
§2.8. Температурный изгиб микрополярной круглой пластинки со стесненным вращением	84
Глава 3. Модель термоупругости микрополярных тонких балок.....	88
§ 3.1. Модель термоупругости микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений	88
§ 3.2. Задачи термоупругого изгиба микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений	96

§ 3.3. Модель термоупругости микрополярных тонких балок со стесненным вращением	105
§ 3.4. Задачи термоупругого изгиба микрополярных тонких балок со стесненным вращением	109
Заключение	115
Литература.....	117

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие между частицами (геометрическими точками, обладающими только массой) в классической теории упругости осуществляется при помощи лишь одних центральных сил. Это предположение приводит к симметричному напряженному и деформированному состояниям. Но, как известно, все реальные тела имеют зернистое (дискретное) строение. Такими зёрнами могут быть отдельные молекулы, отдельные кристаллы или блоки кристаллов в поликристаллических материалах и т.п. Таким образом, все тела можем рассматривать как совокупность пространственных материальных образований из зёрен материальных частиц, связанных между собой сложной системой взаимодействия. Если эти силы взаимодействия между материальными частицами рассматриваемого твердого тела, действующие на какую-либо такую материальную частицу, свести, по общему правилу теоретической механики к центру тяжести этой частицы, получим по два вектора: главный вектор и главный момент. В классической теории упругости пренебрегается действие главного момента и главный вектор рассматривается как равнодействующий, поэтому в этой теории взаимодействие между частицами является центральным. Однако, если необходимо учесть влияние внутренней структуры веществ на напряженно-деформированное состояние, учет указанного главного момента станет необходимым. А это требует построения новой модели (в отличие от классической теории упругости) деформируемого твердого тела. В этой новой модели деформируемого твердого тела, если представить передаче нагрузок через элемент поверхности, то получим не только силовые напряжения (как в классической теории упругости), но и моментные напряжения и, оба тензоры будут несимметричными.

В основу моментной (несимметричной, микрополярной) теории упругости лежит упругая модель сплошной среды, которая называется средой или континуумом Коссера в честь Эжена и Франсуа Коссера, впервые (в 1909 году) систематически изложивших механику упругой среды с вращательным взаимодействием частиц и с моментными напряжениями [132].

При описании перемещений частиц моментной теории упругости разработаны, в основном, два подхода.

В работах Э. Л. Аэро и Е. В. Кувшинского [29], Г. Н. Савина [94,95], В. В. Болотина [38], Н. Ф. Морозова [82], В. Е. Панина [122], R. D. Mindlin [79], R. D. Mindlin and H. F. Tiersten [80], W. T. Koiter [68], R. A. Toupin [118], C. Truesdell and R. A. Toupin [177] и др.

сохраняется соответствующая формула классической теории упругости, т.е. считается, что перемещения \vec{u} точек этой среды и их жесткие малые вращения $\vec{\omega}$ полностью описываются вектором $\vec{u}(x, y, z)$ при $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}$. Этот вариант моментной теории упругости называют моментной теорией со стесненным вращением или псевдоконтинуумом Коссера. В указанных выше работах получены определяющие уравнения для малых и конечных деформаций, доказана теорема единственности, минимальные принципы, рассмотрены задачи о кручении бруса, о деформации полуплоскости, плоские задачи о концентрации напряжений вокруг отверстий и трещин, задачи о распространении волн и т.д.

Во втором подходе для описания перемещений частиц рассматриваемой среды наряду с обычным полем перемещений $\vec{u}(x, y, z)$ вводится кинематически независимое поле векторов $\vec{\omega}(x, y, z)$, характеризующих малые вращения частиц среды. Этот вариант моментной теории упругости называют моментной теорией с независимыми полями перемещений и вращений или континуумом Коссера.

Континуум Коссера в современной трактовке изложен в работах В. А. Пальмова [88,89], Н. Ф. Морозова [82], В. Новацкого [86,148], А. С. Eringen [134] и др.

В указанных выше работах получены определяющие уравнения для малых и конечных деформаций континуума Коссера, доказаны энергетические теоремы, установлены соответствующие вариационные принципы. В работе В. А. Пальмова [89] рассмотрена плоская задача о концентрации напряжений вокруг отверстий; в работе Н. Ф. Морозова [82] рассмотрена плоская задача о концентрации напряжений вокруг трещин; к построению аналитического решения различных статических и динамических задач и их анализу посвящены работы М. А. Кулеша, В. П. Матвеевко и И. Н. Шардакого [71-73], W.Nowacki [148], В. И. Ерофеева [57] и др.

В работах А. Г. Угодчикова [119], М. В. Белубекяна и В. Ф. Манукяна [34], В.Ф.Манукяна [76], Ambartsumyan S.A., Avetisyan A.S., Belubekyan M.V.[129], L.M.Schwartz [176] и др. рассматриваются различные задачи распространения волн в среде, учитывающей только динамику внутреннего вращения частиц. В работе М. А. Кулеша, Е. Ф. Грековой и И. Н. Шардакого [73] развивается так называемая теория редуцированной среды Коссера (когда из четырех новых моментных постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ отлична от нуля только α).

Обзор работ по моментной теории упругости осуществлен в работах А.А. Ильюшина и В. А. Ломакина [62], Г. Н. Савина и Ю. Н. Немиша [95], в книге [44] (под ред. М. Онами), Ostoja-Starzewski and I. Jasiuk [178] и др.

В работах А. А. Ильюшина [60,61] изложены основные направления развития проблемы моментной теории упругости. В работе Г. Л. Бровко [39], Г. Л. Бровко и О.А.Ивановой [40] был реализован метод специального механического моделирования материалов (конструкционного типа), когда могут быть реально обнаружены и наглядно проиллюстрированы свойства, присущие средам Коссера.

В работах W. Nowacki [148], Е. Ф. Грековой и П. А. Жилина [53] построена трехмерная теория электро-магнитоупругости микрополярных тел, в работе Г.Е.Багдасаряна и Д. Д. Асаняна [31] построена трехмерная теория магнитоупругости ферромагнитных тел.

Для измерения констант континуума Коссера для некоторых материалов на основе экспериментальных статических исследований или исследований дисперсии волн посвящены работы В. И. Ерофеева [57], В. В. Корепанова, М. А. Кулеша и И.Н.Шардакова [69,70], R. D. Gauthier and W. E. Jahsmann [137], R. S. Lakes [145,146] и др.

Один из основных направлений развития моментной теории упругости, это на основе трехмерной теории, построение математических моделей тонких стержней, пластин и оболочек.

К построению математических моделей тонких стержней, пластин и оболочек на основе моментной теории со стесненным вращением посвящены работы Л. П. Винакурова и Н. И. Деревянко [46], Г. А. Геворкяна [49,50], Л. В. Бабица [30], Н. С. Ганиева [48], О.Хофмека [123], С. А. Амбарцумяна и М. В. Белубекяна [15] и др.

К построению моделей теории тонких пластин и оболочек на основе трехмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений с применением метода гипотез посвящены работы В. А. Пальмова[90],С. А. Амбарцумяна [13],С. А. Амбарцумян и М. В. Белубекян [16] и др.

К построению моделей тонких стержней, пластин и оболочек с применением подхода концепции линий и поверхностей Коссера посвящены работы А. Е. Green and P.M.Naghdi [140], П. А. Жилина [59], Л. И. Шкутина [124], В. А. Еремеева и Л. М. Зубова [56], М. В. Rubin [150], Н. Altenbach and V. А. Eremeyev [127] и др. Можно сказать, что метод линий и поверхностей Коссера игнорирует пространственную структуру стержня, пластинки и оболочки, а это означает, что остается в стороне вопрос о распределении силовых и моментных напряжений по толщине указанных тонких тел, которые необходимы при расчетах их на прочность.

Обзор работ теории тонких пластин и оболочек на основе микрополярной теории упругости приведен в работе Ю. В. Кириллова, А. А. Постникова и А. И. Тюленева [66], современного состояния- в работе Н. Altenbach and V. A. Eremeyev[128].

Методы сведения трехмерных уравнений классической теории упругости к двумерным уравнениям теории тонких пластин и оболочек разделяются на три группы [1,47,125]: (а) метод гипотез, (б) метод разложений по толщине, (в) асимптотический метод.

Классическая теория тонких пластин и оболочек [117] базируется на гипотезах Кирхгофа (для пластин) и гипотезах Кирхгофа-Лява (для оболочек). Классическая теория стержней построена на основе гипотез Бернулли [121].

Общеизвестны гипотезы С. П. Тимошенко [91], E. Reissner [149], С. А. Амбарцумяна [11,12] для построения уточненных теорий (с учетом поперечных сдвигов) упругих пластин и оболочек.

Метод разложений по толщине берет свое начало от работ А. L. Cauchy и S. D. Poisson и развивается в работах Н. А. Кильчевского [64], Э. И. Григолюка и И. Т. Селезова [54], Н.И. Векуа [45], R. Kienzler [144] и др.

Метод разложений по толщине для построения моделей микрополярных упругих тонких стержней и пластин развит в работах К.А. Жамакочяна и С. О. Саркисяна [58].

Под асимптотическими подразумеваются методы, в которых наиболее полно используется малость толщины пластинки или оболочки. Для этого подхода характерно стремление на каждом этапе вычислений иметь дело только с величинами одного порядка малости относительно степеней геометрического безразмерного малого параметра.

Асимптотический метод построения теории упругих тонких пластин и оболочек существенно развит в работах А. Е. Green [139], А. Л. Гольденвейзера [51,52], И.И.Воровича [47], Л. А. Агаловяна [1-5], В. Л. Бердичевского [35], Ю. Д. Каплунова [143], С. О. Саркисяна [101] и др.

Впервые асимптотический метод применен в работе В. А. Дудникова и С. А. Назарова [55] для получения уравнений микрополярных упругих тонких пластин в перемещениях и поворотах. К асимптотическому анализу трехмерных уравнений микрополярной теории упругости в области тонкой пластинки с двумя малыми параметрами посвящены работы М. У Никабадзе [84], М.М.Кантора, М.У. Никабадзе и А.Р. Улуханяна[63] и др.

Асимптотический метод построения прикладных теорий статики и динамики микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек существенно развит в работах С. О. Саркисяна [102,103,108,155,156,163,164,168].

Весьма существенен и ценен подход С. О. Саркисяна построения теорий микрополярных тонких стержней, пластин и оболочек, о котором будем говорить ниже.

На основе асимптотического анализа трехмерных уравнений микрополярной теории упругости в области тонкой пластинки или оболочки (а также в области тонкого прямоугольника для асимптотического анализа двумерных уравнений) в работах С. О. Саркисяна [104-107,110,162,168] формулируется система адекватных гипотез (отражающие основные качественные и количественные стороны асимптотического решения), на основе которых из трехмерной (либо двумерной) теории микрополярной упругости (либо с независимыми полями перемещений и вращений, либо, со стесненным вращением) построены прикладные теории (статики или динамики) микрополярных упругих тонких пластин и оболочек (стержней). В работах [113,114,173] на основе указанной системы гипотез, с добавлением гипотез магнитоупругости тонких тел (С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян и М. В. Белубекян [14], Baghdasaryan G. and Mikilyan M. [131], С. О. Саркисян [101]) построены прикладные теории магнитоупругости микрополярных тонких стержней и оболочек. В работе [165] построена прикладная теория магнитоупругости микрополярных ферромагнитных тонких оболочек.

В работах С. О. Саркисяна и А. А. Саркисян [96-99] изучаются свободные и вынужденные колебания микрополярных упругих тонких стержней, пластин и оболочек; на основе численного анализа этих задач для частот колебаний устанавливаются определенные свойства учета микрополярности материала по сравнению с классическим случаем, а также, построены и изучены геометрически нелинейные модели микрополярных тонких пластин и пологих оболочек.

Подход С. О. Саркисяна [104-107,162] развивается в работах А. Ж. Фарманян [116,120,171], А. А. Атояна [28], М. Мутафян [83], Г. С. Никогосяна [85], Ш. И. Алваджян [10], Л. М. Маргарян [77,172], Г. С. Айрапетян [8,9] при построении асимптотических и прикладных моделей (статики и динамики) изотропных и ортотропных микрополярных (со свободным вращением и со стесненным вращением) тонких стержней, пластин и оболочек.

В работах С. О. Саркисяна и К. А. Жамакочян [174,175] развивается метод конечных элементов для численного решения краевых задач моментной теории тонких пластин и балок как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением. В работе С. О. Саркисяна и М. В. Хачатрян [115] построена прикладная модель микрополярного тонкого стержня с круговой осью.

В работах С. О. Саркисяна [112] развивается новый класс задач, связанных с выяснением о связи континуальной моментной теории упругости с атомно-молекулярной дискретной структурой твердых тел.

Задачи напряженного состояния, вызываемого неравномерным нагревом, имеют большое значение для анализа прочности и правильного функционирования конструкций современной техники, работающих в условиях неравномерно распределенных температурных полей.

В работах W. Nowacki [87,148] построена трехмерная теория микрополярной термоупругости.

В работах С. О. Саркисяна [157], С. А. Варданян и С. О. Саркисяна [42] построена асимптотика решения краевой задачи микрополярной термоупругости в тонкой области оболочки, пластинки и прямоугольника. В диссертационной работе С. А. Варданян [41] рассматриваются задачи на основе уравнений исходного приближения асимптотического решения.

В работах С. О. Саркисяна [109,111,166] построена общая прикладная теория микрополярной термоупругости тонких оболочек, которая уточняет модель [41,42] в рамках указанной выше исходной асимптотики. В указанных работах С. О. Саркисяна [109,111] изучены общие вопросы об энергетике явления и построены соответствующие вариационные принципы в прикладной теории микрополярной термоупругости тонких оболочек.

Актуально направление этих теоретических достижений в практическое русло, построение частных моделей микрополярной термоупругости ортотропных (изотропных) тонких пластин и балок как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением и на их основе изучение конкретных прикладных задач.

Основной целью диссертационной работы является построение прикладных моделей микрополярной термоупругости ортотропных (изотропных) тонких пластин и балок как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением и на основе этих моделей изучение различных прикладных задач.

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы.

В первой главе (которая имеет вводный характер), используя известные литературные источники, излагаются трехмерные теории микрополярной термоупругости с независимыми полями перемещений-вращений и со стесненным вращением. Эти теории излагаются как в дифференциальной форме, так и при помощи вариационных принципов.

В первом параграфе первой главы излагаются основные дифференциальные уравнения, граничные условия и вариационная постановка задач трехмерной микрополярной стационарной термоупругости для ортотропного (изотропного) тела с независимыми полями перемещений и вращений. Излагаются также закон сохранения механической энергии, теорема взаимности и другие энергетические теоремы.

Во втором параграфе первой главы приведены основные уравнения и граничные условия трехмерной микрополярной термоупругости для ортотропного (изотропного) тела со стесненным вращением. Приводится также выражение плотности потенциальной энергии деформации, которое можно использовать при формулировании вариационных принципов.

В третьем параграфе излагается основной подход перехода из трехмерной теории к прикладной модели термоупругости микрополярных ортотропных (изотропных) тонких пластин как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением.

Во второй главе построены прикладные модели микрополярной термоупругости ортотропных (изотропных) тонких пластин с независимыми полями перемещений-вращений и со стесненным вращением. На основе этих построенных моделей рассматриваются некоторые прикладные задачи термоупругого изгиба прямоугольных и круглых пластин.

В первом параграфе второй главы построена прикладная модель термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной ортотропной (изотропной) тонкой пластинки. Излагается общая вариационная формулировка модели и доказываются теорема единственности, взаимности и другие энергетические теоремы.

Во втором параграфе второй главы построена прикладная модель термоупругости изгибной деформации микрополярной ортотропной (изотропной) тонкой пластинки с независимыми полями перемещений и вращений. Излагается общая вариационная формулировка модели, доказываются теоремы единственности, взаимности и другие энергетические теоремы. В построенной прикладной модели термоупругого изгиба микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений учитываются поперечные сдвиговые деформации. Построена также аналогичная модель термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений без учета поперечных сдвиговых деформаций.

В третьем параграфе на основе модели, построенной в параграфе два главы два, рассматривается решение конкретной прикладной задачи термоупругого изгиба микрополярной изотропной прямоугольной пластинки, когда края ее шарнирно-оперты.

Условия шарнирного опирания краев прямоугольной пластинки дают возможность упростить полученные дифференциальные уравнения, и после этого, задача решается при помощи разложения неизвестных функций в двойные тригонометрические ряды. Для изучаемой задачи получены численные результаты, которые подвергаются анализу. На основе этого анализа устанавливается, что учет микрополярных свойств материала повышает жесткость пластинки.

В четвертом параграфе главы два изучается аналогичная термоупругая задача об изгибе круглой сплошной пластинки в осесимметричной постановке. Задача решается при помощи бесселевых функций. Рассматриваемая задача доводится до получения окончательных численных результатов, на основе их анализа устанавливается аналогичное явление о повышении жесткости микрополярной пластинки по сравнению с классическим случаем.

В пятом параграфе главы два построена модель термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной ортотропной (в частности, изотропной) тонкой пластинки со стесненным вращением.

В шестом параграфе главы два построена модель термоупругости изгибной деформации микрополярной ортотропной (в частности, изотропной) тонкой пластинки со стесненным вращением.

В седьмом параграфе главы два изучена задача термоупругого изгиба микрополярной изотропной прямоугольной пластинки со стесненным вращением. Задача решается до получения численных результатов, анализ которых показывает, что по модели со стесненным вращением тоже, как по модели с независимыми полями перемещений и вращений, микрополярные свойства материала повышают жесткость пластинки.

В восьмом параграфе главы два, на основе модели термоупругого изгиба микрополярной изотропной пластинки со стесненным вращением, изучается термоупругий изгиб круглой сплошной пластинки. Построено решение указанной задачи, получены численные результаты, которые тоже утверждают о той же роли учета микрополярных свойств материала пластинки.

В третьей главе построены прикладные модели термоупругости плоского изгиба микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением. В рамках построенных моделей изучаются конкретные прикладные задачи термоупругого изгиба микрополярных тонких балок с различными граничными условиями.

В первом параграфе третьей главы построена прикладная модель термоупругого плоского изгиба микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений. Построен также общий вариационный функционал прикладной модели термоупругого плоского изгиба микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений.

Во втором параграфе третьей главы изучаются конкретные задачи о термоупругом изгибе микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений с различными граничными условиями. На основе полученных численных результатов устанавливается то обстоятельство, что учет микрополярных свойств материала повышает жесткость балки при ее изгибе.

В третьем параграфе главы три построена прикладная модель термоупругости плоской изгибной деформации микрополярной тонкой балки со стесненным вращением, выводятся формула для плотности потенциальной энергии деформации.

В четвертом параграфе главы три, на основе построенной прикладной модели термоупругости плоской изгибной деформации микрополярной тонкой балки со стесненным вращением, изучаются конкретные прикладные задачи. Полученные численные результаты, как при модели микрополярной балки с независимыми полями перемещений и вращений, в рамках модели со стесненным вращением тоже устанавливается аналогичное свойство, а именно, учет микрополярности материала повышает жесткость балки при ее изгибе.

В заключении приведены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Автор считает своим приятным долгом, выразить глубокую благодарность своему научному руководителю, члену - корреспонденту НАН Армении, профессору С. О. Саркисяну, за постановку задач и помощь при выполнении настоящей диссертационной работы.

ГЛАВА 1

**ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ
МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА. ПОДХОД
ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ
МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН**

Рассматриваются микрополярные ортотропные упругие тела, которые могут быть подвержены действию поверхностных нагрузок и неравномерного температурного поля. Принимается, что для таких тел справедливы уравнения линейной микрополярной (несимметричной, моментной) термоупругости для ортотропного тела с независимыми полями перемещений и вращений либо со стесненным вращением. В параграфах §1.1, §1.2 данной главы приводятся основные уравнения линейной трехмерной задачи микрополярной термоупругости ортотропного (изотропного) тела с независимыми полями перемещений и вращений, либо со стесненным вращением. В параграфе §1.3 излагается основной подход для построения прикладных моделей термоупругости микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений либо со стесненным вращением.

**§1.1. МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ
ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ**

Рассмотрим микрополярную упругую пластинку постоянной толщины $2h$, как трехмерное тело. Оси α_1, α_2 криволинейной ортогональной системы координат отнесем к срединной плоскости пластинки, прямолинейная ось z - будет перпендикулярна срединной плоскости пластинки. Будем считать, что материал тела обладает криволинейной ортотропией и главные направления упругости совпадают с направлениями координатных линий.

Будем исходить из основных уравнений трехмерной микрополярной теории стационарной термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений [86,87,142,148]:

Уравнения равновесия

$$\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{11}) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{21}) + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{12}) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{22}) + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{21} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11} = 0, \\
& \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{13}) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{23}) + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = 0, \\
& \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \mu_{11}) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \mu_{21}) + \frac{\partial \mu_{31}}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \mu_{12} - \\
& \quad - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \mu_{22} + (\sigma_{23} - \sigma_{32}) = 0, \\
& \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \mu_{12}) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \mu_{22}) + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \mu_{21} - \\
& \quad - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \mu_{11} + (\sigma_{31} - \sigma_{13}) = 0, \\
& \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \mu_{13}) + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \mu_{23}) + \frac{\partial \mu_{33}}{\partial z} + (\sigma_{12} - \sigma_{21}) = 0;
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Физические соотношения термоупругости микрополярного ортотропного тела:

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= a_{11} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + a_{13} \sigma_{33} + \alpha_{1r} T, & \chi_{11} &= b_{11} \mu_{11} + b_{12} \mu_{22} + b_{13} \mu_{33}, \\
\gamma_{22} &= a_{12} \sigma_{11} + a_{22} \sigma_{22} + a_{23} \sigma_{33} + \alpha_{2r} T, & \chi_{22} &= b_{12} \mu_{11} + b_{22} \mu_{22} + b_{23} \mu_{33}, \\
\gamma_{33} &= a_{13} \sigma_{11} + a_{23} \sigma_{22} + a_{33} \sigma_{33} + \alpha_{3r} T, & \chi_{33} &= b_{13} \mu_{11} + b_{23} \mu_{22} + b_{33} \mu_{33}, \\
\gamma_{23} &= a_{44} \sigma_{23} + a_{45} \sigma_{32}, & \chi_{23} &= b_{44} \mu_{23} + b_{45} \mu_{32}, \\
\gamma_{32} &= a_{45} \sigma_{23} + a_{55} \sigma_{32}, & \chi_{32} &= b_{45} \mu_{23} + b_{55} \mu_{32}, \\
\gamma_{31} &= \tilde{a}_{55} \sigma_{31} + a_{56} \sigma_{13}, & \chi_{31} &= \tilde{b}_{55} \mu_{31} + b_{56} \mu_{13}, \\
\gamma_{13} &= a_{56} \sigma_{31} + a_{66} \sigma_{13}, & \chi_{13} &= b_{56} \mu_{31} + b_{66} \mu_{13}, \\
\gamma_{12} &= a_{77} \sigma_{12} + a_{78} \sigma_{21}, & \chi_{12} &= b_{77} \mu_{12} + b_{78} \mu_{21}, \\
\gamma_{21} &= a_{78} \sigma_{12} + a_{88} \sigma_{21}, & \chi_{21} &= b_{78} \mu_{12} + b_{88} \mu_{21}
\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

либо в обратной форме

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= A_{11} \gamma_{11} + A_{12} \gamma_{22} + A_{13} \gamma_{33} - \mathcal{G}_{1r} T, & \mu_{11} &= B_{11} \chi_{11} + B_{12} \chi_{22} + B_{13} \chi_{33}, \\
\sigma_{22} &= A_{12} \gamma_{11} + A_{22} \gamma_{22} + A_{23} \gamma_{33} - \mathcal{G}_{2r} T, & \mu_{22} &= B_{12} \chi_{11} + B_{22} \chi_{22} + B_{23} \chi_{33}, \\
\sigma_{33} &= A_{13} \gamma_{11} + A_{23} \gamma_{22} + A_{33} \gamma_{33} - \mathcal{G}_{3r} T, & \mu_{33} &= B_{13} \chi_{11} + B_{23} \chi_{22} + B_{33} \chi_{33}, \\
\sigma_{23} &= A_{44} \gamma_{23} + A_{45} \gamma_{32}, & \mu_{23} &= B_{44} \chi_{23} + B_{45} \chi_{32}, \\
\sigma_{32} &= A_{45} \gamma_{23} + A_{55} \gamma_{32}, & \mu_{32} &= B_{45} \chi_{23} + B_{55} \chi_{32}, \\
\sigma_{31} &= A_{55} \gamma_{31} + A_{56} \gamma_{13}, & \mu_{31} &= B_{55} \chi_{31} + B_{56} \chi_{13}, \\
\sigma_{13} &= A_{56} \gamma_{31} + A_{66} \gamma_{13}, & \mu_{13} &= B_{56} \chi_{31} + B_{66} \chi_{13}, \\
\sigma_{12} &= A_{77} \gamma_{12} + A_{78} \gamma_{21}, & \mu_{12} &= B_{77} \chi_{12} + B_{78} \chi_{21}, \\
\sigma_{21} &= A_{78} \gamma_{12} + A_{88} \gamma_{21}, & \mu_{21} &= B_{78} \chi_{12} + B_{88} \chi_{21},
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

где $\mathcal{G}_{1r} = A_{11} \alpha_{1r} + A_{12} \alpha_{2r} + A_{13} \alpha_{3r}$, $\mathcal{G}_{2r} = A_{12} \alpha_{1r} + A_{22} \alpha_{2r} + A_{23} \alpha_{3r}$, $\mathcal{G}_{3r} = A_{13} \alpha_{1r} + A_{23} \alpha_{2r} + A_{33} \alpha_{3r}$;

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_2, & \gamma_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_1, & \gamma_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\
 \gamma_{12} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_1 - \omega_3, & \gamma_{21} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_2 + \omega_3, \\
 \gamma_{13} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \omega_2, & \gamma_{31} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} - \omega_2, & \gamma_{23} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - \omega_1, & \gamma_{32} &= \frac{\partial u_2}{\partial z} + \omega_1, \\
 \chi_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \omega_2, & \chi_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \omega_1, & \chi_{33} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial z}, \\
 \chi_{12} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \omega_1, & \chi_{21} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \omega_2, \\
 \chi_{13} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_1}, & \chi_{31} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial z}, & \chi_{23} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_2}, & \chi_{32} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial z};
 \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Уравнение стационарной теплопроводности

$$\frac{1}{H_1 H_2} \left[\lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} \right) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \alpha_2} \right) \right] + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \tag{1.1.5}$$

Здесь, $\hat{\sigma}, \hat{\mu}$ - тензоры силовых и моментных напряжений; $\hat{\gamma}, \hat{\chi}$ - тензоры деформаций и изгибов-кручений; $\vec{u}, \vec{\omega}$ - соответственно векторы перемещения и независимого поворота; T - функция температуры; \hat{a}, \hat{b} - матрицы упругих постоянных микрополярного ортотропного материала пластинки; $\alpha_k (k=1,2,3)$ - линейные коэффициенты температурного расширения, а $\lambda_k (k=1,2,3)$ - коэффициенты теплопроводности материала пластинки; $H_1 = A_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $H_2 = A_2(\alpha_1, \alpha_2)$ - коэффициенты Ламе плоской криволинейной ортогональной системы координат α_1, α_2 , расположенной в срединной плоскости пластинки.

К основным уравнениям микрополярной теории термоупругости (1.1.1)-(1.1.5) присоединим соответствующие граничные условия.

На лицевых плоскостях пластинки $z = \pm h$ примем граничные условия первой граничной задачи микрополярной теории упругости:

$$\sigma_{3i} = p_i^\pm, \sigma_{33} = p_3^\pm, \mu_{3i} = m_i^\pm, \mu_{33} = m_3^\pm. \tag{1.1.6}$$

На поверхности края пластинки Σ , в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления ее точек, граничные условия записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Для температурного поля пластинки, как на лицевых плоскостях $z = \pm h$, так и на поверхности края Σ , для определенности будем считать заданными значения температурной функции.

Основными неизвестными функциями в трехмерной модели микрополярной термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений являются: 9 компонентов силового тензора напряжений, 9 компонентов моментного тензора напряжений, 9 компонентов тензора деформаций, 9 компонентов тензора изгиба-кручений, 3 компонента вектора перемещений и 3 компонента вектора независимого поворота - всего 42-неизвестные функции. Легко подсчитать, что основные уравнения тоже 42 (6 уравнений равновесия, 18 соотношений упругости, 18 геометрических соотношений). Функция температуры $T = T(\alpha_1, \alpha_2, z)$ - отдельно определяется на основе уравнений (1.1.5) с соответствующими граничными условиями.

Отметим, что в случае, когда в (1.1.2) имеют место нижеследующие равенства:

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = a_{33} &= \frac{1}{E}, \quad a_{45} = a_{56} = a_{78} = -\frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = -\frac{\nu}{E}, \quad a_{44} = a_{55} = \tilde{a}_{55} = \\ &= a_{66} = a_{77} = a_{88} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}, \quad b_{11} = b_{22} = b_{33} = \frac{\beta + \gamma}{\gamma(3\beta + 2\gamma)}, \quad b_{45} = b_{56} = b_{78} = -\frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon}, \\ b_{12} = b_{13} = b_{23} &= -\frac{\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)}, \quad b_{44} = b_{55} = \tilde{b}_{55} = b_{66} = b_{77} = b_{88} = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon}, \quad \alpha_{ki} = \alpha_i (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

тогда будут иметь место физические соотношения микрополярной термоупругости для изотропного тела. Здесь $E, \nu, \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$: модуль упругости, коэффициент Пуассона и

модуль сдвига, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - дополнительные модули упругости микрополярного материала:

Физические соотношения микрополярной термоупругости изотропного тела будут:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha_1 T, \quad \chi_{11} = \frac{\gamma + \beta}{\gamma(2\gamma + 3\beta)} \left[\mu_{11} - \frac{\beta}{2(\gamma + \beta)} (\mu_{22} + \mu_{33}) \right] \\ \gamma_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha_2 T, \quad \chi_{22} = \frac{\gamma + \beta}{\gamma(2\gamma + 3\beta)} \left[\mu_{22} - \frac{\beta}{2(\gamma + \beta)} (\mu_{11} + \mu_{33}) \right], \\ \gamma_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha_3 T, \quad \chi_{33} = \frac{\gamma + \beta}{\gamma(2\gamma + 3\beta)} \left[\mu_{33} - \frac{\beta}{2(\gamma + \beta)} (\mu_{11} + \mu_{22}) \right], \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{4\mu\alpha} [(\mu + \alpha)\sigma_{12} - (\mu - \alpha)\sigma_{21}], \quad \chi_{12} = \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{12} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{21}], \\ \gamma_{21} &= \frac{1}{4\mu\alpha} [(\mu + \alpha)\sigma_{21} - (\mu - \alpha)\sigma_{12}], \quad \chi_{21} = \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{21} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{12}], \\ \gamma_{13} &= \frac{1}{4\mu\alpha} [(\mu + \alpha)\sigma_{13} - (\mu - \alpha)\sigma_{31}], \quad \chi_{13} = \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{13} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{31}], \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{31} &= \frac{1}{4\mu\alpha} [(\mu + \alpha)\sigma_{31} - (\mu - \alpha)\sigma_{13}], & \chi_{31} &= \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{31} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{13}], \\
\gamma_{23} &= \frac{1}{4\mu\alpha} [(\mu + \alpha)\sigma_{23} - (\mu - \alpha)\sigma_{32}], & \chi_{23} &= \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{23} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{32}], \\
\gamma_{32} &= \frac{1}{4\mu\alpha} [(\mu + \alpha)\sigma_{32} - (\mu - \alpha)\sigma_{23}], & \chi_{32} &= \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{32} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{23}],
\end{aligned}$$

либо в обратной форме

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (2\mu + \lambda)\gamma_{11} + \lambda(\gamma_{22} + \gamma_{33}) - (2\mu + 3\lambda)\alpha_r T, & \mu_{11} &= (2\gamma + \beta)\chi_{11} + \beta(\chi_{22} + \chi_{33}), \\
\sigma_{22} &= (2\mu + \lambda)\gamma_{22} + \lambda(\gamma_{11} + \gamma_{33}) - (2\mu + 3\lambda)\alpha_r T, & \mu_{22} &= (2\gamma + \beta)\chi_{22} + \beta(\chi_{11} + \chi_{33}), \\
\sigma_{33} &= (2\mu + \lambda)\gamma_{33} + \lambda(\gamma_{11} + \gamma_{22}) - (2\mu + 3\lambda)\alpha_r T, & \mu_{33} &= (2\gamma + \beta)\chi_{33} + \beta(\chi_{11} + \chi_{22}), \\
\sigma_{12} &= (\mu + \alpha)\gamma_{12} + (\mu - \alpha)\gamma_{21}, & \mu_{12} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{12} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{21}, \\
\sigma_{21} &= (\mu + \alpha)\gamma_{21} + (\mu - \alpha)\gamma_{12}, & \mu_{21} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{21} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{12}, \\
\sigma_{13} &= (\mu + \alpha)\gamma_{13} + (\mu - \alpha)\gamma_{31}, & \mu_{13} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{13} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{31}, \\
\sigma_{31} &= (\mu + \alpha)\gamma_{31} + (\mu - \alpha)\gamma_{13}, & \mu_{31} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{31} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{13}, \\
\sigma_{23} &= (\mu + \alpha)\gamma_{23} + (\mu - \alpha)\gamma_{32}, & \mu_{23} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{23} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{32}, \\
\sigma_{32} &= (\mu + \alpha)\gamma_{32} + (\mu - \alpha)\gamma_{23}, & \mu_{32} &= (\gamma + \varepsilon)\chi_{32} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{23}.
\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

Здесь μ и λ - постоянные Ламе материала, а $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ - о них, уже отмечены выше.

Таким образом, в случае изотропного материала система уравнений трехмерной микрополярной термоупругости выражается уравнениями равновесия (1.1.1), соотношениями термоупругости (1.1.8) или (1.1.9) и геометрическими соотношениями (1.1.3). Граничные условия остаются те же самые, что были сформулированы в случае ортотропного материала. В изотропном случае уравнение теплопроводности (1.1.5) остается в таком же виде, только необходимо учесть, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Если в (1.1.2) имеют место следующие равенства:

$$a_{45} = a_{56} = a_{78} = 0, \quad \tilde{a}_{55} = a_{66} = \frac{1}{2G_{13}}, \quad a_{44} = a_{55} = \frac{1}{2G_{23}}, \quad a_{77} = a_{88} = \frac{1}{2G_{12}}, \tag{1.1.10}$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{12} = b_{13} = b_{23} = b_{44} = b_{45} = b_{55} = \tilde{b}_{55} = b_{56} = b_{66} = b_{77} = b_{78} = b_{88} = 0,$$

тогда получим физические соотношения термоупругости классической теории для ортотропного тела ($\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$):

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} + \alpha_{1r}T, & \tilde{\gamma}_{23} &= \tilde{\gamma}_{32} = 2a_{44}\sigma_{23}, \\
\gamma_{22} &= a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33} + \alpha_{2r}T, & \tilde{\gamma}_{13} &= \tilde{\gamma}_{31} = 2a_{66}\sigma_{13}, \\
\gamma_{33} &= a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33} + \alpha_{3r}T, & \tilde{\gamma}_{12} &= \tilde{\gamma}_{21} = 2a_{77}\sigma_{12}
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

либо в таком виде

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33} + \alpha_{1t} T, & \tilde{\gamma}_{12} &= \tilde{\gamma}_{21} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12}, \\
\gamma_{22} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{33} + \alpha_{2t} T, & \tilde{\gamma}_{13} &= \tilde{\gamma}_{31} = \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13}, \\
\gamma_{33} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33} + \alpha_{3t} T, & \tilde{\gamma}_{23} &= \tilde{\gamma}_{32} = \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23}.
\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Здесь E_1, E_2, E_3 – модули Юнга при растяжении – сжатии вдоль главных направлений упругости α_1, α_2, z ; ν_{12} – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении α_2 при растяжении в направлении α_1 ; ν_{21} – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении α_1 при растяжении в направлении α_2 и т.д.; G_{23}, G_{13}, G_{12} – модули сдвига, характеризующие изменения углов между главными направлениями α_2 и z , α_1 и z , α_1 и α_2 . Между модулями Юнга и коэффициентами Пуассона существуют зависимости:

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}, \quad E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23}, \quad E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31}.$$

Если материал изотропный, тогда вместо (1.1.12) получим соотношения классической термоупругости изотропного тела ($G_{13} = G_{23} = G_{12} = \mu$, $E_1 = E_2 = E_3 = E$, $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = \nu$, $\alpha_{1t} = \alpha_{2t} = \alpha_{3t} = \alpha_t$):

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha_t T, & \tilde{\gamma}_{12} &= \tilde{\gamma}_{21} = \frac{1}{\mu} \sigma_{12}, \\
\gamma_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha_t T, & \tilde{\gamma}_{13} &= \tilde{\gamma}_{31} = \frac{1}{\mu} \sigma_{13}, \\
\gamma_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha_t T, & \tilde{\gamma}_{23} &= \tilde{\gamma}_{32} = \frac{1}{\mu} \sigma_{23},
\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

Таким образом, система основных уравнений трехмерной классической термоупругости (в криволинейных ортогональных координатах) будут [32,37,67,78]:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{11}) + \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{12}) + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} \right] + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22} &= 0, \\
\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{22}) + \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{12}) + \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{12} \right] + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11} &= 0, \\
\frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{13}) \right] + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} &= 0;
\end{aligned} \tag{1.1.14}$$

Физические соотношения классической термоупругости (1.1.11) (или (1.1.12)) в случае ортотропного тела или (1.1.13) в случае изотропного тела, а геометрические соотношения этой модели имеют вид:

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_2, \quad \gamma_{22} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_1, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\ \tilde{\gamma}_{12} &= \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right), \\ \tilde{\gamma}_{13} &= \gamma_{13} + \gamma_{31} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad \tilde{\gamma}_{23} = \gamma_{23} + \gamma_{32} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial z}.\end{aligned}\tag{1.1.15}$$

Если, в частности координатная система прямоугольная декартова ($x_1, x_2, x_3 = z$), т.е $H_1 = A_1 = 1$, $H_2 = A_2 = 1$, тогда уравнения равновесия (1.1.1) и геометрические соотношения (1.1.3) микрополярной термоупругости примут вид:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} &= 0, & \frac{\partial \mu_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{31}}{\partial x_3} + \sigma_{23} - \sigma_{32} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} &= 0, & \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_3} + \sigma_{31} - \sigma_{13} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= 0, & \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \mu_{33}}{\partial x_3} + \sigma_{12} - \sigma_{21} &= 0;\end{aligned}\tag{1.1.16}$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & \chi_{11} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, \quad \chi_{22} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}, \quad \chi_{33} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}, \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3, \quad \gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3, & \chi_{12} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}, \quad \chi_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}, \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \omega_1, \quad \gamma_{32} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \omega_1, & \chi_{23} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}, \quad \chi_{32} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}, \\ \gamma_{13} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \omega_2, \quad \gamma_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \omega_2, & \chi_{31} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}, \quad \chi_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}.\end{aligned}\tag{1.1.17}$$

Таким образом, в декартовых координатах в системе основных уравнений трехмерной микрополярной термоупругости входят уравнения равновесия (1.1.16), геометрические соотношения (1.1.17), физические соотношения термоупругости (1.1.2) в случае ортотропного материала или (1.1.8)- в случае изотропного материала.

Основные уравнения классической теории термоупругости в декартовых координатах будут уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0, & \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0, & \quad \sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}; \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \\ \tilde{\gamma}_{23} = \gamma_{23} + \gamma_{32} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \tilde{\gamma}_{13} = \gamma_{13} + \gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

и физические соотношения термоупругости (1.1.11) (или (1.1.12)) в случае ортотропного тела или (1.1.13)- в случае изотропного тела.

