НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

На правах рукописи

САГАТЕЛЯН ТИГРАН МИКАЕЛОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И СХОДИМОСТИ В ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

На соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности А.01.01 « Математический анализ »

Научный руководитель-

доктор физ.-мат. наук,

профессор С. А. Епископосян

ЕРЕВАН - 2018

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена важной и бурно развивающейся области теории функций- теории ортогональных рядов. В настоящее время в теории ортогональных рядов ведутся интенсивные и плодотворные исследования. Это вызвано как чисто теоретическими интересами, так и важностью приложений в физике, вычислительной математике, теории вероятностей, теории информации.

Возникшая еще в середине XVIII века теория представления функций тригонометрическими рядами была в центре внимания многих выдающихся математиков (Л.Эйлер, Ж. Фурье, П. Дирихле, Г. Риман, Н. Лузин, Д. Меньшов, П. Ульянов, А. Талалян и другие), и до сих пор остается одной из актуальных областей теории функций.

В 1923 г. Дж. Уолшем была введена система функций, как упрощенный аналог тригонометрической системы, которая известна как система Уолша [1]. В 1932 г. Р. Пэли предложил иной порядок нумерации функций, оказавшийся более удобным, и сейчас, говоря о системе функций Уолша, подразумевают именно систему Уолша — Пэли. Если тригонометрическая система функций издавна широко используется для представления аналоговых сигналов, то для представления цифровых сигналов и их анализа более удобна, в силу своих свойств, система функций Уолша. Определяется она следующим образом [2]:

Определение 1. Возьмем

$$W_0(x) \equiv 1 .$$

Для любого натурального числа n такого, что

$$n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_s} , m_1 > m_2 > \cdots > m_s \geq 0,$$

положим

$$W_n(x) = r_{m_1}(x) \cdot r_{m_2}(x) \cdot \cdots \cdot r_{m_s}(x),$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ - система Радемахера:

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x),\ r_k(x) = r_0(2^k x),\quad k = 0,1,2,\dots .$$

Система Кристенсона-Леви порядка a (см. [3], [4]) служит обобщением классической системы Уолша в нумерации Пэли. Она находит столь же широкое , как и система Уолша применение при цифровой обработке информации. Если классическая система одна, то систем Кристенсона-Леви бесконечно много: каждая из них строится для своего натурального числа $a > 2$. В технических приложениях при реализации на ЭВМ чаще берут $a = 3$.

Пусть $a \geq 2$ фиксированное натуральное число и $\omega_a = e^{\frac{2\pi}{a}i}$.

Определение 2. *Возьмем*

$$\varphi_0^{(a)}(x) = \omega_a{}^k, x \in \left[\frac{k}{a}, \frac{k+1}{a}\right), k = 0,1,\dots,a-1$$

и для $n \geq 0$ *положим*

$$\varphi_n^{(a)}(x+1) = \varphi_n^{(a)}(x) = \varphi_0^{(a)}(a^n x) .$$

Тогда система Кристенсона-Леви порядка a определяется следующим образом:

Определение 3. *Положим* $\psi_0^{(a)}(x) \equiv 1$.

Если

$$n = \beta_1 a^{n_1} + \dots + \beta_s a^{n_s}, n_1 > n_2 > \dots > n_s, s = 1,2,\dots,$$

где $0 \leq \beta_j < a$, $j = 1,2,\dots,s$, *то*

$$\psi_n^{(a)}(x) = \left(\varphi_{n_1}^{(a)}(x)\right)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \left(\varphi_{n_s}^{(a)}(x)\right)^{\beta_s}.$$

Отметим, что Ψ_2 является классической системой Уолша, а система Ψ_a является частным случаем системы Виленкина.

Замечание. *Система Кристенсона-Леви* Ψ_a, $a \geq 2$ *является полной ортонормированной системой в* $L^2(0,1)$ *и базисом в* $L^p(0,1)$, $p > 1$ *(см. [3]).*

Основные свойства системы Ψ_a получены Г.Кристенсоном, Р.Пэли, Ж. Файном, К. Ватари, Н. Виленкиным и другими математиками (см. [2]- [9]).

В главе 1 диссертационной работы рассматриваются ряды по системе Кристенсона-Леви с монотонными коэффициентами, а также вопросы сходимости и интегрируемости сумм таких рядов.

Отметим, что вопросы сходимости ортогональных рядов с монотонными коэффициентами служили предметом многих исследований. Известно (см. [11], стр. 95), что ряды с монотонно стремящимися к нулю коэффициентами по тригономерической системе сходятся всюду на $(0,2\pi)$, кроме , быть может, одной точки 0, а ряды по системе Хаара с монотонными коэффициентами сходятся почти всюду на $(0,1)$ тогда и только тогда, когда они являются рядами Фурье класса $L_2\,(0,1)$ [11]. Уже эти результаты указывают, что свойства ортогональных рядов с монотонными коэффициентами существенно зависят от вида рассматриваемых систем. Эти вопросы тесно связаны с теорией приближения, в частности с m-членным приближением и так называемым жадным или гриди алгоритмом (от англ. greedy algorithm). Подробно о жадном алгоритме можно найти в книге В. Темлякова [13] .

Теория приближения относится к тем областям математики, которые тесно связаны с прикладными задачами естествознания и техники. Увеличение мощности вычислительных систем, происходившее в последние десятилетия, позволило приступить к решению новых более вычислительно-емких задач. Одной из них является построение "индивидуального приближения" для заданной функции f из некоторого класса K .

Начиная с 80-х годов XX века, в рамках математической статистики и теории приближения стали интенсивно изучаться жадные алгоритмы, что, с одной стороны, дало теоретическое обоснование ряда методов вычислительной математики, а, с другой стороны, позволило получить конструктивные способы нахождения наилучших m-членных приближений.

Далее, назовем последовательность действительных чисел $\{\mathcal{B}_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно убывающей, если $\Delta\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n - \mathcal{B}_{n+1} \geq 0$, при $n \geq 0$. Если при этом

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{B}_n = 0$, то напишем $\mathcal{B}_n \downarrow 0$.

Теорема (A). *Если* $\mathcal{B}_n \downarrow 0$, *то ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x) \tag{1}$$

сходится на интервале $(0,1)$ *причем на любом интервале вида,* $(\delta, 1)$ *где* $0 < \delta < 1$, *ряд сходится равномерно.*

Замечание. *Доказательство Теоремы (A) для случая системы Уолша–Пэли и системы Виленкина были получены А. Шнейдером [14] и Н. Виленкиным [7].*

Отметим, что при условиях Теоремы (A), сумма ряда (1) может не принадлежать $L^1(0,1)$, т.е. не быть интегрируемой по Лебегу на $(0,1)$.

А именно имеет место следующее утверждение:

Теорема (B). *Существует такая монотонно стремящаяся к нулю последовательность* $\{\mathcal{B}_n\}_{n=0}^{\infty}$, *такая, что функция*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

не интегрирема на интервале $(0,1)$.

Для системы Уолша–Пэли Теорема (B) была доказана А. Рубинштейном [15], а для системы Виленкина (в частности для системы Кристенсона–Леви) доказательство можно получить из результатов Н. Виленкина [7].

Таким образом чтобы ряд (1) был интегрируем, нужно наложить некоторые условия на коэффициенты ряда. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Пусть последовательность* $\mathcal{B}_n$ *монотонно убывает и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} \tag{2}$$

тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$ *сходится к суммируемой функции и является ее рядом Фурье по системе* Ψ_a .

Замечание. *Теорема 1.1. является обобщением Теоремы 7.1.3 для случая системы Уолша–Пэли (см.* [10], *с. 151), аналог которой для системы Уолша–Качмажа доказан Л. Балашовым* [16].

Отметим, что условие (2) в Теореме 1.1 нельзя ослабить. Это утверждение для ортонормированных систем следует из более общих результатов А. Олевского [17], а для системы Уолша - Пэли из работы А. Рубинштейна [15].