Известным способом из уравнений (1.1.1)-(1.1.6) можем получить закон сохранения энергии трехмерной микрополярной термоупругости [148]:

$$\iiint_{(S)^{-h}} W A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dz = A, \quad (1.1.20)$$

где W -плотность потенциальной энергии деформации:

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} (\sigma_{11}\gamma_{11} + \sigma_{22}\gamma_{22} + \sigma_{33}\gamma_{33} + \sigma_{12}\gamma_{12} + \sigma_{21}\gamma_{21} + \sigma_{13}\gamma_{13} + \sigma_{31}\gamma_{31} + \sigma_{23}\gamma_{23} + \sigma_{32}\gamma_{32} + \mu_{11}\chi_{11} + \\ + \mu_{22}\chi_{22} + \mu_{33}\chi_{33} + \mu_{12}\chi_{12} + \mu_{21}\chi_{21} + \mu_{13}\chi_{13} + \mu_{31}\chi_{31} + \mu_{23}\chi_{23} + \mu_{32}\chi_{32}) - \\ - \frac{T}{2} (\mathcal{G}_{1i}\gamma_{11} + \mathcal{G}_{2i}\gamma_{22} + \mathcal{G}_{3i}\gamma_{33}), \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

A -работа внешних поверхностных усилий и моментов на перемещениях и поворотах деформации:

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2} \left\{ \left[\int_{-h}^h dz \int_{l_1} (\sigma_{21}^0 u_1 + \sigma_{22}^0 u_2 + \sigma_{23}^0 u_3 + \mu_{21}^0 \omega_1 + \mu_{22}^0 \omega_2 + \mu_{23}^0 \omega_3) A_1 d\alpha_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-h}^h dz \int_{l_2} (\sigma_{11}^0 u_1 + \sigma_{12}^0 u_2 + \sigma_{13}^0 u_3 + \mu_{11}^0 \omega_1 + \mu_{12}^0 \omega_2 + \mu_{13}^0 \omega_3) A_2 d\alpha_2 \right] + \right. \\ \left. + \left[\iint_{S^+} (p_1^+ u_1 + p_2^+ u_2 + p_3^+ u_3 + m_1^+ \omega_1 + m_2^+ \omega_2 + m_3^+ \omega_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \iint_{S^-} (p_1^- u_1 + p_2^- u_2 + p_3^- u_3 + m_1^- \omega_1 + m_2^- \omega_2 + m_3^- \omega_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

Используя физические соотношения термоупругости (1.1.2) (или (1.1.3)) на основе (1.1.21) получим формулу для плотности потенциальной энергии деформации либо выраженная через компоненты тензоров деформации и изгиба-кручений, либо через компоненты тензоров силовых и моментных напряжений:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2}(A_{11}\gamma_{11}^2 + A_{22}\gamma_{22}^2 + A_{33}\gamma_{33}^2 + 2A_{12}\gamma_{11}\gamma_{22} + 2A_{13}\gamma_{11}\gamma_{33} + 2A_{23}\gamma_{22}\gamma_{33} + A_{44}\gamma_{23}^2 + A_{55}\gamma_{32}^2 + \\
& + A_{55}\gamma_{31}^2 + A_{66}\gamma_{13}^2 + A_{77}\gamma_{12}^2 + A_{88}\gamma_{21}^2 + 2A_{45}\gamma_{23}\gamma_{32} + 2A_{56}\gamma_{13}\gamma_{31} + 2A_{78}\gamma_{12}\gamma_{21} + B_{11}\chi_{11}^2 + \\
& + B_{22}\chi_{22}^2 + B_{33}\chi_{33}^2 + 2B_{12}\chi_{11}\chi_{22} + 2B_{13}\chi_{11}\chi_{33} + 2B_{23}\chi_{22}\chi_{33} + B_{44}\chi_{23}^2 + B_{55}\chi_{31}^2 + B_{66}\chi_{13}^2 + \\
& + B_{77}\chi_{12}^2 + B_{88}\chi_{21}^2 + 2B_{45}\chi_{23}\chi_{32} + 2B_{56}\chi_{13}\chi_{31} + 2B_{78}\chi_{12}\chi_{21} + B_{55}\chi_{32}^2) - T(\mathcal{G}_{1r}\gamma_{11} + \mathcal{G}_{2r}\gamma_{22} + \mathcal{G}_{3r}\gamma_{33});
\end{aligned} \tag{1.1.23}$$

или

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2}(a_{11}\sigma_{11}^2 + a_{22}\sigma_{22}^2 + a_{33}\sigma_{33}^2 + 2a_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2a_{13}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2a_{23}\sigma_{22}\sigma_{33} + a_{44}\sigma_{23}^2 + a_{55}\sigma_{32}^2 + \\
& + \tilde{a}_{55}\sigma_{31}^2 + a_{66}\sigma_{13}^2 + a_{77}\sigma_{12}^2 + a_{88}\sigma_{21}^2 + 2a_{45}\sigma_{23}\sigma_{32} + 2a_{56}\sigma_{13}\sigma_{31} + 2a_{78}\sigma_{12}\sigma_{21} + b_{11}\mu_{11}^2 + b_{22}\mu_{22}^2 + \\
& + b_{33}\mu_{33}^2 + 2b_{12}\mu_{11}\mu_{22} + 2b_{13}\mu_{11}\mu_{33} + 2b_{23}\mu_{22}\mu_{33} + b_{44}\mu_{23}^2 + \tilde{b}_{55}\mu_{31}^2 + b_{66}\mu_{13}^2 + b_{77}\mu_{12}^2 + b_{88}\mu_{21}^2 + \\
& + 2b_{45}\mu_{23}\mu_{32} + 2b_{56}\mu_{13}\mu_{31} + 2b_{78}\mu_{12}\mu_{21} + b_{55}\mu_{32}^2) - \frac{T}{2}\{\mathcal{G}_{1r}(a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} + \alpha_{1r}T) + \\
& + \mathcal{G}_{2r}(a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33} + \alpha_{2r}T) + \mathcal{G}_{3r}(a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33} + \alpha_{3r}T) - \\
& - (\alpha_{1r}\sigma_{11} + \alpha_{2r}\sigma_{22} + \alpha_{3r}\sigma_{33})\}.
\end{aligned} \tag{1.1.24}$$

В случае микрополярного изотропного тела (например, вместо формул (1.1.21) или (1.1.23)) будем иметь:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2}(\sigma_{11}\gamma_{11} + \sigma_{22}\gamma_{22} + \sigma_{33}\gamma_{33} + \sigma_{12}\gamma_{12} + \sigma_{21}\gamma_{21} + \sigma_{13}\gamma_{13} + \sigma_{31}\gamma_{31} + \sigma_{23}\gamma_{23} + \sigma_{32}\gamma_{32} + \mu_{11}\chi_{11} + \\
& + \mu_{22}\chi_{22} + \mu_{33}\chi_{33} + \mu_{12}\chi_{12} + \mu_{21}\chi_{21} + \mu_{13}\chi_{13} + \mu_{31}\chi_{31} + \mu_{23}\chi_{23} + \mu_{32}\chi_{32}) - \frac{\alpha_r T}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})
\end{aligned} \tag{1.1.25}$$

или

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2}\{2\mu(\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2) + \lambda(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33})^2 + (\mu + \alpha)(\gamma_{12}^2 + \gamma_{21}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{31}^2 + \\
& + \gamma_{23}^2 + \gamma_{32}^2) + 2(\mu - \alpha)(\gamma_{12}\gamma_{21} + \gamma_{13}\gamma_{31} + \gamma_{23}\gamma_{32}) + 2\gamma(\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + \chi_{33}^2) + \\
& + \beta(\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33})^2 + (\gamma + \varepsilon)(\chi_{12}^2 + \chi_{21}^2 + \chi_{13}^2 + \chi_{31}^2 + \chi_{23}^2 + \chi_{32}^2) + \\
& + 2(\gamma - \varepsilon)(\chi_{12}\chi_{21} + \chi_{13}\chi_{31} + \chi_{23}\chi_{32})\} - (3\lambda + 2\mu)(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33})\alpha_r T + \frac{3}{2}(3\lambda + 2\mu)\alpha_r^2 T^2.
\end{aligned} \tag{1.1.26}$$

В классической теории термоупругости для плотности потенциальной энергии деформации имеем ($A_{55} = A_{66} = A_{56}$, $A_{44} = A_{45} = A_{55}$, $A_{77} = A_{78} = A_{88}$):

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2}(A_{11}\gamma_{11}^2 + A_{22}\gamma_{22}^2 + A_{33}\gamma_{33}^2 + 2A_{12}\gamma_{11}\gamma_{22} + 2A_{13}\gamma_{11}\gamma_{33} + 2A_{23}\gamma_{22}\gamma_{33} + A_{77}\tilde{\gamma}_{12}^2 + \\
& + A_{66}\tilde{\gamma}_{13}^2 + A_{44}\tilde{\gamma}_{23}^2) - T(\mathcal{G}_{1r}\gamma_{11} + \mathcal{G}_{2r}\gamma_{22} + \mathcal{G}_{3r}\gamma_{33})
\end{aligned} \tag{1.1.27}$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2}\{2\mu(\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2) + \lambda(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33})^2 + \mu(\tilde{\gamma}_{12}^2 + \tilde{\gamma}_{13}^2 + \tilde{\gamma}_{23}^2)\} - \\
& - (3\lambda + 2\mu)(\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33})\alpha_r T + \frac{3}{2}(3\lambda + 2\mu)\alpha_r^2 T^2
\end{aligned} \tag{1.1.28}$$

для изотропного тела.

В классической теории термоупругости для выражения работы внешних сил получим

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \int_{-h}^h dz \int_{l_1} (\sigma_{21}^0 u_1 + \sigma_{22}^0 u_2 + \sigma_{23}^0 u_3) A_1 d\alpha_1 + \int_{-h}^h dz \int_{l_2} (\sigma_{11}^0 u_1 + \sigma_{12}^0 u_2 + \sigma_{13}^0 u_3) A_2 d\alpha_2 \right\} + \left\{ \iint_{S^+} (p_1^+ u_1 + p_2^+ u_2 + p_3^+ u_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint_{S^-} (p_1^- u_1 + p_2^- u_2 + p_3^- u_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right\}. \quad (1.1.29)$$

Известным способом, исходя из закона сохранения энергии, можем доказать теорему единственности для граничных задач трехмерной микрополярной термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений. Кроме того, в этой теории, на основании формул (1.1.23), (1.1.24), легко доказать формулы типа Кастильяно [148]:

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_{11}} = \gamma_{11}, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma_{32}} = \gamma_{32}, \quad \frac{\partial W}{\partial \mu_{11}} = \chi_{11}, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \mu_{32}} = \chi_{32} \quad (1.1.30)$$

либо Грина:

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_{11}} = \sigma_{11}, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{32}} = \sigma_{32}, \quad \frac{\partial W}{\partial \chi_{11}} = \mu_{11}, \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \chi_{32}} = \mu_{32}. \quad (1.1.31)$$

Используя ход вывода уравнения баланса энергии (1.1.20), можем легко прийти к закону взаимности Бетти в трехмерной микрополярной термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений [148]:

$$\begin{aligned} & \left\{ \iint_{S^+} (p_1^+ u_1' + p_2^+ u_2' + p_3^+ u_3' + m_1^+ \omega_1' + m_2^+ \omega_2' + m_3^+ \omega_3') A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \right. \\ & + \iint_{S^-} (p_1^- u_1' + p_2^- u_2' + p_3^- u_3' + m_1^- \omega_1' + m_2^- \omega_2' + m_3^- \omega_3') A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_1} (\sigma_{21}^0 u_1' + \sigma_{22}^0 u_2' + \sigma_{23}^0 u_3' + \mu_{21}^0 \omega_1' + \mu_{22}^0 \omega_2' + \mu_{23}^0 \omega_3') A_1 d\alpha_1 + \\ & + \left. \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_2} (\sigma_{11}^0 u_1' + \sigma_{12}^0 u_2' + \sigma_{13}^0 u_3' + \mu_{11}^0 \omega_1' + \mu_{12}^0 \omega_2' + \mu_{13}^0 \omega_3') A_2 d\alpha_2 \right\} - \\ & - \left\{ \iint_{S^+} (p_1^+ u_1 + p_2^+ u_2 + p_3^+ u_3 + m_1^+ \omega_1 + m_2^+ \omega_2 + m_3^+ \omega_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \right. \\ & + \iint_{S^-} (p_1^- u_1 + p_2^- u_2 + p_3^- u_3 + m_1^- \omega_1 + m_2^- \omega_2 + m_3^- \omega_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & + \int_{-h}^h dz \int_{l_1} (\sigma_{21}' u_1 + \sigma_{22}' u_2 + \sigma_{23}' u_3 + \mu_{21}' \omega_1 + \mu_{22}' \omega_2 + \mu_{23}' \omega_3) A_1 d\alpha_1 + \\ & + \left. \int_{-h}^h dz \int_{l_2} (\sigma_{11}' u_1 + \sigma_{12}' u_2 + \sigma_{13}' u_3 + \mu_{11}' \omega_1 + \mu_{12}' \omega_2 + \mu_{13}' \omega_3) A_2 d\alpha_2 \right\} = \\ & = \iint_{S} \int_{-h}^h [\mathcal{G}_{1t} (\gamma_{11} T' - \gamma_{11}' T) + \mathcal{G}_{2t} (\gamma_{22} T' - \gamma_{22}' T) + \mathcal{G}_{3t} (\gamma_{33} T' - \gamma_{33}' T)] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dz. \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}
& \left\{ \iint_{S^+} (p_1^+ u_1' + p_2^+ u_2' + p_3^+ u_3' + m_1^+ \omega_1' + m_2^+ \omega_2' + m_3^+ \omega_3') A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \right. \\
& + \iint_{S^-} (p_1^- u_1' + p_2^- u_2' + p_3^- u_3' + m_1^- \omega_1' + m_2^- \omega_2' + m_3^- \omega_3') A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_1} (\sigma_{21}^0 u_1' + \sigma_{22}^0 u_2' + \sigma_{23}^0 u_3' + \mu_{21}^0 \omega_1' + \mu_{22}^0 \omega_2' + \mu_{23}^0 \omega_3') A_1 d\alpha_1 + \\
& + \left. \int_{-h}^{+h} d\alpha_3 \int_{l_2} (\sigma_{11}^0 u_1' + \sigma_{12}^0 u_2' + \sigma_{13}^0 u_3' + \mu_{11}^0 \omega_1' + \mu_{12}^0 \omega_2' + \mu_{13}^0 \omega_3') A_2 d\alpha_2 + \right\} - \\
& - \left\{ \iint_{S^+} (p_1^+ u_1 + p_2^+ u_2 + p_3^+ u_3 + m_1^+ \omega_1 + m_2^+ \omega_2 + m_3^+ \omega_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \right. \\
& + \iint_{S^-} (p_1^- u_1 + p_2^- u_2 + p_3^- u_3 + m_1^- \omega_1 + m_2^- \omega_2 + m_3^- \omega_3) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \int_{-h}^h dz \int_{l_1} (\sigma_{21}' u_1 + \sigma_{22}' u_2 + \sigma_{23}' u_3 + \mu_{21}' \omega_1 + \mu_{22}' \omega_2 + \mu_{23}' \omega_3) A_1 d\alpha_1 + \\
& + \left. \int_{-h}^h dz \int_{l_2} (\sigma_{11}' u_1 + \sigma_{12}' u_2 + \sigma_{13}' u_3 + \mu_{11}' \omega_1 + \mu_{12}' \omega_2 + \mu_{13}' \omega_3) A_2 d\alpha_2 \right\} = \\
& = \alpha_t \iint_{S^+} \int_{-h}^h [T'(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - T(\sigma_{11}' + \sigma_{22}' + \sigma_{33}')] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dz.
\end{aligned} \tag{1.1.33}$$

для изотропного тела.

Рассмотрим функционал [148]:

$$\begin{aligned}
I = & \int_{-h}^h \iint_S \left\langle W - \left[\sigma_{11} \left[\gamma_{11} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} u_3 \right) \right] + \right. \\
& + \sigma_{22} \left[\gamma_{22} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} u_3 \right) \right] + \sigma_{33} \left[\gamma_{33} - \frac{\partial u_3}{\partial z} \right] + \\
& + \sigma_{12} \left[\gamma_{12} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 - \omega_3 \right) \right] + \sigma_{21} \left[\gamma_{21} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 + \omega_3 \right) \right] + \\
& + \sigma_{31} \left[\gamma_{31} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \omega_2 \right) \right] + \sigma_{13} \left[\gamma_{13} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial z} u_1 + \omega_2 \right) \right] + \\
& + \sigma_{32} \left[\gamma_{32} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \omega_1 \right) \right] + \sigma_{23} \left[\gamma_{23} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} u_2 - \omega_1 \right) \right] + \\
& + \mu_{11} \left[\chi_{11} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega_2 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial z} \omega_3 \right) \right] + \\
& + \mu_{22} \left[\chi_{22} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \omega_3 \right) \right] + \mu_{33} \left[\chi_{33} - \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right] + \\
& + \mu_{12} \left[\chi_{12} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \omega_1 \right) \right] + \mu_{21} \left[\chi_{21} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \omega_2 \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu_{13} \left[\chi_{13} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial z} \omega_1 \right) \right] + \mu_{31} \left[\chi_{31} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \right] + \\
& + \mu_{23} \left[\chi_{23} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} \omega_2 \right) \right] + \mu_{32} \left[\chi_{32} - \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right] \Bigg\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 dz - \\
& - \iint_{S^+} [p_1^+ u_1 + p_2^+ u_2 + p_3^+ u_3 + m_1^+ \omega_1 + m_2^+ \omega_2 + m_3^+ \omega_3]_{z=h} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \iint_{S^-} [p_1^- u_1 + p_2^- u_2 + p_3^- u_3 + m_1^- \omega_1 + m_2^- \omega_2 + m_3^- \omega_3]_{z=-h} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \int_{-h}^{+h} dz \int_{I_1'} (\sigma_{21}^0 u_1 + \sigma_{22}^0 u_2 + \sigma_{23}^0 u_3 + \mu_{21}^0 \omega_1 + \mu_{22}^0 \omega_2 + \mu_{23}^0 \omega_3) A_1 d\alpha_1 + \\
& + \int_{-h}^{+h} dz \int_{I_1''} [\sigma_{21} (u_1 - u_1^0) + \sigma_{22} (u_2 - u_2^0) + \sigma_{23} (u_3 - u_3^0) + \mu_{21} (\omega_1 - \omega_1^0) + \\
& + \mu_{22} (\omega_2 - \omega_2^0) + \mu_{23} (\omega_3 - \omega_3^0)] A_1 d\alpha_1 + \\
& + \int_{-h}^{+h} dz \int_{I_2'} (\sigma_{11}^0 u_1 + \sigma_{12}^0 u_2 + \sigma_{13}^0 u_3 + \mu_{11}^0 \omega_1 + \mu_{12}^0 \omega_2 + \mu_{13}^0 \omega_3) A_2 d\alpha_2 + \\
& + \int_{-h}^{+h} dz \int_{I_2''} [\sigma_{11} (u_1 - u_1^0) + \sigma_{12} (u_2 - u_2^0) + \sigma_{13} (u_3 - u_3^0) + \mu_{11} (\omega_1 - \omega_1^0) + \\
& + \mu_{12} (\omega_2 - \omega_2^0) + \mu_{13} (\omega_3 - \omega_3^0)] A_2 d\alpha_2,
\end{aligned} \tag{1.1.34}$$

где W выражается формулой (1.1.23) или (1.1.26). Можем убедиться, что если составить вариационное уравнение

$$\delta I = 0, \tag{1.1.35}$$

тогда, как уравнения Эйлера получим все основные уравнения и соотношения трехмерной микрополярной термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений и, как естественные граничные условия, получим граничные условия указанной теории на $z = \pm h$ и на Σ .

Вариационное уравнение (1.1.35), где функционал выражается формулой (1.1.34), представляет собой общий вариационный принцип трехмерной микрополярной термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений.

Отметим, что из общего вариационного принципа (1.1.35) как частные случаи следует вариационное уравнение типа Лагранжа или Кастильяно трехмерной микрополярной термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений.

Функционал общего вариационного принципа классической трехмерной термоупругости выражается так [67]:

$$\begin{aligned}
I = & \iiint_{-h}^h \left\langle W - \left\{ \sigma_{11} \left[\gamma_{11} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} u_3 \right) \right] + \right. \\
& + \left. \sigma_{22} \left[\gamma_{22} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} u_3 \right) \right] + \sigma_{33} \left[\gamma_{33} - \frac{\partial u_3}{\partial z} \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_{12} \left[\tilde{\gamma}_{12} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right) \right) \right] + \\
& + \sigma_{13} \left[\tilde{\gamma}_{13} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{1}{A_1} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial z} u_1 \right) \right] + \sigma_{23} \left[\tilde{\gamma}_{32} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial z} u_2 \right) \right] + \quad (1.1.36) \\
& - \iint_{S^+} [p_1^+ u_1 + p_2^+ u_2 + p_3^+ u_3]_{z=h} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \iint_{S^-} [p_1^- u_1 + p_2^- u_2 + p_3^- u_3]_{z=-h} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \int_{-h}^{+h} dz \int_{I_1'} (\sigma_{12}^0 u_1 + \sigma_{22}^0 u_2 + \sigma_{23}^0 u_3) A_1 d\alpha_1 + \int_{-h}^{+h} dz \int_{I_2'} (\sigma_{11}^0 u_1 + \sigma_{12}^0 u_2 + \sigma_{13}^0 u_3) A_2 d\alpha_2 + \\
& + \int_{-h}^{+h} dz \int_{I_1'} [\sigma_{12} (u_1 - u_1^0) + \sigma_{22} (u_2 - u_2^0) + \sigma_{23} (u_3 - u_3^0)] A_1 d\alpha_1 + \\
& + \int_{-h}^{+h} dz \int_{I_2'} [\sigma_{11} (u_1 - u_1^0) + \sigma_{12} (u_2 - u_2^0) + \sigma_{13} (u_3 - u_3^0)] A_2 d\alpha_2,
\end{aligned}$$

где W - плотность потенциальной энергии деформации, которая имеет вид (1.1.24) – в случае ортотропного материала или (1.1.26)- в случае изотропного материала.

Еще раз отметим, что приведенные выше уравнения и соотношения относятся к трехмерному телу, имеющую форму пластинки (либо плоского слоя) толщиной $2h$. Если температурную функцию $T(\alpha_1, \alpha_2, z)$ в общем виде представить как сумму симметричной по z и антисимметричной по z частей, тогда как краевая задача микрополярной термоупругости, так и краевая задача классической термоупругости для трехмерной пластинки разделяются на две отдельные задачи [148]: а) симметричная по z задача, при которой $u_i, \sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{33}, \mu_{i3}, \mu_{3i}, \omega_3$ – четные по z функции, а $u_3, \sigma_{i3}, \sigma_{3i}, \mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{33}, \omega_i$ – нечетные по z функции, б) антисимметричная по z задача, при которой наоборот: $u_3, \sigma_{i3}, \sigma_{3i}, \mu_{ii}, \mu_{ij}, \mu_{33}, \omega_i$ – четные по z функции, а $u_i, \sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{33}, \mu_{i3}, \mu_{3i}, \omega_3$ – нечетные по z функции, здесь $i, j = 1, 2, i \neq j$.

Граничные условия будут следующими:

а) для симметричной по z задачи

$$\sigma_{3i} = \pm \frac{1}{2} \tilde{p}_i, \quad \sigma_{33} = \frac{1}{2} p_3, \quad \mu_{3i} = \frac{1}{2} m_i, \quad \mu_{33} = \pm \frac{1}{2} \tilde{m}_3, \quad \text{при } z = \pm h, \quad (1.1.37)$$

б) для антисимметричной по z задачи

$$\sigma_{3i} = \frac{1}{2} p_i, \quad \sigma_{33} = \pm \frac{1}{2} \tilde{p}_3, \quad \mu_{3i} = \pm \frac{1}{2} \tilde{m}_i, \quad \mu_{33} = \frac{1}{2} m_3, \quad \text{при } z = \pm h. \quad (1.1.38)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_i &= p_i^+ - p_i^-, \quad p_3 = p_3^+ + p_3^-, \quad p_i = p_i^+ + p_i^-, \quad \tilde{p}_3 = p_3^+ - p_3^-, \\
\tilde{m}_i &= m_i^+ - m_i^-, \quad m_3 = m_3^+ + m_3^-, \quad m_i = m_i^+ + m_i^-, \quad \tilde{m}_3 = m_3^+ - m_3^-, \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned}$$

§1.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Для этой модели трехмерной микрополярной термоупругости характерно то, что вектор поворота точек тела во время деформации определяется как в классической теории упругости, а именно [68]

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}, \quad (1.2.1)$$

но при этом моментные напряжения присутствуют $(\sigma_{12} \neq \sigma_{21}, \sigma_{13} \neq \sigma_{31}, \sigma_{23} \neq \sigma_{32})$.

Векторное равенство (1.2.1) в проекциях на направления выбранной криволинейной ортогональной координатной системы (α_1, α_2, z) дает три скалярные выражения:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right), & \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} \right), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_1 - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right) \right), \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

которые следует присоединить к уравнениям равновесия (1.1.1), физическим соотношениям термоупругости (1.1.2) и геометрическим соотношениям (1.1.4). При соединении, в итоге, получим 45 уравнений, а неизвестные остаются те же 42. Это означает, чтобы осуществить стесненное вращение (1.2.1) (или (1.2.2)) должны выполняться определенные условия [82,88]. Для выяснения этих условий сложим и вычитаем сдвиговые деформации: $\gamma_{12}, \gamma_{21}; \gamma_{13}, \gamma_{31}; \gamma_{23}, \gamma_{32}$, с учетом (1.1.2) и (1.1.4) получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right) &= (a_{77} + a_{78}) \sigma_{12} + (a_{88} + a_{78}) \sigma_{21}, \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial z} &= (a_{44} + a_{45}) \sigma_{23} + (a_{45} + a_{55}) \sigma_{32}, \\ \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z} &= (a_{66} + a_{56}) \sigma_{13} + (\tilde{a}_{55} + a_{56}) \sigma_{31}; \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_1 - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right) - 2\omega_3 &= (a_{77} - a_{78}) \sigma_{12} + (a_{78} - a_{88}) \sigma_{21}, \\ \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial z} - 2\omega_2 &= (a_{56} - a_{66}) \sigma_{13} + (\tilde{a}_{55} - a_{56}) \sigma_{31}, \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial u_2}{\partial z} - 2\omega_1 &= (a_{44} - a_{45}) \sigma_{23} + (a_{45} - a_{55}) \sigma_{32}, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Как видно из уравнений (1.2.4) для выполнения явления стесненного вращения, т. е. формул (1.2.2) (имея в виду, что при этом должно быть $\sigma_{12} \neq \sigma_{21}$, $\sigma_{13} \neq \sigma_{31}$, $\sigma_{23} \neq \sigma_{32}$), получим следующие условия для ортотропного материала:

$$a_{77} - a_{78} \rightarrow 0, a_{78} - a_{88} \rightarrow 0, a_{56} - a_{66} \rightarrow 0, \tilde{a}_{55} - a_{56} \rightarrow 0, a_{44} - a_{45} \rightarrow 0, a_{45} - a_{55} \rightarrow 0, (1.2.5)$$

а в случае изотропного материала, вместо (1.2.5) получим всего одно условие [82,88]:

$$\alpha \rightarrow \infty. (1.2.6)$$

Таким образом, при выполнении условий (1.2.5) для ортотропного материала или (1.3.6) для изотропного материала, уравнения (1.2.4) и (1.2.2) становятся одинаковыми (т. е. три лишние уравнения выпадут).

Т. к. имеет место следующее векторное тождество: $\operatorname{div} \bar{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{u} \equiv 0$, в микрополярной теории со стесненным вращением на основе (1.1.4) получим:

$$\chi_{11} + \chi_{22} + \chi_{33} = 0, (1.2.7)$$

следовательно,

$$\mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33} = 0 (1.2.8)$$

для изотропного случая или

$$(b_{11} + b_{12} + b_{13})\mu_{11} + (b_{12} + b_{22} + b_{23})\mu_{22} + (b_{13} + b_{23} + b_{33})\mu_{33} = 0 (1.2.9)$$

для ортотропного случая.

Теперь можем представить систему основных уравнений трехмерной модели микрополярной теории упругости со стесненным вращением: это уравнения равновесия (1.1.1), физические соотношения термоупругости для ортотропного тела:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} + \alpha_1 T, & \chi_{11} &= \tilde{b}_{11}\mu_{11} + \tilde{b}_{12}\mu_{22}, \\ \gamma_{22} &= a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33} + \alpha_2 T, & \chi_{22} &= \tilde{b}_{21}\mu_{11} + \tilde{b}_{22}\mu_{22}, \\ \gamma_{33} &= a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33} + \alpha_3 T, & \chi_{33} &= \tilde{b}_{13}\mu_{11} + \tilde{b}_{23}\mu_{22}, \\ \tilde{\gamma}_{12} &= \gamma_{12} + \gamma_{21} = 2a_{77}(\sigma_{12} + \sigma_{21}), & \chi_{23} &= b_{44}\mu_{23} + b_{45}\mu_{32}, & \chi_{32} &= b_{45}\mu_{23} + b_{55}\mu_{32}, \\ \tilde{\gamma}_{13} &= \gamma_{13} + \gamma_{31} = 2a_{66}(\sigma_{13} + \sigma_{31}), & \chi_{31} &= \tilde{b}_{55}\mu_{31} + b_{56}\mu_{13}, & \chi_{13} &= b_{56}\mu_{31} + b_{66}\mu_{13}, \\ \tilde{\gamma}_{23} &= \gamma_{23} + \gamma_{32} = 2a_{55}(\sigma_{23} + \sigma_{32}), & \chi_{12} &= b_{77}\mu_{12} + b_{78}\mu_{21}, & \chi_{21} &= b_{78}\mu_{12} + b_{88}\mu_{21}, \end{aligned} (1.2.10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{11} &= \frac{b_{11}b_{23} + b_{11}b_{33} - b_{12}b_{13} - b_{13}^2}{b_{13} + b_{23} + b_{33}}, & \tilde{b}_{12} &= \frac{b_{12}b_{23} + b_{12}b_{33} - b_{13}b_{22} - b_{13}b_{23}}{b_{13} + b_{23} + b_{33}}, \\ \tilde{b}_{21} &= \frac{b_{12}b_{13} + b_{12}b_{33} - b_{11}b_{23} - b_{13}b_{23}}{b_{13} + b_{23} + b_{33}}, & \tilde{b}_{22} &= \frac{b_{13}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23} - b_{23}^2}{b_{13} + b_{23} + b_{33}}, \\ \tilde{b}_{13} &= \frac{b_{13}^2 + b_{13}b_{23} - b_{11}b_{33} - b_{12}b_{33}}{b_{13} + b_{23} + b_{33}}, & \tilde{b}_{13} &= \frac{b_{23}^2 + b_{23}b_{33} - b_{12}b_{33} - b_{12}b_{33}}{b_{13} + b_{23} + b_{33}} \end{aligned} (1.2.11)$$

или

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha_r T, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{12} + \sigma_{21}), \\
\gamma_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha_r T, \quad \tilde{\gamma}_{13} = \gamma_{13} + \gamma_{31} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{13} + \sigma_{31}), \\
\gamma_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha_r T, \quad \tilde{\gamma}_{23} = \gamma_{23} + \gamma_{32} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{23} + \sigma_{32}), \\
\chi_{11} &= \frac{1}{2\gamma} \mu_{11}, \quad \chi_{22} = \frac{1}{2\gamma} \mu_{22}, \quad \chi_{33} = \frac{1}{2\gamma} \mu_{33}, \\
\chi_{12} &= \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{12} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{21}], \quad \chi_{21} = \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{21} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{12}], \\
\chi_{13} &= \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{13} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{31}], \quad \chi_{31} = \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{31} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{13}], \\
\chi_{23} &= \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{23} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{32}], \quad \chi_{32} = \frac{1}{4\gamma\varepsilon} [(\gamma + \varepsilon)\mu_{32} - (\gamma - \varepsilon)\mu_{23}]
\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

для изотропного тела, а также, геометрические соотношения (1.2.2) и

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_2, \quad \gamma_{22} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_1, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}, \\
\tilde{\gamma}_{12} &= \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right), \\
\tilde{\gamma}_{23} &= \gamma_{23} + \gamma_{32} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad \tilde{\gamma}_{13} = \gamma_{13} + \gamma_{31} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial z}, \\
\chi_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \omega_2, \quad \chi_{22} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \omega_1, \quad \chi_{33} = \frac{\partial \omega_3}{\partial z}, \\
\chi_{23} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_2}, \quad \chi_{13} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha_1}, \quad \chi_{32} = \frac{\partial \omega_2}{\partial z}, \quad \chi_{31} = \frac{\partial \omega_1}{\partial z}, \\
\chi_{12} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \omega_1, \quad \chi_{21} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \omega_2.
\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

Легко убедиться, что в изотропном случае в соотношениях упругости кроме того, что физическая постоянная α не участвует (это следствие условия (1.2.6)), не участвует также физическая постоянная β (это теория безразлична относительно к этой упругой постоянной [68]).

Плотность потенциальной энергии деформации для трехмерной модели микрополярной термоупругости со стесненным вращением будет иметь вид;

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} \gamma_{11} + \sigma_{22} \gamma_{22} + \sigma_{33} \gamma_{33} + \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \tilde{\gamma}_{12} + \frac{1}{2} (\sigma_{13} + \sigma_{31}) \tilde{\gamma}_{13} + \frac{1}{2} (\sigma_{23} + \sigma_{32}) \tilde{\gamma}_{23} + \right. \\
& + \mu_{11} \chi_{11} + \mu_{22} \chi_{22} + \mu_{33} \chi_{33} + \mu_{12} \chi_{12} + \mu_{21} \chi_{21} + \mu_{13} \chi_{13} + \mu_{31} \chi_{31} + \mu_{23} \chi_{23} + \mu_{32} \chi_{32} \left. \right) - \\
& - \frac{T}{2} \{ (a_{11} \mathfrak{g}_{1r} + a_{12} \mathfrak{g}_{2r} + a_{13} \mathfrak{g}_{3r}) \sigma_{11} + (a_{12} \mathfrak{g}_{1r} + a_{22} \mathfrak{g}_{2r} + a_{23} \mathfrak{g}_{3r}) \sigma_{22} + \\
& + (a_{13} \mathfrak{g}_{1r} + a_{23} \mathfrak{g}_{2r} + a_{33} \mathfrak{g}_{3r}) \sigma_{33} \},
\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

или

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2} (A_{11} \gamma_{11}^2 + A_{22} \gamma_{22}^2 + A_{33} \gamma_{33}^2 + 2A_{12} \gamma_{11} \gamma_{22} + 2A_{13} \gamma_{11} \gamma_{33} + 2A_{23} \gamma_{22} \gamma_{33} + \\
& + \frac{1}{4} \frac{A_{44} A_{55} - A_{45}^2}{A_{44}} \tilde{\gamma}_{23}^2 + \frac{1}{4} \frac{A_{55} A_{66} - A_{56}^2}{A_{55}} \tilde{\gamma}_{13}^2 + \frac{1}{4} \frac{A_{77} A_{88} - A_{78}^2}{A_{88}} \tilde{\gamma}_{12}^2 + B_{11} \chi_{11}^2 + B_{22} \chi_{22}^2 + B_{33} \chi_{33}^2 + \\
& + 2B_{12} \chi_{11} \chi_{22} + 2B_{13} \chi_{11} \chi_{33} + 2B_{23} \chi_{22} \chi_{33} + 2B_{45} \chi_{23} \chi_{32} + 2B_{56} \chi_{13} \chi_{31} + 2B_{78} \chi_{12} \chi_{21} + \\
& + B_{44} \chi_{23}^2 + B_{55} \chi_{31}^2 + B_{66} \chi_{13}^2 + B_{77} \chi_{12}^2 + B_{88} \chi_{21}^2 + B_{55} \chi_{32}^2) - T (\mathfrak{g}_{1r} \gamma_{11} + \mathfrak{g}_{2r} \gamma_{22} + \mathfrak{g}_{3r} \gamma_{33});
\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

в случае ортотропного тела. А в случае изотропного тела:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} \gamma_{11} + \sigma_{22} \gamma_{22} + \sigma_{33} \gamma_{33} + \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \tilde{\gamma}_{12} + \frac{1}{2} (\sigma_{13} + \sigma_{31}) \tilde{\gamma}_{13} + \frac{1}{2} (\sigma_{23} + \sigma_{32}) \tilde{\gamma}_{23} + \right. \\
& + \mu_{11} \chi_{11} + \mu_{22} \chi_{22} + \mu_{33} \chi_{33} + \mu_{12} \chi_{12} + \mu_{21} \chi_{21} + \mu_{13} \chi_{13} + \mu_{31} \chi_{31} + \mu_{23} \chi_{23} + \mu_{32} \chi_{32} \left. \right) - \\
& - \frac{\alpha T}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})
\end{aligned} \tag{1.2.16}$$

или

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2} \{ 2\mu (\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2) + \lambda (\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33})^2 + \mu (\tilde{\gamma}_{12}^2 + \tilde{\gamma}_{13}^2 + \tilde{\gamma}_{23}^2) + 2\gamma (\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + \chi_{33}^2) + \\
& + (\gamma + \varepsilon) (\chi_{12}^2 + \chi_{21}^2 + \chi_{13}^2 + \chi_{31}^2 + \chi_{23}^2 + \chi_{32}^2) + 2(\gamma - \varepsilon) (\chi_{12} \chi_{21} + \chi_{13} \chi_{31} + \chi_{23} \chi_{32}) \} - \\
& - (3\lambda + 2\mu) (\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}) \alpha T.
\end{aligned} \tag{1.2.17}$$

§1.3. ОСНОВНОЙ ПОДХОД ПОСТРОЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Будем считать, что трехмерная пластинка представляет собой тонкое тело. Как знаем, переход от трехмерной задачи теории упругости к двумерным задачам составляет основное содержание теории тонких пластин (оболочек).

Построение прикладных моделей термоупругих тонких пластин (оболочек) на основе трехмерной микрополярной термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений либо со стесненным вращением, это важнейшая задача для приложений.

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам,

будем строить модели термоупругости изгибной деформации микрополярных (с независимыми полями перемещений и вращений либо со стесненным вращением) ортотропных (изотропных) тонких пластин на основе метода гипотез.

В качестве базовых приемов гипотезы С. О. Саркисяна [104-107,158-162,166,167] для построения теорий микрополярных тонких оболочек и пластин. Эти гипотезы, как отметили во введении, были сформулированы на основе оригинального подхода, а именно, сначала построено асимптотическое решение трехмерной краевой задачи микрополярной теории упругости в тонкой области пластинки или оболочки и, качественные стороны поведения этого асимптотического решения сформулированы как адекватные гипотезы.

Что касается построения обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной термоупругости ортотропных (изотропных) тонких пластин, здесь будем применять подход W. Nowacki [148].

ГЛАВА 2

МОДЕЛИ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ (В ЧАСТНОСТИ, ИЗОТРОПНЫХ) ТОНКИХ ПЛАСТИН

§2.1. МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ ПРИ ОБОБЩЕННОМ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Обобщенное плоское напряженное состояние микрополярной теории упругости, это то напряженное состояние, которое устанавливается в тонкой пластинке, загруженной по боковой поверхности распределенными силами $\vec{p}_n = \{p_1; p_2\}$ и моментами $\vec{\mu}_n = \{m_{13}; m_{23}\}$, лежащих в плоскостях параллельными основаниям пластинки (или, что то же самое, параллельными срединной плоскости) и равномерно распределенными по ее толщине (либо симметрично распределенными относительно срединной плоскости).

Рассмотрим задачу в декартовой системе координат $(x_1, x_2, z = x_3)$.

В этой задаче основания пластинки $z = \pm h$ свободны от силовых и моментных напряжений:

$$\sigma_{31} = 0, \sigma_{32} = 0, \sigma_{33} = 0, \mu_{31} = 0, \mu_{32} = 0, \mu_{33} = 0 \quad \text{при } z = \pm h. \quad (2.1.1)$$

Что касается температурного поля, будем считать, что температурная функция задана в виде $T = T_0(x_1, x_2)$.

В данной задаче имеем симметричное относительно срединной плоскости пластинки $z = 0$ напряженно-деформированное состояние [148].

Уравнение стационарной теплопроводности в случае ортотропного тела выражается так:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = 0 \quad (2.1.2)$$

а при $\lambda_1 = \lambda_2$ - для изотропного тела $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = 0 \right)$.

Будем придерживаться к подходу W. Nowacki [148].

Рассмотрим первое уравнение равновесия из системы (1.1.16) трехмерной моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} = 0. \quad (2.1.3)$$

Проинтегрируем это уравнение по толщине пластинки

$$\int_{-h}^h \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} \right) dz = 0.$$

Заметим, что в силу граничных условий (2.1.1)

$$\int_{-h}^h \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} dz = \sigma_{31}(x_1, x_2, z) \Big|_{z=-h}^{z=+h} = 0,$$

выше написанное уравнение можем представить так

$$\frac{\partial \sigma_{11}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}^*}{\partial x_2} = 0. \quad (2.1.4)$$

Аналогичным образом второе и шестое уравнения равновесия из (1.1.16) примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_{12}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^*}{\partial x_2} = 0, \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial \mu_{13}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}^*}{\partial x_2} + \sigma_{12}^* - \sigma_{21}^* = 0. \quad (2.1.6)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\sigma_{ii}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{ii} dz, \quad \sigma_{ij}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{ij} dz, \quad \mu_{i3}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \mu_{i3} dz, \quad i=1,2, \quad j=1,2, \quad i \neq j. \quad (2.1.7)$$

Как убедимся, величины со звездочками являются средними значениями по толщине пластинки силовых напряжений σ_{ii}, σ_{ij} и моментных напряжений μ_{i3} ($i=1,2$), все они зависят только от x_1 и x_2 .

Таким образом, получили систему из трех уравнений равновесия ((2.1.4)-(2.1.6)), в которой средние значения силовых и моментных напряжений зависят только от переменных x_1 и x_2 . А это означает, что возможно получить приближенное, но с инженерной точки зрения вполне достаточное представление об упругом равновесии пластинки, рассматривая не сами силовые и моментные напряжения, а их средние по толщине пластинки значения.

Если иметь в виду остальные три уравнения равновесия трехмерной теории ((1.1.16)) и совершив всеми их членами операцию осреднения по толщине $\frac{1}{2h} \int_{-h}^h () dz$, с учетом граничных условий (2.1.1), можно легко убедиться, что все они удовлетворяются тождественно, т. к. $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \mu_{11}, \mu_{21}, \mu_{12}, \mu_{22}$ – нечетные по z функции, т. е. $\sigma_{13}^* = \sigma_{23}^* = \mu_{11}^* = \mu_{12}^* = \mu_{21}^* = \mu_{22}^* = 0$.

Имея в виду малость толщины пластинки и того факта, что напряжения $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}$ обращаются в нуль на обеих границах пластинки $z = \pm h$ ((2.1.1)),

примем, что эти напряжения всюду внутри тела весьма малы по сравнению с остальными компонентами напряжений:

$$\sigma_{31} \approx 0, \sigma_{32} \approx 0, \sigma_{33} \approx 0, \mu_{31} \approx 0, \mu_{32} \approx 0, \mu_{33} \approx 0, \quad (2.1.8)$$

и, одновременно, будем считать, что в случае тонкой пластинки, силовые напряжения σ_{13}, σ_{23} и моментные напряжения $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{12}, \mu_{21}$ весьма малы относительно силовых и моментных напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \mu_{13}, \mu_{23}$ и что ими тоже можно пренебрегать. Будем пренебрегать также свободные повороты ω_1 и ω_2 .

Таким образом, в модели термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных упругих тонких пластин одной из основных задач будет определение осредненных по толщине пластинки силовых и моментных напряжений, компоненты которых определяют соответственно следующие тензоры

$$\hat{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^* & \sigma_{12}^* & 0 \\ \sigma_{21}^* & \sigma_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_{13}^* \\ 0 & 0 & \mu_{23}^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.9)$$

Введем в рассмотрение осредненные по толщине пластинки понятия для перемещений u_1, u_2 , свободного поворота ω_3 и для компонентов деформаций, изгибов-кручений, т.е.

$$u_1^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_1 dz, \quad u_2^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_2 dz, \quad \omega_3^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \omega_3 dz, \quad \gamma_{11}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \gamma_{11} dz, \quad \gamma_{22}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \gamma_{22} dz, \quad (2.1.10)$$

$$\gamma_{12}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \gamma_{12} dz, \quad \gamma_{21}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \gamma_{21} dz, \quad \chi_{13}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \chi_{13} dz, \quad \chi_{23}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \chi_{23} dz.$$

Следует отметить, что $\gamma_{33}^* \neq 0$, для которого получим формулу следующим образом.

Если рассматривать уравнение для γ_{33} из физических соотношений упругости (1.1.12) – для ортотропного тела или (1.1.13) – для изотропного тела, в котором необходимо будет принимать $\sigma_{33} = 0$, получим:

в случае ортотропного тела

$$\gamma_{33} = a_{13} \sigma_{11} + a_{23} \sigma_{22} + \alpha_{3t} T_0, \quad (2.1.11)$$

а в случае изотропного тела

$$\gamma_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha_t T_0. \quad (2.1.12)$$

Аналогичные ((2.1.11) (2.1.12)) соотношения получим также для величин со звездочками после применения оператора осреднения по толщине пластинки.

Таким образом, деформированное состояние пластинки при обобщенном плоском напряженном состоянии будет определяться усредненным тензором деформаций и усредненным тензором изгибов-кручений, которые выражаются следующими матрицами:

$$\hat{\gamma}^* = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^* & \gamma_{21}^* & 0 \\ \gamma_{12}^* & \gamma_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33}^* \end{pmatrix}, \quad \hat{\chi}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \chi_{13}^* \\ 0 & 0 & \chi_{23}^* \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.13)$$

Чтобы найти связь между $\gamma_{11}^*, \gamma_{22}^*, \gamma_{12}^*, \gamma_{21}^*$ и величинами $\sigma_{11}^*, \sigma_{22}^*, \sigma_{12}^*, \sigma_{21}^*$, а также, между χ_{13}^*, χ_{23}^* и μ_{13}^*, μ_{23}^* , воспользуемся обобщенным термоупругим законом Гука (1.1.2) – в случае ортотропного тела или (1.1.8)- в случае изотропного тела. Совершив над всеми членами этих равенств операцию осреднения по толщине, принимая во внимание (2.1.8), получим

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^* &= a_{11}\sigma_{11}^* + a_{12}\sigma_{22}^* + \alpha_{1r}T_0, & \gamma_{12}^* &= a_{77}\sigma_{12}^* + a_{78}\sigma_{21}^*, & \chi_{13}^* &= b_{66}\mu_{13}^*, \\ \gamma_{22}^* &= a_{12}\sigma_{11}^* + a_{22}\sigma_{22}^* + \alpha_{2r}T_0, & \gamma_{21}^* &= a_{78}\sigma_{12}^* + a_{88}\sigma_{21}^*, & \chi_{23}^* &= b_{44}\mu_{23}^*, \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^* &= \frac{1}{E}[\sigma_{11}^* - \nu\sigma_{22}^*] + \alpha_r T_0, & \gamma_{12}^* &= \frac{1}{4\mu\alpha}[(\mu + \alpha)\sigma_{12}^* - (\mu - \alpha)\sigma_{21}^*], & \chi_{13}^* &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\mu\alpha}\mu_{13}^*, \\ \gamma_{22}^* &= \frac{1}{E}[\sigma_{22}^* - \nu\sigma_{11}^*] + \alpha_r T_0, & \gamma_{21}^* &= \frac{1}{4\mu\alpha}[(\mu + \alpha)\sigma_{21}^* - (\mu - \alpha)\sigma_{12}^*], & \chi_{23}^* &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\mu\alpha}\mu_{23}^* \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

для изотропного тела.

Из формул (2.1.14), (2.1.15) следуют обратные зависимости:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= A_{11}\gamma_{11}^* + A_{12}\gamma_{22}^* - (A_{11}\alpha_{1r} - A_{12}\alpha_{2r})T_0, \\ \sigma_{22}^* &= A_{12}\gamma_{11}^* + A_{22}\gamma_{22}^* - (A_{12}\alpha_{1r} - A_{22}\alpha_{2r})T_0, \\ \sigma_{12}^* &= A_{77}\gamma_{12}^* + A_{78}\gamma_{21}^*, & \mu_{13}^* &= B_{56}\chi_{31}^* + B_{66}\chi_{13}^*, \\ \sigma_{21}^* &= A_{78}\gamma_{12}^* + A_{88}\gamma_{21}^*, & \mu_{23}^* &= B_{44}\chi_{23}^* + B_{45}\chi_{32}^*. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= \frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{11}^* + \nu\gamma_{22}^*) - \frac{E}{1-\nu}\alpha_r T_0, & \sigma_{12}^* &= (\mu + \alpha)\gamma_{12}^* + (\mu - \alpha)\gamma_{21}^*, & \mu_{13}^* &= \frac{1}{B}\chi_{13}^*, \\ \sigma_{22}^* &= \frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{22}^* + \nu\gamma_{11}^*) - \frac{E}{1-\nu}\alpha_r T_0, & \sigma_{21}^* &= (\mu + \alpha)\gamma_{21}^* + (\mu - \alpha)\gamma_{12}^*, & \mu_{23}^* &= \frac{1}{B}\chi_{23}^* \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

для изотропного тела.

В силу геометрических соотношений (1.1.17), деформации $\gamma_{11}^*, \gamma_{22}^*, \gamma_{12}^*, \gamma_{21}^*$ и изгибы-кручения χ_{13}^*, χ_{23}^* будут связаны с перемещениями u_1^*, u_2^* и свободным поворотом ω_3^* равенствами

$$\gamma_{11}^* = \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22}^* = \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2}, \quad \gamma_{12}^* = \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} - \omega_3^*, \quad \gamma_{21}^* = \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2} + \omega_3^* \quad (2.1.18)$$

$$\chi_{13}^* = \frac{\partial \omega_3^*}{\partial x_1}, \quad \chi_{23}^* = \frac{\partial \omega_3^*}{\partial x_2}. \quad (2.1.19)$$

Основную систему уравнений термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений составляют уравнения равновесия (2.1.4)-(2.1.6), геометрические соотношения (2.1.18), (2.1.19) и физические соотношения (2.1.14) (либо в обратной форме (2.1.16)) для ортотропного тела или (2.1.15) (либо в обратной форме (2.1.17)) для изотропного тела.

К указанной системе уравнений следует присоединить граничные условия:

а) граничные условия в напряжениях:

$$\sigma_{nn}^* \Big|_{\Gamma} = \sigma_{nn}^0(s), \quad \sigma_{n\tau}^* \Big|_{\Gamma} = \sigma_{n\tau}^0(s), \quad \mu_n^* \Big|_{\Gamma} = \mu_n^0(s), \quad (2.1.20)$$

где Γ - контур срединной плоскости пластинки, n, τ - направления нормали и касательной к контуре Γ , а s - дуговая координата вдоль контура Γ ;

б) граничные условия в перемещениях и поворотах:

$$u_1^* \Big|_{\Gamma} = u_1^0(s), \quad u_2^* \Big|_{\Gamma} = u_2^0(s), \quad \text{и} \quad \omega_3^* \Big|_{\Gamma} = \omega_3^0(s); \quad (2.1.21)$$

в) граничные условия могут быть заданы в смешанном виде.

На основе уравнений обобщенного плоского напряженного состояния термоупругости микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений известным образом придем к уравнению баланса энергии:

$$\iint_S W^* dx_1 dx_2 = A^*, \quad (2.1.22)$$

где W^* - плотность потенциальной энергии деформации обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной термоупругости тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений:

$$W^* = \frac{1}{2} \left\{ A_{11} \gamma_{11}^{*2} + A_{22} \gamma_{22}^{*2} + 2A_{12} \gamma_{11}^* \gamma_{22}^* + A_{77} \gamma_{12}^{*2} + A_{88} \gamma_{21}^{*2} + 2A_{78} \gamma_{12}^* \gamma_{21}^* + B_{66} \chi_{13}^{*2} + B_{44} \chi_{23}^{*2} \right\} - T_0 \left\{ (A_{11} \alpha_{1r} + A_{12} \alpha_{2r}) \gamma_{11}^* + (A_{12} \alpha_{1r} + A_{22} \alpha_{2r}) \gamma_{22}^* \right\} \quad (2.1.23)$$

для ортотропного тела или

$$W^* = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_{11}^{*2} + \gamma_{22}^{*2}) + (\mu + \alpha) (\gamma_{12}^{*2} + \gamma_{21}^{*2}) + \frac{2E\nu}{1-\nu^2} \gamma_{12}^* \gamma_{21}^* + 2(\mu - \alpha) \gamma_{12}^* \gamma_{21}^* + B (\chi_{13}^{*2} + \chi_{23}^{*2}) \right\} - \frac{E}{1-\nu} (\gamma_{11}^* + \gamma_{22}^*) \alpha_r T_0 \quad (2.1.24)$$

для изотропного тела, а A^* - работа внешних усилий и моментов:

$$A^* = \frac{1}{2} \left\{ \int_{l_1} \left(\sigma_{21}^* u_1^* + \sigma_{22}^* u_2^* + \mu_{23}^* \omega_3^* \right) dx_1 + \int_{l_2} \left(\sigma_{11}^* u_1^* + \sigma_{12}^* u_2^* + \mu_{13}^* \omega_3^* \right) dx_2 \right\}. \quad (2.1.25)$$

На основе уравнения баланса (2.1.22) энергии легко доказать теорему единственности для краевой задачи (2.1.4)-(2.1.6), (2.1.18), (2.1.19), (2.1.14) или (2.1.16) термоупругости микрополярных тонких пластин при обобщенном плоском напряженном состоянии, а также получить формулы типа Грина:

$$\sigma_{11}^* = \frac{\partial W^*}{\partial \gamma_{11}^*}, \quad \sigma_{22}^* = \frac{\partial W^*}{\partial \gamma_{22}^*}, \quad \sigma_{12}^* = \frac{\partial W^*}{\partial \gamma_{12}^*}, \quad \sigma_{21}^* = \frac{\partial W^*}{\partial \gamma_{21}^*}, \quad \mu_{13}^* = \frac{\partial W^*}{\partial \chi_{13}^*}, \quad \mu_{23}^* = \frac{\partial W^*}{\partial \chi_{23}^*}. \quad (2.1.26)$$

В прикладной модели термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений имеет место теорема взаимности Бетти. Для доказательства этой теоремы поступим следующим образом. На основании уравнений равновесия (2.1.4)-(2.1.6) легко прийти к следующему равенству:

$$\begin{aligned} & - \int_{l_1} (\sigma_{21}^* u_1' + \sigma_{22}^* u_2' + \mu_{23}^* \omega_3') dx_1 + \int_{l_2} (\sigma_{11}^* u_1' + \sigma_{12}^* u_2' + \mu_{13}^* \omega_3') dx_2 - \\ & - \iint_{(S)} (\sigma_{11}^* \gamma_{11}' + \sigma_{22}^* \gamma_{22}' + \sigma_{12}^* \gamma_{12}' + \sigma_{21}^* \gamma_{21}' + \mu_{13}^* \chi_{13}' + \mu_{23}^* \chi_{23}') dx_1 dx_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Используя физические соотношения (2.1.14) или (2.1.16) можно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}^* \gamma_{11}' + \sigma_{22}^* \gamma_{22}' + \sigma_{12}^* \gamma_{12}' + \sigma_{21}^* \gamma_{21}' + \mu_{13}^* \chi_{13}' + \mu_{23}^* \chi_{23}' = A_{11} \gamma_{11}^* \gamma_{11}' + A_{22} \gamma_{22}^* \gamma_{22}' + A_{12} \gamma_{22}^* \gamma_{11}' + \\ & + A_{12} \gamma_{11}^* \gamma_{22}' + A_{77} \gamma_{12}^* \gamma_{12}' + A_{88} \gamma_{21}^* \gamma_{21}' + A_{78} (\gamma_{12}^* \gamma_{21}' + \gamma_{21}^* \gamma_{12}') + B_{66} \chi_{13}^* \chi_{13}' + B_{44} \chi_{23}^* \chi_{23}' + \\ & + B_{56} \chi_{31}^* \chi_{13}' + B_{45} \chi_{32}^* \chi_{23}' - (A_{11} \alpha_{1r} - A_{12} \alpha_{2r}) T_0 \gamma_{11}' - (A_{12} \alpha_{1r} - A_{22} \alpha_{2r}) T_0 \gamma_{22}' \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}^* \gamma_{11}' + \sigma_{22}^* \gamma_{22}' + \sigma_{12}^* \gamma_{12}' + \sigma_{21}^* \gamma_{21}' + \mu_{13}^* \chi_{13}' + \mu_{23}^* \chi_{23}' = \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_{11}^* \gamma_{11}' + \gamma_{22}^* \gamma_{22}') + \\ & + \frac{E\nu}{1-\nu^2} (\gamma_{22}^* \gamma_{11}' + \gamma_{11}^* \gamma_{22}') + (\mu + \alpha) (\gamma_{12}^* \gamma_{12}' + \gamma_{21}^* \gamma_{21}') + (\mu - \alpha) (\gamma_{21}^* \gamma_{12}' + \gamma_{12}^* \gamma_{21}') + \\ & + (\gamma + \varepsilon) \chi_{13}^* \chi_{13}' + (\gamma + \varepsilon) \chi_{23}^* \chi_{23}' - \frac{E}{1-\nu} \alpha T_0 (\gamma_{11}' + \gamma_{22}') \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

для изотропного тела.

Имея в виду симметричность выражения (2.1.28) или (2.1.29), из равенства (2.1.27) получим теорему взаимности Бетти для модели обобщенного плоского напряженного состояния термоупругости микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений:

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_{l_1} \left[\sigma_{22}^{0*} u_2' + \sigma_{21}^{0*} u_1' + \mu_{23}^{0*} \omega_3' \right] dx_1 + \int_{l_2} \left[\sigma_{11}^{0*} u_1' + \sigma_{12}^{0*} u_2' + \mu_{13}^{0*} \omega_3' \right] dx_2 \right\rangle - \\ & - \left\langle \int_{l_1} \left[\sigma_{22}^{0'} u_2^* + \sigma_{21}^{0'} u_1^* + \mu_{23}^{0'} \omega_3^* \right] dx_1 + \int_{l_2} \left[\sigma_{11}^{0'} u_1^* + \sigma_{12}^{0'} u_2^* + \mu_{13}^{0'} \omega_3^* \right] dx_2 \right\rangle = \\ & = \iint_S [(A_{11} \alpha_{1r} - A_{12} \alpha_{2r}) (\gamma_{11}^* + \gamma_{22}^*) T_0' - (A_{12} \alpha_{1r} - A_{22} \alpha_{2r}) (\gamma_{11}' + \gamma_{22}') T_0] dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \int_{l_1} \left[\sigma_{22}^0 u_2' + \sigma_{21}^0 u_1' + \mu_{23}^0 \omega_3' \right] dx_1 + \int_{l_2} \left[\sigma_{11}^0 u_1' + \sigma_{12}^0 u_2' + \mu_{13}^0 \omega_3' \right] dx_2 \right\rangle - \\
 & - \left\langle \int_{l_1} \left[\sigma_{22}^0 u_2^* + \sigma_{21}^0 u_1^* + \mu_{23}^0 \omega_3^* \right] dx_1 + \int_{l_2} \left[\sigma_{11}^0 u_1^* + \sigma_{12}^0 u_2^* + \mu_{13}^0 \omega_3^* \right] dx_2 \right\rangle = \\
 & = \iint_S \left[\frac{E}{1-\nu} \alpha_i (\gamma_{11}^* + \gamma_{22}^*) T_0' - \frac{E}{1-\nu} \alpha_i (\gamma_{11}' + \gamma_{22}') T_0 \right] dx_1 dx_2.
 \end{aligned} \tag{2.1.31}$$

для изотропного тела.

Общий вариационный функционал обобщенного плоского напряженного состояния термоупругости микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений (когда область (S) представляет собой прямоугольник) получим из соответствующего выражения трехмерной теории:

$$\begin{aligned}
 I^* = \iint_S & \left\{ W^* - \left[\sigma_{11}^* \left(\gamma_{11}^* - \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22}^* \left(\gamma_{22}^* - \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \right) + \sigma_{12}^* \left[\gamma_{12}^* - \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x_1} - \omega_3^* \right) \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sigma_{21}^* \left[\gamma_{21}^* - \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_2} + \omega_3^* \right) \right] + \mu_{13}^* \left(\chi_{13}^* - \frac{\partial \omega_3^*}{\partial x_1} \right) + \mu_{23}^* \left(\chi_{23}^* - \frac{\partial \omega_3^*}{\partial x_2} \right) \right] \right\} dS + I_1^*,
 \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

где I_1^* - зависит от вида граничных условий на граничных линиях указанной прямоугольной области.

Если рассматривать вариационное уравнение

$$\delta I^* = 0, \tag{2.1.33}$$

тогда в качестве уравнений Эйлера приходим к системе уравнений (2.1.4)-(2.1.6) и (2.1.14)- (2.1.19).

Отметим, что случай, когда область (S) – прямоугольник, построенная модель в главе 3 будем использовать при построении модели изгибной термоупругой деформации микрополярных балок.

Если в уравнениях (2.1.4)-(2.1.6) и (2.1.14)-(2.1.19) и в функционале (2.1.32) подставить $A_{77} = A_{78} = A_{88}$ в случае ортотропного тела или $\alpha = 0$ в случае изотропного тела, и, считать $M^+ = M^- = 0$, получим основные уравнения, граничные условия и функционал классической теории термоупругости плоского напряженного состояния $(\sigma_{12}^* = \sigma_{21}^*, \mu_{13}^* = \mu_{23}^* = 0, \omega_3^* = 0)$ [37,67].

Приводим также основные уравнения обобщенного плоского напряженного состояния термоупругости микрополярных тонких пластин с независимыми полями

перемещений и вращений также в криволинейной ортогональной системе координат α_1, α_2 в срединной плоскости пластинки.

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \sigma_{11}^*) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \sigma_{21}^*) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12}^* - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22}^* &= 0, \\ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \sigma_{12}^*) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \sigma_{22}^*) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{21}^* - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{11}^* &= 0, \\ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \mu_{13}^*) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \mu_{23}^*) + \sigma_{12}^* - \sigma_{21}^* &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^* &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2^*, & \gamma_{22}^* &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2^*}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1^*, & k_{13}^* &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_3^*}{\partial \alpha_1}, \\ \gamma_{12}^* &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2^*}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1^* - \Omega_3^*, & \gamma_{21}^* &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1^*}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2^* + \Omega_3^*, & k_{23}^* &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_3^*}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

Физические соотношения термоупругости будут выражаться формулами (2.1.14) или (2.1.16) для ортотропного тела, (2.1.15) или (2.1.17) для изотропного тела. К этим уравнениям следует присоединить граничные условия на контуре Γ срединной плоскости пластинки (типа (2.1.20), (2.1.21), на этот раз для криволинейной границы).

§2.2. МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

2.2.1. Исходные гипотезы. С учетом качественных результатов асимптотического решения систем уравнений (1.1.1)-(1.1.10) с указанными выше граничными условиями и самого процесса асимптотического интегрирования этой граничной задачи в случае тонкой трехмерной пластинки [157], в основу предлагаемой ниже модели изгибной деформации микрополярной термоупругости ортотропных (изотропных) тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, можем ставить следующие достаточно общие гипотезы [109,111,166]:

1) В качестве кинематической вводится предположение о линейном изменении компонентов векторов перемещения и независимого поворота по координате z следующего характера:

$$u_1 = z \psi_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_2 = z \psi_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad u_3 = w(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.2.1)$$

$$\omega_1 = \Omega_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_2 = \Omega_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad \omega_3 = z \iota(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.2.2)$$

где w - прогиб пластинки; ψ_1, ψ_2 - полные углы поворота нормального к срединной плоскости элемента вокруг осей α_1, α_2 ; Ω_1, Ω_2 свободные повороты нормального к срединной плоскости элемента вокруг осей α_1, α_2 ; ι - интенсивность поворота точек трехмерной пластинки вокруг оси z .

Кинематическая гипотеза для перемещений, выражаемая формулой (2.2.1), это известная кинематическая гипотеза Тимошенко [91] в классическом случае. Классическая теория пластин, построенная на основе этой кинематической гипотезе, в литературе принято называть теорией пластин типа Тимошенко [91].

Кинематическая гипотеза (2.2.1), (2.2.2) в целом в работах [104-106, 158-162, 166] по предложению С.О. Саркисяна названа обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в теории изгибной деформации микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

К статическим относятся следующие гипотезы 2) и 3):

2) Силовое нормальное напряжение σ_{33} в обобщенном законе Гука (1.1.2) или (1.1.8) в формулах для γ_{ii} , можно пренебрегать относительно силовых нормальных напряжений σ_{ii} ($i=1,2$); в обобщенном законе Гука (1.1.2) или (1.1.8) в формуле для χ_{i3} ($i=1,2$), моментное напряжение μ_{3i} можно пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3} ($i=1,2$);

3) Для определения деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала примем:

$$\sigma_{3i} = \sigma_{3i}^0(\alpha_1, \alpha_2) \quad (i=1,2), \quad \mu_{33} = \mu_{33}^0(\alpha_1, \alpha_2) \quad (2.2.3)$$

После определения указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} определим, соответственно, как сумму соответствующего значения (2.2.3) и результата интегрирования первых двух и шестого из (1.1.1) уравнений равновесия, для которых потребуем условие, чтобы усредненные по толщине пластинки величины были равны нулю;

4) Предположение о тонкостенности пластинки (определение тонкостенности пластинки имеются в известных работах [51, 64, 75]).

5) Для температурной функции T примем закон линейного изменения по толщине пластинки [37, 78, 93]:

$$T = \frac{z}{2h} \Delta T = z\chi, \quad (2.2.4)$$

где $\Delta T = T^+ - T^-$, $\chi_i = \frac{T^+ - T^-}{2h}$, $T^+ = T|_{z=h}$, $T^- = T|_{z=-h}$.

Принятые кинематические, статические гипотезы и гипотеза о распределении температурной функции по толщине тонкой пластинки позволяют задачу об определении пространственного напряженно-деформированного состояния термоупругой микрополярной пластинки с независимыми полями перемещений и вращений свести к двумерной задаче.

2.2.2. Определение компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений.

Используя кинематическую гипотезу (2.2.1), (2.2.2) для компонентов тензора деформации $\hat{\gamma}$ и тензора изгиба-кручений $\hat{\chi}$ из (1.1.4) получим:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= zK_{11}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{12} = zK_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{13} = \Gamma_{13}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{32} = \Gamma_{32}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{33} = 0, \\ \gamma_{22} &= zK_{22}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{21} = zK_{21}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{31} = \Gamma_{31}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{23} = \Gamma_{23}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \chi_{11} &= k_{11}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{22} = k_{22}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{12} = k_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{21} = k_{21}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \chi_{13} &= z l_{13}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{23} = z l_{23}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{31} = 0, \quad \chi_{32} = 0, \quad \chi_{33} = k_{33}(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_{13} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \Omega_2, \quad \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \quad \Gamma_{23} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \Omega_1, \quad \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1. \\ K_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_2, \quad K_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_1, \\ K_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_1 - \iota, \quad K_{21} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_2 + \iota, \\ k_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_2, \quad k_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Omega_1, \quad k_{33} = \iota, \\ k_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_1, \quad k_{21} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Omega_2, \\ l_{13} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_1}, \quad l_{23} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Формулы (2.2.6) представляют собой геометрические соотношения для прикладной модели изгибной деформации термоупругости микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

2.2.3. Определение компонентов тензоров силовых и моментных напряжений.

Если иметь в виду физические соотношения (1.1.2) или (1.1.8), тогда на основе формул для деформаций, изгибов – кручений (2.2.5), имея в виду статические гипотезы

2), 3), для силовых и моментных напряжений $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \overset{0}{\sigma}_{31}, \overset{0}{\sigma}_{32}, \mu_{11}, \mu_{22}, \overset{0}{\mu}_{33}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{13}, \mu_{23})$ получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} z(a_{22}K_{11} - a_{12}K_{22} + (a_{12}\alpha_{2l} - a_{22}\alpha_{1l})\chi_l), \\
\sigma_{22} &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} z(a_{11}K_{22} - a_{12}K_{11} + (a_{12}\alpha_{1l} - a_{11}\alpha_{2l})\chi_l), \\
\sigma_{12} &= \frac{1}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} z(a_{88}K_{12} - a_{78}K_{21}), & \sigma_{21} &= \frac{1}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} z(a_{77}K_{21} - a_{78}K_{12}), \\
\sigma_{13} &= \frac{1}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} (\tilde{a}_{55}\Gamma_{13} - a_{56}\Gamma_{31}), & \sigma_{23} &= \frac{1}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} (a_{55}\Gamma_{23} - a_{45}\Gamma_{32}), \\
\overset{0}{\sigma}_{31} &= \frac{1}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} (a_{66}\Gamma_{31} - a_{56}\Gamma_{13}), & \overset{0}{\sigma}_{32} &= \frac{1}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} (a_{44}\Gamma_{32} - a_{45}\Gamma_{23}), \\
\mu_{11} &= \frac{b_{22}b_{33} - b_{23}^2}{\Delta_b} k_{11} - \frac{b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23}}{\Delta_b} k_{22} + \frac{b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}}{\Delta_b} k_{33}, \\
\mu_{22} &= \frac{b_{11}b_{33} - b_{13}^2}{\Delta_b} k_{22} - \frac{b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23}}{\Delta_b} k_{11} + \frac{b_{12}b_{13} - b_{23}b_{11}}{\Delta_b} k_{33}, \\
\overset{0}{\mu}_{33} &= \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{\Delta_b} k_{33} - \frac{b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23}}{\Delta_b} k_{11} + \frac{b_{12}b_{13} - b_{11}b_{23}}{\Delta_b} k_{22}, & \Delta_b &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} \\
\mu_{12} &= \frac{1}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} (b_{88}k_{12} - b_{78}k_{21}), & \mu_{21} &= \frac{1}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} (b_{77}k_{21} - b_{78}k_{12}), & \mu_{13} &= \frac{1}{b_{66}} z l_{13}, & \mu_{23} &= \frac{1}{b_{44}} z l_{23}
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= z \frac{E}{1-\nu^2} [K_{11} + \nu K_{22} - (1+\nu)\alpha_l \chi_l], & \sigma_{12} &= z[(\mu + \alpha)K_{12} + (\mu - \alpha)K_{21}], \\
\sigma_{22} &= z \frac{E}{1-\nu^2} [\nu K_{11} + K_{22} - (1+\nu)\alpha_l \chi_l], & \sigma_{21} &= z[(\mu + \alpha)K_{21} + (\mu - \alpha)K_{12}], \\
\sigma_{13} &= (\mu + \alpha)\Gamma_{13} + (\mu - \alpha)\Gamma_{31}, & \sigma_{23} &= (\mu + \alpha)\Gamma_{23} + (\mu - \alpha)\Gamma_{32}, \\
\overset{0}{\sigma}_{31} &= (\mu + \alpha)\Gamma_{31} + (\mu - \alpha)\Gamma_{13}, & \overset{0}{\sigma}_{32} &= (\mu + \alpha)\Gamma_{32} + (\mu - \alpha)\Gamma_{23}, \\
\mu_{11} &= (\beta + 2\gamma)k_{11} + \beta(k_{22} + k_{33}), & \mu_{22} &= (\beta + 2\gamma)k_{22} + \beta(k_{11} + k_{33}), \\
\overset{0}{\mu}_{33} &= (\beta + 2\gamma)k_{33} + \beta(k_{11} + k_{22}), & \mu_{21} &= (\gamma + \varepsilon)k_{21} + (\gamma - \varepsilon)k_{12}, \\
\mu_{12} &= (\gamma + \varepsilon)k_{12} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}, & \mu_{13} &= z \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13}, & \mu_{23} &= z \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23}
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

для изотропного тела.

Для определения силовых напряжений σ_{31}, σ_{32} и моментного напряжения μ_{33} будем использовать гипотезу 3). Выводим формулу для силового напряжения σ_{31} , аналогичные формулы для σ_{32} и μ_{33} приводим в готовой форме.

Рассмотрим первое уравнение равновесия из системы (1.1.1), считая, что известны выражения для силовых напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ и σ_{21} ((2.2.7) или (2.2.8)), интегрируем это уравнение по z (т.к. результат промежуточный, обозначим его через $\bar{\sigma}_{31}$), получим

$$\bar{\sigma}_{31} = \overset{0}{\sigma}_{31}(\alpha_1, \alpha_2) - \frac{z^2}{2} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \overset{1}{\sigma}_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \overset{1}{\sigma}_{21}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{1}{\sigma}_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{1}{\sigma}_{22} \right] \quad (\text{а})$$

От выражения (а) по гипотезе 3) потребуем условие

$$\int_{-h}^h \bar{\sigma}_{31} dz = 0,$$

в результате для $\overset{0}{\sigma}_{31}(\alpha_1, \alpha_2)$ будем иметь

$$\overset{0}{\sigma}_{31}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{h^2}{6} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \overset{1}{\sigma}_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \overset{1}{\sigma}_{21}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{1}{\sigma}_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{1}{\sigma}_{22} \right].$$

Найденное значение для $\overset{0}{\sigma}_{31}(\alpha_1, \alpha_2)$ подставим в выражение (а), получим

$$\bar{\sigma}_{31}(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{h^2}{6} - \frac{z^2}{2} \right) \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \overset{1}{\sigma}_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \overset{1}{\sigma}_{21}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{1}{\sigma}_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{1}{\sigma}_{22} \right]. \quad (\text{б})$$

Окончательное выражение для σ_{31} по гипотезе 3) будет сумма (2.2.3) и (б). Вывод формул для σ_{32} и μ_{33} аналогичен, только необходимо использовать соответственно второе или шестое уравнение равновесия из системы (1.1.1).

Таким образом, для силовых напряжений σ_{31}, σ_{32} и моментного напряжения μ_{33} будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= \overset{0}{\sigma}_{31}(\alpha_1, \alpha_2) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{z^2}{2} \right) \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \overset{1}{\sigma}_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \overset{1}{\sigma}_{21}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{1}{\sigma}_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{1}{\sigma}_{22} \right], \\ \sigma_{32} &= \overset{0}{\sigma}_{32}(\alpha_1, \alpha_2) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{z^2}{2} \right) \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \overset{1}{\sigma}_{12}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \overset{1}{\sigma}_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overset{1}{\sigma}_{21} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \overset{1}{\sigma}_{11} \right], \\ \mu_{33} &= \overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1, \alpha_2) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{z^2}{2} \right) \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \overset{1}{\mu}_{13}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \overset{1}{\mu}_{23}) + (\overset{1}{\sigma}_{12} - \overset{1}{\sigma}_{21}) \right] \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Здесь $\overset{1}{\sigma}_{11}, \overset{1}{\sigma}_{22}, \overset{1}{\sigma}_{12}, \overset{1}{\sigma}_{21}, \overset{1}{\mu}_{13}, \overset{1}{\mu}_{23}$ – линейная часть от поперечной координаты z в соотношениях (2.2.7), (2.2.8) соответственно.

Используя остальные уравнения равновесия, получим выражения для силового напряжения σ_{33} и моментных напряжений μ_{31}, μ_{32} :

$$\sigma_{33} = -z \left(\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \overset{1}{\sigma}_{13}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \overset{1}{\sigma}_{23}) \right) + \overset{0}{\sigma}_{33}(\alpha_1, \alpha_2) = z \frac{P_3}{2h},$$

$$\mu_{31} = -z \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \mu_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \mu_{21}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \mu_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \mu_{22} + \left(\sigma_{23} - \sigma_{32}^0 \right) \right] = z \frac{m_1}{2h}, \quad (2.2.10)$$

$$\mu_{32} = -z \left[\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \mu_{12}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \mu_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \mu_{21} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \mu_{11} + \left(\sigma_{31} - \sigma_{13}^0 \right) \right] = z \frac{m_2}{2h}.$$

2.2.4. Усредненные усилия, моменты и гипермоменты. С целью приведения трехмерной задачи микрополярной термоупругости для изгибной задачи тонкой пластинки к двумерной, что уже выполнено для деформаций, изгибов – кручений, силовых и моментных напряжений, вводим статически эквивалентные им интегральные по толщине пластинки характеристики-усилия, моменты и гипермоменты [104-107,158-161]:

$$\begin{aligned} N_{13} &= \int_{-h}^h \sigma_{13} dz, & N_{23} &= \int_{-h}^h \sigma_{23} dz, & N_{31} &= \int_{-h}^h \sigma_{31} dz, & N_{32} &= \int_{-h}^h \sigma_{32} dz, \\ M_{11} &= \int_{-h}^h z \sigma_{11} dz, & M_{22} &= \int_{-h}^h z \sigma_{22} dz, & M_{12} &= \int_{-h}^h z \sigma_{12} dz, & M_{21} &= \int_{-h}^h z \sigma_{21} dz, \\ L_{11} &= \int_{-h}^h \mu_{11} dz, & L_{22} &= \int_{-h}^h \mu_{22} dz, & L_{33} &= \int_{-h}^h \mu_{33} dz, & L_{12} &= \int_{-h}^h \mu_{12} dz, & L_{21} &= \int_{-h}^h \mu_{21} dz, \\ \Lambda_{13} &= \int_{-h}^h z \mu_{13} dz, & \Lambda_{23} &= \int_{-h}^h z \mu_{23} dz. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

2.2.5. Основные уравнения и граничные условия прикладной модели изгибной термоупругой деформации микрополярных ортотропных (изотропных) тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Уравнения равновесия для двумерной модели получим из равенств, определяющих силовые напряжения $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ и моментные напряжения $\mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}$, в результате удовлетворения статических граничных условий (1.1.6) на лицевых плоскостях пластинки $z = \pm h$ для задачи изгиба.

Физические соотношения термоупругости получим на основании формул (2.2.10) для усредненных усилий, моментов и гипермоментов с использованием соответствующих формул (2.2.7)-(2.2.9) для силовых и моментных напряжений.

Основная система уравнений прикладной модели термоупругого изгиба микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{13}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{23}) &= -p_3, \\ N_{31} - \left(\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{21}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} \right) &= h \tilde{p}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{32} - \left(\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{12}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{21} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} \right) &= h \tilde{p}_2, \\
\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 L_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 L_{21}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} L_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} L_{22} + (N_{23} - N_{32}) &= -m_1, \\
\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 L_{12}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 L_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} L_{21} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} L_{11} + (N_{31} - N_{13}) &= -m_2, \\
L_{33} - \left(\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \Lambda_{13}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \Lambda_{23}) + (M_{12} - M_{21}) \right) &= h \tilde{m}_3,
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Физические соотношения термоупругости для ортотропного тела:

$$\begin{aligned}
N_{13} &= \tilde{C}_{55} \Gamma_{13} + C_{56} \Gamma_{31}, & N_{31} &= C_{66} \Gamma_{31} + C_{56} \Gamma_{13}, \\
N_{23} &= C_{55} \Gamma_{23} + C_{45} \Gamma_{32}, & N_{32} &= C_{44} \Gamma_{32} + C_{45} \Gamma_{23}, \\
M_{11} &= D_{11} K_{11} + D_{12} K_{22} + M_{1r}, & M_{1r} &= D_{1r} \chi_r, \\
M_{22} &= D_{22} K_{22} + D_{12} K_{11} + M_{2t}, & M_{2t} &= D_{2t} \chi_t, \\
M_{12} &= D_{88} K_{12} + D_{78} K_{21}, & M_{21} &= D_{77} K_{21} + D_{78} K_{12}, \\
L_{11} &= d_{11} k_{11} + d_{12} k_{22} + d_{13} k_{33}, & L_{12} &= d_{88} k_{12} + d_{78} k_{21}, \\
L_{22} &= d_{22} k_{22} + d_{21} k_{11} + d_{23} k_{33}, & L_{21} &= d_{77} k_{21} + d_{78} k_{12}, \\
L_{33} &= d_{33} k_{33} + d_{31} k_{11} + d_{32} k_{22}, & \Lambda_{13} &= \lambda_{66} l_{13}, \quad \Lambda_{23} = \lambda_{44} l_{23},
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{55} &= 2h \frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55} a_{66} - a_{56}^2}, & C_{66} &= 2h \frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55} a_{66} - a_{56}^2}, & C_{56} &= -2h \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55} a_{66} - a_{56}^2}, \\
C_{55} &= 2h \frac{a_{55}}{a_{44} a_{55} - a_{45}^2}, & C_{44} &= 2h \frac{a_{44}}{a_{44} a_{55} - a_{45}^2}, & C_{45} &= -2h \frac{a_{45}}{a_{44} a_{55} - a_{45}^2}, \\
D_{11} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, & D_{22} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, & D_{12} &= -\frac{2h^3}{3} \frac{a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \\
D_{77} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{77}}{a_{77} a_{88} - a_{78}^2}, & D_{88} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{88}}{a_{77} a_{88} - a_{78}^2}, & D_{78} &= -\frac{2h^3}{3} \frac{a_{78}}{a_{77} a_{88} - a_{78}^2}, \\
D_{1r} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{12} \alpha_{2r} - a_{22} \alpha_{1r}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, & D_{2t} &= \frac{2h^3}{3} \frac{a_{12} \alpha_{1t} - a_{11} \alpha_{2t}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \\
d_{11} &= 2h \frac{b_{22} b_{33} - b_{23}^2}{\Delta_b}, & d_{12} &= -2h \frac{b_{12} b_{33} - b_{13} b_{23}}{\Delta_b}, & d_{13} &= 2h \frac{b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22}}{\Delta_b}, \\
d_{22} &= 2h \frac{b_{11} b_{33} - b_{13}^2}{\Delta_b}, & d_{21} &= -2h \frac{b_{12} b_{33} - b_{13} b_{23}}{\Delta_b}, & d_{23} &= -2h \frac{b_{11} b_{23} - b_{13} b_{12}}{\Delta_b}, \\
d_{33} &= 2h \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{\Delta_b}, & d_{31} &= 2h \frac{b_{12} b_{23} - b_{13} b_{22}}{\Delta_b}, & d_{32} &= -2h \frac{b_{11} b_{23} - b_{13} b_{12}}{\Delta_b}, \\
d_{88} &= 2h \frac{b_{88}}{b_{77} b_{88} - b_{78}^2}, & d_{77} &= 2h \frac{b_{77}}{b_{77} b_{88} - b_{78}^2}, & d_{78} &= -2h \frac{b_{78}}{b_{77} b_{88} - b_{78}^2}, \\
\lambda_{66} &= \frac{2h^3}{3} \frac{1}{b_{66}}, & \lambda_{44} &= \frac{2h^3}{3} \frac{1}{b_{44}}
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

или для изотропного тела:

$$\begin{aligned}
N_{13} &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{13} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{31}, & N_{23} &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{23} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{32}, \\
N_{31} &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{31} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{13}, & N_{32} &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{32} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{23}, \\
M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_{11} + \nu K_{22} - (1+\nu)\alpha_i \chi_i], & M_{12} &= \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{12} + (\mu - \alpha)K_{21}], \\
M_{22} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[\nu K_{11} + K_{22} - (1+\nu)\alpha_i \chi_i], & M_{21} &= \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{21} + (\mu - \alpha)K_{12}], \\
L_{11} &= 2h[(\beta + 2\gamma)k_{11} + \beta(k_{22} + k_{33})], & L_{22} &= 2h[(\beta + 2\gamma)k_{22} + \beta(k_{11} + k_{33})], \\
L_{12} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)k_{12} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}], & L_{21} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)k_{21} + (\gamma - \varepsilon)k_{12}], \\
L_{33} &= 2h[(\beta + 2\gamma)k_{33} + \beta(k_{11} + k_{22})], & \Lambda_{13} &= \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13}, \quad \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23}.
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

К уравнениям равновесия (2.2.12) и физическим соотношениям (2.2.13) для ортотропного случая или (2.2.15) для изотропного случая, следует присоединить геометрические соотношения (2.2.6).

К системе уравнений (2.2.12), (2.2.13) или (2.2.15), (2.2.6) присоединим граничные условия (например при $\alpha_1 = const$):

$$\begin{aligned}
M_{11} &= M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*; & M_{12} &= M_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*; & N_{13} &= N_{13}^* \text{ или } w = w^*; \\
L_{11} &= L_{11}^* \text{ или } k_{11} = k_{11}^*; & L_{12} &= L_{12}^* \text{ или } k_{12} = k_{12}^*; & \Lambda_{13} &= \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*.
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Отметим, что граничные условия (2.2.16) ниже получим из соответствующего вариационного принципа.