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.2. *Существует монотонно убывающая, стремящаяся к нулю последовательность* $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} = \infty ,$$

а сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x) \tag{3}$$

не принадлежит классу $L^1(0,1)$*, т.е. не является рядом Фурье по системе Кристенсона - Леви некоторой функции из класса* $L^1(0,1)$*, несмотря на то, что ряд (3) сходится всюду на* $(0,1)$ *и равномерно на любом интервале* $(\delta, 1)$*, где* $0 < \delta < 1$.

И в конце главы 1 доказано следующее утверждение:

Теорема 1.3. *Если* $\mathcal{B}_n \downarrow 0$*, то функция*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x) \tag{4}$$

принадлежит пространству $L^p(0,1)$, $\forall\, p \in (0,1)$*, причем имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 | \mathcal{S}_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0$$

где $\mathcal{S}_n(x)$ *- n-ая частичная сумма ряда (4).*

Замечание . *Теорема 1.3. является обобщением Теоремы 7.1.7 для случая системы Уолша - Пэли (см.* [10]*, с. 157).*

В главе 2 диссертационной работы рассматриваются вопросы поточечной универсальности, а также топологической транзитивности частичных сумм рядов Фурье функций класса $L^p(0,1), p \geq 1$ по системе Кристенсона-Леви порядка $a \geq 2$. Аналогичные вопросы для класса непрерывных функций по тригонометрической системе и по системе Кристенсона-Леви $\Psi_a, a \geq 2$, рассмотрены в работах [18] - [20] Ю. Мюллером и С. Епископосяном.

Формулируются эти понятия следующим образом:

Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ некоторые метрические пространства, а $\mathbb{T}_n: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}, n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, некоторые непрерывные отображения (см. [21], [22]) .

Определение 4. *Скажем, что элемент $x_0 \in \mathbb{X}$ **универсален** в $\mathbb{Y}$ относительно $\{\mathbb{T}_n\}$, если множество $\{\mathbb{T}_n\, x_0 :\ n \in \Lambda\}$ всюду плотно в $\mathbb{Y}$.*

Определение 5. *Пусть $\mathbb{T}_n: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ непрерывное отображение между метрическими пространствами $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$. Тогда $\mathbb{T}_n$ называется **топологически транзитивным**, если для любых непустых, открытых множеств $U \subset \mathbb{X}$ и $V \subset \mathbb{Y}$ существует некоторое число $n \geq 0$ такое, что*

$$\mathbb{T}_n(U) \cap V \neq \emptyset,$$

т.е. для любых $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{X}$ и $y \in \mathbb{Y}$ существуют $x_0 \in \mathbb{X}$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\rho\,(x, x_0) < \varepsilon \ \text{ и } \ \rho\,(\mathbb{T}_n(x_0), y) < \varepsilon.$$

Далее, для функции $f \in L^p(0,1), p \geq 1$ определим частичную сумму ряда Фурье по системе Ψ_a следующим образом:

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{c}_k(f) \cdot \psi_k^{(a)}(x)\ , \text{где } \mathrm{c}_k(f) = \int_0^1 f(x) \cdot \overline{\psi_k^{(a)}(x)}\, dx, k \geq 0\, .$$

Пусть $E = \{x_1, x_2 \cdots\} \subset (0,1)$- счетное множество. Обозначим через $\mathbb{C}^E$ множество всех функций h определенных на E и принимающие комплексные значения, т.е. $h(x_k) = y_k \in \mathbb{C}, x_k \in E,\ k = 1,2,\dots,$

Определение 6. *Пусть $E \subset (0,1)$-счетное множество. Для множества индексов $\Lambda \subset \mathbb{N}$ и некоторой функции $f \in L^p(0,1)$ скажем, что множество $\{S_n(f,x)\}_{n\in\Lambda}$* ***поточечно универсально*** *в $\mathbb{C}^E$, если множество $\{S_n(f,x)_E : n \in \Lambda\}$ плотно в $\mathbb{C}^E$, т.е. для любых $h: E \to \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$ существует $\{n_k\} \subset \Lambda$ такое, что $|S_{n_k}(f,x) - h(x)| < \varepsilon$ $\forall\, x \in E$.*

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Для любого счетного множества $E \subset (0,1)$ существует плотное G_δ множество $M \subset L^p(0,1)$ обладающее следующим свойством: последовательность частичных сумм ряда Фурье по системе Ψ_a любой функции из M является точечно универсальной в $\mathbb{C}^E$.*

Из этой теоремы, в частности следует, что для любого счетного множества E, система Кристенсона–Леви топологически транзитивна для пары $\{L^p(0,1)\,;\,\mathbb{C}^E\}$.

Глава 3 диссертационной работы посвящена вопросам представления функций рядами по системе Кристенсона-Леви. С проблемой представления тесно связан вопрос существования так называемых разных типов универсальных рядов относительно данной системы.

Пусть $\mu(x)$ – измеримая на $(0,1)$ положительная функция . Обозначим $L^p_\mu(0,1) = \left\{f(x);\ \int_0^1 |f(x)|^p\,\mu(x)dx < \infty\right\}.$

Определение 7. *Скажем, что функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k \in L^p_\mu(0,1), p \geq 1 \tag{5}$$

универсален в $L^p_\mu(0,1)$ относительно перестановок, если для любого

$f(x) \in L^p_\mu(0,1)$ члены ряда (5) можно переставить так, что вновь полученный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x)$$

сходится к функции $f(x)$ по норме $L^p_\mu(0,1)$.

Определение 8. *Скажем, что (5) универсален в $L^p_\mu(0,1)$ относительно знаков, если для любого $f(x) \in L^p_\mu(0,1)$ можно найти набор знаков $\varepsilon_k = \pm 1$ так, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k f_k(x)$$

сходится к $f(x)$ по норме $L^p_\mu(0,1)$.

Определение 9. *Скажем, что (5) универсален в $L^p_\mu(0,1)$ относительно подрядов , если для любого $f(x) \in L^p_\mu(0,1)$ из ряда (5) можно выделить подряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_{k_j}(x)$$

который сходится к $f(x)$ по норме $L^p_\mu(0,1)$.

В 3 главе диссертации доказывается, что существуют ряды по системе Кристенсона-Леви универсальные в $L^p_\mu(0,1)$, $1 \le p < \infty$ относительно знаков, перестановок и подрядов.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 3.1. *Существует ряд по системе Кристенсона-Леви вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \psi_k^{(a)}(x),\ c \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^r < \infty,\ \forall\ r > 2,$$

со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция

$\mu(x)$, $0 < \mu(x) \le 1$, $mes\{x \in (0,1): \mu(x) \ne 1\} < \varepsilon$

так, что ряд является универсальным в $L^p_\mu(0,1)$, $1 \le p < \infty$ относительно знаков (перестановок и подрядов) .

Теорема 3.1. следует из более общей теоремы , формулировка которой такова:

Теорема 3.2. *Существует ряд по системе Кристенсона-Леви вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k \psi_k^{(a)}(x), |\mathcal{C}_k| \searrow 0 \text{ с } \sum_{k=0}^{\infty} |\mathcal{C}_k|^r < \infty, \forall\ r > 2,$$

со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция

$\mu(x), 0 < \mu(x) \le 1, mes\{x \in (0,1): \mu(x) \ne 1\} < \varepsilon$

так, что ряд является универсальным относительно знаков, перестановок и подрядов, во всех весовых пространствах в $L_\mu^p(0,1)$, $1 \le p < \infty$.