Система уравнений (2.2.12), (2.2.13) или (2.2.15), (2.2.6) и граничные условия (2.2.16) представляют собой математическую модель термоупругой изгибной деформации (с учетом поперечных сдвигов) микрополярных ортотропных (изотропных) тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Основные уравнения классической термоупругости изгибной деформации тонкой пластинки с учетом поперечных сдвиговых деформаций (на основе сформулированных выше гипотез, соответственно, для классического случая) будут:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{13}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{23}) &= -p_3, \\
N_{31} - \left(\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{21}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} \right) &= h\tilde{p}_1, \\
N_{32} - \left(\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{12}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{21} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} \right) &= h\tilde{p}_2;
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Физические соотношения термоупругости

$$\begin{aligned}
 N_{13} = N_{31} &= \frac{h}{a_{66}} \tilde{\Gamma}_{13}, & N_{23} = N_{32} &= \frac{h}{a_{44}} \tilde{\Gamma}_{23}, & M_{12} = M_{21} &= \frac{h^3}{3} \frac{1}{a_{77}} \tilde{K}_{12} \\
 M_{11} &= D_{11} K_{11} + D_{12} K_{22} + M_{1r}, & M_{1r} &= D_{1r} \chi_r, \\
 M_{22} &= D_{22} K_{22} + D_{12} K_{11} + M_{2r}, & M_{2r} &= D_{2r} \chi_r,
 \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}
 N_{13} = N_{31} &= 2h\mu\tilde{d}\tilde{\Gamma}_{13}, & N_{23} = N_{32} &= 2h\mu\tilde{d}\tilde{\Gamma}_{23}, & M_{12} = M_{21} &= \frac{2h^3}{3} \tilde{K}_{12}, \\
 M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{11} + \nu K_{22} - (1+\nu)\alpha_r \chi_r], & M_{22} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [\nu K_{11} + K_{22} - (1+\nu)\alpha_r \chi_r]
 \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

для изотропного тела;

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{13} &= \Gamma_{13} + \Gamma_{31} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \psi_1, & \tilde{\Gamma}_{23} &= \Gamma_{23} + \Gamma_{32} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \psi_2, \\
 K_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_2, & K_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_1, \\
 \tilde{K}_{12} &= K_{12} + K_{21} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

К системе уравнений (2.2.17), (2.2.18) или (2.2.19), (2.2.20) присоединим граничные условия (например при $\alpha_1 = const$):

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*; \quad M_{12} = M_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*. \tag{2.2.21}$$

Принимая в виду формулы для напряжений (2.2.7)-(2.2.9), формулы для усилий, моментов и гипермоментов (2.2.11), формулы для деформаций и изгибов-кручений (2.2.5), (2.2.6), закон сохранения энергии (1.1.20) для прикладной модели термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений принимает вид:

$$\iint_S W_0 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = A_0, \tag{2.2.22}$$

где плотность потенциальной энергии деформации W_0 выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned}
 W_0 &= \frac{1}{2} (M_{11} K_{11} + M_{22} K_{22} + M_{12} K_{12} + M_{21} K_{21} + N_{13} \Gamma_{13} + N_{31} \Gamma_{31} + N_{23} \Gamma_{23} + N_{32} \Gamma_{32} + L_{11} k_{11} + \\
 &+ L_{22} k_{22} + L_{33} k_{33} + L_{12} k_{12} + L_{21} k_{21} + \Lambda_{13} I_{13} + \Lambda_{23} I_{23}) + \frac{1}{2} \{D_{1r} K_{11} + D_{2r} K_{22}\} \chi_r
 \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

для ортотропного тела или

$$W_0 = \frac{1}{2}(M_{11}K_{11} + M_{22}K_{22} + M_{12}K_{12} + M_{21}K_{21} + N_{13}\Gamma_{13} + N_{31}\Gamma_{31} + N_{23}\Gamma_{23} + N_{32}\Gamma_{32} + L_{11}k_{11} + L_{22}k_{22} + L_{33}k_{33} + L_{12}k_{12} + L_{21}k_{21} + \Lambda_{13}l_{13} + \Lambda_{23}l_{23}) - \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22})\alpha_i\chi_i, \quad (2.2.24)$$

для изотропного тела;

A_0 – работа внешних усилий, моментов и гипермоментов:

$$A_0 = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega_1} (M_{21}^0 \psi_1 + M_{22}^0 \psi_2 + N_{23}^0 w + L_{21}^0 \Omega_1 + L_{22}^0 \Omega_2 + \Lambda_{23}^0 l) A_1 d\alpha_1 + \int_{\Omega_2} (M_{11}^0 \psi_1 + M_{12}^0 \psi_2 + N_{13}^0 w + L_{11}^0 \Omega_1 + L_{12}^0 \Omega_2 + \Lambda_{13}^0 l) A_2 d\alpha_2 + \iint_S [\tilde{p}_1 h \psi_1 + \tilde{p}_2 h \psi_2 + p_3 w + m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2 + \tilde{m}_3 h l] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right\}. \quad (2.2.25)$$

Если в выражении (2.2.23) принимать в виду физические соотношения упругости (2.2.13) или (2.2.15), тогда для плотности потенциальной энергии деформации получим:

$$W_0 = \frac{1}{2} [D_{11}K_{11}^2 + D_{22}K_{22}^2 + 2D_{12}K_{11}K_{22} + D_{88}K_{12}^2 + 2D_{78}K_{12}K_{21} + D_{77}K_{21}^2 + C_{66}\Gamma_{31}^2 + 2C_{56}\Gamma_{31}\Gamma_{13} + \tilde{C}_{55}\Gamma_{13}^2 + C_{44}\Gamma_{32}^2 + 2C_{45}\Gamma_{32}\Gamma_{23} + C_{55}\Gamma_{23}^2 + d_{11}k_{11}^2 + d_{22}k_{22}^2 + d_{33}k_{33}^2 + 2d_{12}k_{11}k_{22} + 2d_{13}k_{11}k_{33} + 2d_{23}k_{22}k_{33} + d_{77}k_{21}^2 + 2d_{78}k_{12}k_{21} + d_{88}k_{12}^2 + \lambda_{66}l_{13}^2 + \lambda_{44}l_{23}^2] + (D_{1r}K_{11} + D_{2r}K_{22})\chi_r, \quad (2.2.26)$$

для ортотропного тела или

$$W_0 = \frac{1}{2} \left\langle \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (K_{11}^2 + K_{22}^2 + 2\nu K_{11}K_{22}) + \frac{2h^3}{3} [(\mu + \alpha)(K_{12}^2 + K_{21}^2) + 2(\mu - \alpha)K_{12}K_{31}] + 2h[(\mu + \alpha)(\Gamma_{13}^2 + \Gamma_{31}^2 + \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{32}^2) + 2(\mu - \alpha)(\Gamma_{13}\Gamma_{31} + \Gamma_{23}\Gamma_{32})] + 2h[(\beta + 2\gamma)(k_{11}^2 + k_{22}^2 + k_{33}^2)^2 + 2\beta(k_{11}k_{22} + k_{11}k_{33} + k_{22}k_{33})] + 2h[(\gamma + \varepsilon)(k_{12}^2 + k_{21}^2) + 2(\gamma - \varepsilon)k_{12}k_{21}] + \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} (l_{13}^2 + l_{23}^2) \right\rangle - \frac{2Eh^2}{3(1-\nu)} (K_{11} + K_{22})\alpha_i\chi_i, \quad (2.2.27)$$

в случае изотропного тела.

Легко доказать теорему единственности, формулы типа Грина и другие энергические теоремы для построенной модели термоупругой изгибной деформации микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

В прикладной модели термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений имеет место также теорема взаимности Бетти. Для доказательства этой теоремы на основе уравнений равновесия (2.2.12) известным способом легко прийти к следующему равенству:

$$\begin{aligned}
& - \int_{I_1} (N_{23} w' + M_{21} \psi_1' + M_{22} \psi_2' + L_{21} \Omega_1' + L_{22} \Omega_2' + \Lambda_{23} t') A_1 d\alpha_1 + \int_{I_2} (N_{13} w' + M_{11} \psi_1' + M_{12} \psi_2' + \\
& + L_{11} \Omega_1' + L_{12} \Omega_2' + \Lambda_{13} t') A_2 d\alpha_2 - \iint_{(S)} (N_{13} \Gamma'_{13} + N_{31} \Gamma'_{31} + N_{23} \Gamma'_{23} + N_{32} \Gamma'_{32} + M_{11} K'_{11} + \\
& + M_{22} K'_{22} + M_{12} K'_{12} + M_{21} K'_{21} + L_{11} k'_{11} + L_{22} k'_{22} + L_{12} k'_{12} + L_{21} k'_{21} + \Lambda_{13} l'_{13} + \Lambda_{23} l'_{23} + \\
& + L_{33} k'_{33}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = - \iint_{(S)} [p_3 w' + h\tilde{p}_1 \psi_1' + h\tilde{p}_2 \psi_2' + m_1 \Omega_1' + m_2 \Omega_2' + h\tilde{m}_3 t'] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

Используя физические соотношения (2.2.13) или (2.2.15) можно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\begin{aligned}
& N_{13} \Gamma'_{13} + N_{31} \Gamma'_{31} + N_{23} \Gamma'_{23} + N_{32} \Gamma'_{32} + M_{11} K'_{11} + M_{22} K'_{22} + M_{12} K'_{12} + M_{21} K'_{21} + L_{11} k'_{11} + \\
& + L_{22} k'_{22} + L_{12} k'_{12} + L_{21} k'_{21} + \Lambda_{13} l'_{13} + \Lambda_{23} l'_{23} = \tilde{C}_{55} \Gamma_{13} \Gamma'_{13} + C_{66} \Gamma_{31} \Gamma'_{31} + C_{56} (\Gamma_{13} \Gamma'_{31} + \Gamma_{31} \Gamma'_{13}) + \\
& + C_{55} \Gamma_{23} \Gamma'_{23} + C_{44} \Gamma_{32} \Gamma'_{32} + C_{45} (\Gamma_{23} \Gamma'_{32} + \Gamma_{32} \Gamma'_{23}) + D_{11} K_{11} K'_{11} + D_{22} K_{22} K'_{22} + \\
& + D_{12} (K_{11} K'_{22} + K_{22} K'_{11}) + D_{88} K_{12} K'_{12} + D_{77} K_{21} K'_{21} + D_{78} (K_{12} K'_{21} + K_{21} K'_{12}) + d_{11} k_{11} k'_{11} + \\
& + d_{22} k_{22} k'_{22} + d_{33} k_{33} k'_{33} + d_{12} k_{22} k'_{11} + d_{13} k_{33} k'_{11} + d_{21} k_{11} k'_{22} + d_{23} k_{33} k'_{11} + d_{31} k_{11} k'_{33} + d_{32} k_{22} k'_{33} + \\
& + d_{88} k_{12} k'_{12} + d_{77} k_{21} k'_{21} + d_{78} (k_{12} k'_{21} + k_{21} k'_{12}) + \lambda_{66} l_{13} l'_{13} + \lambda_{44} l_{23} l'_{23} + M_{11} K'_{11} + M_{21} K'_{22}
\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}
& N_{13} \Gamma'_{13} + N_{31} \Gamma'_{31} + N_{23} \Gamma'_{23} + N_{32} \Gamma'_{32} + M_{11} K'_{11} + M_{22} K'_{22} + M_{12} K'_{12} + M_{21} K'_{21} + L_{11} k'_{11} + \\
& + L_{22} k'_{22} + L_{12} k'_{12} + L_{21} k'_{21} + \Lambda_{13} l'_{13} + \Lambda_{23} l'_{23} = 2h(\mu + \alpha)(\Gamma_{13} \Gamma'_{13} + \Gamma_{23} \Gamma'_{23} + \Gamma_{31} \Gamma'_{31} + \Gamma_{32} \Gamma'_{32}) + \\
& + 2h(\mu - \alpha)(\Gamma_{31} \Gamma'_{13} + \Gamma_{13} \Gamma'_{31} + \Gamma_{32} \Gamma'_{23} + \Gamma_{23} \Gamma'_{32}) + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (K_{11} K'_{11} + K_{22} K'_{22}) + \\
& + \frac{2Eh^3\nu}{3(1-\nu^2)} (K_{22} K'_{11} + K_{11} K'_{22}) + \frac{2h^3}{3} (\mu + \alpha) (K_{12} K'_{12} + K_{21} K'_{21}) + \\
& + \frac{2h^3}{3} (\mu - \alpha) (K_{21} K'_{12} + K_{12} K'_{21}) + 2h(\beta + 2\gamma) (k_{11} k'_{11} + k_{22} k'_{22} + k_{33} k'_{33}) + \\
& + 2h\beta (k_{11} k'_{22} + k_{33} k'_{22} + k_{11} k'_{33} + k_{22} k'_{33} + k_{22} k'_{11} + k_{33} k'_{11}) + 2h(\gamma + \varepsilon) (k_{12} k'_{12} + k_{21} k'_{21}) + \\
& + 2h(\gamma - \varepsilon) (k_{21} k'_{12} + k_{12} k'_{21}) + \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13} l'_{13} + \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23} l'_{23} - \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_i \chi_i (K_{11} + K_{22}).
\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

для изотропного тела.

Имея в виду симметричность выражения (2.2.29) или (2.2.30), из равенства (2.2.28) получим теорему взаимности Бетти для прикладной модели изгибной термоупругой деформации микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений:

$$\begin{aligned}
& \left\langle \int_{I_1} \left[\overset{0}{N}_{23} w' + \overset{0}{M}_{22} \psi_2' + \overset{0}{M}_{21} \psi_1' + \overset{0}{L}_{21} \Omega_1' + \overset{0}{L}_{22} \Omega_2' + \overset{0}{\Lambda}_{23} t' \right] A_1 d\alpha_1 + \right. \\
& \left. + \int_{I_2} \left[\overset{0}{N}_{13} w' + \overset{0}{M}_{11} \psi_1' + \overset{0}{M}_{12} \psi_2' + \overset{0}{L}_{11} \Omega_1' + \overset{0}{L}_{12} \Omega_2' + \overset{0}{\Lambda}_{23} t' \right] A_2 d\alpha_2 \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{(S)} [p_3 w' + h\tilde{p}_1 \psi_1' + h\tilde{p}_2 \psi_2' + m_1 \Omega_1' + m_2 \Omega_2' + h\tilde{m}_3 t'] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \rangle - \\
& - \left\langle \int_{I_1} [N'_{23} w + M'_{22} \psi_2 + M'_{21} \psi_1 + L'_{21} \Omega_1 + L'_{22} \Omega_2 + \Lambda'_{13} t] A_1 d\alpha_1 + \right. \\
& + \int_{I_2} [N'_{13} w + M'_{11} \psi_1 + M'_{12} \psi_2 + L'_{11} \Omega_1 + L'_{12} \Omega_2 + \Lambda'_{23} t] A_2 d\alpha_2 + \\
& + \iint_{(S)} [p_3' w + h\tilde{p}_1' \psi_1 + h\tilde{p}_2' \psi_2 + m_1' \Omega_1 + m_2' \Omega_2 + h\tilde{m}_3' t'] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \rangle = \\
& = \iint_S [(D_{1r} K'_{11} + D_{2r} K'_{22}) \chi_r - (D_{1r} K_{11} + D_{2r} K_{22}) \chi_r'] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}
& \left\langle \int_{I_1} [N'_{23} w' + M'_{22} \psi_2' + M'_{21} \psi_1' + L'_{21} \Omega_1' + L'_{22} \Omega_2' + \Lambda'_{23} t'] A_1 d\alpha_1 + \right. \\
& + \int_{I_2} [N'_{13} w' + M'_{11} \psi_1' + M'_{12} \psi_2' + L'_{11} \Omega_1' + L'_{12} \Omega_2' + \Lambda'_{13} t'] A_2 d\alpha_2 + \\
& + \iint_{(S)} [p_3 w' + h\tilde{p}_1 \psi_1' + h\tilde{p}_2 \psi_2' + m_1 \Omega_1' + m_2 \Omega_2' + h\tilde{m}_3 t'] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \rangle - \\
& - \left\langle \int_{I_1} [N'_{23} w + M'_{22} \psi_2 + M'_{21} \psi_1 + L'_{21} \Omega_1 + L'_{22} \Omega_2 + \Lambda'_{13} t] A_1 d\alpha_1 + \right. \\
& + \int_{I_2} [N'_{13} w + M'_{11} \psi_1 + M'_{12} \psi_2 + L'_{11} \Omega_1 + L'_{12} \Omega_2 + \Lambda'_{23} t] A_2 d\alpha_2 + \\
& + \iint_{(S)} [p_3' w + h\tilde{p}_1' \psi_1 + h\tilde{p}_2' \psi_2 + m_1' \Omega_1 + m_2' \Omega_2 + h\tilde{m}_3' t'] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \rangle = \\
& = \iint_S \left[\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \{ (K_{11} + K_{22}) \alpha_r \chi_r' - (K'_{11} + K'_{22}) \alpha_r \chi_r' \} \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

для изотропного тела.

Используя выражения для перемещений и свободных поворотов (2.2.1), (2.2.2), выражения для деформаций и изгибов-кручений (2.2.5), выражения для силовых напряжений и моментных напряжений (2.2.7) или (2.2.8), из общего вариационного функционала трехмерной теории (1.1.34) получим общий вариационный функционал прикладной модели термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений:

$$\begin{aligned}
I_0 = & \iint_S \left\langle W_0 - \left\{ M_{11} \left[K_{11} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_2 \right) \right] + M_{22} \left[K_{22} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_1 \right) \right] + \right. \\
& + M_{12} \left[K_{12} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_1 - t \right) \right] + M_{21} \left[K_{21} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_2 + t \right) \right] + \left. \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + N_{31}[\Gamma_{31} - (\psi_1 - \Omega_2)] + N_{13}\left[\Gamma_{13} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \Omega_2\right)\right] + N_{32}[\Gamma_{32} - (\psi_2 + \Omega_1)] + \\
& + N_{23}\left[\Gamma_{23} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \Omega_1\right)\right] + L_{11}\left[k_{11} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_2\right)\right] + \\
& + L_{22}\left[k_{22} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Omega_1\right)\right] + L_{33}(k_{33} - t) + \tag{2.2.33} \\
& + L_{12}\left[k_{12} - \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_1\right)\right] + L_{21}\left[k_{21} - \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Omega_2\right)\right] + \\
& + \Lambda_{13}\left[l_{13} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial t}{\partial \alpha_1}\right] + \Lambda_{23}\left[l_{23} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial t}{\partial \alpha_2}\right] \Bigg\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \iint_S (\tilde{p}_1 h \psi_1 + \tilde{p}_2 h \psi_2 + p_3 w + m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2 + \tilde{m}_3 h t) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \int_{I_1^0} (M_{21}^0 \psi_1 + M_{22}^0 \psi_2 + N_{23}^0 w + L_{21}^0 \Omega_1 + L_{22}^0 \Omega_2 + \Lambda_{23}^0 t) A_1 d\alpha_1 + \int_{I_2^0} [M_{21}(\psi_1 - \psi_1^0) + M_{22}(\psi_2 - \psi_2^0) + \\
& + N_{23}(w - w^0) + L_{21}(\Omega_1 - \Omega_1^0) + L_{22}(\Omega_2 - \Omega_2^0) + \Lambda_{23}(t - t^0)] A_1 d\alpha_1 + \\
& + \int_{I_1^0} (M_{11}^0 \psi_1 + M_{12}^0 \psi_2 + N_{13}^0 w + L_{11}^0 \Omega_1 + L_{12}^0 \Omega_2 + \Lambda_{13}^0 t) A_2 d\alpha_2 + \int_{I_2^0} [M_{11}(\psi_1 - \psi_1^0) + M_{12}(\psi_2 - \psi_2^0) + \\
& + N_{13}(w - w^0) + L_{11}(\Omega_1 - \Omega_1^0) + L_{12}(\Omega_2 - \Omega_2^0) + \Lambda_{13}(t - t^0)] A_2 d\alpha_2 :
\end{aligned}$$

Если составить вариационное уравнение $\delta I_0 = 0$, в результате получим все основные уравнения (2.2.12)-(2.2.15), (2.2.6) прикладной модели термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений и естественные граничные условия (2.2.16).

Термоупругий изгиб микрополярной упругой тонкой пластики с независимыми полями перемещений и вращений можно рассматривать и без учета поперечных сдвигов, для этого в кинематической гипотезе (2.2.1) следует принимать $(\Gamma_{13} + \Gamma_{31} = 0, \Gamma_{23} + \Gamma_{32} = 0)$:

$$\psi_1 = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}, \quad \psi_2 = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}, \tag{2.2.34}$$

а (2.2.2) нужно оставить без изменения.

С учетом выражений (2.2.34), кинематическая гипотеза (2.2.1) и (2.2.2) можем (как в работах [104,107]) называть обобщенной кинематической гипотезой Кирхгофа в микрополярной термоупругой модели пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Эту же замену необходимо принимать в виду и в геометрических соотношениях (2.2.6). Уравнения равновесия (2.2.12) остаются без изменений, а физические соотношения термоупругости необходимо тоже видоизменить с учетом (2.2.34).

Для получения уравнений классической модели термоупругости пластин без учета поперечных сдвигов, таким же образом выражения (2.2.34) необходимо учитывать в уравнениях (2.2.17)-(2.2.20).

§2.3. ТЕРМОУПРУГИЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

В случае, когда криволинейные ортогональные координаты в срединной плоскости пластинки являются декартовыми ($A_1 = A_2 = 1, \alpha_1 = x_1, \alpha_2 = x_2$), тогда основные уравнения прикладной модели изгибной деформации микрополярной термоупругости (2.2.12), (2.2.6) примут вид:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -p_3, \quad N_{31} - \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} \right) = h\tilde{p}_1, \quad N_{32} - \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) = h\tilde{p}_2, \\ \frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + N_{23} - N_{32} = -m_1, \quad \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + N_{31} - N_{13} = -m_2, \\ L_{33} - \left[\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} + (M_{12} - M_{21}) \right] = h\tilde{m}_3; \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad K_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \quad K_{12} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \iota, \quad K_{21} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \iota, \\ \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \quad \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1, \quad \Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1, \\ k_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, \quad k_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}, \quad k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \quad k_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, \quad l_{13} = \frac{\partial \iota}{\partial x_1}, \quad l_{23} = \frac{\partial \iota}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

к которым следует присоединить физические соотношения термоупругости (2.2.13) или (2.2.15) и граничные условия (2.2.16).

Далее будем изучать случай, когда пластинка находится под воздействием только температурного поля, материал пластинки изотропный, а как граничные условия рассмотрим граничные условия шарнирного опирания.

Разрешающая система уравнений (относительно функций $w, \psi_1, \psi_2, \Omega_1, \Omega_2$ и ι) можем получить (рассматривая изгиб пластинки только под действием температурного поля), если формулы (2.3.2) подставить в (2.2.15) и полученные подставить в уравнения равновесия (2.3.1):

$$\begin{aligned}
& (\mu + \alpha)\nabla^2 w + (\mu - \alpha)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) + 2\alpha\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right) = 0, \\
& (\mu + \alpha)\psi_1 + (\mu - \alpha)\frac{\partial w}{\partial x_1} - 2\alpha\Omega_2 - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2} - (1+\nu)\alpha_t\frac{\partial\chi_t}{\partial x_1}\right] - \\
& \quad - \frac{h^2}{3}\left[(\mu + \alpha)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2} + (\mu - \alpha)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2} + 2\alpha\frac{\partial t}{\partial x_2}\right] = 0, \\
& (\mu + \alpha)\psi_2 + (\mu - \alpha)\frac{\partial w}{\partial x_2} + 2\alpha\Omega_1 - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2} - (1+\nu)\alpha_t\frac{\partial\chi_t}{\partial x_2}\right] - \\
& \quad - \frac{h^2}{3}\left[(\mu + \alpha)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2} + (\mu - \alpha)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2} - 2\alpha\frac{\partial t}{\partial x_1}\right] = 0,
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

$$(\beta + 2\gamma)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1^2} + (\gamma + \varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_2^2} + (\beta + \gamma - \varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial x_2} + 2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 - 2\Omega_1\right) + \beta\frac{\partial t}{\partial x_1} = 0,$$

$$(\gamma + \varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1^2} + (\beta + 2\gamma)\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_2^2} + (\beta + \gamma - \varepsilon)\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial x_2} - 2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} - \psi_1 + 2\Omega_2\right) + \beta\frac{\partial t}{\partial x_2} = 0,$$

$$(\beta + 2\gamma)t + \beta\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right) - \frac{h^2}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}\nabla^2 t - 2\alpha\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - 2t\right) = 0,$$

$$\text{где } \nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2}.$$

Из системы (2.3.3) возможно отделение следующей системы уравнений относительно w , $\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)$, $\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right)$, а также системы уравнений относительно

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right), \left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right), t.$$

Система уравнений относительно первой тройки функций имеет вид:

$$\begin{aligned}
& (\mu + \alpha)\nabla^2 w + (\mu - \alpha)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) + 2\alpha\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right) = 0, \\
& (\mu + \alpha)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) + (\mu - \alpha)\nabla^2 w - 2\alpha\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right) - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\nabla^2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) + \\
& \quad + \frac{Eh^2}{3(1-\nu)}\alpha_t\nabla^2\chi_t = 0,
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

$$2\alpha\nabla^2 w - (\gamma + \varepsilon)\nabla^2\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right) - 2\alpha\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) + 4\alpha\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right) = 0.$$

В дальнейшем будем изучать случай, когда $\chi_t = \chi_t(x_1, x_2) \equiv const$, но следует иметь в виду, что при шарнирном опирании, в общем случае, когда $\chi_t = \chi_t(x_1, x_2) \neq const$, уравнения (2.3.4) значительно упрощаются (как это имеет место в соответствующей задаче классической термоупругости тонких пластин [37]) и сначала необходимо

получить эти упрощающие уравнения, а потом изучать тот случай, о котором говорили выше.

Если сложить уравнения (2.3.4)₁ и (2.3.4)₂, получим

$$2\mu\nabla^2 w + 2\mu\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\nabla^2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) + \frac{Eh^2}{3(1-\nu)}\alpha_t\nabla^2\chi_t = 0. \quad (2.3.5)$$

Теперь уравнение (2.3.4)₁ умножим на 2 и составим разность полученного уравнения и уравнения (2.3.4)₃, будем иметь

$$2\mu\nabla^2 w + (\gamma + \varepsilon)\nabla^2\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) = 0. \quad (2.3.6)$$

Составляя разность (2.3.5) и (2.3.6), приходим к следующему уравнению:

$$\nabla^2\left[(\gamma + \varepsilon)\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right) + \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) - \frac{Eh^2}{3(1-\nu)}\alpha_t\chi_t\right] = 0. \quad (2.3.7)$$

Обозначим через F выражение в больших скобках в (2.3.7):

$$F = (\gamma + \varepsilon)\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right) + \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) - \frac{Eh^2}{3(1-\nu)}\alpha_t\chi_t, \quad (2.3.8)$$

тогда функция F в области прямоугольника ($0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$) будет удовлетворять уравнению Лапласа

$$\nabla^2 F = 0. \quad (2.3.9)$$

Рассмотрим граничные условия для F на сторонах прямоугольника $x_1 = 0, x_1 = a, x_2 = 0, x_2 = b$, получим

$$F(x_1, x_2)\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = (\gamma + \varepsilon)\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right)\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} + \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} - \frac{Eh^2}{3(1-\nu)}\alpha_t\chi_t\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}}. \quad (2.3.10)$$

Граничные условия шарнирного опирания (которые вытекают из общих граничных условий (2.2.16)) имеют вид:

$$\begin{aligned} w = 0, \psi_2 = 0, M_{11} = 0, L_{12} = 0, \Omega_1 = 0, \Lambda_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a, \\ w = 0, \psi_1 = 0, M_{22} = 0, L_{21} = 0, \Omega_2 = 0, \Lambda_{23} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, x_2 = b. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Следовательно будем иметь

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \quad \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \quad (2.3.12)$$

далее имеем

$$\begin{aligned} M_{11}\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} - (1+\nu)\alpha_t\chi_t\right]\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \\ L_{12}\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)k_{12} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}]\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

С учетом условий (2.3.12), граничные условия (2.3.13) будут выражаться так

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0}^{x_1=a} = (1+\nu)\alpha_t \chi_t \Big|_{x_1=0}^{x_1=a}, \quad \left. \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right|_{x_1=0}^{x_1=a} = 0. \quad (2.3.14)$$

На основе выражения (2.3.10) для функции F получим следующие однородные граничные условия

$$F(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} = 0, \quad (2.3.15)$$

аналогично, получим

$$F(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} = 0. \quad (2.3.16)$$

Итак, получили, что функция F в прямоугольнике $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < b$, удовлетворяет однородному уравнению Лапласа (2.3.9), а на контуре этого прямоугольника - нулевым граничным условиям ((2.3.15), (2.3.16)), следовательно

$$F(x_1, x_2) \equiv 0 \quad (2.3.17)$$

в указанном прямоугольнике.

Таким образом, из (2.3.8) с учетом (2.3.17) получим следующее уравнение

$$(\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right) + \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - \frac{Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t = 0 \quad (2.3.18)$$

Теперь уравнение (2.3.18) присоединим с уравнением (2.3.4)₁ и полученную систему рассмотрим как линейную алгебраическую систему относительно $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right)$ и

$\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)$. Из указанной системы будем иметь:

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) = - \frac{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha) \nabla^2 w + 2\alpha \frac{Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t}{(\gamma + \varepsilon)(\mu - \alpha) - 2\alpha \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}}, \quad (2.3.19)$$

$$\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} [(1+\nu)(\mu - \alpha)\alpha_t \chi_t + (\mu + \alpha)\nabla^2 w]}{(\gamma + \varepsilon)(\mu - \alpha) - 2\alpha \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}}. \quad (2.3.20)$$

И, наконец, подставляя (2.3.19), (2.3.20) в уравнение (2.3.4)₃, для определения прогиба пластинки $w(x_1, x_2)$ приходим к решению следующего уравнения:

$$\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} (\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \nabla^2 w - 4\mu \alpha \left[(\gamma + \varepsilon) + \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \right] \nabla^2 w - 4\mu \alpha \frac{Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t = 0. \quad (2.3.21)$$

Как пример (как сказано выше), рассмотрим случай, когда температурная функция χ_i - постоянная функция в области прямоугольника (примем также $a = b$).

Переходя к безразмерным величинам:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{a}, \quad \bar{t} = \frac{t}{a}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{a^2 \mu}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{a^2 \mu}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{a^2 \mu}, \quad \delta = \frac{h}{a}, \quad (2.3.22)$$

уравнение (2.3.21) примет вид:

$$\delta^2 \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right) (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{w} - 2 \frac{\alpha}{\mu} [3(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})(1 - \nu) + 2\delta^2] \bar{\nabla}^2 \bar{w} - 2 \frac{\alpha}{\mu} \delta (1 + \nu) \alpha_i T_0 = 0, \quad (2.3.23)$$

где

$$\bar{\nabla}^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \bar{x}_2^2} \quad (2.3.24)$$

Вводим следующее обозначение:

$$\bar{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{\nabla}^2 \bar{w}, \quad (2.3.25)$$

тогда вместо решения уравнения (2.3.23), приходим к решению двух последовательных задач:

$$\delta^2 \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right) (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \bar{\nabla}^2 \bar{u} - 2 \frac{\alpha}{\mu} [3(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})(1 - \nu) + 2\delta^2] \bar{u} - 2 \frac{\alpha}{\mu} \delta (1 + \nu) \alpha_i T_0 = 0 \quad (2.3.26)$$

и

$$\bar{\nabla}^2 \bar{w} = \bar{u}. \quad (2.3.27)$$

Для решения уравнения Гельмгольца (2.3.26) необходимо иметь граничные условия для функции \bar{u} , т.е. для выражения $\bar{\nabla}^2 \bar{w}$, а при решении уравнения (2.3.27) необходимо использовать граничные условия для прогиба $\bar{w}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, т.е.

$$\bar{w}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Big|_{\substack{\bar{x}_1=0 \\ \bar{x}_1=1}} = 0, \quad \bar{w}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Big|_{\substack{\bar{x}_2=0 \\ \bar{x}_2=1}} = 0. \quad (2.3.28)$$

Для определения граничных значений \bar{u} (т.е. $\bar{\nabla}^2 \bar{w}$) рассмотрим уравнение (2.3.4)₁ на контуре прямоугольной области с учетом условий (2.3.12) и (2.3.14), получим

$$\bar{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Big|_{\substack{\bar{x}_1=0 \\ \bar{x}_1=1}} = \bar{\nabla}^2 \bar{w} \Big|_{\substack{\bar{x}_1=0 \\ \bar{x}_1=1}} = - \frac{1 - \frac{\alpha}{\mu}}{1 + \frac{\alpha}{\mu}} (1 + \nu) \alpha_i \frac{T_0}{2\delta}, \quad (2.3.29)$$

$$\bar{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Big|_{\substack{\bar{x}_2=0 \\ \bar{x}_2=1}} = \bar{\nabla}^2 \bar{w} \Big|_{\substack{\bar{x}_2=0 \\ \bar{x}_2=1}} = - \frac{1 - \frac{\alpha}{\mu}}{1 + \frac{\alpha}{\mu}} (1 + \nu) \alpha_i \frac{T_0}{2\delta}.$$

Вместо функции $\bar{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ вводим новую функцию $\tilde{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ по следующей формуле:

$$\bar{u} = \tilde{u} - \frac{1 - \frac{\alpha}{\mu}}{1 + \frac{\alpha}{\mu}} (1 + \nu) \alpha_t \frac{T_0}{2\delta}. \quad (2.3.30)$$

После этой замены, относительно функции \tilde{u} уравнение (2.3.26) примет вид

$$\begin{aligned} \delta^2 \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right) (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \bar{\nabla}^2 \tilde{u} - 2 \frac{\alpha}{\mu} [3(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})(1 - \nu) + 2\delta^2] \tilde{u} + \\ + \left\{ \frac{\alpha}{\mu} [3\delta^{-1}(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})(1 - \nu) + 2\delta] \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{\mu}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)} - 2 \frac{\alpha}{\mu} \delta \right\} (1 + \nu) \alpha_t T_0 = 0, \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

а граничные условия для функции $\tilde{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ будут однородными

$$\tilde{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Big|_{\substack{\bar{x}_1=0 \\ \bar{x}_2=1}} = 0, \quad \tilde{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Big|_{\substack{\bar{x}_1=1 \\ \bar{x}_2=0}} = 0. \quad (2.3.32)$$

Таким образом, будем решать две последовательные задачи. Сначала решаем граничную задачу (2.3.31), (2.3.32), определим функцию $\tilde{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, поставив ее в (2.3.30) определим функцию $\bar{u}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и, последнюю подставляя в правой части уравнения (2.3.27), остается решать граничную задачу (2.3.27), (2.3.28) и определить функцию прогиба пластинки $\bar{w}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. После этих вычислений выражение $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right)$ определяется

уравнением (2.3.19), а $\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right)$ - уравнением (2.3.20).

Следует сказать (как об этом говорили выше), что на основе базовой системы (2.3.4) возможно получение еще одной системы из трех, на этот раз однородных уравнений

относительно функций $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right)$, $\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right)$ и $i(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right) - 2\alpha \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right) - (\mu + \alpha) \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right) - 2\alpha \frac{h^2}{3} \nabla^2 i = 0, \\ (\beta + 2\gamma) \nabla^2 \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right) + 2\alpha \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right) - 4\alpha \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right) + \beta \nabla^2 i = 0, \\ \left(\beta + 2\gamma + 4\alpha \frac{h^2}{3}\right) i + \beta \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}\right) - \frac{h^2}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \nabla^2 i - 2\alpha \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Для системы уравнений, когда $\chi_i(x_1, x_2) \equiv const$, имеем следующие однородные граничные условия (которые следуют из (2.3.11), (2.3.12), (2.3.14)):

$$\begin{aligned}
\psi_2(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right) \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \quad \frac{\partial \iota}{\partial x_1} \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \\
\psi_1(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=b}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=b}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=b}} = 0, \quad \frac{\partial \iota}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=b}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

Получим, что система уравнений (2.3.33) однородна, граничные условия (2.3.34) тоже однородны, следовательно, решение этой системы будет нулевым:

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) \equiv 0, \quad \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right) \equiv 0, \quad \iota(x_1, x_2) \equiv 0. \tag{2.3.35}$$

Для определения функций $\psi_1(x_1, x_2)$, $\psi_2(x_1, x_2)$ или $\Omega_1(x_1, x_2)$, $\Omega_2(x_1, x_2)$ следует эти уравнения отдельно присоединить с уравнением (2.3.19) или (2.3.20). Из полученных систем будут определяться указанные функции с учетом следующих граничных условий:

$$\begin{aligned}
\psi_2(x_1, x_2) = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a, \\
\psi_1(x_1, x_2) = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0, \quad x_2 = b.
\end{aligned}$$

Рассмотрим также поставленную задачу теперь без учета поперечных сдвигов (т.е. с применением обобщенных на микрополярной случай гипотез Кирхгофа (2.2.34):

$$\psi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \psi_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_2}). \quad \text{Рассматриваемая задача для прямоугольной пластинки}$$

приводятся к решению следующей системы уравнений относительно функций: $w(x_1, x_2)$, $\Omega_1(x_1, x_2)$, $\Omega_2(x_1, x_2)$ и $\iota(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu h^2}{3(1-\nu)} \nabla^2 \nabla^2 w - 2\alpha \nabla^2 w - 2\alpha \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\mu h^2 (1+\nu)}{3(1-\nu)} \alpha_t \nabla^2 \chi_t &= 0, \\
(\beta + 2\gamma) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1^2} + (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2^2} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1 \partial x_2} + 4\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1 \right) + \beta \frac{\partial \iota}{\partial x_1} &= 0, \\
(\beta + 2\gamma) \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_2^2} + (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1^2} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 4\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2 \right) + \beta \frac{\partial \iota}{\partial x_2} &= 0, \\
\left(\beta + 2\gamma + 4\alpha \frac{h^2}{3} \right) \iota + \beta \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right) - \frac{h^2}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \nabla^2 \iota &= 0.
\end{aligned} \tag{2.3.36}$$

Из уравнений (2.3.36)₂ и (2.3.36)₃ легко прийти к следующему уравнению

$$(\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right) + 4\alpha \nabla^2 w - 4\alpha \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right) = 0. \tag{2.3.37}$$

Это уравнение умножим на 2 и сложим с уравнением (2.3.36)₁, в результате приходим к следующему уравнению:

$$\nabla^2 \left[(\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right) + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t \right] = 0. \tag{2.3.38}$$

Обозначим выражение в больших скобках в уравнение (2.3.38) через $f(x_1, x_2)$:

$$f = (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right) + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t, \quad (2.3.39)$$

тогда функция f в прямоугольнике $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < b$ будет удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 f = 0 \quad (2.3.40)$$

Вычислим значения функции f на контуре указанной прямоугольной области, будем иметь

$$f(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right) \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} + \frac{2\mu h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}}. \quad (2.3.41)$$

Условия шарнирного опирания по этой модели будут

$$\begin{aligned} w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{12} = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Lambda_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = a, \\ w = 0, \quad M_{22} = 0, \quad L_{21} = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Lambda_{23} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b. \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

Используя выражения для M_{11} ((2.2.15)₃), L_{12} ((2.2.15)₆), и Λ_{13} ((2.2.15)₈), условия (2.3.42) можно привести к следующим:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = -(1+\nu)\alpha_t \chi_t, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x_1} = 0, \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = a, \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = -(1+\nu)\alpha_t \chi_t, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x_2} = 0, \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b. \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

На основе граничных условий (2.3.43)₁, для граничных условий функции f на линиях $x_1 = 0$, $x_1 = a$, получим

$$f(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \quad (2.3.44)$$

аналогично, будем иметь

$$f(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=b}} = 0. \quad (2.3.45)$$

На основании уравнения (2.3.40) и граничных условий (2.3.44), (2.3.45) получим, что

$$f(x_1, x_2) \equiv 0, \quad (2.3.46)$$

в прямоугольнике $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$.

Следовательно, из (2.3.39) получим следующее уравнение

$$(\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right) + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t = 0. \quad (2.3.47)$$

Из уравнения (2.3.47) определяя $\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}\right)$ и подставляя в уравнение (2.3.36)₁, для

прогиба $w(x_1, x_2)$ получим отдельное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\mu h^2}{3(1-\nu)}(\gamma + \varepsilon)\nabla^2\nabla^2 w - 2\alpha\left[(\gamma + \varepsilon) + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)}\right]\nabla^2 w - 2\alpha\frac{2\mu h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}\alpha_i\chi_i + \\ + \frac{\mu h^2(1+\nu)(\gamma + \varepsilon)}{3(1-\nu)}\alpha_i\nabla^2\chi_i = 0. \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

Для рассматриваемого нашего примера $(\chi_i(x_1, x_2) \equiv const)$ из (2.3.48) получим уравнение

$$\frac{\mu h^2}{3(1-\nu)}(\gamma + \varepsilon)\nabla^2\nabla^2 w - 2\alpha\left[(\gamma + \varepsilon) + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)}\right]\nabla^2 w - 2\alpha\frac{2\mu h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}\alpha_i\chi_i = 0. \quad (2.3.49)$$

Для решения уравнения (2.3.49) можем применять подход решения уравнения (2.3.21).

На основе уравнений (2.3.36)₂, (2.3.36)₃, (2.3.36)₄ при $\chi_i = const$ для определения функций $\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right)$ и $t(x_1, x_2)$ можно получить отдельную систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\beta + 2\gamma)\nabla^2\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right) - 4\alpha\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right) + \beta\nabla^2 t = 0 \\ \left(\beta + 2\gamma + 4\alpha\frac{h^2}{3}\right)t + \beta\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right) - \frac{h^2}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}\nabla^2 t = 0. \end{aligned} \quad (2.3.50)$$

К системе уравнений (2.3.50) присоединим граничные условия при $\chi_i = const$:

$$\begin{aligned} \Omega_1(x_1, x_2)\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \quad \frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial x_2}\Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x_2}\Big|_{x_1=0} = 0, \\ \Omega_2(x_1, x_2)\Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=b}} = 0, \quad \frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial x_2}\Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=b}} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x_1}\Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=b}} = 0. \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

Система уравнений (2.3.50) при $\chi_i = const$ однородна, граничные условия (2.3.51)-однородны, следовательно, в прямоугольнике $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2} \equiv 0, \quad t(x_1, x_2) \equiv 0. \quad (2.3.52)$$

Для определения функций $\Omega_1(x_1, x_2)$ и $\Omega_2(x_1, x_2)$ следует присоединить уравнения (2.3.47) и (2.3.52)₁:

$$\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{\gamma + \varepsilon} \left[\frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \nabla^2 w + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t \right], \quad (2.3.53)$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} = 0.$$

Для решения системы уравнений (2.3.53) следует иметь в виду граничные условия (из (2.3.43)):

$$\Omega_1(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} = 0, \quad \Omega_2(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} = 0. \quad (2.3.54)$$

Для сравнения результатов численного счета микрополярной модели (с независимыми полями перемещений и вращений) и классической модели, приведем здесь также разрешающие уравнения термоупругого изгиба прямоугольной пластинки по классической теории по моделям с учетом поперечных сдвигов и без учета поперечных сдвигов.

Уравнения термоупругого изгиба прямоугольной пластинки по классической теории упругости с учетом поперечных сдвигов имеют вид (2.2.17), (2.2.19), (2.2.20) (используя декартовую систему координат):

$$\nabla^2 w + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi_1 - \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} - (1+\nu) \alpha_t \frac{\partial \chi_t}{\partial x_1} \right] - \frac{h^2}{3} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right] = 0, \quad (2.3.55)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} + \psi_2 - \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} - (1+\nu) \alpha_t \frac{\partial \chi_t}{\partial x_2} \right] - \frac{h^2}{3} \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right] = 0$$

Из уравнений (2.3.55)₂ и (2.3.55)₃, имея в виду также уравнение (2.3.55)₁, будет следовать следующее уравнение

$$\nabla^2 \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - (1+\nu) \alpha_t \chi_t \right] = 0. \quad (2.3.56)$$

Если обозначим

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - (1+\nu) \alpha_t \chi_t = \Phi(x_1, x_2), \quad (2.3.57)$$

тогда для Φ получим уравнение: $\nabla^2 \Phi = 0$, к которой присоединим граничные условия:

$$\Phi(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} - (1+\nu) \alpha_t \chi_t \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} \quad (2.3.58)$$

Граничные условия шарнирного опирания в этой модели имеют вид

$$w = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = (1 + \nu)\alpha_t \chi_t \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = a, \quad (2.3.59)$$

$$w = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = (1 + \nu)\alpha_t \chi_t \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b.$$

Легко убедиться, что граничные условия для функции $\Phi(x_1, x_2)$ будут

$$\Phi(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} = 0, \quad \Phi(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} = 0. \quad (2.3.60)$$

Это означает, что

$$\Phi(x_1, x_2) \equiv 0 \quad (2.3.61)$$

в рассматриваемой области прямоугольника. Следовательно из (2.3.57) будет вытекать следующее уравнение

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) = (1 + \nu)\alpha_t \chi_t, \quad (2.3.62)$$

Подставляя (2.3.62) в уравнение (2.3.55)₁ для определения прогиба $w(x_1, x_2)$ получим уравнение:

$$\nabla^2 w = -(1 + \nu)\alpha_t \chi_t, \quad (2.3.63)$$

к которому следует присоединить граничные условия

$$w(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} = 0, \quad w(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} = 0. \quad (2.3.64)$$

Отметим, что для термоупругой задачи изгибной деформации прямоугольной пластинки по классической теории упругости на основе гипотез Кирхгофа [37] разрешающее уравнение относительно $w(x_1, x_2)$ и граничные условия, при $\chi_t \equiv const$, выражаются аналогично (2.3.63), (2.3.64). Учет поперечных сдвигов проявляет себя в определении поворотов ψ_1 и ψ_2 (уравнения (2.3.62), (2.3.35)₁).