Замечание. *Отметим, что этот результат невозможно усилить в том смысле, что в нем невозможно заменить $L_\mu^p(0,1)$ на $L^p(0,1)$ при $1 < p < \infty$.*

Действительно, если бы существовало число $1 \le p < \infty$ и ограниченная ортонормированная система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x \in (0,1)$, такие, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k f_k(x)$$

являлся универсальным в $L^p(0,1)$ относительно частичных рядов, то для функции $(1 + |\mathcal{B}_1|) f_1(x)$ существовало бы возрастающая подпоследовательность $s_k \nearrow \infty$, такая что

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m} \mathcal{B}_{s_k} f_{s_k}(x) - (1 + |\mathcal{B}_1|) f_1(x) \right|^p dx = 0$$

откуда сразу получим

$$1 + |\mathcal{B}_1| = \begin{cases} \mathcal{B}_1, \text{если } s_1 = 1, \\ 0, \text{если } s_1 \ne 1. \end{cases}$$

что невозможно.

Замечание. *Теорема 3.2 для системы Уолша когда $a = 2$ доказана в работе [38] М. Григоряном и З. Давтян.*

Определение 10. Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$- некоторая система функций, определенных на $(0,1)$. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$$

называется нуль – рядом в смысле сходимости почти всюду (по мере, по L^1_μ-метрике), если ряд сходится к нулю почти всюду (соответственно по мере, по L^1_μ - метрике), хотя не все ее коэффициенты равны нулю.

Из теоремы 3.2, в частности, следует существование нуль рядов по системе Кристенсона-Леви в смысле сходимости по метрике $L^p_\mu\ (0,1)$.

Проблема существования нуль-рядов играет важную роль, так как она, в частности, непосредственно связана с проблемой единственности представления функций в ряд. Отметим, что вопросам о существовании нуль-рядов по разным классическим системам (Уолша, Хаара, Франклина, Кристенсон-Леви) посвящено много работ (см. [23] - [29]).

Первый тригонометрический нуль – ряд в смысле сходимости почти всюду, был построен Д.Е. Меньшовым [23]. Далее А.А. Талалян [24] доказал существование нуль – рядов по произвольной ортонормированной полной в L^2 системе в смысле сходимости по мере.

Как показал Б.С. Кашин [25] , здесь нельзя сходимость по мере заменить сходимость по мере сходимостью почти всюду.

А.А. Шнейдер [26] доказал, что аналогичные результаты справедливы и для рядов по системе Уолша в нумерации Пэли.

Очевидно, что нельзя построить нуль – ряд в смысле сходимости по метрике L^1. Но тем не менее, в некоторых весовых пространствах L^1_μ возможно построить нуль – ряды по некоторым системам. В работах [28] и [29] доказаны существование таких рядов по тригонометрической системе и по системе Кристенсона-Леви в весовых пространствах L^1_μ.

Из теоремы 3.2 следует следующее утверждение:

Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция

$\mu(x)\,, 0 < \mu(x) \leq 1\,, mes\{x \in (0,1): \mu(x) \neq 1\} < \varepsilon$
такая, что в весовом пространстве $L^p_\mu\ (0,1)$ можно построить нуль-ряд по обобщенной системе Уолша, а именно существует ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x) \ \text{ с } \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| > 0 \,,$$

который сходится к нулю по метрике $L_{\mu}^{p}(0,1)$.

В главе 4 диссертации рассматриваются вопросы равномерной сходимости двойных рядов Фурье по системе Ψ_a после исправления функции .

Пусть $G \subseteq (0,1)^2$ множество измеримое по Лебегу и пусть $L^p(G)$, $p \in (1,\infty)$ - класс всех тех измеримых функций $f(x,y)$ определенных на множестве G, для которых

$$\int\int_G |f(x,y)|^p dxdy < \infty$$

Определение 9. Примем, что все ненулевые члены в последовательности $\{\mathcal{D}_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям, если из

$$k_2 \geq k_1, \quad s_2 \geq s_1, \qquad k_2 + s_2 > k_1 + s_1, \qquad \mathcal{D}_{k_2,s_2} \neq 0, \mathcal{D}_{k_1,s_1} \neq 0$$

следует, что $\mathcal{D}_{k_2,s_2} < \mathcal{D}_{k_1,s_1}.$

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, - ортонормированная система функций. Коэффициенты Фурье функции $f(t,\tau) \in L^1(0,1)^2$ по двойной ортонормированной системе $\{w_k(x) w_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ обозначим через

$$c_{k,s}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(t,\tau)\overline{w_k(t) w_s(\tau)} dt d\tau.$$

Положим

$$spec(f) = \Big\{(k,s), c_{k,s}(f) \neq 0, \qquad k,s \ \in \mathbb{N} \cup \{0\}\Big\}.$$

Прямоугольные и сферические частичные суммы двойного ряда Фурье по двойной системе $\{w_k(x) w_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ определяются соответственно следующим образом:

$$S_{N,M}(x,y,f) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{s=0}^{M} c_{k,s}(f)\, w_k(x) w_s(y),$$

$$S_R(x,y,f)=\sum_{k^2+s^2\le R^2} c_{k,s}(f)w_k(x)w_s(y).$$

Определение 2. *Говорят, что двойной ряд Фурье по системе* $\{w_k(x)w_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ *сходится (равномерно, по* $L^p(G)$ *норме , почти всюду к функции* f *по прямоугольникам или по Прингсхейму, если*

$$\lim_{N,M\to\infty} S_{N,M}(x,y,f)=f(x,y)$$

(соответственно, равномерно по $L^p(G)$ *норме и почти всюду. Аналогичным образом определяется сходимость двойных рядов Фурье (равномерной, по* $L^p(G)$ *номере и почти всюду) в случае сферических и квадратных сумм.*

В работе [30] С. Епископосяном для одномерной системы Кристенсона-Леви получен следующий результат.

Теорема (Епископосян). *Для любых чисел* $0<\varepsilon<1$ *,* $p\in\mathbb{N}$ *и функции* $f(x)\in L^p(0,1)$, *существует функция* $g(x)\in L^\infty(0,1)$ *с* $mes\{x\in(0,1):\ f(x)\neq g(x)\}<\varepsilon$ *такая , что ее ряд Фурье по системе Кристенсона-Леви сходится к* $g(x)$ *равномерно на* $(0,1)$, *а последовательность коэффициентов* $\{|c_k(g)|, k\in spec(g)\}$ *убывает.*

Естественно возникает следующий вопрос:

Существует ли измеримое множество Е сколь угодно малой меры такое, что после изменения значений любой функции из класса $L^p(0,1)^2$, $p\ge 1$ на E:

1)Двойной ряд Фурье измененной функции по системе Ψ_a по сферам (прямоугольникам, квадратам) сходился бы к ней равномерно?

2) Все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по двойной системе Ψ_a по модулю были бы расположены в убывающем порядке по всем направлениям ?

3) Исправленная функция имела бы заданные модули коэффициентов Фурье по системе Ψ_a?

4) Зависит ли исключительное множество *E*, на котором происходит

изменение, от исправленной функции f, или оно универсально – обслуживает целый функциональный класс?

Имеет место следующая теорема:

Теорема 4.1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и для каждой функции* $f \in L^0(0,1)^2$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\,\{f \neq f\} < \varepsilon$ *такую, что ее ряд Фурье по двойной системе* Ψ_a *по сферам сходится к ней равномерно на* $(0,1)$, *и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье по двойной системе* Ψ_a *вновь полученной функции по модулю расположены в убывающем порядке по всем направлениям.*

Теорема 4.2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и для каждой функции* $f \in L^0(0,1)^2$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\,\{f \neq f\} < \varepsilon$ *такую, что ее ряд Фурье по двойной системе* Ψ_a *по прямоугольникам сходится к ней равномерно на* $(0,1)$, *и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье по двойной системе* Ψ_a *вновь полученной функции по модулю расположены в убивающем порядке по всем направлениям.*

Теоремы 4.1 и 4.2 следуют из более общей теоремы. А именно имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Существует ряд по двойной системе Кристенсона-Леви вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\mathcal{D}_{k,s}\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y), \qquad \text{с} \quad \sum_{k,s=0}^{\infty}\left|\mathcal{D}_{k,s}\right|^{2+\delta} < \infty, \qquad \forall\,\delta > 0$$

со свойством:

1) все ненулевые члены в последовательности $\{|\mathcal{D}_{k,s}|\}$ *расположены в убывающем порядке по всем направлениям;*

2) для любого $\varepsilon > 0$ *и для каждой функции* $f \in L^0(0,1)^2$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\,\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ *такую,что ее ряд Фурье по двойной системе Кристенсона-Леви как по сферам, так и по прямоугольникам сходится к ней равномерно на* $(0,1)^2$ *и* $\mathcal{C}_{k,s}\,(\tilde{f}) = \mathcal{D}_{k,s}$, $\forall\,(k,s) \in spec(\tilde{f})$.