Наша цель, решение всех этих задач, которые выше формулированы: термоупругого изгиба шарнирно-опертой прямоугольной микрополярной пластинки с независимыми полями перемещений и вращений по модели: а) с учетом поперечных сдвиговых деформаций, б) без учета поперечных сдвиговых деформаций. Во всех этих задачах $\chi_t = const$. А также решение этой же физической задачи по классической теории упругости с учетом и без учета поперечных сдвиговых деформаций.

Неизвестные функции в соответствующих задачах будем искать в виде разложений в двойные тригонометрические ряды Фурье с неизвестными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{mn} \sin m\pi\bar{x}_1 \sin n\pi\bar{x}_2, & \bar{w} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin m\pi\bar{x}_1 \sin n\pi\bar{x}_2, \\
\Omega_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin m\pi\bar{x}_1 \cos n\pi\bar{x}_2, & \Omega_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos m\pi\bar{x}_1 \sin n\pi\bar{x}_2, \\
\psi_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \cos m\pi\bar{x}_1 \sin n\pi\bar{x}_2, & \psi_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_{mn} \sin m\pi\bar{x}_1 \cos n\pi\bar{x}_2.
\end{aligned} \tag{2.3.65}$$

Легко заметить, что для каждой из перечисленных выше граничных задач будут автоматически удовлетворены соответствующие граничные условия. Функцию $\alpha_i \tilde{T}_0 = const$ тоже представим в виде разложения в двойной тригонометрический ряд Фурье:

$$\alpha_i \tilde{T}_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \sin m\pi\bar{x}_1 \sin n\pi\bar{x}_2, \tag{2.3.66}$$

где

$$T_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 \alpha_i \tilde{T}_0 \sin m\pi\bar{x}_1 \sin n\pi\bar{x}_2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = \frac{16\alpha_i \tilde{T}_0}{\pi^2 mn}, \quad \text{где } m = 1, 3, 5, \dots; \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Подставляя соответствующие ряды из (2.3.65) в соответствующие уравнения ((2.3.26), (2.3.27), (2.3.19) и (2.3.35)₁, (2.3.20) и (2.3.35)₂ и т.д.) относительно коэффициентов этих рядов получим неоднородные системы линейных алгебраических уравнений. Для каждого случая решая полученные соответствующие алгебраические уравнения, определяя указанные коэффициенты и подставляя их в ряды ((2.3.65)), получим решения всех рассмотренных задач.

Теперь можем перейти к получению численных результатов и к их анализу. Принимаем следующие данные:

$$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}, \quad \nu = 0.33, \quad \bar{\gamma} = \bar{\varepsilon} = 22 \cdot 10^{-4}, \quad \bar{\beta} = 11 \cdot 10^{-2}, \quad \tilde{T}_0 = 60^\circ C, \quad \alpha_i = 125 \times 10^{-7} \text{ } 1/\text{гр}.$$

В таблице 1 приведены значения максимального прогиба микрополярной пластинки с учетом поперечных сдвигов, в зависимости от значения безразмерного физического параметра $\frac{\alpha}{\mu}$ (остальные безразмерные физические параметры считались постоянными).

В этой же таблице для сравнения приведено значение максимального прогиба по классической модели пластинки. Отметим, что, как показывают расчеты, значения безразмерных физических параметров $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$ и $\bar{\beta}$ мало влияют на значение прогиба микрополярной пластинки, главную роль играет параметр $\frac{\alpha}{\mu}$.

Таблица 1. Максимальные прогибы микрополярной прямоугольной пластинки с независимыми полями перемещений и вращений в зависимости от отношения $\frac{\alpha}{\mu}$ и,

классической пластинки, под действием температуры. Решение на основе учета поперечных сдвигов.

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{w_{\max}^{\text{мик.}}}{w_{\max}^{\text{кл.}}}$
10^{-6}	1.638	1.638	1
10^{-5}	1.630	1.638	0.99
10^{-4}	1.555	1.638	0.95
$0.5 \cdot 10^{-4}$	1.273	1.638	0.78
10^{-3}	1.006	1.638	0.61
$2 \cdot 10^{-3}$	0.645	1.638	0.39
$3 \cdot 10^{-3}$	0.412	1.638	0.25
$5 \cdot 10^{-3}$	0.129	1.638	0.08

Таблица 2. Максимальные прогибы микрополярной прямоугольной пластинки с независимыми полями перемещений и вращений в зависимости от отношения $\frac{\alpha}{\mu}$ и, классической пластинки, под действием температуры. Решения на основе без учета поперечных сдвигов.

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{w_{\max}^{\text{мик.}}}{w_{\max}^{\text{кл.}}}$
10^{-6}	1.638	1.638	1
10^{-5}	1.630	1.638	0.99
10^{-4}	1.555	1.638	0.95
10^{-3}	1.008	1.638	0.62
$2 \cdot 10^{-3}$	0.646	1.638	0.39
$3 \cdot 10^{-3}$	0.411	1.638	0.25
$5 \cdot 10^{-3}$	0.125	1.638	0.08

Численные расчеты, приведенные в таблицах 1-2 устанавливают, что при увеличении микрополярной безразмерной постоянной $\frac{\alpha}{\mu}$, сильно повышается жесткость

пластинки по сравнению с классическим случаем (как с учетом поперечных сдвигов, так и без их учета).

Если сравнивать результаты микрополярных пластин с учетом и без учета поперечных сдвигов, то можно сказать, что они довольно близки друг с другом, но есть диапазоны изменения $\frac{\alpha}{\mu}$ (в основном при больших значениях $\frac{\alpha}{\mu}$), при котором эти величины могут существенно отличаться друг от друга. Например, когда $\frac{\alpha}{\mu} = 6,3 \cdot 10^{-3}$, $\bar{w} = 0,013 \cdot 10^{-3}$ с учетом сдвига, а без учета сдвигов $\bar{w} = 0,007 \cdot 10^{-3}$ и т.д.

§2.4. ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

Рассмотрим случай, когда ортогональные криволинейные координаты в срединной плоскости пластинки являются координатами полярной системы координат ($A_1 = 1, A_2 = r, \alpha_1 = r, \alpha_2 = \varphi$).

Основные уравнения прикладной модели термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений в полярной системе координат примут вид:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{23}}{\partial \varphi} &= -p_3, & \frac{\partial L_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (L_{11} - L_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{21}}{\partial \varphi} + (N_{23} - N_{32}) &= -m_1, \\ \frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial L_{22}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (L_{12} + L_{21}) + (N_{31} - N_{13}) &= -m_2, \\ N_{31} - \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi} \right) &= h\tilde{p}_1, \\ N_{32} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_{12} + M_{21}) \right) &= h\tilde{p}_2, \\ L_{33} - \left(\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r} \Lambda_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial \varphi} + (M_{12} - M_{21}) \right) &= h\tilde{m}_3; \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial r} + \Omega_2, \quad \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \quad \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1, \quad \Gamma_{23} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \Omega_1,$$

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, & K_{22} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \psi_1, & K_{12} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \iota, & K_{21} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \psi_2 + \iota, \\
k_{11} &= \frac{\partial \Omega_1}{\partial r}, & k_{22} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \Omega_1, & k_{33} &= \iota, & k_{12} &= \frac{\partial \Omega_2}{\partial r}, & k_{21} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \Omega_2, \\
l_{13} &= \frac{\partial \iota}{\partial r}, & l_{23} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \iota}{\partial \varphi}.
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

К уравнениям (2.4.1) и (2.4.2) будем присоединять физические соотношения (2.2.13) для ортотропного тела или (2.2.15)- для изотропного тела и граничные условия (2.2.16).

Если рассматривать осесимметричный случай, тогда система уравнений (2.4.1), (2.4.2), (2.2.13) или (2.2.15) распадается на две отдельные системы уравнений (с соответствующими граничными условиями). Рассмотрим задачу изгиба, когда материал пластинки изотропный:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
\frac{dN_{13}}{dr} + \frac{1}{r} N_{13} &= -p_3, & N_{31} - \left[\frac{dM_{11}}{dr} + \frac{1}{r} (M_{11} - M_{22}) \right] &= h\tilde{p}_1, \\
\frac{dL_{12}}{dr} + \frac{1}{r} (L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} &= -m_2;
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned}
N_{13} &= 2h \left[(\mu + \alpha) \frac{dw}{dr} + (\mu - \alpha) \psi_1 + 2\alpha \Omega_2 \right], & N_{31} &= 2h \left[(\mu + \alpha) \psi_1 + (\mu - \alpha) \frac{dw}{dr} - 2\alpha \Omega_2 \right], \\
M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left[\frac{d\psi_1}{dr} + \frac{\nu}{r} \psi_1 - (1+\nu) \alpha_t \chi_t \right], & M_{22} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{r} \psi_1 + \nu \frac{d\psi_1}{dr} - (1+\nu) \alpha_t \chi_t \right], \\
L_{12} &= 2h \left[(\gamma + \varepsilon) \frac{d\Omega_2}{dr} - (\gamma - \varepsilon) \frac{1}{r} \Omega_2 \right], & L_{21} &= 2h \left[(\gamma - \varepsilon) \frac{d\Omega_2}{dr} - (\gamma + \varepsilon) \frac{1}{r} \Omega_2 \right].
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Систему уравнений (2.4.3), (2.4.4) можем привести к системе из трех уравнений относительно w, ψ_1, Ω_2 :

$$\begin{aligned}
(\mu + \alpha) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + (\mu - \alpha) \left(\frac{d\psi_1}{dr} + \frac{1}{r} \psi_1 \right) + 2\alpha \left(\frac{d\Omega_2}{dr} + \frac{1}{r} \Omega_2 \right) &= -\frac{p_3}{2h}, \\
(\mu - \alpha) \frac{dw}{dr} - 2\alpha \Omega_2 + (\mu + \alpha) \psi_1 - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 \psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} - \frac{1}{r^2} \psi_1 \right) &= -\frac{Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \frac{d\chi_t}{dr}, \\
(\gamma + \varepsilon) \left(\frac{d^2 \Omega_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Omega_2}{dr} - \frac{1}{r^2} \Omega_2 \right) - 4\alpha \Omega_2 + 2\alpha \left(\psi_1 - \frac{dw}{dr} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

К этой системе уравнений необходимо присоединить граничные условия. Будем рассматривать случай, когда внешнее воздействие на пластинку отсутствует ($p_3 = 0$), а температурная функция имеет вид (2.3.4). Как граничные условия при $r = a$ (пластинку будем считать сплошной) рассмотрим условия шарнирного опирания:

$$L_{12} \Big|_{r=a} = 0, \quad w \Big|_{r=a} = 0, \quad M_{11} \Big|_{r=a} = 0. \tag{2.4.6}$$

Для получения однородных граничных условий заменим ψ_1 на $\tilde{\psi}_1$ по формуле

$$\psi_1 = \tilde{\psi}_1 + \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{2h} r. \quad (2.4.7)$$

В результате уравнения (2.4.5) примут вид:

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (\mu - \alpha) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{\psi}_1 \right) + 2\alpha \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \Omega_2 \right) &= -(\mu - \alpha) \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{h}, \\ (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha \Omega_2 + (\mu + \alpha) \tilde{\psi}_1 - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\psi}_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \tilde{\psi}_1 \right) &= -(\mu + \alpha) \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{2h} r, \\ (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_2}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Omega_2 \right) - 4\alpha \Omega_2 + 2\alpha \left(\tilde{\psi}_1 - \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= -\alpha \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{h} r. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Вводим безразмерные величины:

$$\bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{a}, \quad \delta = \frac{h}{a}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{a^2 \mu}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{a^2 \mu}. \quad (2.4.9)$$

Рассмотрим первое уравнение из системы (2.4.8):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} + \tilde{\psi}_1 \right) + \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} + \tilde{\psi}_1 \right) + \frac{\alpha}{\mu} \frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} - \tilde{\psi}_1 + 2\Omega_2 \right) + \frac{\alpha}{\mu} \frac{1}{\bar{r}} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} - \tilde{\psi}_1 + 2\Omega_2 \right) &= \\ = - \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} \right) \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{\delta}. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Вводим обозначение

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} + \tilde{\psi}_1 = \chi_1, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} - \tilde{\psi}_1 + 2\Omega_2 = \chi_2. \quad (2.4.11)$$

Тогда из (2.4.10) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\chi_1 + \frac{\alpha}{\mu} \chi_2 \right) + \frac{1}{\bar{r}} \left(\chi_1 + \frac{\alpha}{\mu} \chi_2 \right) = - \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} \right) \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{\delta}. \quad (2.4.12)$$

Решение однородного уравнения (2.4.12) будет:

$$\chi_1 + \frac{\alpha}{\mu} \chi_2 = \frac{C}{\bar{r}}.$$

Так как мы изучаем сплошные круглые пластинки, будем считать $C = 0$. Частное решение этого же уравнения будем искать в виде

$$\chi_1 + \frac{\alpha}{\mu} \chi_2 = \tilde{C} \bar{r},$$

для \tilde{C} получим: $\tilde{C} = - \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} \right) \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{2\delta}$,

тогда решение уравнения (2.4.12) будет иметь вид:

$$\chi_1 + \frac{\alpha}{\mu} \chi_2 = - \left(1 - \frac{\alpha}{\mu}\right) \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{2\delta} \bar{r}. \quad (2.4.13)$$

Подставляя (2.4.11) в формуле (2.4.13) приходим к следующему уравнению

$$\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right) \frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} + \left(1 - \frac{\alpha}{\mu}\right) \tilde{\psi}_1 + 2 \frac{\alpha}{\mu} \Omega_2 = - \left(1 - \frac{\alpha}{\mu}\right) \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{2\delta} \bar{r}, \quad (2.4.14)$$

Откуда определим значение функции Ω_2 :

$$\Omega_2 = - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{-1} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right) \frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} + \left(1 - \frac{\alpha}{\mu}\right) \tilde{\psi}_1 + \left(1 - \frac{\alpha}{\mu}\right) \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{2\delta} \bar{r} \right], \quad (2.4.15)$$

которое подставляя в уравнение (3.4.2)₂, в результате будем иметь

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} = -\tilde{\psi}_1 + \frac{\delta^2}{3(1-\nu)} \frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{d\tilde{\psi}_1}{d\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \tilde{\psi}_1 \right) - \frac{\alpha_r \tilde{T}_0}{2\delta} \bar{r}. \quad (2.4.16)$$

Если подставить (2.4.16) в (2.4.15) получим Ω_2 выраженное через $\tilde{\psi}_1$.

Подставим формулы (2.4.15) и (2.4.16) в уравнение (2.4.8)₃, для функции $\tilde{\psi}_1$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi}_1 - k^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi}_1 = - \frac{6 \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 (1-\nu) \alpha_r \tilde{T}_0}{\delta^3 (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)} \bar{r}, \quad (2.4.17)$$

где

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi}_1 = \frac{d^2 \tilde{\psi}_1}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\tilde{\psi}_1}{d\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} \tilde{\psi}_1, \quad k^2 = \left(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon} + \frac{2\delta^2}{3(1-\nu)} \right) \frac{6 \frac{\alpha}{\mu} (1-\nu)}{\delta^2 (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)}. \quad (2.4.18)$$

Частное решение неоднородного уравнения (2.4.17) имеет вид

$$\tilde{\psi}_1 = C \bar{r}^3, \quad (2.4.19)$$

где

$$C = \frac{3 \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 (1-\nu) \alpha_r \tilde{T}_0}{4k^2 \delta^3 (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)} \bar{r}^3$$

Соответствующее однородное уравнение для (2.4.17) будет

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi}_1 - k^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi}_1 = 0$$

или

$$\tilde{\nabla}^2(\tilde{\nabla}^2\tilde{\psi}_1 - k^2\tilde{\psi}_1) = 0 \quad (2.4.20)$$

Общее решение этого уравнения будет выражаться так:

$$\tilde{\psi}_1 = -\frac{C_1}{k^2}\bar{r} + C_2 I_1(k\bar{r}) \quad (2.4.21)$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования; $I_1(x)$ - функция Бесселя чисто мнимого аргумента первого порядка.

Общее решение неоднородного уравнения (2.4.17) будет иметь вид:

$$\tilde{\psi}_1 = -\frac{C_1}{k^2}\bar{r} + C_2 I_1(k\bar{r}) + \frac{3\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2(1-\nu)\alpha_i\tilde{T}_0}{4k^2\delta^3(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)}\bar{r}^3 \quad (2.4.22)$$

Определяя $\tilde{\psi}_1$, прогиб \bar{w} и свободное вращение Ω_2 определяются формулами

$$\begin{aligned} \bar{w} = & \frac{C_1}{2k^2}\bar{r}^2 + C_2 I_0(k\bar{r}) \left[\frac{\delta^2 k}{3(1-\nu)} - \frac{1}{k} \right] - \frac{3\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2(1-\nu)\alpha_i\tilde{T}_0}{16k^2\delta^3(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)}\bar{r}^4 + \frac{\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2\alpha_i\tilde{T}_0}{k^2\delta(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)}\bar{r}^2 - \\ & - \frac{\alpha_i\tilde{T}_0}{4\delta}\bar{r}^2 + C^*, \quad (2.4.23) \\ \Omega_2 = & C_2 I_1(k\bar{r}) \left[1 - \frac{\delta^2 k^2 \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)}{6\frac{\alpha}{\mu}(1-\nu)} \right] + \frac{3\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2(1-\nu)\alpha_i\tilde{T}_0}{4k^2\delta^3(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)}\bar{r}^3 - \left[\frac{C_1}{k^2} + \frac{\frac{\alpha}{\mu}\alpha_i\tilde{T}_0}{k^2\delta(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})} - \frac{\alpha_i\tilde{T}_0}{2\delta} \right] \bar{r}. \end{aligned}$$

где C^* - новая постоянная интегрирования.

Граничные условия шарнирного опирания (2.4.6) примут вид:

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d\tilde{\psi}_1}{d\bar{r}} + \frac{\nu}{\bar{r}}\tilde{\psi}_1 = 0, \quad (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})\frac{d\Omega_2}{d\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}}(\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon})\Omega_2 = 0 \quad \text{при } \bar{r} = 1. \quad (2.4.24)$$

После удовлетворения граничных условий (2.4.24) для определения постоянных интегрирования приходим к следующей линейной алгебраической системе:

$$\begin{aligned} -\frac{1+\nu}{k^2}C_1 + \frac{1}{2}((1-\nu)I_2(k\bar{r}) + (1+\nu)I_0(k\bar{r}))C_2 + \frac{3\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2(3+\nu)(1-\nu)\alpha_i\tilde{T}_0}{4k^2\delta^3(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)} = 0, \\ \frac{1}{2k^2}C_1 + \frac{1}{k}\left(\frac{\delta^2 k^2}{3(1-\nu)} - 1\right)I_0(k\bar{r})C_2 + \frac{\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2(16\delta^2 - 3(1-\nu))\alpha_i\tilde{T}_0}{16k^2\delta^3(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)} - \frac{1}{4\delta}\alpha_i\tilde{T}_0 + C^* = 0, \quad (2.4.25) \end{aligned}$$

$$-\frac{2\bar{\varepsilon}}{k^2}C_1 - \frac{2\bar{\varepsilon}}{\delta(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})k^2} \frac{\alpha}{\mu} \alpha_i \tilde{T}_0 + \frac{1}{4\delta} \alpha_i \tilde{T}_0 + \left(\frac{\delta^2 k^2 \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)}{6 \frac{\alpha}{\mu} (1-\nu)} - 1 \right) (\bar{\mathcal{A}}_2(k\bar{r}) - \bar{\varepsilon} I_0(k\bar{r})) C_2 + \frac{3(\bar{\gamma} + 2\bar{\varepsilon}) \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 (1-\nu) \alpha_i \tilde{T}_0}{2k^2 \delta^3 (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)} = 0.$$

Определяя постоянные интегрирования и подставляя их в соответствующие формулы, получим решение поставленной задачи, т.е. функции $\bar{w}(\bar{r})$, $\psi(\bar{r})$, $\Omega_2(\bar{r})$. Классическую задачу для температурного изгиба круглой пластинки решаем аналогично.

Приведем результаты численных вычислений, принимая следующие данные:

$$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}, \nu = 0.33, \bar{\gamma} = \bar{\varepsilon} = 22 \cdot 10^{-4}, \tilde{T}_0 = 60^\circ \text{C}, \alpha_i = 125 \times 10^{-7} \text{ 1/гр.} \quad (2.4.26)$$

Таблица 3. Максимальные прогибы микрополярной круглой пластинки в зависимости от отношения $\frac{\alpha}{\mu}$ и классической пластинки. Учет поперечных сдвигов.

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{w_{\max}^{\text{мик.}}}{w_{\max}^{\text{кл.}}}$
1.2×10^{-3}	7.184	7.5	0.96
1.4×10^{-3}	6.451	7.5	0.86
1.8×10^{-3}	5.299	7.5	0.71
2×10^{-3}	4.825	7.5	0.64
3×10^{-3}	2.962	7.5	0.39
4×10^{-3}	1.521	7.5	0.20

Для круглой пластинки тоже результаты расчетов устанавливает аналогичный эффект, что при увеличении микрополярной безразмерной постоянной $\frac{\alpha}{\mu}$, сильно увеличивается жесткость пластинки по сравнению с классическим случаем.

Если рассматривать эту же задачу, но без учета поперечных сдвигов, тогда приходим к решению следующей системы уравнений

$$D\nabla^2\nabla^2w - 8h\alpha\nabla^2w - 8h\alpha\left(\frac{d\Omega_2}{dr} + \frac{1}{r}\Omega_2\right) = -D(1+\alpha)\alpha_i\nabla^2\chi_i, \quad (2.4.27)$$

$$(\gamma + \varepsilon)\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\Omega_2\right) - 4\alpha\left(\Omega_2 + \frac{dw}{dr}\right) = 0.$$

Исключая из этой системы Ω_2 , для w приходим к решению следующего однородного обыкновенного дифференциального уравнения шестого порядка в безразмерном виде:

$$\bar{\nabla}^2\bar{\nabla}^2\bar{\nabla}^2\bar{w} - k^2\bar{\nabla}^2\bar{\nabla}^2\bar{w} = 0, \quad (2.4.28)$$

где

$$k^2 = \frac{4\delta^2 + 6(1-\nu)(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})}{\delta^2(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})} \cdot \frac{\alpha}{\mu}, \quad \bar{\nabla}^2(\cdot) = \frac{d^2(\cdot)}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d(\cdot)}{d\bar{r}}.$$

Уравнение (2.4.28) можем представить так

$$\bar{\nabla}^2\bar{\nabla}^2(\bar{\nabla}^2\bar{w} - k^2\bar{w}) = 0. \quad (2.4.29)$$

Обозначим через Φ выражения в скобках

$$\bar{\nabla}^2\bar{w} - k^2\bar{w} = \Phi, \quad (2.4.30)$$

тогда функция Φ будет удовлетворять уравнению

$$\bar{\nabla}^2\bar{\nabla}^2\Phi = 0. \quad (2.4.31)$$

Общее решение этого уравнения для сплошной пластинки будет

$$\Phi = C_1\bar{r}^2 + C_2. \quad (2.4.32)$$

Из (2.4.30) для \bar{w} получим следующее неоднородное уравнение

$$\bar{\nabla}^2\bar{w} - k^2\bar{w} = C_1\bar{r}^2 + C_2. \quad (2.4.33)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\bar{\nabla}^2\bar{w} - k^2\bar{w} = 0 \quad (2.4.34)$$

для сплошной пластинки будет

$$\bar{w} = C_3I_0(k\bar{r}),$$

где $I_0(x)$ - функция Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого порядка. (2.4.35)

Частное решение неоднородного уравнения выражается так

$$\bar{w}_{\text{част.}} = D\bar{r}^2 + E, \quad (2.4.36)$$

где

$$D = -\frac{C_1}{k^2}, \quad E = -\frac{4C_1}{k^4} - \frac{C_2}{k^2}.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения будет

$$\bar{w} = \tilde{C}_1\bar{r}^2 + \tilde{C}_2 + C_3I_0(k\bar{r}). \quad (2.4.37)$$

Для Ω_2 получим выражение

$$\Omega_2 = \left[\frac{\delta^2 k^5 (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})}{24(1-\nu)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{-2} - \frac{(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})k^3}{4} \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{-1} - k \right] C_3 I_1(k\bar{r}) - 2\tilde{C}_1 \bar{r}. \quad (2.4.38)$$

Для определения постоянных интегрирования удовлетворим граничные условия шарнирного опирания (2.4.6), в результате получим алгебраическую линейную систему неоднородных уравнений, решая которую получим неизвестные постоянные, которые поставив в формулы (2.4.37), (2.4.38) будем иметь решение задачи.

Приведем численные результаты (таблица 4). Данные задачи (2.4.26):

Таблица 4. Максимальные прогибы микрополярной круглой пластинки в зависимости от отношения $\frac{\alpha}{\mu}$ и, классической пластинки без учета поперечных сдвигов, под действием температуры.

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{W_{\max}^{\text{мик.}}}{W_{\max}^{\text{кт.}}}$
5.5×10^{-4}	7.046	7.5	0.94
8×10^{-4}	5.080	7.5	0.68
1.2×10^{-3}	3.677	7.5	0.49
1.4×10^{-3}	3.288	7.5	0.44
1.8×10^{-3}	2.780	7.5	0.37
2×10^{-3}	2.606	7.5	0.35
3×10^{-3}	2.098	7.5	0.28
4×10^{-3}	1.854	7.5	0.25

Из приведенных данных таблицы 4 можем заключить, что и в моделях пластинки без учета поперечных сдвигов, учет микрополярности материала повышает жесткость пластинки по сравнению с классическим случаем.

§2.5. МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ ОБОБЩЕННОГО ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Основной подход построения модели термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных тонких пластин подробно был изложен для теории с независимыми полями перемещений и вращений. На основе этого же подхода можем построить модель термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных тонких пластин со стесненным вращением. Поэтому кратко остановимся на выводе основных уравнений термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния термоупругости микрополярных тонких пластин со стесненным вращением.

И так, будем принимать, что силовые напряжения $\sigma_{31}, \sigma_{13}, \sigma_{32}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ и моментные напряжения $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}$, а также повороты ω_1 и ω_2 , приближенно равны нулю в объеме тонкой пластинки.

Нас будут интересовать не сами силовые напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$, моментные напряжения μ_{13}, μ_{23} , деформации $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$, изгибы-кручения χ_{13}, χ_{23} , перемещения u_1, u_2 и поворот ω_3 , а их средние по толщине величины (2.1.7), (2.1.10).

Исходя из этих предположений, из трехмерной теории микрополярной термоупругости со стесненным вращением ((1.1.16), (1.1.17), (1.2.10)) получим основные уравнения термоупругости обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных тонких пластин со стесненным вращением. Это уравнения равновесия (2.1.4)-(2.1.6), физические соотношения термоупругости:

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^* &= a_{11}\sigma_{11}^* + a_{12}\sigma_{22}^* + \alpha_{1r}T_0, & \tilde{\gamma}_{12}^* &= 2a_{77}(\sigma_{12}^* + \sigma_{21}^*), \\ \gamma_{22}^* &= a_{12}\sigma_{11}^* + a_{22}\sigma_{22}^* + \alpha_{2r}T_0, & \chi_{13}^* &= b_{66}\mu_{13}^*, \quad \chi_{23}^* = b_{44}\mu_{23}^* \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned} \gamma_{11}^* &= \frac{1}{E}[\sigma_{11}^* - \nu\sigma_{22}^*] + \alpha_r T_0, & \tilde{\gamma}_{12}^* &= \frac{1}{2\mu}(\sigma_{12}^* + \sigma_{21}^*), \\ \gamma_{22}^* &= \frac{1}{E}[\sigma_{22}^* - \nu\sigma_{11}^*] + \alpha_r T_0, & \chi_{13}^* &= \frac{1}{\gamma + \varepsilon}\mu_{13}^*, \quad \chi_{23}^* = \frac{1}{\gamma + \varepsilon}\mu_{23}^* \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

для изотропного тела;

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}\gamma_{11}^* &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2^*, \quad \gamma_{22}^* = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2^*}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1^*, \\ \tilde{\gamma}_{12}^* &= \gamma_{12}^* + \gamma_{21}^* = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1^*}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1^* + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2^* \right),\end{aligned}\quad (2.5.3)$$

$$\chi_{13}^* = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega_3^*}{\partial \alpha_1}, \quad \chi_{23}^* = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega_3^*}{\partial \alpha_2},$$

$$\omega_3^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2^*}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1^*}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1^* - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2^* \right) \right).\quad (2.5.4)$$

Из соотношений (2.5.1) или (2.5.2) получим следующие формулы, выражающие силовые и моментные напряжения через деформации и изгиб-кручения:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* &= \frac{1}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} (a_{22} \gamma_{11}^* - a_{12} \gamma_{22}^* + (a_{12} \alpha_{2r} - a_{22} \alpha_{1r}) T), \\ \sigma_{22}^* &= \frac{1}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} (a_{11} \gamma_{22}^* - a_{12} \gamma_{11}^* + (a_{12} \alpha_{1r} - a_{11} \alpha_{2r}) T), \\ \sigma_{12}^* + \sigma_{21}^* &= \frac{1}{2a_{77}} \tilde{\gamma}_{12}^*, \quad \mu_{13}^* = \frac{1}{b_{66}} \chi_{13}^*, \quad \mu_{23}^* = \frac{1}{b_{44}} \chi_{23}^*.\end{aligned}\quad (2.5.5)$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^* &= \frac{E}{1-\nu^2} [\gamma_{11}^* + \nu \gamma_{22}^* - (1+\nu) \alpha_r T_0], \quad \sigma_{12}^* + \sigma_{21}^* = 2\mu \tilde{\gamma}_{12}^*, \\ \sigma_{22}^* &= \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \gamma_{11}^* + \gamma_{22}^* - (1+\nu) \alpha_r T_0], \quad \mu_{13}^* = (\gamma + \varepsilon) k_{13}^*, \quad \mu_{23}^* = (\gamma + \varepsilon) k_{23}^*.\end{aligned}\quad (2.5.6)$$

для изотропного тела.

К системе этих уравнений присоединим граничные условия, которые имеют вид (2.1.20), (2.1.21) либо в смешанном виде.

Плотность потенциальной энергии деформации для построенной модели имеет вид:

$$\begin{aligned}W^* &= \frac{1}{2} \left[\sigma_{11}^* \gamma_{11}^* + \sigma_{22}^* \gamma_{22}^* + \frac{1}{2} (\sigma_{12}^* + \sigma_{21}^*) \tilde{\gamma}_{12}^* + \mu_{13}^* \chi_{13}^* + \mu_{23}^* \chi_{23}^* \right] - \frac{1}{2} T_0 [(A_{11} \alpha_{1r} + A_{12} \alpha_{2r}) \gamma_{11}^* + \\ &+ (A_{12} \alpha_{1r} + A_{22} \alpha_{2r}) \gamma_{22}^*] = \frac{1}{2} (A_{11} \gamma_{11}^{*2} + A_{22} \gamma_{22}^{*2} + 2A_{12} \gamma_{11}^* \gamma_{22}^* + \frac{1}{2} A_{77} \tilde{\gamma}_{12}^{*2} + B_{66} \chi_{13}^{*2} + B_{44} \chi_{23}^{*2}) - \\ &- \frac{1}{2} T_0 [(A_{11} \alpha_{1r} + A_{12} \alpha_{2r}) \gamma_{11}^* + (A_{12} \alpha_{1r} + A_{22} \alpha_{2r}) \gamma_{22}^*]\end{aligned}\quad (2.5.7)$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}W_0 &= \frac{1}{2} \left[\sigma_{11}^* \gamma_{11}^* + \sigma_{22}^* \gamma_{22}^* + \frac{1}{2} (\sigma_{12}^* + \sigma_{21}^*) \tilde{\gamma}_{12}^* + \mu_{13}^* \chi_{13}^* + \mu_{23}^* \chi_{23}^* \right] - \frac{1}{2} (\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^*) \alpha_r T_0 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_{11}^{*2} + \gamma_{22}^{*2} + 2\nu \gamma_{11}^* \gamma_{22}^*) + \mu \tilde{\gamma}_{12}^{*2} + (\gamma + \varepsilon) (\chi_{13}^{*2} + \chi_{23}^{*2}) \right] - \frac{E}{1-\nu} (\gamma_{11}^* + \gamma_{22}^*) \alpha_r T_0\end{aligned}\quad (2.5.8)$$

для изотропного тела.

§2.6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОЙ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

В этом параграфе наша цель будет построение прикладной модели изгибной деформации микрополярной термоупругости тонкой пластинки со стесненным вращением. Для этой цели в основу примем все гипотезы параграфа 2.2 (конечно учитывая особенности теории со стесненным вращением). Тогда для перемещений получим формулы (2.2.1), а компоненты вектора вращения (с помощью (1.3.2) и (2.2.2)) будут выражаться так:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \psi_2 \right), & \Omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\psi_1 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \right), \\ \Omega_3 &= z\iota, & \iota &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \psi_1 - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \psi_2 \right) \right)\end{aligned}\quad (2.6.1)$$

Подставляя перемещения и повороты из формул (2.2.1), (2.2.2), (2.6.1) в выражения (1.3.13), для деформаций и изгибов-кручений получим:

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= zK_{11}(\alpha_1, \alpha_2), & \gamma_{22} &= zK_{22}(\alpha_1, \alpha_2), & \tilde{\gamma}_{12} &= \gamma_{12} + \gamma_{21} = z\tilde{K}_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \\ \tilde{\gamma}_{13} &= \gamma_{13} + \gamma_{31} = \tilde{\Gamma}_{13}(\alpha_1, \alpha_2), & \tilde{\gamma}_{23} &= \gamma_{23} + \gamma_{32} = \Gamma_{23}(\alpha_1, \alpha_2), & \gamma_{33} &= 0\end{aligned}\quad (2.6.2)$$

$$\begin{aligned}\chi_{11} &= k_{11}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{12} &= k_{12}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{13} &= z l_{13}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{31} &= 0, & \chi_{33} &= \iota(\alpha_1, \alpha_2) \\ \chi_{22} &= k_{22}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{21} &= k_{21}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{23} &= z l_{23}(\alpha_1, \alpha_2), & \chi_{32} &= 0,\end{aligned}\quad (2.6.3)$$

где приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{13} &= \Gamma_{13} + \Gamma_{31} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \psi_1, & K_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_2, \\ \tilde{\Gamma}_{23} &= \Gamma_{23} + \Gamma_{32} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \psi_2, & K_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_1, \\ \tilde{K}_{12} &= K_{12} + K_{21} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \psi_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \psi_2 \right), \\ k_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_2, & k_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Omega_1, \\ k_{12} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \Omega_1, & k_{21} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \Omega_2, & l_{13} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_1}, & l_{23} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \iota}{\partial \alpha_2}.\end{aligned}\quad (2.6.4)$$

Здесь Ω_1, Ω_2 и ι - определяются по формулам (2.6.1).

Подставляя (2.6.2) и (2.6.3) в выражения обобщенного закона Гука (1.3.12) с учетом гипотезы 2), а также руководствуясь по гипотезе 3) (кроме для части, относящейся к μ_{33}), для силовых и моментных напряжений будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} z(a_{22}K_{11} - a_{12}K_{22} + (a_{12}\alpha_{2l} - a_{22}\alpha_{1l})\chi_l), \\
\sigma_{22} &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} z(a_{11}K_{22} - a_{12}K_{11} + (a_{12}\alpha_{1l} - a_{11}\alpha_{2l})\chi_l), \\
\sigma_{12} + \sigma_{21} &= \frac{1}{2a_{77}} z\tilde{K}_{12}, \quad \sigma_{13} + \sigma_{31} = \frac{1}{2a_{66}} \tilde{\Gamma}_{13}, \quad \sigma_{23} + \sigma_{32} = \frac{1}{2a_{55}} \tilde{\Gamma}_{23}, \\
\mu_{11} &= \frac{1}{\tilde{b}_{11}\tilde{b}_{22} - \tilde{b}_{12}\tilde{b}_{21}} (\tilde{b}_{22}k_{11} - \tilde{b}_{12}k_{22}), \quad \mu_{22} = \frac{1}{\tilde{b}_{11}\tilde{b}_{22} - \tilde{b}_{12}\tilde{b}_{21}} (\tilde{b}_{11}k_{22} - \tilde{b}_{21}k_{11}), \\
\mu_{12} &= \frac{1}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} (b_{88}k_{12} - b_{78}k_{21}), \quad \mu_{21} = \frac{1}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} (b_{77}k_{21} - b_{78}k_{12}), \\
\mu_{33} &= -\frac{b_{11} + b_{12} + b_{13}}{b_{13} + b_{23} + b_{33}} \mu_{11} - \frac{b_{12} + b_{22} + b_{23}}{b_{13} + b_{23} + b_{33}} \mu_{22}, \quad \mu_{13} = \frac{1}{b_{66}} z l_{13}, \quad \mu_{23} = \frac{1}{b_{44}} z l_{23}
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= z \frac{E}{1-\nu^2} [K_{11} + \nu K_{22} - (1+\nu)\alpha_l \chi_l], \quad \sigma_{22} = z \frac{E}{1-\nu^2} [\nu K_{11} + K_{22} - (1+\nu)\alpha_l \chi_l], \\
\sigma_{12} + \sigma_{21} &= z 2\mu \tilde{K}_{12}, \quad \sigma_{13} + \sigma_{31} = 2\mu \tilde{\Gamma}_{13}, \quad \sigma_{23} + \sigma_{32} = 2\mu \tilde{\Gamma}_{23}, \\
\mu_{11} &= 2\gamma k_{11}, \quad \mu_{22} = 2\gamma k_{22}, \quad \mu_{33} = 2\gamma l, \\
\mu_{12} &= (\gamma + \varepsilon)k_{12} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}, \quad \mu_{21} = (\gamma + \varepsilon)k_{21} + (\gamma - \varepsilon)k_{12}, \\
\mu_{13} &= z \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13}, \quad \mu_{23} = z \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23},
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

для изотропного тела, а для остальных силовых и моментных напряжений: $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, \mu_{31}, \mu_{32}$ получим те же (2.2.9) выражения.

Для приведения трехмерной задачи микрополярной термоупругости для тонкой пластинки к двумерной, вводим статически эквивалентные им интегральные по толщине пластинки характеристики-усилия, моменты и гипермоменты (2.2.10).

Уравнения равновесия для двумерной (прикладной) модели получим из равенств определяющих силовые напряжения $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ и моментные напряжения μ_{31}, μ_{32} , в результате удовлетворения статических граничных условий (1.1.6) на лицевых плоскостях пластинки $z = \pm h$ (для задачи изгиба).

Физические соотношения термоупругости для прикладной модели получим на основании формул (2.6.5) или (2.6.6) с учетом (2.2.10).

Таким образом, основная система уравнений задачи термоупругого изгиба микрополярных тонких пластин со стесненным вращением будет выражаться так:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 N_{13}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 N_{23}) = -p_3, \\
 & N_{31} - \left(\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{21}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} \right) = h \tilde{p}_1, \\
 & N_{32} - \left(\frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{12}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{21} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} \right) = h \tilde{p}_2, \\
 & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 L_{11}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 L_{21}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} L_{12} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} L_{22} + (N_{23} - N_{32}) = -m_1, \\
 & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 L_{12}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 L_{22}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} L_{21} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} L_{11} + (N_{31} - N_{13}) = -m_2, \\
 & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \Lambda_{13}) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 \Lambda_{23}) + (M_{12} - M_{21}) = 0;
 \end{aligned} \tag{2.6.7}$$

Физические соотношения термоупругости

$$\begin{aligned}
 & M_{11} = D_{11} K_{11} + D_{12} K_{22} + M_{1t}, \quad M_{1t} = D_{1t} \chi_t, \\
 & M_{22} = D_{22} K_{22} + D_{12} K_{11} + M_{2t}, \quad M_{2t} = D_{2t} \chi_t, \\
 & M_{12} + M_{21} = \frac{h^3}{3a_{77}} \tilde{K}_{12}, \quad N_{13} + N_{31} = \frac{h}{a_{66}} \tilde{\Gamma}_{13}, \quad N_{23} + N_{32} = \frac{h}{a_{55}} \tilde{\Gamma}_{23}, \\
 & L_{11} = 2h \frac{\tilde{b}_{22} k_{11} - \tilde{b}_{12} k_{22}}{\tilde{b}_{11} \tilde{b}_{22} - \tilde{b}_{12} \tilde{b}_{21}}, \quad L_{22} = 2h \frac{\tilde{b}_{11} k_{22} - \tilde{b}_{21} k_{11}}{\tilde{b}_{11} \tilde{b}_{22} - \tilde{b}_{12} \tilde{b}_{21}}, \quad \Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3b_{66}} l_{13}, \\
 & L_{12} = 2h \frac{b_{88} k_{12} - b_{78} k_{21}}{b_{77} b_{88} - b_{78}^2}, \quad L_{21} = 2h \frac{b_{77} k_{21} - b_{78} k_{12}}{b_{77} b_{88} - b_{78}^2}, \quad \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3b_{44}} l_{23}
 \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}
 & N_{13} + N_{31} = 4\mu h \tilde{\Gamma}_{13}, \quad N_{23} + N_{32} = 4\mu h \tilde{\Gamma}_{23}, \\
 & M_{11} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{11} + \nu K_{22} - (1+\nu)\alpha_t \chi_t], \\
 & M_{22} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [\nu K_{11} + K_{22} - (1+\nu)\alpha_t \chi_t], \\
 & M_{12} + M_{21} = \frac{4\mu h^3}{3} \tilde{K}_{12}, \quad L_{11} = 4\gamma h k_{11}, \quad L_{22} = 4\gamma h k_{22}, \\
 & L_{12} = 2h [(\gamma + \varepsilon)k_{12} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}], \quad L_{21} = 2h [(\gamma + \varepsilon)k_{21} + (\gamma - \varepsilon)k_{12}], \\
 & \Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13}, \quad \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23};
 \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

для изотропного тела.

К уравнениям равновесия (2.6.7) и физическим соотношениям термоупругости (2.6.8) или (2.6.9) необходимо присоединить геометрические соотношения (2.6.4).