Замечание . *Теорема 4.3 для системы Уолша когда $a = 2$ доказана в работе [31] М. Григоряном и А. Минасяном.*

ГЛАВА I

СХОДИМОСТЬ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СУММЫ РЯДОВ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПО СИСТЕМЕ КРИСТЕНСОНА - ЛЕВИ

1.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПО СИСТЕМЕ КРИСТЕНСОНА - ЛЕВИ

Пусть $a \geq 2$ фиксированное целое число и $\omega_a = e^{\frac{2\pi}{a}i}$. Система Ψ_a- система

Кристенсона-Леви порядка a. Ниже приведем некоторые свойства системы Ψ_a:

Обозначим интервал ранга n относительно a следующим образом:

$$\Delta_k^{(n)} = \Delta_k^{(n)}(a) = \left[\frac{k}{a^n}, \frac{k+1}{a^n}\right), k = 0, \dots, a^n - 1, n = 1,2, \dots$$

Свойство (A). *Если* $\varphi_n^{(a)}(x)$ n *-ая функция Радемахера порядка* a, *то из Определения 1.1 следует*

$$\varphi_n^{(a)}(x) = \omega_a{}^k = e^{\frac{2\pi}{a} i \cdot k}, x \in \Delta_k^{(n+1)}, \ k = 0, \dots, a^{n+1} - 1, \ n = 1,2, \dots, n \in \mathbb{N}$$

Свойство (B). *Каждая* n *-ая функция Радемахера имеет период* $\frac{1}{a^n}$.

Свойство (C). $\left(\varphi_n^{(a)}(x)\right)^k = \left(\varphi_n^{(a)}(x)\right)^m, \forall\, n, k \in \mathbb{N}$, при $m = k (mod\ a)$

Свойство (D). *Для любого натурального числа* m *имеем*

$$\sum_{k=0}^{a-1} \omega_a{}^{mk} = \begin{cases} a, & \text{при } m = 0 (mod\ a) \\ 0, & \text{при } m \neq 0 (mod\ a) \end{cases}$$

Свойство (E). *Система Кристенсона-Леви* Ψ_a, $a \geq 2$ *является полной ортонормированной системой в* $L^2(0,1)$ *и базисом в* $L^p(0,1), p > 1$ *(см. [3]).*

Свойство (F). *Из Определения 1.2 имеем*

$$\psi_i^{(a)}(x) \cdot \psi_j^{(a)}(a^s x) = \psi_{j \cdot a^s + i}^{(a)}(x) \text{ при } 0 \leq i, j < a^s,$$

и в частности

$$\psi_{a^k + j}^{(a)}(x) = \varphi_k^{(a)}(x) \cdot \psi_j^{(a)}(x), \text{при } 0 \leq \ j \leq a^k - 1$$

Определим

$$D_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k^{(a)}(t)$$

ядро Дирихле по системе Ψ_a порядка n.

Свойство (G). *Ядро* $D_n(t)$ *удовлетворяет равенству (см. [3])*

$$D_{a^n}(t) = \begin{cases} a^n, \text{при } t \in \Delta_0^{(n)}(a) = [0, \dfrac{1}{a^n}) \\ 0, \text{при } t \in \left[\dfrac{1}{a^n}, 1\right). \end{cases}$$

Свойство (H). *Если число* n *представимо в виде*

$$n = a^k + m, 0 \leq m < a^k,$$

то из Свойства (F) получим

$$D_n(t) = D_{a^k}(t) + \varphi_k^{(a)}(t) \cdot D_m(t), t \in (0,1).$$

Свойство (I). *Для любого натурального числа* m *и для любой* $t \in (0,1)$ *имеет место неравенство*

$$|D_m(t)| \leq m$$

Свойство (J). *Для любого натурального числа* n *и для любой* $x \in (0,1)$ *имеет место неравенство*

$$|D_n(x)| < \frac{a}{x}$$

Свойство (K). *Для системы Кристенсона-Леви обозначим* k *-ую константу Лебега через* L_k,

$$L_k = \int_0^1 |D_k(t)| \, dt.$$

В [39] доказано, что константы Лебега системы Кристенсона-Леви удовлетворяют условию $L_k = O(\log_a k)$, где O зависит от a.

Последовательность натуральных чисел $\Lambda = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ вида

$$m_{2s} = \sum_{i=0}^{s} a^{2i}; \quad m_{2s+1} = \sum_{i=0}^{s} a^{2i+1}, s = 0,1,2, \dots,$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$a^k \leq m_k < a^{k+1},$$

$$L_{m_k} = \int_0^1 |D_{m_k}(t)| \, dt > \frac{1}{2a} \log_a m_k, k \geq 1.$$

Свойство (L) (Принцип локализации). *Если две интегрируемые на* $(0,1)$ *функции совпадают на некотором* a *-ичном интервале* Δ, *то их ряды Фурье- Кристенсона-Леви являются равномерно равно-сходящимися на* Δ, *т.е. разность этих рядов равномерно на* Δ *сходится к нулю* (см. [10], стр. 57).

1.2. СХОДИМОСТЬ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СУММЫ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ КРИСТЕНСОНА - ЛЕВИ

В данном пункте рассматриваются ряды по системе Кристенсона-Леви с монотонными коэффициентами, а также вопросы сходимости и интегрируемости сумм таких рядов.

Определение 1.1. *Последовательность действительных чисел* $\{\mathcal{B}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *называется монотонно убывающей , если* $\Delta\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n - \mathcal{B}_{n+1} \geq 0$, *при* $n \geq 0$. *Если при этом* $\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_n = 0$, *то напишем* $\mathcal{B}_n \downarrow 0$.

Рассмотрим ряд по системе Ψ_a , $a \geq 2$ вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x) \qquad (1.1)$$

и обозначим через

$$\mathcal{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x)$$

частичную сумму ряда (1.1).

В дальнейшем будем пользоваться следующим преобразованием Абеля (см. [10], с. 9):

$$\sum_{k=m}^{n-1} \mathcal{C}_k \cdot \mathcal{A}_k = \sum_{k=m}^{n-2} \Delta\mathcal{C}_k \cdot \mathcal{H}_{k+1} + \mathcal{C}_{n-1} \cdot \mathcal{H}_n - \mathcal{C}_m \cdot \mathcal{H}_m \qquad (1.2)$$

где $\Delta\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_n - \mathcal{C}_{n+1}, \mathcal{H}_0 = 0,\ \mathcal{H}_k = \sum_{i=m}^{k-1} \mathcal{A}_i ,\ k \geq 1$.

Применяя к ряду (1.2) преобразование Абеля и учитывая, что ядро Дирихле

$\mathcal{D}_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i^{(a)}(x)$, при $n > m$ получим

$$\mathcal{S}_n(x) - \mathcal{S}_m(x) = \sum_{k=m}^{n-1} \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x) =$$

$$= \sum_{k=m}^{n-2} \Delta\mathcal{B}_k \cdot \mathcal{D}_{k+1}(x) + \mathcal{B}_{n-1} \cdot \mathcal{D}_n(x) - \mathcal{B}_m \cdot \mathcal{D}_m(x)$$

Отсюда, учитывая, что для любого натурального числа n и для любой $x \in (0,1)$ имеет место неравенство $|\mathcal{D}_n(x)| < \frac{a}{x}$, (см. Свойство (J)) получим

$$|\mathcal{S}_n(x) - \mathcal{S}_m(x)| \le \frac{a}{x} \cdot \sum_{k=m}^{n-2} \Delta\mathcal{B}_k + a \cdot \frac{\mathcal{B}_{n-1}}{x} + a \cdot \frac{\mathcal{B}_m}{x} =$$

$$= \frac{a}{x} \cdot (\mathcal{B}_m - \mathcal{B}_{n-1}) + \frac{a}{x} \cdot (\mathcal{B}_m + \mathcal{B}_{n-1}) = \frac{2a \cdot \mathcal{B}_m}{x} . \qquad (1.3)$$

Применяя идею доказательства Теоремы 7.1.1 (см. [10], с. 149) можно доказать следующую теорему:

Теорема (А). *Если* $\mathcal{B}_n \downarrow 0$, *то ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

сходится на интервале $(0,1)$ *причем на любом интервале вида,* $(\delta, 1)$ *где* $0 < \delta < 1$, *ряд сходится равномерно.*

Замечание. *Доказательства Теоремы (А) для системы Уолша - Пэли и системы Виленкина были получены А.Шнейдером [14] и Н. Виленкиным [7].*

Отметим, что при условиях Теоремы (А), сумма ряда (1.1) может не принадлежать $L^1(0,1)$, т.е. не быть интегрируемой по Лебегу на $(0,1)$.

А именно имеет место следующее утверждение:

Теорема (В). *Существует последовательность* $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{B}_n \downarrow 0$ *такая, что функция*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x) \notin L^1(0,1).$$

Для системы Уолша - Пэли Теорема (В) была доказана А. Рубинштейном [15], а для системы Виленкина (в частности, для системы Кристенсона-Леви) доказательство можно получить из результатов полученных Н. Виленкиным [7].

Таким образом чтобы ряд (1.1) был интегрируем, нужно наложить некоторые условия на коэффициенты ряда. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Пусть последовательность* $\mathcal{B}_n$ *монотонно убывает и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} \qquad (1.4)$$

тогда ряд (1.1) сходится к суммируемой функции и является ее рядом Фурье по обобщенной системе Ψ_a *.*

Доказательство . Из сходимости ряда (1.4) следует, что для любого натурального числа n , учитывая , что $\mathcal{B}_n \downarrow 0$ имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{n=[\sqrt{k}]}^{k} \frac{\mathcal{B}_n}{n} \geq \mathcal{B}_k \cdot \left(\sum_{n=[\sqrt{k}]}^{k} \frac{1}{n}\right) \geq \mathcal{B}_k \ln \frac{k}{[\sqrt{k}]},$$

следовательно имеем

$$\mathcal{B}_k \log_2 k \leq \theta \cdot \sum_{n=[\sqrt{k}]}^{k} \frac{\mathcal{B}_n}{n} \to 0 .$$

Откуда для любого натурального числа m, $(m > n)$ получаем, что коэффициенты

$$\mathcal{B}_m \log_2 m \to 0.$$

Для любой точки $x \in (0,1)$ найдем натуральное число $\mathfrak{s}$ такое, что $\frac{1}{\mathfrak{s}+1} < x \leq \frac{1}{\mathfrak{s}}$. Тогда для любых чисел $n > m$, учитывая, что $\left|\psi_n^{(a)}(x)\right| = 1$, $\mathcal{B}_n \geq 0$ и (1.3), имеем

$$\left|\sum_{k=m}^{n-1} \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x)\right| \leq \sum_{k=m}^{m+\mathfrak{s}-1} \mathcal{B}_k + \left|\sum_{k=m+\mathfrak{s}}^{n-1} \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x)\right| \leq \sum_{k=m}^{m+\mathfrak{s}-1} \mathcal{B}_k + \frac{2a\mathcal{B}_{m+\mathfrak{s}}}{x} \leq$$

$$\leq \sum_{k=m}^{m+\mathfrak{s}-1} \mathcal{B}_k + 2a(\mathfrak{s}+1)\mathcal{B}_{m+\mathfrak{s}} \leq \sum_{k=m}^{m+\mathfrak{s}-1} \mathcal{B}_k + 4a \cdot \sum_{k=m}^{m+\mathfrak{s}-1} \mathcal{B}_k \leq$$

$$\leq (4a+1) \cdot \sum_{k=m}^{m+\mathfrak{s}-1} \mathcal{B}_k .$$

Отсюда получаем

$$\tau_{m,n} = \int_0^1 \left|\sum_{k=m}^{n-1} \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x)\right| dx = \sum_{\mathfrak{s}=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{\mathfrak{s}+1}}^{\frac{1}{\mathfrak{s}}} \left|\sum_{k=m}^{n-1} \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x)\right| dx \leq$$

$$\le (4a+1)\cdot\sum_{\mathfrak{s}=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\mathfrak{s}(\mathfrak{s}+1)}\cdot\left(\sum_{k=m}^{m+\mathfrak{s}-1}\mathcal{B}_k\right)\right]. \qquad (1.5)$$

Далее, применим преобразование Абеля (1.2) к сумме

$$\sum_{\mathfrak{s}=1}^{N}\frac{1}{\mathfrak{s}(\mathfrak{s}+1)}\cdot\left(\sum_{k=m}^{m+\mathfrak{s}-1}\mathcal{B}_k\right),$$

полагая в ее формулировке

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}=\sum_{k=m}^{m+\mathfrak{s}-1}\mathcal{B}_k \text{ и } \mathcal{A}_{\mathfrak{s}}=\frac{1}{\mathfrak{s}(\mathfrak{s}+1)}=\frac{1}{\mathfrak{s}}-\frac{1}{\mathfrak{s}+1}.$$

Тогда учитывая, что $\mathcal{B}_m\ge 0$, $\mathcal{B}_m\downarrow 0$ и соотношения

$$\Delta\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}=\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}-\mathcal{C}_{\mathfrak{s}+1}=-\mathcal{B}_{m+\mathfrak{s}}\,,\mathcal{C}_N=\sum_{k=m}^{m+N-1}\mathcal{B}_k\,,\mathcal{C}_1=\mathcal{B}_m$$

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{s}+1}=\sum_{i=1}^{\mathfrak{s}}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=1-\frac{1}{\mathfrak{s}+1}\,,\mathcal{H}_{N+1}=1-\frac{1}{N+1}\,,\mathcal{H}_1=\frac{1}{2},$$

то получаем

$$\sum_{\mathfrak{s}=1}^{N}\frac{1}{\mathfrak{s}(\mathfrak{s}+1)}\cdot\left(\sum_{k=m}^{m+\mathfrak{s}-1}\mathcal{B}_k\right)=-\sum_{\mathfrak{s}=1}^{N-1}\left(1-\frac{1}{\mathfrak{s}+1}\right)\mathcal{B}_{m+\mathfrak{s}}+$$

$$+\left(1-\frac{1}{N+1}\right)\cdot\sum_{k=m}^{m+\mathfrak{s}-1}\mathcal{B}_k-\frac{\mathcal{B}_m}{2}=\sum_{\mathfrak{s}=1}^{N-1}\frac{\mathcal{B}_{m+\mathfrak{s}}}{\mathfrak{s}+1}+\left(1-\frac{1}{N+1}\right)\mathcal{B}_m-$$

$$-\sum_{\mathfrak{s}=1}^{N-1}\mathcal{B}_{m+\mathfrak{s}}+\left(1-\frac{1}{N+1}\right)\sum_{\mathfrak{s}=1}^{N-1}\mathcal{B}_{m+\mathfrak{s}}-\frac{\mathcal{B}_m}{2}\le$$

$$\le\sum_{\mathfrak{s}=1}^{N-1}\frac{\mathcal{B}_{m+\mathfrak{s}}}{\mathfrak{s}+1}+\frac{\mathcal{B}_m}{2}\le\sum_{\mathfrak{s}=0}^{N-1}\frac{\mathcal{B}_{m+\mathfrak{s}}}{\mathfrak{s}+1}=\sum_{\mathfrak{s}=1}^{N}\frac{\mathcal{B}_{m+\mathfrak{s}-1}}{\mathfrak{s}}.$$