К системе уравнений (2.6.7), (2.6.8) или (2.6.9), (2.6.4) присоединим также граничные условия:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*; M_{12} = M_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*; N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*; \\ L_{11} = L_{11}^* \text{ или } k_{11} = k_{11}^*; L_{12} = L_{12}^* \text{ или } k_{12} = k_{12}^*; \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*. \quad (2.6.10)$$

Принимая в виду формулы для напряжений (2.6.5), формулы для усилий, моментов и гипермоментов (2.2.10), формулы для деформаций и изгибов-кручений (2.6.2), (2.6.3), из выражения плотности потенциальной энергии трехмерной теории (1.1.24), получим следующую формулу для плотности потенциальной энергии изгибной деформации термоупругости микрополярных тонких пластин со стесненным вращением:

$$W_0 = \frac{1}{2} \left[M_{11} K_{11} + \frac{1}{2} (M_{12} + M_{21}) \tilde{K}_{12} + \frac{1}{2} (N_{13} + N_{31}) \tilde{\Gamma}_{13} + \frac{1}{2} (N_{23} + N_{32}) \tilde{\Gamma}_{23} + M_{22} K_{22} + \right. \\ \left. + L_{11} k_{11} + L_{12} k_{12} + L_{21} k_{21} + L_{22} k_{22} + \Lambda_{13} l_{13} + \Lambda_{23} l_{23} \right] - \frac{1}{2} (\mathcal{G}_{1r} K_{11} + \mathcal{G}_{2r} K_{22}) \chi_r \quad (2.6.11)$$

для ортотропного тела или

$$W_0 = \frac{1}{2} \left[M_{11} K_{11} + \frac{1}{2} (M_{12} + M_{21}) \tilde{K}_{12} + \frac{1}{2} (N_{13} + N_{31}) \tilde{\Gamma}_{13} + \frac{1}{2} (N_{23} + N_{32}) \tilde{\Gamma}_{23} + M_{22} K_{22} + \right. \\ \left. + L_{11} k_{11} + L_{12} k_{12} + L_{21} k_{21} + L_{22} k_{22} + \Lambda_{13} l_{13} + \Lambda_{23} l_{23} \right] - \frac{\alpha_r \chi_r}{2} (M_{11} + M_{22}) \quad (2.6.12)$$

для изотропного тела.

Если в выражениях (2.6.11) и (2.6.12) принимать в виду физические соотношения термоупругости (2.6.8) и (2.6.9), тогда для плотности потенциальной энергии деформации получим:

$$W_0 = \frac{1}{2} \left\langle D_{11} K_{11}^2 + 2D_{12} K_{11} K_{22} + D_{22} K_{22}^2 + \frac{h^3}{6a_{77}} \tilde{K}_{12}^2 + \frac{h}{2a_{66}} \tilde{\Gamma}_{13}^2 + \frac{h}{2a_{55}} \tilde{\Gamma}_{23}^2 + \right. \\ \left. + \frac{2h}{\tilde{b}_{11}\tilde{b}_{22} - \tilde{b}_{12}\tilde{b}_{21}} [\tilde{b}_{22}k_{11}^2 + \tilde{b}_{11}k_{22}^2 - (\tilde{b}_{12} + \tilde{b}_{21})k_{11}k_{22}] + \frac{2h}{b_{77}b_{88} - b_{78}^2} (b_{88}k_{12}^2 + b_{77}k_{21}^2 - \right. \\ \left. - 2b_{78}k_{12}k_{21}) + \frac{2h^3}{3b_{66}} l_{13}^2 + \frac{2h^3}{3b_{44}} l_{23}^2 \right\rangle + M_{1r} K_{11} + M_{2r} K_{22} \quad (2.6.13)$$

для ортотропного тела или

$$W_0 = \frac{1}{2} \left\langle \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (K_{11}^2 + K_{22}^2 + 2\nu K_{11} K_{22}) + \frac{2\mu h^3}{3} \tilde{K}_{12}^2 + 2\mu h (\tilde{\Gamma}_{13}^2 + \tilde{\Gamma}_{23}^2) + \right. \\ \left. 2h [(\gamma + \varepsilon)(k_{12}^2 + k_{21}^2) + 2(\gamma - \varepsilon)k_{12}k_{21}] + \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} (l_{13}^2 + l_{23}^2) \right\rangle - \frac{2Eh^2}{3(1-\nu)} (K_{11} + K_{22}) \alpha_r \chi_r \quad (2.6.14)$$

для изотропного тела.

§2.7. ТЕРМОУПРУГИЙ ИЗГИБ МИКРОПОЛЯРНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Рассмотрим задачу изгибной деформации микрополярной изотропной прямоугольной пластинки со стесненным вращением под действием температурного поля, когда все стороны ее шарнирно-оперты.

В декартовой системе координат уравнения равновесия (2.6.7) и геометрические соотношения (2.6.4), (2.6.1) примут вид:

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = 0, \quad N_{31} - \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} \right) = 0, \quad N_{32} - \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \right) = 0, \\ \frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + N_{23} - N_{32} = 0, \quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + N_{31} - N_{13} = 0, \\ \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} + M_{12} - M_{21} = 0; \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi_1, \quad \tilde{\Gamma}_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} + \psi_2, \quad K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad K_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \quad \tilde{K}_{12} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, \\ k_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, \quad k_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}, \quad k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \quad k_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, \quad l_{13} = \frac{\partial \iota}{\partial x_1}, \quad l_{23} = \frac{\partial \iota}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \psi_2 \right), \quad \Omega_2 = \frac{1}{2} \left(\psi_1 - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right), \quad \iota = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right), \quad (2.7.3)$$

К уравнениям (2.7.1)-(2.7.3) присоединим физические соотношения термоупругости (2.6.9).

В модели изгибной термоупругой деформации микрополярных изотропных пластин со стесненным вращением ((2.7.1)-(2.7.3), (2.6.9)) учитываются поперечные сдвиговые деформации ($\tilde{\Gamma}_{13} \neq 0$, $\tilde{\Gamma}_{23} \neq 0$).

На основании следующих систем из двух уравнений:

$$\begin{aligned} N_{13} + N_{31} = 4\mu h \tilde{\Gamma}_{13}, \quad N_{13} - N_{31} = \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}, \quad M_{12} + M_{21} = \frac{4\mu h^3}{3} \tilde{K}_{12}, \\ N_{23} + N_{32} = 4\mu h \tilde{\Gamma}_{23}, \quad N_{23} - N_{32} = - \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} \right), \quad M_{12} - M_{21} = - \left(\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

определим усилия и моменты N_{13} , N_{31} , N_{23} , N_{32} , M_{12} , M_{21} , получим

$$\begin{aligned}
N_{13} &= 2\mu h \tilde{\Gamma}_{13} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} \right), & N_{31} &= 2\mu h \tilde{\Gamma}_{13} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} \right), \\
N_{23} &= 2\mu h \tilde{\Gamma}_{23} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} \right), & N_{32} &= 2\mu h \tilde{\Gamma}_{23} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} \right), \\
M_{12} &= \frac{2\mu h^3}{3} \tilde{K}_{12} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} \right), & M_{21} &= \frac{2\mu h^3}{3} \tilde{K}_{12} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} \right).
\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

Подставляя выражения (2.7.5) в первые три уравнения (2.7.1) и учитывая соотношения упругости (2.6.9) (для $M_{11}, M_{22}, L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}, \Lambda_{13}, \Lambda_{23}$) и геометрические соотношения (2.7.2), получим систему из следующих трех уравнений:

$$\begin{aligned}
2\mu \nabla^2 w + 2\mu \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) + (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right) &= 0, \\
2\mu \left(\psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1^2} - (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\gamma \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_2^2} - \frac{h^2}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 t + \frac{2Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \frac{\partial \chi_t}{\partial x_1} - \\
&\quad - \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \left[2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} + (1+\nu) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2} \right] = 0, \\
2\mu \left(\psi_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_2^2} + (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\gamma \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1^2} + \frac{h^2}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 t + \frac{2Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \frac{\partial \chi_t}{\partial x_2} - \\
&\quad - \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \left[2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_2^2} + (1+\nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1^2} \right] = 0,
\end{aligned} \tag{2.7.6}$$

Граничные условия шарнирного опирания для этой модели имеют вид:

$$\begin{aligned}
w = 0, \psi_2 = 0, M_{11} = 0, L_{12} = 0, \Omega_1 = 0, \Lambda_{13} = 0 \text{ при } x_1 = 0, x_1 = a, \\
w = 0, \psi_1 = 0, M_{22} = 0, L_{21} = 0, \Omega_2 = 0, \Lambda_{23} = 0 \text{ при } x_2 = 0, x_2 = b.
\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Используя геометрические соотношения (2.7.3) и физические соотношения упругости (2.6.9), приведенные выше граничные условия (2.7.7) с точки зрения их удобного использования представим так:

$$\begin{aligned}
w = 0, \psi_2 = 0, \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} = \frac{Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t, \Omega_1 = 0, \frac{\partial t}{\partial x_1} = 0 \text{ при } x_1 = 0, x_1 = a, \\
w = 0, \psi_1 = 0, \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} = \frac{Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi, \Omega_2 = 0, \frac{\partial t}{\partial x_2} = 0 \text{ при } x_2 = 0, x_2 = b.
\end{aligned} \tag{2.7.8}$$

Продифференцируем по x_1 уравнение (2.7.6)₂, по x_2 – уравнение (2.7.6)₃, полученные уравнения будем складывать, получим:

$$\begin{aligned}
2\mu \nabla^2 w + 2\mu \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right) - \frac{4\mu h^2}{3(1-\nu)} \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) + \\
+ \frac{2Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \nabla^2 \chi_t = 0.
\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

Теперь из уравнения (2.7.6)₁ будем вычитывать уравнение (2.7.9), получим следующее уравнение:

$$\nabla^2 \left[(\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right) + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - \frac{Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_i \chi_i \right] = 0. \quad (2.7.10)$$

Обозначим через $\Phi(x_1, x_2)$ выражение в больших скобках в левой части уравнения (2.7.10):

$$\Phi = (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right) + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - \frac{Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_i \chi_i, \quad (2.7.11)$$

тогда функция $\Phi(x_1, x_2)$ будет удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (2.7.12)$$

При помощи граничных условий шарнирного опирания (2.7.8), вычисляя значения функции $\Phi(x_1, x_2)$ на границах прямоугольной области ($x_1 = 0, x_1 = a, x_2 = 0, x_2 = b$), легко установить, что:

$$\Phi(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=a}} = \Phi(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=b}} = 0. \quad (2.7.13)$$

Таким образом, будем иметь:

$$\Phi(x_1, x_2) \equiv 0, \quad 0 \leq x_1 \leq a, \quad 0 \leq x_2 \leq b. \quad (2.7.14)$$

Имея в виду (2.7.14) из (2.7.11) получим следующее уравнение:

$$(\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right) + \frac{2\mu h^2}{3(1-\nu)} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - \frac{Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_i \chi_i = 0. \quad (2.7.15)$$

Присоединим с уравнением (2.7.15), уравнение (2.7.6)₁ и, подставляя в них формулы для Ω_1, Ω_2 выраженные через w, ψ_1, ψ_2 ((2.7.3)₁, (2.7.3)₂), в итоге придем к следующей системе из двух уравнений:

$$\begin{aligned} -(\gamma + \varepsilon) \nabla^2 w + (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) + \frac{4\mu h^2}{1-\nu} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - \frac{2Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_i \chi_i &= 0, \\ 2\mu \nabla^2 w + 2\mu \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

Далее будем рассматривать случай, когда $\chi_i \equiv const$.

Теперь, если уравнение (2.7.6)₂ будем дифференцировать по x_2 , а уравнение (2.7.6)₃ по x_1 и будем вычитывать полученные уравнения, приходим к следующему уравнению

$$\mu \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) - \gamma \nabla^2 \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right) - \frac{\mu h^2}{3} \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) - \frac{h^2}{3} \frac{2\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \nabla^2 \nabla^2 \iota = 0. \quad (2.7.17)$$

Используя выражение (2.7.3)₃ для функции $\iota(x_1, x_2)$, уравнение (2.7.17) примет вид:

$$\frac{h^2}{3} \frac{2\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \nabla^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) - \left(\gamma + \frac{2\mu h^2}{3} \right) \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (2.7.18)$$

Нам остается совместно решить систему уравнений (2.7.16) и (2.7.18) относительно функций w , $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right)$, $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right)$.

Следует отметить, что неоднородные граничные условия из условий (2.7.7) уже были использованы при выводе системы уравнений (2.7.16). Что касается уравнения (2.7.18), то это уравнение однородно относительно функции $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right)$, граничные условия тоже однородны, следовательно, получим, что в области прямоугольника:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = 0. \quad (2.6.19)$$

В результате будем решать систему неоднородных уравнений (2.7.16), (2.7.19) с однородными граничными условиями:

$$\begin{aligned} w = 0, \psi_2 = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a, \\ w = 0, \psi_1 = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, x_2 = b. \end{aligned} \quad (2.7.20)$$

Теперь рассмотрим модель микрополярной пластинки со стесненным вращением без учета поперечных сдвигов:

$$\tilde{\Gamma}_{13} = 0, \tilde{\Gamma}_{23} = 0. \quad (2.7.21)$$

Из геометрических соотношений (2.7.2), (2.7.3) получим:

$$\psi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}, \psi_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad (2.7.22)$$

$$\Omega_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2}, \Omega_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad \iota = 0, \quad (2.7.23)$$

$$\begin{aligned} K_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, K_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \tilde{K}_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, k_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, k_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ k_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, k_{21} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}. \end{aligned} \quad (2.7.24)$$

На основе уравнений равновесия (2.7.1) исключая усилия N_{13} , N_{31} , N_{23} , N_{32} , можем прийти к следующему уравнению (внешние усилия не присутствуют):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} \right) \right] = 0. \quad (2.7.25)$$

Физические соотношения термоупругости (2.6.9) с учетом (2.7.22)-(2.7.24) подставляя в (2.7.25) приходим к разрешающему уравнению рассматриваемой модели относительно функции прогиба пластинки $w(x_1, x_2)$:

$$D^* \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_t \nabla^2 \chi_t = 0, \quad (2.7.26)$$

$$\text{где } D^* = D + 2h(\gamma + \varepsilon), \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}. \quad (2.7.27)$$

Полученное уравнение (2.7.26) представляет из себя уравнение Софи Жермен-Лагранжа, обобщенное для случая термоупругого изгиба микрополярной пластинки со стесненными вращениями. Это уравнение в свое время при силовой нормальной к срединной плоскости пластинки нагрузке (не термоупругая задача), впервые получены в работе [46], асимптотическим методом оно получено в работе [102].

Здесь, D – классическая цилиндрическая жесткость пластинки, а D^* – цилиндрическая жесткость микрополярной пластинки (со стесненными вращениями). Без каких-либо расчетов, из формулы (2.7.27) видно, что учет микрополярности материала повышает жесткость пластинки, сравнивая эту жесткость с классическим случаем.

Уравнение (2.7.26) напомним в следующем виде:

$$\nabla^2 \left[D^* \nabla^2 w + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t \right] = 0, \quad (2.7.28)$$

Обозначим выражение в больших скобках в уравнении (2.7.28) через $f_1(x_1, x_2)$:

$$f_1(x_1, x_2) = D^* \nabla^2 w + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t, \quad (2.7.29)$$

тогда эта функция будет удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 f_1 = 0. \quad (2.7.30)$$

Вычислим значения функции $f_1(x_1, x_2)$ на граничном контуре прямоугольной пластинки:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} &= \left[D^* \nabla^2 w + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t \right]_{x_1=0}^{x_1=a}, \\ f_1(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} &= \left[D^* \nabla^2 w + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t \right]_{x_2=0}^{x_2=b}. \end{aligned} \quad (2.7.31)$$

Условия шарнирного опирания для этой модели имеют вид:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad M_{11} + L_{12} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = a, \\ w = 0, \quad M_{22} + L_{21} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b. \end{aligned} \quad (2.7.32)$$

Эти граничные условия можем представить так:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = a, \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b. \end{aligned} \quad (2.7.33)$$

Имея в виду условия (2.7.33), для граничных условий функции $f_1(x_1, x_2)$ из выражений (2.7.31) получим:

$$f_1(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} = f_1(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} = 0. \quad (2.7.34)$$

Уравнение (2.7.30) и граничные условия (2.7.34) говорят о том, что

$$f_1(x_1, x_2) \equiv 0 \quad (2.7.35)$$

в области прямоугольника $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$.

Из выражения (2.7.29) с учетом (2.7.35) будет следовать следующее уравнение:

$$D^* \nabla^2 w + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu)} \alpha_t \chi_t = 0, \quad (2.7.36)$$

которое необходимо решать при следующих граничных условиях:

$$w(x_1, x_2) \Big|_{x_1=0}^{x_1=a} = w_1(x_1, x_2) \Big|_{x_2=0}^{x_2=b} = 0. \quad (2.7.37)$$

Отметим, что до сих пор температурная функция χ_t – была произвольной функции.

Имея уравнение (2.7.36), теперь можем считать ее постоянной: $\chi_t(x_1, x_2) \equiv const$.

Если в уравнение (2.7.36) микрополярная жесткость заменим на классическую жесткость, получим уравнение термоизгиба классической пластинки [37].

Приведем результаты численных вычислений (таблица 5,6). Данные задачи:

$$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}, \quad \nu = 0.33, \quad \tilde{T}_0 = 60^\circ C, \quad \alpha_t = 125 \times 10^{-7} \text{ } 1/\text{Гр}. \quad (2.7.39)$$

Таблица 5. Прогибы микрополярной прямоугольной пластинки со стесненным вращением в зависимости от $\bar{\gamma}$ или $\bar{\varepsilon}$ (принято $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$) и классической пластинки под действием температуры с учетом поперечных сдвигов.

$\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{w_{\max}^{\text{мик.}}}{w_{\max}^{\text{кл.}}}$
10^{-6}	1.633	1.638	0.99
10^{-5}	1.610	1.638	0.98
10^{-4}	1.404	1.638	0.86
10^{-3}	0.611	1.638	0.37
10^{-2}	0.076	1.638	0.05

Таблица 6. Прогибы микрополярной прямоугольной пластинки со стесненным вращением в зависимости от $\bar{\gamma}$ или $\bar{\varepsilon}$ (принято $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$) и классической пластинки под действием температуры без учета поперечных сдвигов.

$\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{w_{\max}^{\text{мик.}}}{w_{\max}^{\text{кл.}}}$
10^{-6}	1.633	1.638	0.99
10^{-5}	1.587	1.638	0.97
10^{-4}	1.240	1.638	0.76
10^{-3}	0.389	1.638	0.24
10^{-2}	0.049	1.638	0.03

Численные расчеты приведенные в таблицах 5 и 6 устанавливают, что увеличение микрополярной безразмерной постоянной $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$, с учетом поперечных сдвигов и без учета поперечных сдвигов, сильно повышается жесткость пластинки по сравнению с классическим случаем.

§2.8.ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ИЗГИБ МИКРОПОЛЯРНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Рассмотрим температурный изгиб микрополярной изотропной сплошной круглой пластинки, когда имеет место осесимметричное напряженное состояние, а температурное поле выражается формулой (2.2.4). В этом случае уравнения изгиба микрополярных круглых пластин можем получить из общей системы (2.6.7), (2.6.8), (2.6.4), переходя к полярной системе координат. В осесимметричном случае для задачи изгиба приходим к следующей системе уравнений относительно w, ψ_1 :

$$\begin{cases} 2\mu h \nabla^2 w + 2\mu h \left(\frac{d\psi_1}{dr} + \frac{1}{r} \psi_1 \right) - \frac{h(\gamma + \varepsilon)}{2} \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{h(\gamma + \varepsilon)}{2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{d\psi_1}{dr} + \frac{1}{r} \psi_1 \right) \right) = -\tilde{p}_3 \\ 2\mu \left(\frac{dw}{dr} + \psi_1 \right) + \frac{\gamma + \varepsilon}{2} \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) - \left(\frac{\gamma + \varepsilon}{2} + \frac{2Eh^2}{3(1-\nu^2)} \right) \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{d\psi_1}{dr} + \frac{1}{r} \psi_1 \right) + \frac{2Eh^2}{3(1-\nu)} \alpha_t \frac{d\chi_t}{dr} = 0, \end{cases} \quad (2.8.1)$$

$$\text{где } \nabla^2 w = \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right).$$

Далее рассмотрим случай, когда внешние силовые воздействия отсутствуют ($\tilde{p}_3 = 0$). Рассмотрим граничные условия шарнирного опирания (2.4.6). Задачу будем представлять в безразмерном виде (2.3.22).

Из уравнения (2.8.1)₂ имеем

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{d\psi_1}{d\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \psi_1 \right) = A \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} + \psi_1 + \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4} \frac{d}{d\bar{r}} \nabla^2 \bar{w} \right), \quad (2.8.2)$$

где $A = \left[\frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4} + \frac{2\delta^2}{3(1-\nu)} \right]^{-1}$.

Продифференцируем по \bar{r} уравнение (2.8.1)₁ и в полученном уравнении подставим (2.8.2), в результате, считая, что в рассматриваемом случае $\chi_i = const$, будем иметь ψ_1 выраженное через \bar{w} .

$$\psi_1 = -\frac{1+B}{A} \frac{d}{d\bar{r}} (\nabla^2 \bar{w}) - \frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} - \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4} \frac{B-1}{A(B+1)} \frac{d}{d\bar{r}} (\nabla^2 \nabla^2 \bar{w}),$$

$$B = \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4} \left[\frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4} + \frac{2\delta^2}{3(1-\nu)} \right]^{-1}. \quad (2.8.3)$$

Для Ω_2 будем иметь ((2.6.1)₁):

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} \left(\psi_1 - \frac{d\bar{w}}{d\bar{r}} \right).$$

Подставляя (2.8.3) в уравнение (2.8.1)₁, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению 6-го порядка относительно прогиба $\bar{w}(\bar{r})$:

$$\bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{w} - k^2 \bar{\nabla}^2 \bar{\nabla}^2 \bar{w} = 0, \quad (2.8.4)$$

где

$$k^2 = A - \frac{4(1+B)^2}{(B-1)(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})}.$$

Общее решение уравнения (2.8.4) в случае сплошной пластинки будет иметь вид:

$$\bar{w} = C_1 r^2 + C_2 + C_3 I_0(k\bar{r}) \quad (2.8.5)$$

где, C_1, C_2 и C_3 произвольные постоянные, $I_0(k\bar{r})$ - функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента.

Для ψ_1 и Ω_2 получим:

$$\psi_1 = -2C_1 \bar{r} - \left(\frac{1+B}{A} k^3 + k + \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{4} \frac{B-1}{A(B+1)} k^5 \right) C_3 I_1(k\bar{r}),$$

$$\Omega_2 = -2C_1 \bar{r} - \left(\frac{1+B}{2A} k^3 + k + \frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{8} \frac{B-1}{A(B+1)} k^5 \right) C_3 I_1(k\bar{r}), \quad (2.8.6)$$

где $I_1(k\bar{r})$ -функция Бесселя первого порядка мнимого аргумента.

Граничные условия шарнирного опирания (2.4.6) будут выражаться так

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d\psi_1}{d\bar{r}} + \frac{\nu}{\bar{r}}\psi_1 = \frac{1}{2\delta}(1+\nu)\alpha_i\tilde{T}_0, \quad (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})\frac{d\Omega_2}{d\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}}(\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon})\Omega_2 = 0 \quad \text{при } \bar{r} = 1. \quad (2.8.7)$$

Определяя постоянные интегрирования и подставляя их в соответствующие формулы, получим решение подставленной задачи, т.е. функции $\bar{w}(\bar{r})$, $\psi(\bar{r})$, $\Omega_2(\bar{r})$.

Приведем результаты численных вычислений (таблица 7). Данные задачи:

$$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}, \quad \nu = 0.33, \quad \tilde{T}_0 = 60^\circ \text{ C}, \quad \alpha_i = 125 \times 10^{-7} \text{ 1/гр.}$$

Таблица 7. Прогибы микрополярной круглой пластинки со стесненным вращением в зависимости от отношения $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$ и классической пластинки под действием температуры.

Учет поперечных сдвигов.

$\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{W_{\max}^{\text{мик.}}}{W_{\max}^{\text{кл.}}}$
10^{-6}	7.482	7.5	1
10^{-5}	7.323	7.5	0.98
10^{-4}	6.041	7.5	0.81
5.5×10^{-4}	3.216	7.5	0.43
10^{-3}	2.195	7.5	0.30
2.2×10^{-3}	1.184	7.5	0.16

Легко убедиться, что с увеличением микрополярного постоянного $\bar{\gamma}$ или $\bar{\varepsilon}$ ($\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$), жесткость пластинки сильно увеличивается по сравнению с классическим случаем.

Рассматриваемую задачу при пренебрежении поперечных сдвигов легко можем перевести к решению уравнения (2.7.26), которое для круглой пластинки (в осесимметричном случае) в полярной системе координат выражается так:

$$\left[\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} + 2h(\gamma + \varepsilon) \right] \left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \alpha_i \left(\frac{d^2 \chi_i}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi_i}{dr} \right) = 0. \quad (2.8.8)$$

К уравнению (2.8.8) будем присоединять условия шарнирного опирания по краю круглой сплошной пластинки:

$$w = 0, \quad M_{11} + L_{12} = 0, \quad \text{при } r = a, \quad (2.8.9)$$

где

$$M_{11} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + (1+\nu)\alpha_t \chi_t \right), \quad L_{12} = 2h[(\gamma + \varepsilon)k_{12} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}], \quad (2.8.10)$$

$$k_{12} = \frac{d\Omega_2}{dr}, \quad k_{21} = -\frac{1}{r}\Omega_2, \quad \Omega_2 = -\frac{dw}{dr}.$$

Для случая $\chi_t = const$, решение граничной задачи (2.8.8)-(2.8.10) имеет вид (в безразмерном виде):

$$\bar{w} = \frac{\delta(1+\nu)}{12\varepsilon(1-\nu) + 4\delta^2(1+\nu)} (1 - \bar{r}^2) \quad (2.8.11)$$

Численные результаты при тех же данных задачи (для которых соответствует таблица 7) приведем в таблице 8.

Таблица 8. Прогибы микрополярной круглой пластинки со стесненным вращением в зависимости от отношения $\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$ и классической пластинки под действием температуры. Без учета поперечных сдвигов.

$\bar{\gamma} = \bar{\varepsilon}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{W_{\max}^{мик.}}{W_{\max}^{кл.}}$
10^{-6}	7.482	7.5	1
10^{-5}	7.323	7.5	0.98
10^{-4}	6.040	7.5	0.81
10^{-3}	2.194	7.5	0.29
10^{-2}	0.298	7.5	0.04

Легко убедиться, что по модели микрополярной круглой пластинки со стесненным вращением без учета поперечных сдвигов, максимальный прогиб уменьшается (жесткость пластинки увеличивается), когда микрополярный упругий коэффициент увеличивается.

ГЛАВА 3

МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ БАЛОК

§3.1. МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ БАЛОК С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

Рассмотрим балку (рис.1а) с постоянным поперечным сечением $2h^* \times 2h$ и длиной a . Будем считать, что в направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка, размер $2h^*$ (ширина балки) намного меньше размера $2h$ (толщина балки). В этом случае, при определенных случаях распределения внешних поверхностных сил и моментов, а также температурного поля (см. глава 2, §2.1.) напряжения (как силовые, так и моментные) можно заменить их средними значениями по ширине тела и таким образом привести определение напряжений к решению обобщенной плоской задачи микрополярной термоупругости в срединной плоскости балки x_1, x_2 , т.е. в прямоугольнике: $-\frac{a}{2} \leq x_1 \leq \frac{a}{2}$, $-h \leq x_2 \leq h$ (рис.1б).

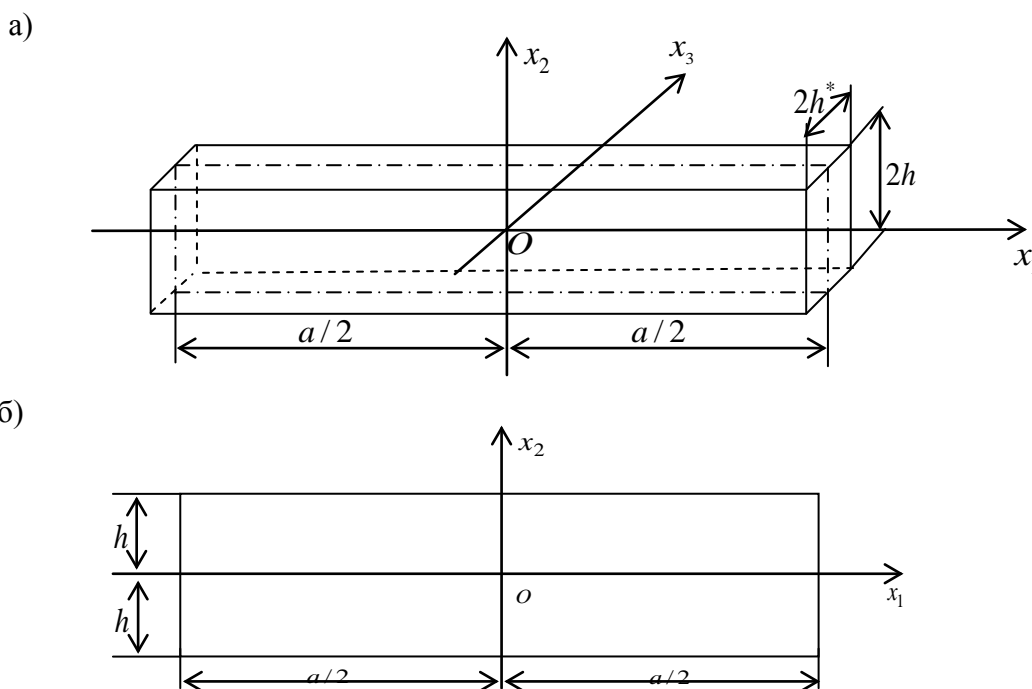


Рис. 1

Будем рассматривать уравнения обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной термоупругости (2.1.4)-(2.1.6), (2.1.18), (2.1.14) (или (2.1.16)) для

ортотропного тела, или (2.1.15) (или (2.1.17)) для изотропного тела в указанном прямоугольнике и граничные условия (2.1.20), (2.1.21), либо в смешанном виде (теперь во всех уравнениях звездочные индексы будем пропускать):

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0; \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3, \quad \gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3, \\ \chi_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \quad \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Физические соотношения микрополярной термоупругости для ортотропного тела

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + \alpha_{1r}T, \\ \gamma_{22} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + \alpha_{2r}T, \\ \gamma_{12} = a_{77}\sigma_{12} + a_{78}\sigma_{21}, \quad \chi_{13} = b_{66}\mu_{13}, \\ \gamma_{21} = a_{78}\sigma_{12} + a_{88}\sigma_{21}, \quad \chi_{23} = b_{44}\mu_{23}; \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

либо в обратной форме

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = A_{11}\gamma_{11} + A_{12}\gamma_{22} - (A_{11}\alpha_{1r} + A_{12}\alpha_{2r})T, \\ \sigma_{22} = A_{12}\gamma_{11} + A_{22}\gamma_{22} - (A_{12}\alpha_{1r} + A_{22}\alpha_{2r})T, \\ \sigma_{12} = A_{77}\gamma_{12} + A_{78}\gamma_{21}, \quad \mu_{13} = B_{66}\chi_{13}, \\ \sigma_{21} = A_{78}\gamma_{12} + A_{88}\gamma_{21}, \quad \mu_{23} = B_{44}\chi_{23}, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

или для изотропного тела

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}] + \alpha_r T, \quad \gamma_{12} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21}, \quad \chi_{13} = B\mu_{13}, \\ \gamma_{22} = \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] + \alpha_r T, \quad \gamma_{21} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{21} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{12}, \quad \chi_{23} = B\mu_{23} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

либо в обратной форме

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{11} + \nu\gamma_{22}) - \frac{E}{1-\nu}\alpha_r T, \quad \sigma_{12} = (\mu + \alpha)\gamma_{12} + (\mu - \alpha)\gamma_{21}, \quad \mu_{13} = \frac{1}{B}\chi_{13}, \\ \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}(\gamma_{22} + \nu\gamma_{11}) - \frac{E}{1-\nu}\alpha_r T, \quad \sigma_{21} = (\mu + \alpha)\gamma_{21} + (\mu - \alpha)\gamma_{12}, \quad \mu_{23} = \frac{1}{B}\chi_{23}. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Отметим, что поставленную задачу термоупругости для микрополярного, (а также классического прямоугольника) (3.1.1)-(3.1.3) можно разделить на симметричную по x_2 задачу (т. е. растяжение – сжатие вдоль оси x_1 , в этом случае $\sigma_{11}, u_1, \sigma_{22}, \mu_{31}$ – четные,

$\sigma_{12}, u_2, \sigma_{21}, \mu_{13}$ - нечетные по x_2 функции) и на антисимметричную по x_2 задачу (т. е. изгиб, в этом случае $\sigma_{12}, \sigma_{21}, u_2, \omega_3, \mu_{13}$ - четные, а $\sigma_{11}, \sigma_{22}, u_1, \mu_{31}$ - нечетные по x_2 функции). Для этого разделения необходимо температурную функцию $T(x_1, x_2)$ в общем виде представить в виде суммы симметричной по x_2 и антисимметричной по x_2 частей.

Далее будем рассматривать задачу изгиба.

Граничные условия для рассматриваемой прямоугольной области в случае задачи изгиба пусть будут:

$$\sigma_{21}|_{x_2=\pm h} = \frac{1}{2}q_1, \quad \sigma_{22}|_{x_2=\pm h} = \pm \frac{1}{2}q, \quad \mu_{23}|_{x_2=\pm h} = \pm \frac{1}{2}m, \quad (3.1.7)$$

а на краях $x_1 = -\frac{a}{2}$, $x_1 = +\frac{a}{2}$, граничные условия могут быть заданы в силовых и моментных напряжениях либо в перемещениях и повороте, либо в смешанном виде.

Будем развивать метод гипотез работ [162] для построения прикладной модели изгибной деформации микрополярной термоупругости тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений.

В основу предлагаемой здесь прикладной модели термоупругой изгибной деформации микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений примем следующие гипотезы кинематического и статического характера [162]:

1. Гипотеза кинематического характера. Согласно этой гипотезе прямолинейный нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к средней линии балки до деформации, не остается перпендикулярным к ней после деформации, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины. Кроме того, точки указанного нормального элемента имеют также свободные вращения, для которых будем считать, что они не изменяются вдоль толщинной координаты x_2 .

Кинематическую гипотезу математически запишем так: нормальное к средней линии балки перемещение и свободный поворот не зависят от координаты x_2 :

$$u_2 = w(x_1), \quad \omega_3 = \Omega_3(x_1), \quad (3.1.8)$$

а тангенциальное перемещение распределено по толщине балки линейным законом:

$$u_1 = x_2 \cdot \psi(x_1). \quad (3.1.9)$$

Кинематическую гипотезу в целом (формулы (3.1.8), (3.1.9)), как предложено в работе [162], назовем обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной термоупругости тонких балок.

2. Силовым напряжением σ_{22} в обобщенном законе Гука для деформации γ_{11} (формулы (3.1.3)₁ или (3.1.5)₁) можем пренебречь относительно силового напряжения σ_{11} .

3. Будем принимать условие тонкостенности балки, т. е.

$$2h \ll a. \quad (3.1.10)$$

4. При определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силового напряжения σ_{21} примем:

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(x_1). \quad (3.1.11)$$

После вычисления указанных величин, значение σ_{21} окончательно определим прибавлением к значению (3.1.11) результат интегрирования первого уравнения равновесия ((3.1.1)₁), наперед удовлетворяя условию, о равенстве нулю этого интеграла от $-h$ до $+h$.

5. Будем считать, что в тонкостенном случае рассматриваемого прямоугольника температура по толщине балки распределена по линейному закону:

$$T = \frac{x_2}{2h} \tilde{T}(x_1). \quad (3.1.12)$$

В соответствии с принятым законом кинематической гипотезы (3.1.8), (3.1.9), для компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений из уравнений (3.1.2) получим:

$$\gamma_{11} = x_2 \cdot \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad \chi_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}. \quad (3.1.13)$$

Если принять следующие обозначения

$$K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}, \quad (3.1.14)$$

тогда формулы (3.1.13) можем представить так:

$$\gamma_{11} = x_2 \cdot K_{11}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{12} = \Gamma_{12}, \quad \gamma_{21} = \Gamma_{21}, \quad \chi_{13} = k_{13}, \quad \chi_{23} = 0. \quad (3.1.15)$$

Здесь K_{11} - кривизна оси балки после деформации, связанная с силовым напряжением σ_{11} , а k_{13} - кривизна оси балки, связанная с моментным напряжением μ_{13} .

На основе обобщенного закона Гука ((3.1.3) или (3.1.5)), с учётом гипотезы 2), а также формул (3.1.12) и (3.1.15), для силовых напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$ и моментного напряжения μ_{13} получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{a_{11}} x_2 \left(K_{11} - a_{11} \frac{\tilde{T}}{2h} \right), & \sigma_{12} &= \frac{1}{a_{77} a_{88} - a_{78}^2} (a_{77} \Gamma_{12} - a_{78} \Gamma_{21}), \\ \sigma_{21} &= \frac{1}{a_{77} a_{88} - a_{78}^2} (a_{88} \Gamma_{21} - a_{78} \Gamma_{12}), & \mu_{13} &= \frac{1}{b_{66}} k_{13}. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= E x_2 \left(K_{11} - \alpha_r \frac{\tilde{T}}{2h} \right), & \sigma_{12} &= (\mu + \alpha) \Gamma_{12} + (\mu - \alpha) \Gamma_{21}, \\ \sigma_{21} &= (\mu + \alpha) \Gamma_{21} + (\mu - \alpha) \Gamma_{12}, & \mu_{13} &= B k_{13}.\end{aligned}\quad (3.1.17)$$

для изотропного тела.

Рассматривая уравнения равновесия (3.1.1)₂ и (3.1.1)₃, для силового напряжения σ_{22} и моментного напряжения μ_{23} будем иметь:

$$\sigma_{22} = -x_2 \cdot \frac{d\sigma_{12}}{dx_1}, \quad \mu_{23} = -x_2 \cdot \left(\frac{d\mu_{13}}{dx_1} + \sigma_{12} - \sigma_{21}^0 \right). \quad (3.1.18)$$

Теперь, придерживаясь к гипотезе 4), для силового напряжения σ_{21} окончательно получим:

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(x_1) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_2^2}{2} \right) \cdot \frac{\partial \sigma_{11}^1}{\partial x_1}, \quad (3.1.19)$$

где $\sigma_{11}^1 = \frac{1}{a_{11}} \left(K_{11} - \alpha_r \frac{\tilde{T}}{2h} \right)$ для ортотропного тела или $\sigma_{11}^1 = E \left(K_{11} - \alpha_r \frac{\tilde{T}}{2h} \right)$ для изотропного

тела.

В прикладной модели термоупругости микрополярных балок вместе силовых и моментных напряжений удобно оперировать статически эквивалентными им внутренними усилиями и моментами:

$$M_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} \cdot x_2 dx_2, \quad N_{12} = \int_{-h}^h \sigma_{12} dx_2, \quad N_{21} = \int_{-h}^h \sigma_{21} dx_2, \quad L_{13} = \int_{-h}^h \sigma_{13} dx_2. \quad (3.1.20)$$

На основе формул (3.1.16) или (3.1.17) для напряжений и с учётом (3.1.20) приходим к следующим физическим соотношениям прикладной термоупругости изгибной деформации балки:

$$\begin{aligned}M_{11} &= \frac{2h^3}{3a_{11}} (K_{11} - \alpha_r \chi_r), & N_{12} &= \frac{2h}{a_{77} a_{88} - a_{78}^2} (a_{77} \Gamma_{12} - a_{78} \Gamma_{21}), \\ N_{21} &= \frac{2h}{a_{77} a_{88} - a_{78}^2} (a_{88} \Gamma_{21} - a_{78} \Gamma_{12}), & L_{13} &= \frac{2h}{b_{66}} k_{13}\end{aligned}\quad (3.1.21)$$

для ортотропного тела или

$$\begin{aligned}M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3} (K_{11} - \alpha_r \chi_r), & N_{12} &= 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{12} + (\mu - \alpha) \Gamma_{21}], \\ N_{21} &= 2h [(\mu + \alpha) \Gamma_{21} + (\mu - \alpha) \Gamma_{12}], & L_{13} &= 2h B k_{13}\end{aligned}\quad (3.1.22)$$

для изотропного тела, где принято следующее обозначение

$$\chi_t = \frac{\tilde{T}}{2h}. \quad (3.1.23)$$

Рассматривая выражения для $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \mu_{23}$ (формулы (3.1.18), (3.1.19)), удовлетворяя граничным условиям (3.1.7), приходим к следующим уравнениям равновесия прикладной модели:

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -q, \quad N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = hq_1, \quad \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -m. \quad (3.1.24)$$

Уравнения равновесия (3.1.24), соотношения термоупругости (3.1.21) для ортотропного материала или (3.1.22)- для изотропного материала и геометрические соотношения (3.1.14) представляют собой основные уравнения прикладной модели термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений.