Отсюда и из (1.5) имеем

$$\tau_{m,n}\le(4a+1)\cdot\sum_{\mathfrak{s}=1}^{\infty}\frac{\mathcal{B}_{m+\mathfrak{s}-1}}{\mathfrak{s}}=(4a+1)\cdot\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\mathcal{B}_n}{n-m+1}=$$

$$=(4a+1)\cdot\left[\sum_{n=m}^{2m-1}\frac{\mathcal{B}_n}{n-m+1}+\sum_{n=2m}^{\infty}\frac{\mathcal{B}_n}{n-m+1}\right]\le$$

$$\leq (4a+1)\cdot\left[\mathcal{B}_m\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}+\sum_{n=2m}^{\infty}\frac{\mathcal{B}_n}{n}\right]\leq \Omega\cdot\left[\mathcal{B}_m\cdot\log_2 m+\sum_{n=2m}^{\infty}\frac{\mathcal{B}_n}{n}\right],$$

где Ω некоторое постоянное число.

Так, как по условию теоремы ряд (1.4) сходится, то из (1.5) получаем

$$\int_0^1 |\mathcal{S}_n(x)-\mathcal{S}_m(x)|\,dx \leq \tau_{m,n}\to 0\,,\text{при } n>m\,,m\to\infty,$$

т.е. последовательность частичных сумм ряда (1.1) фундаментальна в $L^1(0,1)$, и поскольку пространство $L^1(0,1)$ полно, то существует функция $g(x)\in L^1(0,1)$ такая, что $\mathcal{S}_n(x)\longrightarrow g(x)$ при $n\to\infty$. С другой стороны из Теоремы (А) следует, что ряд (1.1) сходится к некоторой функции $f(x)$ всюду на $(0,1)$, следовательно

$f(x)=g(x)$ п.в. на $(0,1)$. Таким образом $f(x)$ суммируемая на $(0,1)$ функция, следовательно, ряд (1.1) является ее рядом Фурье по системе Кристенсона-Леви. Действительно, так как

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |\mathcal{S}_n(x)-f(x)|\,dx=0\,,$$

то имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (\mathcal{S}_n(x)-f(x))\cdot\overline{\psi_k^{(a)}(x)}\,dx=0\,, \qquad (1.6)$$

при всяком фиксированном $k=0,1,2,\ldots$

С другой стороны

$$\int_0^1 \mathcal{S}_n(x)\cdot\overline{\psi_k^{(a)}(x)}\,dx=\mathcal{B}_k\,,n\geq k\,,$$

следовательно из (1.6) имеем

$$\mathcal{B}_k=\int_0^1 f(x)\cdot\overline{\psi_k^{(a)}(x)}\,dx\,,\text{при } k\geq 0$$

Теорема 1.1 доказана.

Замечание. *Теорема 1.1 является обобщением Теоремы 7.1.3 для случая системы Уолша-Пэли (см. [10], с. 151), аналог которой для системы Уолша-Качмажа доказан Л. Балашовым [16].*

Отметим, что условие (1.4) в Теореме 1.1 нельзя ослабить. Это утверждение для ортонормированных систем следует из более общих результатов А. Олевского [15], а для системы Уолша-Пэли из работы А. Рубинштейна [13]. Ниже, приведен доказательство теоремы для случая системы Ψ_a.

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.2. *Существует монотонно убывающая, стремящаяся к нулю последовательность* $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} = \infty ,$$

а сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x) \qquad (1.7)$$

не принадлежит классу $L^1(0,1)$, *т.е. не является рядом Фурье по обобщенной системе Уолша некоторой функции из класса* $L^1(0,1)$, *несмотря на то, что ряд (1.1) сходится всюду на* $(0,1)$ *и равномерно на любом интервале* $(\delta, 1)$, *где* $0 < \delta < 1$.

Доказательство. Как уже было отмечено в введении константы Лебега системы Кристенсона - Леви

$$L_n = \int_0^1 |\mathcal{D}_n(x)|\, dx, \qquad n = 1,2 \ldots$$

удовлетворяют следующим условиям:

$$L_n \leq \Omega_1 \cdot \log_a n , \qquad n \geq 2 , \qquad (1.8)$$

где Ω_1 постоянное число зависящее только от a .

Существует последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$a^k \leq m_k < a^{k+1} ,$$

$$L_{m_k} > \frac{1}{2a} \cdot \log_a m_k \ , k \geq 1 . \qquad (1.9)$$

Для любого $k \geq 1$ возьмем число n_k из последовательности $\{m_k\}$ такое, что

$$a^{(k!)^2-1} \leq n_k < a^{(k!)^2} . \qquad (1.10)$$

Теперь определим последовательность $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Положим

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \cdots = \mathcal{B}_{n_1} = 1$$

и при $k > 1$

$$\mathcal{B}_{n_k+1} = \mathcal{B}_{n_k+2} = \cdots = \mathcal{B}_{n_{k+1}} = \frac{1}{k!} \qquad (1.11)$$

Очевидно, что $\mathcal{B}_n \downarrow 0$.

Для любого натурального числа N, существует число q, такое что

$$n_q \le N < n_{q+1}.$$

Тогда для частичной суммы S_N, ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_m}{m},$$

учитывая соотношения (1.8) - (1.11) получаем

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{\mathcal{B}_m}{m} = \sum_{m=1}^{n_1} \frac{1}{m} + \sum_{k=2}^{q} \left(\sum_{m=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{\mathcal{B}_m}{m} \right) + \sum_{m=n_q+1}^{N} \frac{\mathcal{B}_m}{m} >$$

$$> \ln n_1 + \sum_{k=2}^{q} \frac{1}{(k-1)!} \ln \frac{n_k}{n_{k-1}} + \frac{1}{q!} \ln \frac{N}{n_q} >$$

$$> \ln n_1 + \frac{1}{q!} \ln \frac{n_q}{n_1} + \frac{1}{q!} \ln \frac{N}{n_q} > \ln n_1 + \frac{1}{q!} \ln \frac{N}{n_1} >$$

$$> \frac{1}{q!} \ln N > \frac{(q!)^2 - 1}{q!} \ge \frac{q!}{2},$$

и поскольку при $N \to \propto$ имеем $q \to \propto$, то следовательно

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_m}{m} = \infty.$$

С другой стороны, так как $\mathcal{B}_m \downarrow 0$, то согласно Теореме(A) ряд (1.7) сходится на интервале $(0,1)$ и равномерно при $x \in (\delta, 1)$, при любом $\delta \in (0,1)$.

Следовательно, $\mathcal{I}_\delta = \int_\delta^1 |f(x)|\, dx$ существует.

Покажем, что

$$\lim_{\delta \to 0} \mathcal{J}_\delta = \infty,$$

откуда и получим утверждение теоремы.

Применяя преобразование Абеля (1.2), учитывая свойство (К) и соотношения (1.10), (1.11) имеем

$$L_n = \int_{\frac{1}{a^{(q!)^2}}}^{1} |f(x)|\, dx = \int_{\frac{1}{a^{(q!)^2}}}^{1} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}_m \psi_m^{(a)}(x) \right| dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{(q!)^2}}^{1} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \Delta\mathcal{B}_m \cdot \mathcal{D}_m(x) \right| dx = \int_{\frac{1}{(q!)^2}}^{1} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \mathcal{D}_{n_k}(x) \right| dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{q!} \int_{\frac{1}{(q!)^2}}^{1} \left| \mathcal{D}_{n_q}(x) \right| dx - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} \int_{\frac{1}{(q!)^2}}^{1} \left| \mathcal{D}_{n_k}(x) \right| dx -$$

$$- \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\frac{1}{(q!)^2}}^{1} \left| \mathcal{D}_{n_k}(x) \right| dx \geq \frac{1}{q!} L_{n_q} - \frac{1}{q!} \int_{0}^{\frac{1}{(q!)^2}} \left| \mathcal{D}_{n_q}(x) \right| dx -$$

$$- \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} L_{n_k} - a \cdot \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\frac{1}{(q!)^2}}^{1} \frac{dx}{x} \geq$$

$$\geq \Omega_1 \cdot \frac{1}{q!} \log_a n_q - \frac{1}{q!} \cdot \frac{n_q}{a^{(q!)^2}} - \Omega_2 \cdot \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k!} \log_a n_k -$$

$$- a \cdot (q!)^2 \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \geq \Omega_1 \cdot \frac{1}{q!} \cdot \left((q!)^2 - 1 \right) - \frac{1}{q!} \cdot \frac{(q!)^2}{(q!)^2} -$$

$$- \Omega_2 \cdot \sum_{k=1}^{q-1} k! - \Omega_3 \cdot (q!)^2 \cdot \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} =$$

$$= q! \cdot \left[\frac{\Omega_1}{3} - \frac{a}{(q!)^2} - \Omega_2 \cdot \sum_{k=1}^{q-1} \frac{k!}{q!} - \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} \right] \to \infty, \text{при}\, q \to \infty.$$

Так как $\mathcal{J}_\delta$ монотонна по δ, то при $\delta \to 0$ имеем $\mathcal{J}_\delta \to \infty$.

Теорема 1.2 доказана

И в конце пункта доказано следующее утверждение:

Теорема 1.3. *Если* $\mathcal{B}_n \downarrow 0$, *то функция*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x) \tag{1.12}$$

принадлежит пространству $L^p(0,1)$, $\forall\, p \in (0,1)$, *причем имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\, \mathcal{S}_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0$$

где $\mathcal{S}_n(x)$ *- n-ая частичная сумма ряда (1.12).*

Доказательство . Из неравенства (1.3) имеем

$$|\mathcal{S}_m(x) - \mathcal{S}_n(x)| \le \frac{2a\mathcal{B}_n}{x}\ , x \in (0,1)\,. \tag{1.13}$$

Так как $\lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{S}_m(x) = f(x)$, то устремляя $m \to \infty$ в (1.13) получаем

$$|f(x) - \mathcal{S}_n(x)| \le \frac{2a\mathcal{B}_n}{x}$$

следовательно, при любом $p \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$|f(x) - \ \mathcal{S}_n(x)|^p \le \left(\frac{2a\mathcal{B}_n}{x}\right)^p, x \in (0,1)\ , n \ge 1\,,$$

откуда имеем

$$\int_0^1 |f(x) - \ \mathcal{S}_n(x)|^p \, dx \le (2a\mathcal{B}_n)^p \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{(2a\mathcal{B}_n)^p}{1-p} \tag{1.14}$$

Учитывая, что $\mathcal{B}_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$ из свойства (J) получим

$$|\,\mathcal{S}_n(x)|^p = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x)\ \right|^p \le \mathcal{B}_1^p \cdot \left|\sum_{k=0}^{n-1} \psi_k^{(a)}(x)\ \right|^p \le$$

$$\le\ \mathcal{B}_1^p \cdot |\mathcal{D}_n(x)\,|^p \le \left(\frac{a\mathcal{B}_1}{x}\right)^p,$$

следовательно

$$\int_0^1 |\, \mathcal{S}_n(x)|^p \, dx \le (a\mathcal{B}_1)^p \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{(2a\mathcal{B}_1)^p}{1-p} < \infty\,.$$

Учитывая (1.14) имеем

$$\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \le \int_0^1 |f(x) - \ \mathcal{S}_n(x)|^p \, dx + \int_0^1 |\, \mathcal{S}_n(x)|^p \, dx < \infty\,,$$

т.е. $f(x) \in L^p(0,1)$, для любого $p \in (0,1)$.

Теорема 1.3 доказана.

ГЛАВА II

О ПОТОЧЕЧНОЙ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТРАНЗИТИВНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА L^p, $p \geq 1$ ПО СИСТЕМЕ КРИСТЕНСОНА - ЛЕВИ

2.1. Некоторые известные результаты

В этой главе диссертационной работы рассматриваются вопросы поточечной универсальности, а также топологической транзитивности частичных сумм рядов Фурье функций класса $L^p(0,1), p \geq 1$ по системе Кристенсона-Леви .

Аналогичные вопросы для класса непрерывных функций по тригонометрической системе и по системе Ψ_a , $a \geq 2$, рассмотрены в работах [18] - [20].

Отметим, что идея универсальности является одним из фундаментальных объектов рассмотрения в другом разделе математики-Теории Хаоса и динамических систем, которые за последние годы являются одним из самых полезных подходов к исследованию рынка. В этой теории идея универсальности тесно связана с понятием топологической транзитивности семейства отображений. Первый тип универсальности, еще в 1914 г., рассмотрели М. Фекете [32] и Ж. Пал [33].

М. Фекете в частности доказал:

Теорема (М. Фекете). *Существует вещественный степенной ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n x^n , x \in [-1,1] ,$$

который не только расходится в каждой точке $x \neq 0$, но делает это наихудшим способом, а именно для любой g непрерывной на $[-1,1]$ функции с $g(0) = 0$, существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что последовательность частичных сумм $S_{n_k}(x)$ равномерно сходится к $g(x)$

при $k \to \infty$.

Пример универсального степенного ряда (или ряда Тейлора) Фекете по сути имеет два аспекта: первый это - максимальная расходимость и второй - существование одного элемента, который позволяет приблизить максимальный класс объектов. Это по сути и означает универсальность.

Далее, по сути первый тип универсальной функции был рассмотрен еще в 1929 г. М. Дж. Биркхофом [35]. Он в частности доказал следующую теорему:

Теорема (Дж. Биркхоф). *Существует целая функция $f(z)$, которая универсальна относительно сдвигов, т.е. для любой целой функции $g(z)$ существует* *последовательность комплексных чисел* $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *с* $\mathcal{A}_n \to \infty$ *такая, что*

$$f(z) + \mathcal{A}_n \to g(z)$$

В 1935г Ж. Марцинкевич [35] не только доказал существование, как он назвал " универсальной первообразной", а он был первым, который применил слово "**универсальная**" в этом контексте и показал, что множество универсальных элементов является остаточным в смысле Бэра, т.е. подмножество в пространстве Бэра, представимое как пересечение счётного числа открытых всюду плотных множеств. А именно он доказал следующий результат:

Теорема (Ж.Марцинкевич). *Пусть* $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ *последовательность вещественных чисел с* $h_n \to 0$ *. Тогда существует непрерывная функция* $f(x) \in C(0,1)$ *такая, что для любой функции* $g(x)$ *измеримой на* $(0,1)$ *можно найти возрастающую последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *так, что*

$$\frac{f(x + h_{n_k}) - f(x)}{h_{n_k}} \to g(x) \text{ п.в. на } (0,1)$$

при этом множество таких функций $f(x)$ являются остаточным в $C(0,1)$.

В 1952г. Дж. Маклейн [36] доказал следующий результат:

Теорема (Дж. Маклейн). *Существует целая функция* $f(z) \in C(H)$ *обладающая универсальными производными, т.е. для любой целой функции* $g(z) \in C(H)$ *можно найти возрастающую последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *так, что производные соответствующими порядками локально равномерно сходятся к* $g(z)$ *в* $C(H)$ *, т.е.*

$$f^{(n_k)}(z) \to g(z) \text{ при } k \to \infty .$$

В 1987г. К. Гроссе-Эрдман [36] развивая идею построения примера Фекете, доказал следующую теорему:

Теорема (К. Гроссе-Эрдман). *Существует функция* $f(x) \in C^{\infty}(\mathrm{R})$ *с* $f(0) = 0$*, ряд Тейлора, который в точке* $x = 0$ *локально - равномерно универсален в* $C(\mathrm{R})$*, т.е. для любой* $g(x) \in C(\mathrm{R})$ *с* $f(0) = 0$*, существует возрастающая последовательность* *натуральных чисел* $\{n_k\}$ *такая, что*

$$\sum_{v=1}^{n_k} \frac{f^{(v)}(0)}{v!}\, x^v \to \mathrm{g}(x)$$

локально - равномерно , при $k \to \infty$.