Вариационный функционал прикладной модели термоупругости микрополярных тонких балок получим на основе формул (2.1.26)-(2.1.29) с учётом (3.1.9), (3.1.10), (3.1.13), (3.1.16)-(3.1.19) (2.1.13) или (2.1.4):

$$I_0 = \int_0^a \left\{ W_0 - M_{11} \left(K_{11} - \frac{d\psi}{dx_1} \right) - N_{12} \left[\Gamma_{12} - \left(\frac{dw}{dx_1} - \Omega_3 \right) \right] - N_{21} [\Gamma_{21} - (\psi + \Omega_3)] - L_{13} \left(k_{13} - \frac{d\Omega_3}{dx_1} \right) \right\} dx_1 - \int_0^a [q_1 h \psi + q w + m \Omega_3] dx_1 + I_0^*, \quad (3.1.25)$$

где W_0 -плотность потенциальной энергии деформации для прикладной модели:

$$W_0 = \frac{h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}^2 + hA_{77}\Gamma_{12}^2 + hA_{88}\Gamma_{21}^2 + 2hA_{78}\Gamma_{12}\Gamma_{21} + B_{66}hk_{13}^2 - \frac{2h^3}{3} \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} K_{11}\alpha_t\chi_t \quad (3.1.26)$$

для ортотропного тела или

$$W_0 = \frac{Eh^3}{3} K_{11}^2 + h(\mu + \alpha)(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{12}\Gamma_{21} + Bhk_{13}^2 - \frac{2Eh^3}{3} K_{11}\alpha_t\chi_t \quad (3.1.27)$$

для изотропного тела;

$$a) I_0^* = M_{11}^* \psi \Big|_{x_1=0} - M_{11}^* \psi \Big|_{x_1=a} + N_{12}^* w \Big|_{x_1=0} - N_{12}^* w \Big|_{x_1=a} + L_{13}^* \Omega_3 \Big|_{x_1=0} - L_{13}^* \Omega_3 \Big|_{x_1=a}, \quad (3.1.28)$$

когда имеем следующие граничные условия

$$M_{11} \Big|_{x_1=0;a} = M_{11}^*, \quad N_{12} \Big|_{x_1=0;a} = N_{12}^*, \quad L_{13} \Big|_{x_1=0;a} = L_{13}^* \quad (3.1.29)$$

(в частности, из (3.1.29) можем получить условия свободного края в микрополярной модели);

$$\begin{aligned} \text{б) } I_0^* &= M_{11}(\psi - \psi^*)|_{x_1=0} - M_{11}(\psi - \psi^*)|_{x_1=a} + N_{12}(w - w^*)|_{x_1=0} - N_{12}(w - w^*)|_{x_1=a} + \\ &+ L_{13}(\Omega_3 - \Omega_3^*)|_{x_1=0} - L_{13}(\Omega_3 - \Omega_3^*)|_{x_1=a}, \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

когда имеем следующие граничные условия

$$w|_{x_1=0;a} = w^*, \quad \psi|_{x_1=0;a} = \psi^*, \quad \Omega_3|_{x_1=0;a} = \Omega_3^* \quad (3.1.31)$$

(в частности, из (3.1.31) можем получить условия полной заделки края в микрополярной модели);

$$\text{в) } I_0^* = M_{11}^* \psi|_{x_1=0} - M_{11}^* \psi|_{x_1=a} + N_{12}(w - w^*)|_{x_1=0} - N_{12}(w - w^*)|_{x_1=a} + L_{13}^* \Omega_3|_{x_1=0} - L_{13}^* \Omega_3|_{x_1=a}, \quad (3.1.32)$$

когда имеем следующие граничные условия

$$M_{11}|_{x_1=0;a} = M_{11}^*, \quad w|_{x_1=0;a} = w^*, \quad L_{13}|_{x_1=0;a} = L_{13}^* \quad (3.1.33)$$

(в частности, из (3.1.33) можем получить условия шарнирного опирания края в микрополярной модели с загруженными моментами или без них).

Варьируя функционал по всем функциональным аргументам, в качестве уравнения Эйлера приходим к основным уравнениям термоупругости микрополярных тонких балок (3.1.24), (3.1.21) или (3.1.22), (3.1.14) и, как естественные граничные условия, получим граничные условия (3.1.29), либо (3.1.31), либо (3.1.33).

Отметим, что если в уравнениях (3.1.24), (3.1.21) или (3.1.22), (3.1.14) и в функционале (3.1.25) микрополярной термоупругости подставить $A_{77} = A_{78} = A_{88}$ в случае ортотропного тела или $\alpha = 0$ в случае изотропного тела, а также, считать, что $M^+ = M^- = 0$, тогда приходим к классической модели термоупругости тонких балок с учетом поперечных сдвиговых деформаций:

Уравнения равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -q, \quad N_{12} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = hq_1; \quad (3.1.34)$$

Физические соотношения термоупругости

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3a_{11}}(K_{11} - \alpha_i \chi_i), \quad N_{12} = N_{12} = \frac{h}{a_{77}} \Gamma \quad (3.1.35)$$

для ортотропного тела или

$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}(K_{11} - \alpha_i \chi_i), \quad N_{12} = N_{21} = 2h\mu\Gamma; \quad (3.1.36)$$

для изотропного тела;

Геометрические соотношения

$$\Gamma = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{dw}{dx_1} + \psi, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}. \quad (3.1.37)$$

Граничные условия:

а) свободный нагруженный край

$$M_{11} \Big|_{x_1=0;a} = M_{11}^*, \quad N_{12} \Big|_{x_1=0;a} = N_{12}^* \quad (3.1.38)$$

(в частности, из (3.1.38) получим граничные условия свободного края)

б) когда на краях балки заданы перемещение и поворот:

$$w \Big|_{x_1=0;a} = w^*, \quad \psi \Big|_{x_1=0;a} = \psi^* \quad (3.1.39)$$

(в частности, из (3.1.39) получим условия полной заделки);

в) для прикладной модели классической балки будем иметь следующие граничные условия:

$$M_{11} \Big|_{x_1=0;a} = M_{11}^*, \quad w \Big|_{x_1=0;a} = w^* \quad (3.1.40)$$

(в частности, из (3.1.40) получим условия шарнирного опирания балки -загруженной моментом или без него).

Общий функционал для классической теории термоупругости тонких балок с учетом поперечных сдвигов будет выражаться так:

$$I_0 = \int_0^a \left\{ W_0 - M_{11} \left(K_{11} - \frac{d\psi}{dx_1} \right) - N_{12} \left[\Gamma - \left(\frac{dw}{dx_1} + \psi \right) \right] \right\} dx_1 - \int_0^a [q_1 h \psi + q w] dx_1 + I_0^*, \quad (3.1.41)$$

где плотность потенциальной энергии деформации W_0 будет:

$$W_0 = \frac{h^3}{3a_{11}} K_{11}^2 + \frac{h}{2a_{77}} \Gamma^2 - \frac{2h^3}{3a_{11}} K_{11} \alpha_t \chi_t \quad (3.1.42)$$

для ортотропного тела или

$$W_0 = \frac{Eh^3}{3} K_{11}^2 + \mu h \Gamma^2 - \frac{2Eh^3}{3} K_{11} \alpha_t \chi_t \quad (3.1.43)$$

для изотропного тела;

$$а) I_0^* = M_{11}^* \psi \Big|_{x_1=0} - M_{11}^* \psi \Big|_{x_1=a} + N_{12}^* w \Big|_{x_1=0} - N_{12}^* w \Big|_{x_1=a} \quad (3.1.44)$$

в случае граничных условий (3.1.38);

$$б) I_0^* = M_{11} (\psi - \psi^*) \Big|_{x_1=0} - M_{11} (\psi - \psi^*) \Big|_{x_1=a} + N_{12} (w - w^*) \Big|_{x_1=0} - N_{12} (w - w^*) \Big|_{x_1=a} \quad (3.1.45)$$

в случае граничных условий (3.1.39);

$$в) I_0^* = M_{11}^* \psi \Big|_{x_1=0} - M_{11}^* \psi \Big|_{x_1=a} + N_{12} (w - w^*) \Big|_{x_1=0} - N_{12} (w - w^*) \Big|_{x_1=a} \quad (3.1.46)$$

в случае граничных условий (3.1.40).

§3.2. ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОГО ИЗГИБА МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ БАЛОК С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

Рассмотрим примеры применения построенной прикладной теории термоупругости микрополярных тонких балок со свободным вращением, когда внешние усилия и моменты отсутствуют ($q_1 = q = 0, m = 0$). Рассмотрим тонкую балку толщиной $2h$, длиной a из однородного микрополярного изотропного материала под действием температуры (отметим, что начало координатной системы x_1, x_2 будем располагать на левом конце балки):

$$T = T_0 \left(\frac{x_1}{a} + \frac{1}{2} \right) \frac{x_2}{2h}. \quad (3.2.1)$$

Температурная распределенная функция (3.2.1) удовлетворяет двумерному однородному уравнению стационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = 0.$$

Будем рассматривать две задачи:

а) когда оба конца балки жестко защемлены (рис. 2), т. е. имеют место следующие граничные условия:

$$w = 0, \quad \psi = 0, \quad \Omega_3 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = a; \quad (3.2.2)$$

б) когда оба конца шарнирно оперты (рис. 3), т.е.

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_1 = a. \quad (3.2.3)$$

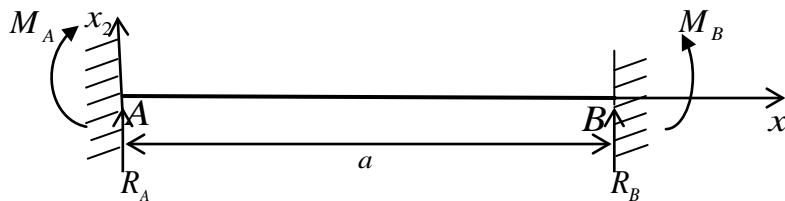


рис. 2.

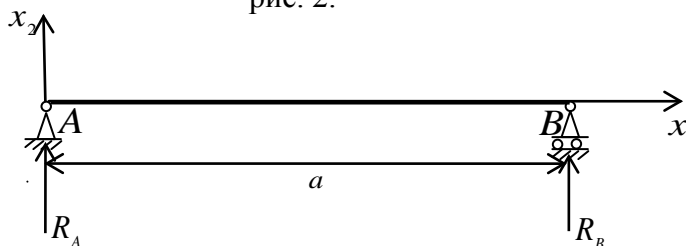


рис. 3

Вводим безразмерные величины с помощью следующих обозначений:

$$\bar{N}_{12} = \frac{N_{12}}{a\mu}, \quad \bar{N}_{21} = \frac{N_{21}}{a\mu}, \quad \bar{M}_{11} = \frac{M_{11}}{a^2\mu}, \quad \bar{L}_{13} = \frac{L_{13}}{a^2\mu}, \quad B^* = \frac{B}{a^2\mu}, \quad \bar{x}_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{a}, \quad \delta = \frac{h}{a}. \quad (3.2.4)$$

Так как внешние усилия и моменты отсутствуют, основная система прикладной термоупругости изотропных микрополярных тонких балок (3.1.24), (3.1.22), (3.1.14) примет вид:

Уравнения равновесия

$$\frac{d\bar{N}_{12}}{d\bar{x}_1} = 0, \quad \bar{N}_{21} - \frac{d\bar{M}_{11}}{d\bar{x}_1} = 0, \quad \frac{d\bar{L}_{13}}{d\bar{x}_1} + \bar{N}_{12} - \bar{N}_{21} = 0. \quad (3.2.5)$$

Соотношения термоупругости

$$\begin{aligned} \bar{N}_{12} &= 2\delta \left[\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right) \Gamma_{12} + \left(1 - \frac{\alpha}{\mu}\right) \Gamma_{21} \right], \quad \bar{N}_{21} = 2\delta \left[\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right) \Gamma_{21} + \left(1 - \frac{\alpha}{\mu}\right) \Gamma_{12} \right], \\ \bar{M}_{11} &= \frac{4(1+\nu)}{3} \delta^3 \left[\frac{d\psi}{d\bar{x}_1} - \frac{\delta^{-1}}{2} \left(\bar{x}_1 + \frac{1}{2} \right) \alpha_i T_0 \right], \quad \bar{L}_{13} = 2\delta B^* \frac{d\Omega_3}{d\bar{x}_1}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{12} = \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{1}{a} \frac{d\psi}{d\bar{x}_1}, \quad k_{13} = \frac{1}{a} \frac{d\Omega_3}{d\bar{x}_1}. \quad (3.2.7)$$

Будем отдельно изучать задачу а) и задачу б).

Рассмотрим задачу а).

Из первого уравнения равновесия ((3.2.5)₁) получим:

$$\bar{N}_{12} = \text{const} = C_1 \quad (3.2.8)$$

Подставляя (3.2.8) в формуле (3.2.6)₁, после некоторых преобразований приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} - \psi - 2\Omega_3 \right) = \frac{1}{2} \delta^{-1} C_1 - \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi \right) \quad (3.2.9)$$

Суммируя первые две формулы из (3.2.6), получим:

$$\bar{N}_{12} + \bar{N}_{21} = 4\delta(\Gamma_{12} + \Gamma_{21})$$

и, имея в виду (3.2.8), для \bar{N}_{21} будем иметь:

$$\bar{N}_{21} = 4\delta \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi \right) - C_1. \quad (3.2.10)$$

Рассмотрим второе уравнение равновесия из (3.2.5), подставляя в это уравнение (3.2.10) и формулу для \bar{M}_{11} из (3.2.6), получим следующее уравнение:

$$4\delta\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi\right) - C_1 = \frac{4}{3}(1+\nu)\delta^3\left[\frac{d^2\psi}{d\bar{x}_1^2} - \frac{\delta^{-1}}{2}\alpha_i T_0\right], \quad (3.2.11)$$

Формулы (3.2.6)₄, (3.2.8), (3.2.10) подставляя в третье уравнение равновесия из (3.2.5), приходим к следующему уравнению:

$$2B^*\delta\frac{d^2\Omega_3}{d\bar{x}_1^2} + 2C_1 - 4\delta\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi\right) = 0 \quad (3.2.12)$$

Рассмотрим систему уравнений (3.2.11) и (3.2.12), исключим из этих двух уравнений выражение $4\delta\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi\right)$, в результате после интегрирования по \bar{x}_1 получим следующее равенство:

$$\Omega_3 = \frac{I}{2B^*}\left[\frac{4(1+\nu)}{3}\delta^2\psi - \left(\frac{C_1}{2}\delta^{-1} + \frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_i T_0\right)\bar{x}_1^2 + \delta^{-1}(C_3\bar{x}_1 + C_4)\right]. \quad (3.2.13)$$

Подставим (3.2.13) в равенстве (3.2.9), выразим ψ через $\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \psi = & \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)}{3B^*}\delta^2\frac{\alpha}{\mu}}\left[-\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \frac{\delta^{-1}}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_3\bar{x}_1 - \right. \\ & \left. - \frac{I}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{1}{2}\delta^{-1}C_1 + \frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_i T_0\right)\bar{x}_1^2 + \delta^{-1}\left(\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_4 + \frac{1}{2}C_1\right)\right] \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Если в равенстве (3.2.13) учесть значение ψ через (формула (3.2.14)) $\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}$, будем

иметь формулу Ω_3 выраженную через $\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}$:

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & \frac{2(1+\nu)\delta^2}{3B^*\left(1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)}{3B^*}\delta^2\frac{\alpha}{\mu}\right)}\left[-\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \frac{\delta^{-1}}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_3\bar{x}_1 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{1}{2}\delta^{-1}C_1 + \frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_i T_0\right)\bar{x}_1^2 + \delta^{-1}\left(\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_4 + \frac{1}{2}C_1\right)\right] - \\ & - \frac{I}{4B^*}\left(C_1\delta^{-1} + \frac{2(1+\nu)}{3}\delta\alpha_i T_0\right)\bar{x}_1^2 + \frac{1}{2B^*}\delta^{-1}(C_3\bar{x}_1 + C_4). \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Теперь формулу для ψ ((3.2.14)) подставим в уравнение (3.2.11), тогда для \bar{w} приходим к следующему обыкновенному линейному неоднородному дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$A\frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}_1^3} + D\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} = K_1\bar{x}_1^2 + K_2\bar{x}_1 + K_3 \quad (3.2.16)$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{4(1+\nu)\delta^3\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)}{3\left(1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*}\delta^2\right)}; & D &= 4\delta\left[1-\frac{\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)}{1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*}\delta^2}\right], \\
 K_1 &= \frac{1}{B^*\left(1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*}\delta^2\right)}\left[2\frac{\alpha}{\mu}C_1+\frac{4}{3}(1+\nu)\frac{\alpha}{\mu}\delta^2\alpha_iT_0\right], \\
 K_2 &= -\frac{4\frac{\alpha}{\mu}C_2}{B^*\left(1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*}\delta^2\right)}, \\
 K_3 &= -\frac{1}{B^*\left(1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*}\delta^2\right)}\left[4\frac{\alpha}{\mu}C_3+\frac{4}{3}C_1(1+\nu)\frac{\alpha}{\mu}\delta^2+2B^*C_1+\right. \\
 &\quad \left.+\frac{8}{9}(1+\nu)^2\frac{\alpha}{\mu}\delta^4\alpha_iT_0\right]+C_1-\frac{2}{3}(1+\nu)\delta^2\alpha_iT_0.
 \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.2.16) имеет вид:

$$\bar{w} = C_4 + C_5 \operatorname{sh} \lambda \bar{x}_1 + C_6 \operatorname{ch} \lambda \bar{x}_1 + \frac{K_1}{3D} \bar{x}_1^3 + \frac{K_2}{2D} \bar{x}_1^2 + \left(\frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} \right) \bar{x}_1, \tag{3.2.18}$$

где $\lambda = \sqrt{-\frac{D}{A}}$. Для большинства материалов [145,146] можно считать, что $D < 0$, $A > 0$.

Здесь C_4, C_5, C_6 новые постоянные интегрирования.

Подставляя (3.2.18) в (3.2.14) и (3.2.15), получим окончательные выражения для ψ и

Ω_3 :

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{1}{1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*}\delta^2}\frac{\alpha}{\mu}\left[-\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)\left(C_6\lambda\operatorname{sh}\lambda\bar{x}_1+C_5\lambda\operatorname{ch}\lambda\bar{x}_1+\frac{K_1}{D}\bar{x}_1^2+\right.\right. \\
 &\quad \left.+\frac{K_2}{D}\bar{x}_1+\frac{K_3}{D}-\frac{2AK_1}{D^2}\right)-\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{1}{2}\delta^{-1}C_1+\frac{(1+\nu)}{3}\delta\alpha_iT_0\right)\bar{x}_1^2+ \\
 &\quad \left.+\delta^{-1}\left(\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_2\bar{x}_1+\frac{1}{B^*}\frac{\alpha}{\mu}C_3+\frac{1}{2}C_1\right)\right] \\
 \Omega_3 &= \frac{2(1+\nu)\delta^2}{3B^*\left(1-\frac{\alpha}{\mu}-\frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*}\delta^2\right)}\frac{\alpha}{\mu}\left[-\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)\left(C_6\lambda\operatorname{sh}\lambda\bar{x}_1+C_5\lambda\operatorname{ch}\lambda\bar{x}_1+\frac{K_1}{D}\bar{x}_1^2+\frac{K_2}{D}\bar{x}_1+\right.\right.
 \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} \Big) - \frac{1}{B^*} \frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{\delta^{-1}}{2} C_1 + \frac{(1+\nu)}{3} \delta \alpha_i T_0 \right) \bar{x}_1^2 + \frac{\delta^{-1}}{B^*} \frac{\alpha}{\mu} C_2 \bar{x}_1 + \\
& + \delta^{-1} \left(\frac{1}{B^*} \frac{\alpha}{\mu} C_3 + \frac{1}{2} C_1 \right) \Big] - \frac{1}{2B^*} \left(\frac{C_1}{2} \delta^{-1} + \frac{(1+\nu)}{3} \delta \alpha_i T_0 \right) \bar{x}_1^2 + \frac{1}{2B^*} \delta^{-1} (C_2 \bar{x}_1 + C_3)
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Для определения постоянных интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, на основе формул (3.2.18), (3.2.19), (3.2.20) будем удовлетворять граничные условия (3.2.2), в результате получим шесть линейных алгебраических уравнений относительно искомых постоянных интегрирования. Решая полученную алгебраическую систему уравнений, определяя значения $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ и подставляя их в выражения (3.2.18), (3.2.19), (3.2.20), получим решение поставленной граничной задачи (3.2.5)-(3.2.7) и (3.2.2).

Поставленную задачу решаем также на основе классической теории термоупругого изгиба балок (3.1.34)-(3.1.37), (3.1.39) ($w^* = 0, \psi^* = 0$). Задачу будем решать методом сил сопротивления материалов [121]. Так как задача дважды статически неопределенная, выбираем основную систему (рис.4).

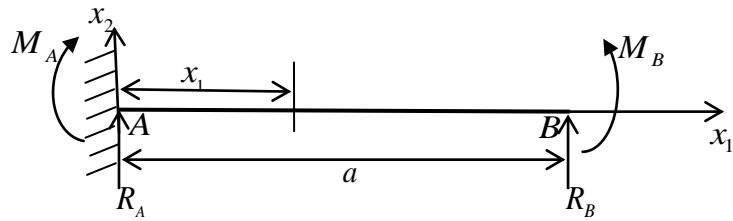


рис.4

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned}
R_A + R_B &= 0, \\
M_B - M_A + R_B \cdot a &= 0.
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Внутренние силовые факторы (поперечная сила и изгибающий момент) для основной системы будут:

$$\begin{aligned}
N_{12} &= R_A = const = C_1, \\
M_{изг} &= M_{11} = M_A + R_A \cdot x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a.
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Перейдем к безразмерным величинам (3.2.4).

Если подставим значения \bar{M}_{11} ((3.2.22)) и \bar{K}_{11} ((3.1.37)₂) в формуле (3.1.36)₁ и полученное выражение для $\frac{d\psi}{d\bar{x}_1}$ интегрируем по \bar{x}_1 , получим

$$\psi = \frac{3\delta^{-3}}{4(1+\nu)} \left(\bar{R}_A \cdot \frac{\bar{x}_1^2}{2} + \bar{M}_A \cdot \bar{x}_1 \right) + \frac{\delta^{-1} \alpha_i T_0}{4} (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1) + C_2. \tag{3.2.23}$$

Из этого выражения потребуем условия:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_1 = 1, \quad \psi = 0. \quad (3.2.24)$$

В результате получим

$$C_2 = 0 \quad (3.2.25)$$

и следующее уравнение

$$\frac{\bar{R}_A}{2} + \bar{M}_A = -\frac{2(1+\nu)\delta^2\alpha_i T_0}{3}. \quad (3.2.26)$$

С учетом (3.2.25) выражение для ψ примет вид

$$\psi = \frac{3\delta^{-3}}{4(1+\nu)} \left(\bar{R}_A \cdot \frac{\bar{x}_1^2}{2} + \bar{M}_A \cdot \bar{x}_1 \right) + \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{4} (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1). \quad (3.2.27)$$

Подставляя значение N_{12} ((3.2.22)₁) и формулу (3.2.27) для ψ в формуле (3.1.36)₂, определим производную $\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}$, интегрируя это выражение, получим общее решение для

функции \bar{w} :

$$\bar{w} = \frac{\bar{R}_A \delta^{-1}}{2} \bar{x}_1 - \left[\frac{3\delta^{-3}}{8(1+\nu)} \left(\frac{\bar{R}_A}{3} \bar{x}_1^3 + \bar{M}_A \bar{x}_1^2 \right) + \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{4} \left(\frac{\bar{x}_1^3}{3} + \frac{\bar{x}_1^2}{2} \right) \right] + C_3. \quad (3.2.28)$$

Выражение (3.2.28) будем подвергать условиям

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{w} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_1 = 1, \quad \bar{w} = 0, \quad (3.2.29)$$

в результате получим

$$C_3 = 0 \quad (3.2.30)$$

и уравнение

$$\bar{R}_A = \frac{3\delta^{-2}}{4(1+\nu)} \left(\frac{\bar{R}_A}{3} + \bar{M}_A \right) + \frac{5\alpha_i T_0}{12}, \quad (3.2.31)$$

а также формулу для \bar{w}

$$\bar{w} = \frac{\bar{R}_A \delta^{-1}}{2} \bar{x}_1 - \frac{3\delta^{-3}}{8(1+\nu)} \left(\frac{\bar{R}_A}{3} \bar{x}_1^3 + \bar{M}_A \bar{x}_1^2 \right) - \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{4} \left(\frac{\bar{x}_1^3}{3} + \frac{\bar{x}_1^2}{2} \right). \quad (3.2.32)$$

Таким образом, для определения реакций \bar{R}_A и \bar{M}_A получим следующую систему алгебраических уравнений ((3.2.26) и (3.2.31)):

$$\begin{cases} \frac{\bar{R}_A}{2} + \bar{M}_A = -\frac{2(1+\nu)\delta^2\alpha_i T_0}{3}, \\ \bar{R}_A = \frac{3\delta^{-2}}{4(1+\nu)} \left(\frac{\bar{R}_A}{3} + \bar{M}_A \right) + \frac{5\alpha_i T_0}{12}. \end{cases} \quad (3.2.33)$$

Решая эту систему для \bar{R}_A и \bar{M}_A , получим

$$\begin{aligned}\bar{R}_A &= -\frac{2(1+\nu)\delta^2\alpha_i T_0}{24(1+\nu)\delta^2+3}, \\ \bar{M}_A &= -\frac{(1+\nu)\delta^2(1+16(1+\nu)\delta^2)\alpha_i T_0}{24(1+\nu)\delta^2+3}.\end{aligned}\quad (3.2.34)$$

Окончательно для \bar{w} и ψ будем иметь:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{12} \left[\frac{1}{8(1+\nu)\delta^2+1} - 1 \right] \bar{x}_1^3 + \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{8} \left[\frac{1+16(1+\nu)\delta^2}{8(1+\nu)\delta^2+1} - 1 \right] \bar{x}_1^2 - \\ &- \frac{(1+\nu)\delta\alpha_i T_0}{3(8(1+\nu)\delta^2+1)} \bar{x}_1,\end{aligned}\quad (3.2.35)$$

$$\psi = -\frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{4} \left[\frac{1}{8(1+\nu)\delta^2+1} - 1 \right] \bar{x}_1^2 - \frac{\delta^{-1}\alpha_i T_0}{4} \left[\frac{1+16(1+\nu)\delta^2}{8(1+\nu)\delta^2+1} - 1 \right] \bar{x}_1.\quad (3.2.36)$$

Приводим результаты численных вычислений. Расчеты выполнены при следующих значениях параметров задачи:

$$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}, \quad \nu = 0.33, \quad B^* = 1.5, \quad T_0 = 60^\circ \text{C}, \quad \alpha_i = 125 \times 10^{-7} \text{ } 1/\text{гр}.\quad (3.2.37)$$

Таблица 9. Прогибы микрополярной балки по модели со свободным вращением в зависимости от отношения $\frac{\alpha}{\mu}$ и классической балки под действием температуры.

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^7$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^7$	$\frac{w_{\max}^{\text{мик.}}}{w_{\max}^{\text{кл.}}}$
10^{-5}	7.941	7.946	0.99
10^{-3}	7.032	7.946	0.88
10^{-2}	5.227	7.946	0.66
2×10^{-2}	4.155	7.946	0.52
10^{-1}	1.158	7.946	0.15

Как убедимся, при увеличении постоянной упругости α (микрополярной постоянной), жесткость балки увеличивается.

Рассмотрим теперь задачу б). В этом случае $R_A = R_B = 0$. Следовательно, из первого уравнения равновесия ((3.2.5)₁) с учетом граничных условий для N_{12} , будем иметь $N_{12} \equiv 0$. Имея это в виду, применяя первое из формул (3.2.6)₁, приходим к следующему уравнению

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\mu}\right)(\psi + \Omega_3) = \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)\left(\Omega_3 - \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}\right), \quad (3.2.38)$$

Сложим уравнения (3.2.5)₂ и (3.2.5)₃, получим

$$\frac{d(\bar{L}_{13} - \bar{M}_{11})}{d\bar{x}_1} = 0.$$

Отсюда приходим к следующему равенству

$$\bar{L}_{13} - \bar{M}_{11} = C_1. \quad (3.2.39)$$

Используя граничные условия (3.2.3)₂ и (3.2.3)₃, получим $C_1 = 0$, следовательно (3.2.39) примет вид

$$\bar{L}_{13} - \bar{M}_{11} = 0. \quad (3.2.40)$$

Подставим в (3.2.40) значения \bar{L}_{13} и \bar{M}_{11} из (3.2.6) ((3.2.6)₃, (3.2.6)₄) в результате получим уравнение

$$B^* \frac{d\Omega_3}{d\bar{x}_1} - \frac{2}{3}(1+\nu)\delta^2 \left[\frac{d\psi}{d\bar{x}_1} - \frac{\delta^{-1}}{2} \alpha_r T_0 \left(\bar{x}_1 + \frac{1}{2} \right) \right] = 0, \quad (3.2.41)$$

которое представим так:

$$\frac{d}{d\bar{x}_1} \left(B^* \Omega_3 - \frac{2}{3}(1+\nu)\delta^2 \psi \right) = -\frac{1+\nu}{3} \delta \alpha_r T_0 \left(\bar{x}_1 + \frac{1}{2} \right). \quad (3.2.42)$$

Интегрируя уравнение (3.2.42), получим значение функции Ω_3 , выраженное через функцию ψ :

$$\Omega_3 = \frac{1}{6B^*} \left[4(1+\nu)\delta^2 \psi - (1+\nu)\delta \alpha_r T_0 (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1) + 6C_2 \right] \quad (3.2.43)$$

последнее подставляя в уравнение (3.2.38), в результате будем иметь ψ , выраженное через $\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}$:

$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)}{3B^*} \delta^2 \frac{\alpha}{\mu}} \left[- \left(1 + \frac{\alpha}{\mu} \right) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} - \frac{(1+\nu)}{3B^*} \delta \alpha_r T_0 \frac{\alpha}{\mu} (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1) + \frac{2}{B^*} \frac{\alpha}{\mu} C_2 \right] \quad (3.2.44)$$

Используя формулу (3.2.10) (при $C_1 = 0$) и формулу (3.2.6)₃, подставим их в уравнение (3.2.5)₂, принимая в виду формулу (3.2.44), для функции \bar{w} приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению типа (3.2.16), где на этот раз

$$A = \frac{(1+\nu)\delta^2 \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)}{3 \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*} \frac{\alpha}{\mu} \delta^2\right)} ; \quad D = 1 - \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right)}{1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*} \frac{\alpha}{\mu} \delta^2},$$

$$K_1 = K_2 = \frac{(1+\nu)\frac{\alpha}{\mu} \delta \alpha_i T_0}{3B^* \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*} \frac{\alpha}{\mu} \delta^2\right)} \quad (3.2.45)$$

$$K_3 = -\frac{1}{B^* \left(1 - \frac{\alpha}{\mu} - \frac{4(1+\nu)\alpha}{3B^*} \frac{\alpha}{\mu} \delta^2\right)} \left[2\frac{\alpha}{\mu} C_2 + \frac{2}{9}(1+\nu)^2 \frac{\alpha}{\mu} \delta^3 \alpha_i T_0 \right] - \frac{(1+\nu)}{6} \delta \alpha_i T_0.$$

После определения прогиба $\bar{w}(x_1)$, функции поворотов $\psi(x_1)$ и $\Omega_3(x_1)$ определяются формулами (3.2.43) и (3.2.44).

Общее решение дифференциального уравнения (3.2.16) имеет вид (3.2.18).

Все шесть постоянные интегрирования определяем при помощи граничных условий (3.2.3).

Поставленную задачу решаем также на основе классической теории термоупругого изгиба балок (3.1.34)-(3.1.37), (3.1.40) ($w^* = 0, M_{11}^* = 0$).

Из уравнений равновесия для реакций R_A и R_B для классического случая также получим

$$R_A = 0, \quad R_B = 0. \quad (3.2.46)$$

Внутренние силовые факторы (поперечная сила и изгибающий момент) для рассматриваемой задачи будут:

$$N_{12} = R_A \equiv 0, \quad M_{изг} = M_{11} \equiv 0, \quad 0 \leq x_1 \leq a. \quad (3.2.47)$$

Перейдем к безразмерным величинам (3.2.4).

Подставим значения \bar{M}_{11} из (3.2.47) в первое уравнение из (3.1.36), имея в виду (3.1.37), (3.1.23), (3.2.1), получим следующее уравнение:

$$\frac{d\psi}{d\bar{x}_1} = \frac{T_0 \alpha_i}{2\delta} \left(\bar{x}_1 + \frac{1}{2} \right). \quad (3.2.48)$$

Из второго уравнения (3.1.36) с учетом (3.2.47)₁ получим $\Gamma = 0$. Следовательно, из первого уравнения из (3.1.37), будем иметь

$$\psi = -\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}. \quad (3.2.49)$$

Для функции \bar{w} (с учетом (3.2.48)), приходим к дифференциальному уравнению второго порядка, после интегрирования получим.

$$\bar{w} = -\frac{\alpha_r T_0}{2\delta} \left(\frac{\bar{x}_1^3}{6} + \frac{\bar{x}_1^2}{4} \right) + C_1 \bar{x}_1 + C_2. \quad (3.2.50)$$

Выражение (3.2.50) будем подвергать граничным условиям

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{w} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{x}_1 = 1, \quad \bar{w} = 0, \quad (3.2.51)$$

в результате получим

$$C_2 = 0 \quad \text{и} \quad C_1 = \frac{5\alpha_r T_0}{24\delta}. \quad (3.2.52)$$

Окончательно для \bar{w} будем иметь

$$\bar{w} = -\frac{\alpha_r T_0}{2\delta} \left(\frac{\bar{x}_1^3}{6} + \frac{\bar{x}_1^2}{4} - \frac{5}{12} \bar{x}_1 \right). \quad (3.2.53)$$

Приведем результаты численных вычислений. Расчеты выполнены при тех же значениях параметров (3.2.37):

Таблица 10. Прогибы микрополярной балки по модели со свободным вращением в зависимости от отношения $\frac{\alpha}{\mu}$ и классической балки под действием температуры.

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{W_{\max}^{\text{мик}}}{W_{\max}^{\text{кл}}}$
10^{-5}	1.874	1.888	0.99
10^{-3}	1.077	1.888	0.57
10^{-2}	0.222	1.888	0.12
10^{-1}	0.025	1.888	0.01

Легко убедиться, что при увеличении постоянной упругости α (микрополярной постоянной), жесткость балки сильно увеличивается.

§3.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ БАЛОК СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Теперь, в основу будем принимать основные уравнения обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной термоупругости со стесненным вращением уравнения равновесия (2.1.4)- (2.1.6), физические соотношения термоупругости (2.5.1) для

ортотропного тела или (2.5.2) - для изотропного тела и геометрические соотношения (2.5.3), (2.5.4). Приведем эти уравнения без индекса звездочек в декартовой системе координат:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0; \quad (3.3.1)$$

Геометрические соотношения

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \chi_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \quad \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}. \quad (3.3.2)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right).$$

Физические соотношения микрополярной термоупругости

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + \alpha_{1t}T, \\ \gamma_{22} &= a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + \alpha_{2t}T, & \chi_{13} &= b_{66}\mu_{13}, \\ \tilde{\gamma}_{12} &= \gamma_{12} + \gamma_{21} = 2a_{77}(\sigma_{12} + \sigma_{21}), & \chi_{23} &= b_{44}\mu_{23} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

для ортотропного тела, или

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}] + \alpha_t T, & \gamma_{22} &= \frac{1}{E}[\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] + \alpha_t T, \\ \tilde{\gamma}_{12} &= \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{12} + \sigma_{21}), & \chi_{13} &= B\mu_{13}, \quad \chi_{23} = B\mu_{23}, \quad B = \frac{1}{\gamma + \varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

для изотропного тела.

Эти уравнения будем рассматривать в прямоугольнике $-\frac{a}{2} \leq x_1 \leq \frac{a}{2}, -h \leq x_2 \leq h$

(рис.1).

К уравнениям (3.3.1)-(3.3.4) для обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной термоупругости со стесненным вращением следует присоединить граничные условия (2.1.20)-(2.1.21), либо в смешанном виде.

На лицевых линиях $x_2 = \pm h$ будем считать, что заданы граничные условия типа (3.1.7) (т.е. далее рассмотрим задачу изгиба).

Плотность потенциальной энергии деформации W обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной термоупругости со стесненным вращением будет выражаться так:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \left[\sigma_{11}\gamma_{11} + \sigma_{22}\gamma_{22} + \frac{1}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21})\tilde{\gamma}_{12} + \mu_{13}\chi_{13} + \mu_{23}\chi_{23} \right] - \frac{T}{2} \left[(a_{11}\mathcal{G}_{1t} + a_{12}\mathcal{G}_{2t})\sigma_{11} + \right. \\ &\left. + (a_{12}\mathcal{G}_{1t} + a_{22}\mathcal{G}_{2t})\sigma_{22} \right] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

или

$$W = \frac{1}{2} \left(A_{11} \gamma_{11}^2 + A_{22} \gamma_{22}^2 + 2A_{12} \gamma_{11} \gamma_{22} + \frac{1}{4} \frac{A_{77} A_{88} - A_{78}^2}{A_{88}} \tilde{\gamma}_{12}^2 + B_{44} \chi_{23}^2 + B_{66} \chi_{13}^2 \right) - T(\mathcal{G}_{1r} \gamma_{11} + \mathcal{G}_{2r} \gamma_{22}) \quad (3.3.6)$$

для ортотропного тела либо

$$W = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} \gamma_{11} + \sigma_{22} \gamma_{22} + \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21}) \tilde{\gamma}_{12} + \mu_{13} \chi_{13} + \mu_{23} \chi_{23} \right) - \frac{\alpha_r T}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (3.3.7)$$

или

$$W = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} (\gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2) + \frac{2E\nu}{1-\nu^2} \gamma_{11} \gamma_{22} + \mu \tilde{\gamma}_{12}^2 + \frac{1}{B} (\chi_{13}^2 + \chi_{23}^2) \right\} - \frac{E}{1-\nu} (\gamma_{11} + \gamma_{22}) \alpha_r T \quad (3.3.8)$$

для изотропного тела.

Для построения прикладной модели изгибной деформации микрополярной термоупругости тонкой балки со стесненным вращением в основу будем принимать те же гипотезы, которые были изложены в §3.1 при построении модели термоупругости микрополярной тонкой балки со свободным вращением (конечно, с учетом особенностей теории со стесненным вращением).

На основе кинематической гипотезы для перемещений точек прямоугольника приходим к тем же формулам (3.1.8), (3.1.9).

Используя формулы (3.3.4), (3.1.8) и (3.1.9) для поворота точек прямоугольника вокруг оси x_3 , получим:

$$\omega_3 = \Omega_3(x_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_1} - \psi \right) \quad (3.3.9)$$

На основании формул (3.1.8)₁, (3.1.9) и (3.3.9) для деформаций и изгибов-кручений будем иметь:

$$\gamma_{11} = x_2 \cdot \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{21} = \frac{dw}{dx_1} + \psi, \quad \chi_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}, \quad \chi_{23} = 0. \quad (3.3.10)$$

Если принимать обозначения

$$K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \tilde{\Gamma}_{12} = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \frac{dw}{dx_1} + \psi, \quad k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}, \quad (3.3.11)$$

тогда выражения (3.3.10) можем записать так

$$\gamma_{11} = x_2 \cdot K_{11}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \tilde{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \gamma_{21} = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} = \tilde{\Gamma}_{12}, \quad \chi_{13} = k_{13}, \quad \chi_{23} = 0. \quad (3.3.12)$$

Для силовых и моментных напряжений получим:

$$\sigma_{11} = x_2 \cdot \overset{1}{\sigma}_{11}, \quad \overset{1}{\sigma}_{11} = \overset{1}{\sigma}_{11}(x_1),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^1 &= \frac{1}{a_{11}}(K_{11} - \alpha_{1i}\chi_i) \text{ в случае ортотропного тела,} \\
\sigma_{11}^1 &= E(K_{11} - \alpha_i\chi_i) \text{ в случае изотропного тела;} \\
\sigma_{12} + \sigma_{21}^0 &= \frac{1}{a_{77}}\tilde{\Gamma}_{12} \text{ в случае ортотропного тела,} \\
\sigma_{12} + \sigma_{21}^0 &= 2\mu\tilde{\Gamma}_{12} \text{ в случае изотропного тела;} \\
\mu_{13} &= \frac{1}{b_{66}}k_{13} \text{ в случае ортотропного тела,} \\
\mu_{13} &= \frac{1}{B}k_{13} \text{ в случае изотропного тела,} \\
\mu_{23} &= -x_2\left(\frac{d\mu_{13}}{dx_1} + \sigma_{12} - \sigma_{21}^0\right), \quad \sigma_{22} = -x_2\frac{d\sigma_{12}}{dx_1}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1), \quad \mu_{13} = \mu_{13}(x_1).
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

Для σ_{21} получим аналогичную формулу (3.1.19).

Теперь можем на основе формул для σ_{22} , μ_{23} , σ_{21} удовлетворить граничные условия (3.1.7) (т. е. для задачи изгиба). В результате приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{d\sigma_{12}}{dx_1} = -\frac{q}{2h}, \quad \sigma_{21}^0 - \frac{h^2}{3}\frac{d\sigma_{11}^1}{dx_1} = \frac{1}{2}q_1, \quad \frac{d\mu_{13}}{dx_1} + \sigma_{12} - \sigma_{21}^0 = -\frac{m}{2h}. \tag{3.3.14}$$

Вводим интегральные по толщине прямоугольника усредненные величины (3.1.20).

Имея в виду выше приведенные формулы и выражения (3.1.20) получим:

$$N_{12} = 2h\sigma_{12}, \quad N_{21} = 2h\sigma_{21}^0, \quad M_{11} = \frac{2h^3}{3}\sigma_{11}^1, \quad L_{13} = 2h\mu_{13}. \tag{3.3.15}$$

Из этих формул, определяя σ_{12} , σ_{21}^0 , σ_{11}^1 , и μ_{13} , будем иметь

$$\sigma_{12} = \frac{N_{12}}{2h}, \quad \sigma_{21}^0 = \frac{N_{21}}{2h}, \quad \sigma_{11}^1 = \frac{3}{2h^3}M_{11}, \quad \mu_{13} = \frac{L_{13}}{2h} \tag{3.3.16}$$

и подставляя их в уравнения (3.3.14), получим уравнения равновесия микрополярной термоупругой балки со стесненным вращением. По виду эти уравнения идентичны уравнениям (3.1.24):

На основании формул (3.3.13) легко получить физические соотношения термоупругости микрополярной балки со стесненным вращением для ортотропного тела:

$$N_{12} + N_{21} = h\frac{1}{a_{77}}\tilde{\Gamma}_{12}, \quad M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{1}{a_{11}}(K_{11} - \alpha_{1i}\chi_i), \quad L_{13} = 2h\frac{1}{b_{66}}k_{13} \tag{3.3.17}$$

или

$$N_{12} + N_{21} = 4\mu h \tilde{\Gamma}_{12}, \quad M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}(K_{11} - \alpha_i \chi_i), \quad L_{13} = 2hBk_{13} \quad (3.3.18)$$

для изотропного тела.

К уравнениям равновесия (3.1.24), соотношениям термоупругости (3.3.17) или (3.3.18), необходимо присоединить геометрические соотношения (3.3.11) и (3.3.9), в итоге получим основные уравнения микрополярной термоупругости со стесненным вращением тонких балок.

К основной системе уравнений микрополярной термоупругости тонких балок со стесненным вращением следует присоединить граничные условия (которые и в данном случае имеют вид (3.1.29) либо (3.1.31), либо (3.1.33)).

W_0 - плотность потенциальной энергии деформации микрополярной термоупругости тонких балок со стесненным вращением имеет вид:

$$W_0 = \frac{1}{2} \left[M_{11} K_{11} + \frac{1}{2} (N_{12} + N_{21}) \tilde{\Gamma}_{12} + L_{13} k_{13} \right] - \frac{\alpha_{11} T}{2} M_{11} \quad (3.3.19)$$

для ортотропного случая, а для изотропного тела просто в этом выражении необходимо заменить α_{1i} на α_i .

На основе построенной модели термоупругости микрополярных тонких балок со стесненным вращением рассмотрим некоторые конкретные задачи.

§3.4. ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОГО ИЗГИБА МИКРОПОЛЯРНЫХ ТОНКИХ БАЛОК СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

Рассмотрим те же две задачи параграфа §3.2 о термоупругом изгибе микрополярной балки под действием температуры (3.2.1), но теперь на основе модели со стесненным вращением.

Граничные условия те же, в случае задачи а)-(3.2.2), в случае задачи б)-(3.2.3).

Перейдем к безразмерным величинам (3.2.4).

Сначала рассмотрим задачу а).

Из уравнений равновесия (3.1.24) (когда внешние воздействия отсутствуют), легко получить

$$\bar{N}_{12} = C_1, \quad \frac{d}{dx_1} (\bar{L}_{13} - \bar{M}_{11}) = -C_1, \quad (3.4.1)$$

откуда будем иметь

$$\bar{N}_{12} = C_1, \quad (\bar{L}_{13} - \bar{M}_{11}) = -C_1 x_1 + C_2. \quad (3.4.2)$$

Подставив во втором из уравнений (3.4.2) значения \bar{L}_{13} и \bar{M}_{11} из (3.3.18), будем иметь

$$2\delta B^* \frac{d\Omega_3}{d\bar{x}_1} - \frac{4}{3}(1+\nu)\delta^3 \left[\frac{d\psi}{d\bar{x}_1} - \frac{\delta^{-1}}{2} \alpha_i T_0 \left(\bar{x}_1 + \frac{1}{2} \right) \right] = -C_1 \bar{x}_1 + C_2, \quad (3.4.3)$$

После интегрирования этого уравнения приходим к следующему равенству

$$2\delta B^* \Omega_3 - \frac{4}{3}(1+\nu)\delta^3 \psi = -\frac{1}{3}(1+\nu)\delta^2 \alpha_i T_0 (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1) - \frac{C_1}{2} \bar{x}_1^2 + C_2 \bar{x}_1 + C_3, \quad (3.4.4)$$

из которого можем Ω_3 выразить через ψ :

$$\Omega_3 = \frac{2}{3B^*} (1+\nu)\delta^2 \psi - \frac{1}{6B^*} (1+\nu)\delta \alpha_i T_0 (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1) - \frac{C_1}{4B^*} \delta^{-1} \bar{x}_1^2 + \frac{C_2}{2B^*} \delta^{-1} \bar{x}_1 + \frac{C_3}{2B^*} \delta^{-1} \quad (3.4.5)$$

В (3.4.5) вместо Ω_3 подставим формулу (3.3.9), из полученного равенства выразив

ψ через $\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}$, получим

$$\begin{aligned} \psi = \frac{3}{3B^* + 4(1+\nu)\delta^2} & \left[B^* \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \left(\frac{(1+\nu)}{3} \delta \alpha_i T_0 + \frac{1}{2} \delta^{-1} C_1 \right) \bar{x}_1^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{(1+\nu)}{3} \delta \alpha_i T_0 - \delta^{-1} C_2 \right) \bar{x}_1 - \delta^{-1} C_3 \right] \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Из первого уравнения (3.3.18) и из третьего уравнения из (3.1.24) определив усилие N_{21} , с учетом (3.4.1)₁, будем иметь

$$N_{21} = 4\delta \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi \right) - C_1 \quad (3.4.7)$$

$$N_{21} = \frac{d\bar{L}_{13}}{d\bar{x}_1} + C_1 \quad (3.4.8)$$

Приравнявая выражения (3.4.7) и (3.4.8) и в полученном равенстве подставляя (3.3.18)₃, (3.3.11)₃ и (3.3.9), с учетом (3.4.6) относительно \bar{w} приходим к решению дифференциального уравнения (3.2.16), где

$$\begin{aligned} A &= B^* - \frac{3(B^*)^2}{(3B^* + 4(1+\nu)\delta^2)}, & D &= -4 - \frac{12B^*}{3B^* + 4(1+\nu)\delta^2}, \\ K_1 &= \frac{4(1+\nu)\delta \alpha_i T_0 + 6C_1 \delta^{-1}}{3B^* + 4(1+\nu)\delta^2}, & K_2 &= \frac{4(1+\nu)\delta \alpha_i T_0 - 12C_2 \delta^{-1}}{3B^* + 4(1+\nu)\delta^2}, \\ K_3 &= \frac{2B^*(1+\nu)\delta \alpha_i T_0 + 3B^* \delta^{-1} C_1 - 12\delta^{-1} C_3}{3B^* + 4(1+\nu)\delta^2} - 2\delta^{-1} C_1. \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Общее решение уравнения (3.2.16) имеет вид (3.2.18). Используя (3.2.18) и (3.4.6) получим выражение для ψ , которое подставляя в (3.4.5), будем иметь выражение для Ω_3 .

Удовлетворяя граничные условия жесткого защемления (3.2.2), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений для определения постоянных $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ (отметим, что в коэффициентах (3.4.10) входят некоторые из этих постоянных):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_4 + C_6 = 0 \\ C_4 + C_5 sh\lambda + C_6 ch\lambda + \frac{K_1}{3D} + \frac{K_2}{2D} + \frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} = 0 \\ \lambda C_5 + \frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} - \frac{\delta^{-1}}{B^*} C_3 = 0 \\ \lambda C_5 ch\lambda + \lambda C_6 sh\lambda + \frac{K_1 + K_2 + K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} + \frac{2(1+\nu)\delta\alpha_i T_0}{3B^*} + \\ \quad + \frac{\delta^{-1}}{2B^*} (C_1 - 2C_2 - 2C_3) = 0 \\ \lambda C_5 + \frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} = 0 \\ \lambda C_5 ch\lambda + \lambda C_6 sh\lambda + \frac{K_1 + K_2 + K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} = 0 \end{array} \right. \quad (3.4.10)$$

Из третьего и пятого уравнений следует $C_3 = 0$, а из четвертого и шестого уравнения получим $C_1 = 2C_2 - \frac{4}{3}(1+\nu)\delta^2\alpha_i T_0$.

Подставляя это в (3.4.10), в результате получим следующую систему алгебраических уравнений относительно C_1, C_4 , и C_5 :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_4 + C_5 sh\lambda - C_4 ch\lambda + \frac{K_1}{3D} + \frac{K_2}{2D} + \frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} = 0 \\ \lambda C_5 + \frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} = 0 \\ \lambda C_5 ch\lambda - \lambda C_4 sh\lambda + \frac{K_1 + K_2 + K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} = 0 \end{array} \right. \quad (3.4.11)$$

После решения алгебраической системы уравнений (3.4.11) получим все значения постоянных интегрирования, которые подставляя в формулы (3.4.5), (3.4.6), (3.2.18), получим окончательные выражения для искомых основных функций \bar{w} , ψ_1 и Ω_3 .

В таблице 11 приведены результаты численных вычислений, когда

$$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}, \nu = 0.33, T_0 = 60^\circ \text{ C}, \alpha_i = 125 \times 10^{-7} \text{ 1/гр.}$$

Таблица 11. Прогибы микрополярной балки по модели со стесненным вращением в зависимости от отношения B^* и классической балки под действием температуры.

B^*	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^7$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^7$	$\frac{w_{\max}^{мик}}{w_{\max}^{кл}}$
1.5×10^{-6}	7.891	7.946	0.99
1.5×10^{-5}	7.704	7.946	0.97
1.5×10^{-4}	6.745	7.946	0.85
1.5×10^{-3}	4.564	7.946	0.57
10^{-2}	3.630	7.946	0.46
10^{-1}	2.785	7.946	0.35
1.5×10^{-1}	2.470	7.946	0.31
1	0.899	7.946	0.11
1.5	0.764	7.946	0.10

Как убедимся, при возрастании микрополярной постоянной B^* , жесткость балки существенно увеличивается.

Теперь рассмотрим задачу б).

Из уравнений равновесия (3.1.24) легко получить (т.к. в этом случае $R_A = R_B = 0$):

$$\bar{N}_{12} = 0, \quad \frac{d}{dx_1} (\bar{L}_{13} - \bar{M}_{11}) = 0. \quad (3.4.12)$$

Интегрируя уравнение (3.4.12)₂ получим

$$\bar{L}_{13} - \bar{M}_{11} = C_1.$$

Используя граничные условия (3.2.3)₂ и (3.2.3)₃ будем иметь

$$\bar{L}_{13} - \bar{M}_{11} = 0. \quad (3.4.13)$$

Подставим в (3.4.13) значение \bar{L}_{13} и \bar{M}_{11} из (3.3.18), с учетом (3.3.11)₁, (3.3.11)₃ и

(3.3.9) получим

$$B^* \left(\frac{d^2 \bar{w}}{dx_1^2} - \frac{d\psi}{dx_1} \right) - \frac{4}{3} (1 + \nu) \delta^2 \left(\frac{d\psi}{dx_1} - \frac{\alpha_i T_0}{2\delta} \left(\bar{x}_1 + \frac{1}{2} \right) \right) = 0 \quad (3.4.14)$$

Интегрируем уравнение (3.4.14) по x_1 , в итоге, приходим к следующему равенству,

выражающее ψ через $\frac{d\bar{w}}{dx_1}$:

$$\psi = \frac{3}{3B^* + 4(1+\nu)\delta^2} \left[B^* \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \frac{1+\nu}{3} \delta \alpha_i T (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1) - C_1 \right]. \quad (3.4.15)$$

Подставляя (3.4.15) в (3.3.9) получим выраженное Ω_3 через $\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1}$:

$$\Omega_3 = \frac{2(1+\nu)\delta^2}{B^*(3B^* + 4(1+\nu)\delta^2)} \left[B^* \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \frac{1+\nu}{3} \delta \alpha_i T (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1) - C_1 \right] - \frac{(1+\nu)}{6B^*} (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_1) \delta \alpha_i T_0 + \frac{C_1}{B^*} \quad (3.4.16)$$

Имея в виду, что $\bar{N}_{12} = 0$ ((3.4.12)₁), для \bar{N}_{21} из (3.3.18) будем иметь

$$\bar{N}_{21} = 4\delta \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}_1} + \psi \right) \quad (3.4.17)$$

Также, для этой же величины из (3.2.5)₃ получим

$$\bar{N}_{21} = \frac{d\bar{L}_{13}}{d\bar{x}_1} \quad (3.4.18)$$

Будем приравнять (3.4.17) и (3.4.18) и, в полученном уравнении подставим (3.3.18)₃, (3.3.11)₃, (3.3.9) и (3.4.15), в результате приходим относительно \bar{w} к дифференциальному уравнению третьего порядка типа (3.2.16), где

$$A = B^* - \frac{3(B^*)^2}{3B^* + 4(1+\nu)\delta^2}, \quad D = -4 - \frac{12B^*}{3B^* + 4(1+\nu)\delta^2}, \quad (3.4.19)$$

$$K_1 = K_2 = \frac{4(1+\nu)\delta \alpha_i T_0}{3B^* + 4(1+\nu)\delta^2}, \quad K_3 = \frac{2B^*(1+\nu)\delta \alpha_i T_0 - 12C_1}{3B^* + 4(1+\nu)\delta^2}.$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.2.16) имеет вид (3.2.18).

Подставляя (3.2.18) в (3.4.15) и (3.4.16), получим общие выражения для ψ и Ω_3 .

Удовлетворяя граничные условия шарнирного опирания (3.2.3) приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования (C_1, C_2, C_3, C_4):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 + C_4 = 0 \\ C_2 + C_3 sh\lambda + C_4 ch\lambda + \frac{K_1}{3D} + \frac{K_2}{2D} + \frac{K_3}{D} - \frac{2AK_1}{D^2} = 0 \\ \lambda^2 C_4 + \frac{K_2}{D} + \frac{(1+\nu)\delta \alpha_i T_0}{3B^*} - \frac{\delta^{-1} \alpha_i T_0 (3B^* + 4(1+\nu)\delta^2)}{12B^*} = 0 \\ \lambda^2 C_3 sh\lambda + \lambda^2 C_4 ch\lambda + \frac{2K_1 + K_2}{D} + \frac{(1+\nu)\delta \alpha_i T_0}{B^*} - \frac{\delta^{-1} \alpha_i T_0 (3B^* + 4(1+\nu)\delta^2)}{4B^*} = 0 \end{array} \right. \quad (3.4.20)$$

После решения этой алгебраической системы уравнений получим все значения постоянных интегрирования, которые подставив в соответствующие формулы, получим окончательные выражения для искомых основных функций w , ψ и Ω_3 .

В таблице 12 приведены результаты численных вычислений для тех же данных, что в случае задачи а):

Таблица 12. Прогибы микрополярной балки по модели со стесненным вращением в зависимости от отношения B^* и классической балки под действием температуры.

B^*	микрополярная модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	классическая модель $\bar{w}_{\max} \times 10^3$	$\frac{\bar{w}_{\max}^{мик}}{\bar{w}_{\max}^{кл}}$
1.5×10^{-6}	1.885	1.888	0.99
1.5×10^{-5}	1.838	1.888	0.97
3.125×10^{-5}	1.787	1.888	0.95
1.5×10^{-4}	1.485	1.888	0.79
1.5625×10^{-4}	1.473	1.888	0.78
3.125×10^{-4}	1.208	1.888	0.64
1.5×10^{-3}	0.509	1.888	0.27
1.5625×10^{-3}	0.487	1.888	0.26
3×10^{-3}	0.30	1.888	0.16
3.125×10^{-3}	0.281	1.888	0.15

Легко заметить, что увеличивая микрополярную постоянную B^* , жесткость балки увеличивается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе принимая в основу подходы W. Nowacki и гипотезы, разработанные С. О. Саркисяном (которые адекватны свойствам асимптотического решения в тонких областях трехмерных граничных задач), построены, соответственно, математические модели обобщенного плоского напряженного состояния и изгибной деформации микрополярной термоупругости ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин и изгибной деформации тонких балок как с независимыми полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением. В рамках актуального значения этих исследований, в частности, получены следующие новые результаты:

- построены прикладные модели термоупругости в виде краевых задач систем дифференциальных уравнений обобщенного плоского напряженного состояния и изгибной деформации микрополярных ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением;
- построены прикладные модели термоупругости в виде вариационных принципов обобщенного плоского напряженного состояния и изгибной деформации микрополярных ортотропных (в частности, изотропных) тонких пластин с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением, выведены уравнения, выражающие законы сохранения механической энергии, даются обоснования применимости теорем единственности, взаимности и других энергетических теорем;
- в рамках прикладной модели термоупругого изгиба микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением изучены конкретные задачи прикладного характера, а именно, решены и получены окончательные численные результаты для изгибной деформации прямоугольных и круглых пластин;
- построена прикладная модель в дифференциальной и вариационной формах термоупругости плоской изгибной деформации микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением;
- в рамках прикладной модели термоупругости плоской изгибной деформации микрополярных тонких балок с независимыми полями перемещений – вращений и со стесненным вращением изучены конкретные граничные задачи и получены окончательные численные результаты;
- на основе численного анализа полученных результатов, которые относятся к температурному изгибу микрополярных тонких пластин и балок как с независимыми

полями перемещений и вращений, так и со стесненным вращением, устанавливается одно важное явление физического значения, что учет микрополярных свойств материала, повышает жесткость тонкостенных элементов конструкций. С этой точки зрения поднимается вопрос перед материаловедением о получении таких твердых материалов, которые обладали бы высокими микрополярными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука. 1997. 414 с.
2. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел// Прикладная механика. 2002. Т. 38. № 7. С. 3- 24.
3. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория деформируемых тонкостенных систем//Труды международной школы-конференции молодых ученых. Механика-2009. 28 сентября- 1 октября 2009, Агавнадзор, Армения. С. 5-35.
4. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во НАН РА. 2005. 469с.
5. Агаловян Л. А., Хачатрян Ш. М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния ортотропной полосы//Ученые записки Ереванского ун-та. Естеств. науки. 1977. №1. С. 22-30.
6. Агаловян Л. А., Гулгазрян Л. Г. О частотах собственных колебаний и пограничном слое для ортотропной пластинки в смешанной краевой задаче // Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. №2. С. 32-41.
7. Агаловян М.Л., Геворгян Р.С. Асимптотические решения динамических задач термоупругости для слоистого тонкого тела переменной толщины, состоящего из анизотропных неоднородных материалов// Известия НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №3. С. 17-28.
8. Айрапетян Г. С., Саркисян С.О. Теория микрополярных ортотропных упругих тонких пластин // Известия НАН Армении. Механика. Т.65. №3. 2012. С.22-33.
9. Айрапетян Г. С., Саркисян С.О. Математические модели изгибной деформации и плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных упругих тонких пластин// Перспективные материалы и технологии. Монография. Том 2. Глава 11. Витебск: Изд-во НАН Беларуси. 2015. С. 178-201.
10. Алваджян Ш. И., Саркисян С. О. Прикладные модели статической деформации анизотропных микрополярных упругих тонких стержней//Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. №4. С. 39-62.
11. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Физмат-гиз. 1961. 384с.
12. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1987. 360с.
13. Амбарцумян С. А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во “Гитутюн” НАН Армении. 2013. 222с.

14. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М: Наука. 1977. 272с.
15. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Прикладная микрополярная теория упругих оболочек. Ереван: Изд-во “Гитутюн”. 2010. 136с.
16. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Прикладная микрополярная разномодульная теория оболочек и пластин (под ред. А. С. Аветисяна). Saarbrucken, Deutschland: Palmarium academic publishing. 2016. 200р.
17. Асланян Н.С. Основные уравнения термоупругости микрополярных изотропных тонких пластин// Ученые записки Гюмрийского государственного педагогического института. 2013. Серия А. Т.1. №1. С.103-115.
18. Асланян Н.С. Основные уравнения термоупругости микрополярных тонких пластин при плоском напряженном состоянии// Сборник научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Цахкадзор, Армения 21-26 сентября 2015. С.66-70.
19. Асланян Н.С. Термоупругость обобщенного плоского напряженного состояния микрополярных ортотропных тонких пластин// Ученые записки Ширакского гос. ун-та. 2017. №1. Вып. А. С.33-46.
20. Асланян Н.С., Саркисян С.О. Математическая модель термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин // Известия НАН Армении. Механика. 2013. Т.66. №1. С.34-47.
21. Aslanyan N.S., Sargsyan S.H. General Applied Theory of Thermoelasticity of Micropolar Elastic Orthotropic Thin Plates// Proceedings of the 10th International Congress on Thermal Stresses 2013. May 31-June 4. Nanjing, China. 4p.
22. Aslanyan N.S., Sargsyan S.H. Variation principles of thermoelasticity of applied theory of micropolar orthotropic thin plates// Proceedings of the 11th International Congress on Thermal Stresses 2016 June 5–9, 2016, Salerno, Italy. P.11-14.
23. Асланян Н.С., Саркисян С.О. Математическая модель термоупругости микрополярных тонких балок со стесненным вращением// Ученые записки Ширакского гос. ун-та. 2016. №1, Вып. А. С.27-38.
24. Асланян Н.С., Саркисян С.О. Математическая модель термоупругости изгибной деформации микрополярных тонких балок// Известия НАН Армении. Механика. 2016. Т.69. №4. С.55-71.
25. Aslanyan N.S. Sargsyan S.H. Thermoelasticity of micropolar thin plates// Proceedings of XLV International Summer -School Conference. APM 2017. St. Petersburg. June 22–27, 2017. P. 44-57.

26. Aslanyan N.S., Sargsyan S. H. Thermoelasticity of micropolar thin beams // Journal of Thermal Stresses. 2018. Vol. 41. Issue 6. P.687-705.
27. Асланян Н. С., Саркисян С.О. Термоупругость микрополярных балок и пластин со стесненным вращением // Актуальные проблемы прочности. Монография. В 2-х томах. Том 1. Витебск, Беларусь: НАН Беларуси, Витебский гос. технологический ун-т. Глава 12. С. 210-234.
28. Атоян А. А., Саркисян С. О. Задача динамики тонкой пластинки на основе несимметричной теории упругости// Известия НАН Армении. Механика.Т.57.№2. 2004.С.1-17.
29. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц// ФТТ. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399-1409.
30. Бабич Д. В. О влиянии моментных напряжений на частоты собственных колебаний цилиндрической оболочки// Прикладная механика. 1967. Т. 3. Вып. 4. С. 39-44.
31. Багдасарян Г. Е., Асанян Д. Д. Основные уравнения и соотношения теории несимметричной магнитоупругости ферромагнитного тела// В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во НАН Армении. 2002. С. 37-47.
32. Безухов Н. Н., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. М.: «Машиностроение». 1965.
33. Белов П. А., Лурье С. А. Континуальная модель микрогетерогенных сред// Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 5. С. 833-848.
34. Белубекян М. В., Манукян В. М. О существовании и распространении поверхностных волн с учетом внутреннего вращения// В сб.: “Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести”. Ереван: Изд-во НАН Армении. 2006. С. 92-97.
35. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983. 446с.
36. Беринский И. Е., Иванова Е. А., Кривцов А. М., Морозов Н. Ф. Применение моментного взаимодействия к построению уточненной модели кристаллической решетки графика//Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. №5. С.6-16.
37. Боли Б., Уэйнер Д. Теория температурных напряжений. М.: Изд-во «Мир». 1964. 518с.
38. Болотин В. В. Основные уравнения теории армированных сред// Механика. Полимеров. 1965. №2. С. 27-37.
39. Бровко Г. Л. Об одной конструкционной модели среды Коссера// Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. №1. С.75-91.

40. Бровко Г. Л., Иванова О. А. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной структуры типа Коссера// Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. № 1. С.22-36.
41. Вардамян С. А. Асимптотические решения краевых задач тонких пластин по несимметричной теории термоупругости. Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ-мат. наук по специальности 01.02.04 «Механика деформационного тела». Ереван-2007. 24с.
42. Вардамян С. А., Саркисян С. О. Асимптотический анализ уравнений и граничных условий термоупругости микрополярных тонких пластин// Известия НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. № 3 . С.64-77.
43. Варыгина М. П., Садовская О. В., Садовский В.М. О резонансных свойствах моментного континуума Коссера// Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т.51. № 3. С.126-136.
44. Введение в микромеханику. Под редакцией М. Онами. М.: Металлургия. 1987. 271с.
45. Векуа И. Н. Об одном направлении построения теории оболочек // В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1972. С. 267-290.
46. Винокуров Л. П., Деревянко Н. И. Построение основных уравнений для расчета стержней (без кручения) с учетом моментных напряжений // Прикладная механика. 1966. Т.2. Вып.3. С.72-79.
47. Ворович И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // В сб.: Материалы I-ой Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та. 1975. С.51-149.
48. Ганиев Н. С. К теории пологих оболочек с учетом моментных напряжений // В сб. "Исследования по теории пластин и оболочек". Казань. 1970. Вып.6-7. С.200-207.
49. Геворкян Г. А. Уравнения изгиба пластинки моментной теории упругости// Прикладная механика. 1966. Т.2. Вып. 7. С. 74-79.
50. Геворкян Г. А. Об изгибе пластин с учетом моментных напряжений // Прикладная механика. 1966. Т.2. Вып.10. С.36-43.
51. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
52. Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д., Нольде Е. В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера // Известия АН. СССР. Механика твердого тела. 1990. №6. С.124-138.

53. Грекова Е. Ф., Жилин П. А. Среда Кельвина и ферромагнетики: Определяющие уравнения и волновые процессы // Не линейная акустика твердого тела/ Сб. трудов 8 сессии Российск. акустич. общества .Н.Новгород: Интелсервис. 1998. С.87-90.
54. Григолюк Э. И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика твердого деформируемого тела. М.: ВИНТИ. 1973. Т.5. 199с.
55. Дудников В. А., Назаров С. А. Асимптотически точные уравнения тонких пластин на основе теории Коссера// Докл. АН. СССР. 1982. Т.262. №2. С.306-309.
56. Еремеев В. А., Зубов Л. М. Механика упругих оболочек. М.: Наука. 2008. 280с.
57. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во московск. ун-та. 1999. 327с.
58. Жамакочян К. А. Применение метода степенных рядов для построения прикладной модели микрополярных упругих тонких пластин//Известия НАН Армении. Механика. 2013. Т. 66. №4. С. 49-66.
59. Жилин П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. С Пб.: Изд-во политехн. ун-та. 2016. 167с.
60. Ильюшин А. А. Основные направления развития проблемы прочности и пластичности // Сб.: Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С. 5-18.
61. Ильюшин А. А. Несимметрия тензоров деформаций и напряжений в механике сплошных сред//Вестник московск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 1996. №5. С.6-14.
62. Ильюшин А. А., Ломакин В. А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // В сб.: Прочность и пластичность. М.: Наука. 1971. С. 54-59.
63. Кантор М. М., Никабадзе М.У., Улуханян А.Р. Уравнения движения и граничные условия физического содержания микрополярной теории тонких тел с двумя малыми размерами// Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. №3. С.96-110.
64. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек. Киев: Наук. думка. 1963. 353с.
65. Киракосян Р. М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Изд-во “Гитутюн” НАН Армении. Ереван. 2000. 122 с.
66. Кириллов Ю. В., Постников А. А., Тюленев А. И. Исследования по теории пластин и оболочек моментной теории упругости // В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во. Казанск. ун-та 1990. Вып.20. С. 18-43.
67. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: «Вища школа». 1975. 216с.

68. Койтер В. Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1965. №3. С. 89-112.
69. Корепанов В. В., Кулеш М. А., Шардаков И. Н. Варианты экспериментов по регистрации моментных эффектов в упругих материалах// XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды. Материалы международной конференции. 27 августа-1 сентября 2007г. Саратов, Россия. Изд-во Саратовск. ун-та. С.170-172.
70. Корепанов В. В. Численное обоснование экспериментов по обнаружению эффектов моментного поведения материалов // Вестник ННГУ. 2011. № 4. С.1536-1538.
71. Кулеш М. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н. Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. №5. С. 69-82.
72. Кулеш М. А., Матвеев В. П., Шардаков И. Н. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера//Акустический журнал. 2006. Т.52. №2.С.227-235.
73. Кулеш М. А., Грекова Е.Ф., Шардаков И. Н. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // Акустический журнал. 2009. Т. 55. №2. С. 216-225.
74. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука. 1975. 416с.
75. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М-Л.: ГИТТЛ. 1947. 355с.
76. Манукян В. Ф. О существовании поверхностных сдвиговых волн в микрополярных средах // Известия НАН Армении. Механика. 1997. Т. 50. №2. С.75-79.
77. Маргарян Л.М., Саркисян С.О. Математические модели динамики микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких стержней// Известия НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65. N 1. С. 17-28.
78. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физмат гиз. 1958. 167с.
79. Миндлин Р. Д. Микроструктура в линейной упругости// В сб.: "Механика". Вып. 4. М.: Мир. 1964. С.1929-1960.
80. Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости// Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1964. №4. С.80-114.
81. Мовсисян Л. А. К моментной теории упругости для тонких пластин// Докл. НАН Армении. 1997. Т.99. №2. С.148-152.
82. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука. 1984. 256с.
83. Мутафян М. Н., Саркисян С.О. Асимптотические решения краевых задач тонкого прямоугольника по несимметричной теории упругости // Известия НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №1. С.41-58.

84. Никабадзе М. У., Кантор М. М. Уравнения теории тонких призматических тел с двумя малыми размерами при применении системы ортогональных полиномов// Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященной 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. М.: 20-21 января 2011года. Изд-во МГУ. 2011. С. 418-423.
85. Никогосян Г. С., Саркисян С. О. Об асимптотической теории микрополярных упругих тонких оболочек // Известия НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. №1. С.15-37.
86. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 862с.
87. Новацкий В. Моментные напряжения в термоупругости// Прикладная механика. 1967. Т.3. Вып.1. С.3-17.
88. Пальмов В. А. Основные уравнения теории несимметричной упругости// Прикладная математика и механика. 1964. Т.28. Вып.6. С.1117-1120.
89. Пальмов В. А. Плоская задача теории несимметричной теории упругости// Прикладная математика и механика. 1964. Т.28. Вып.6. С.1117-1120.
90. Пальмов В. А. Простейшая непротиворечивая система уравнений теории тонких упругих оболочек несимметричной упругости// В сб.: Механика деформируемого тела. М.: Изд-во "Наука". 1986. С.106-112.
91. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Изд.-во "Наукова думка". 1973. 248с.
92. Победря Б. Е. Статическая задача несимметричной теории упругости для изотропной среды // Вестник МГУ. Серия I. Математика. Механика. 2005. №1. С.54-59.
93. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. Киев: «Наукова думка». 1978. 344с.
94. Савин Г. Н. Основы плоской моментной теории упругости. Киев. Изд-во Киевск. Ун-та. 1965. 162с.
95. Савин Г. Н., Немиш Ю. Н. Исследования по концентрации напряжений в моментной теории упругости // Прикладная механика. 1968. Т.4. Вып.12. С.1-17.
96. Саркисян А. А. , Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний. // Акустический журнал. 2011. Т. 57. № 4. С. 461-469.
97. Саркисян А. А. , Саркисян С. О. Модель колебаний микрополярных тонких оболочек // Акустический журнал. 2013. Т. 59. № 2.С.170-181.
98. Саркисян А. А., Саркисян С. О. Математическая модель динамики микрополярных упругих тонких балок. Свободные и вынужденные колебания // Физическая мезомеханика. 2015. Т. 18. № 3.С.25-32.

99. Саркисян А. А., Саркисян С. О. Динамическая модель микрополярных пологих оболочек при больших перемещениях// Труды V Международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. 21-26 сентября, 2015. Цахкадзор, Армения. Ереван: НАН Армении. 2015. С.357-365.
- 100.Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд-во Ереванск.ун-та.1976. 534с.
- 101.Саркисян С. О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении. 1992. 260с.
- 102.Саркисян С. О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости// Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып.1. С. 129-147.
- 103.Саркисян С. О. Прикладные одномерные теории стержней на основе несимметричной теории упругости //Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. № 5. С.41-54.
- 104.Саркисян С. О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. № 1. С. 55-66.
- 105.Саркисян С. О. Общая теория тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости со стесненным вращением// Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященной 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 года. С. 231-235.
- 106.Саркисян С. О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады Российской академии наук. 2011. Том 436. № 2. С.195-198.
- 107.Саркисян С. О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик.// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С. 148-156.
- 108.Саркисян С. О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек.//Прикладная математика и механика. 2012. Т.76.Вып. 2. С. 325-343.
- 109.Саркисян С. О. Термоупругость микрополярных тонких оболочек.//Сб. науч. трудов международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”.08-12 октября 2012. Цахкадзор, Армения. Том 2. Ереван: Изд-во ЕГУАС 2012. С.184-188.
- 110.Саркисян С. О. Асимптотически обоснованный метод гипотез построения микрополярной и классической теории упругих тонких оболочек //Известия НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №1. С.54-71.
- 111.Саркисян С. О. Некоторые общие вопросы теории термоупругости микрополярных тонких оболочек //Известия НАН Армении. 2014. Т.67. № 2. С.52-68.

112. Саркисян С. О. Микрополярная стержневая модель для нанокристаллического материала, состоящего из линейных цепочек атомов // Физическая мезомеханика. 2016. Т.19. № 4. С.14-20.
113. Саркисян С. О., Саркисян Л. С. Математические модели магнитоупругости микрополярных электропроводящих (неферромагнитных) тонких оболочек// Известия НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65. №2. С. 34-45.
114. Саркисян С. О., Саркисян Л. С. Математическая модель изгибной деформации магнитоупругости микрополярных электропроводящих (неферромагнитных) тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений // Известия НАН Армении. Механика. 2015. Т. 68. №3. С. 27-45.
115. Саркисян С. О., Хачатрян М. В. Математическая модель и метод конечных элементов кругового упругого стержня по моментной теории упругости // Перспективные материалы и технологии. Монография в 2-х томах. Т. 1. Глава . Витебск, Белорусь. Изд-во НАН. Беларуси. 2018. С.
116. Саркисян С. О., Фарманян А. Ж. Математическая модель микрополярных анизотропных (ортотропных) слоистых пластин// Известия НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65. № 4.
117. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз. 1963. 636с.
118. Тупин Р. А. Теории упругости учитывающие моментные напряжения // Сб. переводов. иностр. статей. "Механика". 1965. №3. С.113-140.
119. Угодчиков А. Г. Моментная динамика линейно-упругого тела// Доклады АН СССР. 1995. Т. 340. №1. С.52-57.
120. Фарманян А. Ж. Математическая модель термоупругости микрополярных ортотропных слоистых тонких оболочек // Ученые записки. Гюмрийский гос. пед. институт им. М. Налбандяна. 2014. Выпуск А. №1. С.75-90.
121. Феодосьев В. И. Соппротивление материалов. М.: Наука. 1986. 512с.
122. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов Отв. ред. В. Е. Панин. Новосибирск: Наука. 1995. Т.1. 298с. Т. 2. 320 с.
123. Хоффмек О. Об изгибе тонких упругих пластинок при наличии моментных напряжений // Прикладная механика. Тр. Америк. об-ва инж.-механиков. Серия Е. 1964. Т.31. №4. С.149-150.
124. Шкутин Л. И. Механика деформаций гибких тел. Новосибирск. Наука, изд. Сибирск. отд. АН СССР. 1988. 128 с.
125. Aghalovyan L.A. Asymptotic Theory of Anizotropic Plates and Shells. World Scientific. 2015. 360p.

126. Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L. G. Non- classical boundary-value problems of the forced vibrations of orthotropic shells // *International sciences journal of Applied Mechanics*. Springer. 2009. Vol. 45. P. 888-903.
127. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates// *Z Angew. Math. Mech. (ZAMM)*. 2009. V.89. №4. P.242-256.
128. Altenbach H, Eremeyev V. Basics of Mechanics of Micropolar Shells, In: *Shell-like Structures. CISM International Centre for Mechanical Sciences (Courses and Lectures)*, ed. by H. Altenbach, V. Eremeyev, (Springer, Cham, 2017) Volume 572. P. 63-112.
129. Ambartsumyan S. A., Avetisyan A.S., Belubekyan M. V. Propagation of Elastic Waves in s Plane Waveguide Layer on the Basis of s Simplified Model of the Cosserat Continuum // *Известия нан Армении. Механика*. 2017. Т. 70. №2. С. 15-27.
130. Baghdasaryan G., Danoyan Z. *Magnetoelastic Waves*, ISSN 1612-1317, Engineering Materials, ISBN 978-981-10-6761-7 Sprider, 2018, 251p.
131. Baghdasaryan G., Mikilyan M. *Effects of Magnetoelastic Interactions in Conductive Plates and Shells*. Springer, ISBN 978-3-319-19161-4, 2016, 289p.
132. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables*. Paris: Hermann efils. 1909. 226p.
133. Dyzlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Berlin: Springer. 2004. P. 332.
134. Eringen A. C. *Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids*. Springer. 1998. 325 P.
135. *Mechanics of Generalized Continua: One Hundred years After the Cosserats*. Springer. 2010. 337p.
136. Forest S., Barbe F., Cailletaud G. Cosserat modeling of size effects in the mechanical behavior of polycrystals and multi-phase materials// *Int. J. Solids and Struct.* 2000. V.37. №46-47. P.7105-7126.
137. Gauthier R. D., Jahsman W. E. A quest for Micropolar Elastic Constants. P. 1// *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1975. Vol.97. №2. P.369-374.
138. Georgiadis H. G., Velgaki E. G. High-frequency Rayleigh waves in materials with micro-structure and coupl-stress effects//*Int J. Solids and Struct.* 2003. V. 40. № 10. P.2501-2520.
139. Green A. E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells // *Proc. Roy. Soc. Ser. A*. 1962. Vol.226. №1325. P. 143-160.
140. Green A. E., Naghdi P. M. The Linear Elastic Cosserat Surface and Shell Theory // *Int. J. Solids and Struct.* 1968. V.4. P.585-592.
141. Iesen D. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids//*Archives of Mechanics*. 1973. Vol.5. №3. P.547-561.
142. Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders// *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*. 1974. V. 54. N12. P. 773-779.

143. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Noldé E. V. Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. Academic Press. 1998. 225p.
144. Kienzler R. On consistent second-order plate theories// Lecture notes in applied and computational mechanics. Theories of plates and shells. Springer. 2002. Vol.16. p. 85-97.
145. Lakes R. S. Experimental Methods for study of Cosserat Elastic Solids and Other Generalized Elastic Continua// Continuum Models for Materials with Micro-Structure (Edited by H. Muhlaus, J. Wiley). New-York, 1995. P. 1-22.
146. Lakes R. S., Yang J. F. C. Micropolar elasticity in bone: rotation modulus// Proceedings 18th Midwest Mechanics Conference. Developments in Mechanics. 1983. P. 239-242.
147. Neff P. A geometrically exact planar Cosserat shell-model with microstructure: existence of minimizers for zero Cosserat couple modulus// Math. Models ,Methods Appl. Sci. 2007. V.17. № 3. P. 363-392.
148. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. 383 P.
149. Reissner E. On the Theory of Bending of Elastic Plates // J. Math. and Phys. 1944. V. 23. P. 184-191.
150. Rubin M. B. Cosserat Theories: Shells, Rods and Points. Dordrecht: Kluwer. Acad. Pub. 2000.
151. Sargsyan A. H., Sargsyan S. H. General Dynamic Theory of Micropolar Elastic Thin Plates with Free Rotation and Special Features of Their Natural Oscillations// Acoustical Physics. 2011. Vol. 57. №4. P.473-481.
152. Sargsyan A. H., Sargsyan S. H. Model of Micropolar Thin Shell Oscillations // Acoustical Physics. 2013. Vol. 59. №2. p.148-158.
153. Sargsyan A. H., Sargsyan S. H. Dynamic model of micropolar elastic thin plates with independent fields of displacements and rotations//Journal of Sound and Vibration. 2014. Vol.333. №18. P.4354-4375.
154. Sargsyan A. H., Sargsyan S. H. Mathematical Model of the Dynamics of Micropolar Elastic Thin Beams. Free and Forced Vibrations// Physical Mesomechanics. 2016. Vol.19. №4. P.459-465.
155. Sargsyan S. H. On Some Interior and Boundary Effects in Thin Plates Based on the Asymmetric Theory of Elasticity// Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Vol. 16./ Theories of Plates and Shells. Critical Review and New Applications. Springer. 2004. P. 201-210.
156. Sargsyan S. H. Analytical Mechanics of Bars, Plates and Shells on Asymmetrical Theory of Elasticity// Abstract Book. XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. ICTAM 2008. August 24-29, 2008. Adelaide, Australia. Abstracts book. P.228.

- 157.Sargsyan S. H. Thermoelasticity of Thin Shells on the Basis of Asymmetrical Theory of Elasticity// Journal of Thermal Stresses. 2009. V.32. №8. P.791-818.
- 158.Sargsyan S. H. The General Dynamic Theory of Micropolar Elastic Thin Shells// Doklady Physics, 2011. Vol.56. №1. P.39-42.
- 159.Sargsyan S. H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells// Advanced Structured Materials. Vol.15. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer. 2011. Chapter 8. P.91-100.
- 160.Sargsyan S. H. Mathematical model of micropolar elastic thin plates and their strength and stiffness characteristics//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol.53. № 2. P.275-282.
- 161.Sargsyan S. H. General theory of micropolar elastic thin shells// Journal of Physical Mezomechanics. 2012. Vol.15. №1-2. P.69-79.
- 162.Sargsyan S. H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. № 1. P.98-108.
- 163.Sargsyan S. H. The theory of micropolar thin elastic shells // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol.76. № 2. P. 235-249.
- 164.Sargsyan S. H. General Theory of Thin Plates on the Basis of Nonsymmetric Theory of Elasticity//Journal Mechanics of Solids, 2012 Vol.47. №1. P.119-136.
- 165.Sargsyan S. H. Theory of ferromagnetic micropolar elastic thin shells, plates and bars// Abstract Book. 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. August 19-24, 2012. Beijing. China. P.234.
- 166.Sargsyan S. H. Mathematical Model of Micropolar Thermo-Elasticity of Thin Shells// Journal of Thermal Stresses. 2013. Vol.36. №11. P.1200-1216.
- 167.Sargsyan S. H. Energy balance equation,energetic theorems and Variation equation for the general theory of micropolar elastic isotropic thin shells// Internat. Journal of Mechanics. 2014. Vol.8. P.93-100.
- 168.Sargsyan S. H. Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells// Advances in Pure Mathematics. 2015. Vol.5. №10. P.629-643.
- 169.Sargsyan S. H. Geometrically Nonlinear Theory of Statics and Dynamics of Micropolar Elastic Thin Plates and Sloping Shells//24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. ICTAM 2016. August 21-26, 2016. Montreal, Canada. Book of Papers. P. 2550-2551.

- 170.Sargsyan S. H. The construction of Timoshenko type theory for elastic multilayered shells// Proceedings of The 11 th International Conference "Shell Structures: Theory and Applications" (SSTA 2017), October 11-13, 2017, Gdansk, Poland. Vol. 4. P. 157-160.
- 171.Sargsyan S. H., Farmanyan A. J. General dynamic theory of micropolar elastic orthotropic multilayered thin shells// Shell Structures. Theory and Applications. Vol.3. 2014. Taylor. P.89-91.
- 172.Sargsyan S. H., Margaryan L. M. Mathematical Model of Dynamics of Micropolar Orthotropic Elastic Thin Bars with Free Fields of Displacements and Rotations.//Journal of Mechanics Engineering and Automation. 2012. Vol.2. №2. P.110-118.
- 173.Sargsyan L. S., Sargsyan S. H. Magnetoelasticity of Thin Shells and Plates Based on the Asymmetrical Theory of Elasticity// Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After the Cosserats. Advanced in Mechanics and Mathematics. 2010. Vol.21. Springer. P.325-337.
- 174.Sargsyan S. H., Zhamakochyan K. A. Finite Element Method for Solving Boundary Value Problems of Bending of Micropolar Elastic Thin Bars//Proceedings of the XLII Summer School-Conference. Advanced Problems in Mechanics.APM 2014.St.Petersburg June 30-July 5. 2014. P.427-434.
- 175.Sargsyan S.H., Zhamakochyan K.A. Applied Theory of Micropolar Elastic Thin Plates With Constrained Rotation and the Finite Element Method// Materials Physics and Mechanics. 2018. V. 35. P.145-154.
- 176.Schwartz L. M., Jonson D. L., Feng S. Vibrational models in granular materials// Physical Review Letter. 1984. 52(10). P. 831-834.
- 177.Truesdell C., Toupin R. A. The classical field theories// Handbuch der physics. Berlin: Springer. 1960. Vol. 3/1. S. 226-793.
- 178.Ostoja-Starzewski M., Jasiuk I. Stress invariance in planar Cosserat elasticity// Proc. Roy. Soc. London. A. 1995. 451. P. 453-470.
- 179.Voigt W. Theoretische Studien uber die Elastizitats varhaltnisse der Kristall. Abh. Ges. Wiss. Gottingen, 1887. Bd. 34.