В 2008г. Ф. Байарт, К. Гроссе-Эрдман, В. Несторидис и С. Пападимитрополус (см. [21]) представили так называемую **Абстрактную теорию универсальных рядов**, в которой с абстрактной точки зрения явление универсальности описывается следующим образом: есть топологическое пространство некоторых объектов $\mathbb{X}$, топологическое пространство $\mathbb{Y}$ элементов для приближения и семейство отображений $\mathbb{T}_n : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}, n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, (обычно это бывает последовательность). Тогда объект $x \in \mathbb{X}$ называется универсальным для $\mathbb{Y}$, если каждый элемент $y \in \mathbb{Y}$ можно приблизить определенной $\mathbb{T}_n(x)$, т.е. множество $\{\mathbb{T}_n(x) : n \in \Lambda\}$ плотно в $\mathbb{Y}$.

Далее обозначим множество универсальных элементов для некоторого класса через $\mathbb{U}$ (в частности приведенные выше). Наиболее естественная проблема *когда некоторое семейство отображений обладает универсальным элементом*, полностью пока еще не решена. С другой стороны, многие результаты полученные в этом направлении показывают, что множество универсальных элементов $\mathbb{U}$ или пустое, или очень большое, а именно остаточное в смысле категории Бэра (содержащее плотное G_δ - подмножество).

В дальнейшем, вместо отображения $\mathbb{T}_n$, мы рассмотрим оператор частичных сумм ряда Фурье по некоторой ортонормированной системе.

В теории хаоса и динамических систем идея универсальности тесно связана с понятием топологической транзитивности семейства отображений. В этой теории фундаментальным является теорема транзитивности Дж. Биркхофа [33]. Перенеся этот результат на абстрактную теорию универсальных рядов, в 1987г. К. Гроссе - Эрдман сформулировал так называемый принцип универсальности [37], который по сути является необходимым и достаточным условием для того, чтобы семейство отображений обладало универсальным элементом.

Формулируется этот принцип следующим образом:

Теорема(Принцип Универсальности). *Пусть* $\mathbb{X}$ *полное метрическое пространство,* $\mathbb{Y}$ *сепарабельное метрическое пространство а* $\mathbb{T}_n : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *,* $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, *некоторое непрерывное отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *Множество* $\mathbb{U}$ *универсальных элементов плотно в* $\mathbb{X}$*.*

(ii) $\mathbb{T}_n : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, *топологически транзитивно для пары* $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*.*

Если одно из этих утверждений выполняется, то множество универсальных точек $\mathbb{U}$ *является плотным* G_δ *подмножеством* $\mathbb{X}$*.*

Для функции $f \in L^p(0,1), p \geq 1$, определим частичную сумму ряда Фурье по системе Ψ_a, следующим образом:

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_k(f) \cdot \psi_k^{(a)}(x) \text{ , где } \mathrm{C}_k(f) = \int_0^1 f(x) \cdot \overline{\psi_k^{(a)}(x)}\, dx .$$

Известно, что для функций $f(x) \in L^p(0,1), p \geq 1$, последовательность $S_n(f,x)$ сходится к $f(x)$ как по норме $L^p(0,1)$, так и почти всюду (см. [11] стр. 135 и 142). Следует отметить еще, что существует функция $f(x)$ из $L(0,1)$ для которой, последовательность $S_n(f,x)$ расходится всюду на $(0,1)$ (см. [10] Теорема 9.1.2). Более подробно об этих результатах можно найти в [11] (Глава 4) и [12].

Если функция $f(x)$ непрерывна на $(0,1)$ (и следовательно $f(x)$ из $L^2(0,1)$), из аналога теоремы Карлесона для рядов Фурье-Уолша следует, что последовательность $S_n(f,x)$ точечно сходится к $f(x)$ почти всюду на $(0,1)$. С другой стороны, применяя теорему Банах-Штейнгауза и тот факт, что последовательность констант Лебега системы Уолша неограничена, нетрудно видеть, что для любой фиксированной точки $x_0 \in (0,1)$ существует плотное G_δ-множество M в пространстве непрерывных функций $C(0,1)$ (с равномерной нормой) такое, что последовательность $S_n(f,x)$ расходится неограниченно в точке x_0 для всех $f(x) \in M$ (см. [10] стр. 47). Аналогичное утверждение имеет место и для системы Кристенсона-Леви.

Пусть $E \subset (0,1)$- счетное множество, а $\Lambda \subset \mathbb{N}$ множество индексов. Обозначим через $\mathbb{C}^E$ множество всех функций $h(x)$ определенных на E и принимающих комплексные значения, т.е. $h(x_k) = y_k \in \mathbb{C}$, $k = 1,2,\ldots$

Определение 2.1. *Пусть $E \subset (0,1)$- счетное множество. Для множества индексов $\Lambda \subset \mathbb{N}$ и некоторой функции $f \in L^p(0,1)$ скажем, что множество $\{S_n(f,x)\}_{n\in\Lambda}$* ***поточечно универсально*** *на E, если множество $\{S_n(f,x)_E : n \in \Lambda\}$ плотно в $\mathbb{C}^E$, т.е. для любых $h: E \to \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$ существует $\{n_k\} \in \Lambda$ такое, что $|S_{n_k}(f,x) - h(x)| < \varepsilon$ при $\forall\, x \in E$.*

Определение 2.2. *Пусть $E \subset (0,1)$-счетное множество. Рассмотрим последовательность операторов T_n ; $T_n : L^p(0,1) \to \mathbb{C}^E$. Скажем, что последовательность $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ топологическая для пары $\{L^p(0,1)\,;\,\mathbb{C}^E\}$ если для любых $g(x) \in L^p(0,1)$ и $h(x) \in \mathbb{C}^E$ существует последовательность $\{n_k\} \subset \Lambda$ и функция $f(x) \in L^p(0,1)$ такая, что*

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon \text{ и } |S_{n_k}(f,x) - h(x)| < \varepsilon \text{ при } \forall\, x \in E.$$

По вопросам поточечной универсальности, для тригонометрической системы и системы Кристенсона-Леви, относятся работы [18] - [20].

В данной главе доказано, что для любого счетного множества $E \subset (0,1)$ существует плотное G_δ множество $M \subset L^p(0,1)$ обладающее следующим свойством: последовательность частичных сумм ряда Фурье по системе Ψ_a любой функции из M является поточечно универсальным в $\mathbb{C}^E$.

Из критерия универсальности и из доказательства Теоремы 2.1 следует, что для любого счетного множества E, система Кристенсона-Леви топологически транзитивна для пары $\{L^p(0,1)\,;\mathbb{C}^E\}$.

2.2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 2.1. *Пусть X полное метрическое пространство, а $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ счетное число открытых, плотных в X множеств. Тогда множество $U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ плотно в пространстве X .*

Доказательство. Учитывая определения плотности множества, достаточно показать, что для любого элемента $x \in X$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap U = \mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \neq \emptyset ,$$

где $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$ открытый шар с центром в точке x и с радиусом ε, т.е.

$\mathrm{B}(x,\varepsilon) = \{\tilde{x} \in X : \rho(x,\tilde{x}) < \varepsilon\}$

Так, как $\mathrm{B}(x,\varepsilon)$ открытое множество, а U_1 открытое и плотное в X множество, то

$\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap U_1 \neq \emptyset,$

и следовательно существует точка $x_1 \in \mathrm{B}(x,\varepsilon)$ такая, что можно найти замкнутый шар K_1 удовлетворяющий условию:

$\mathrm{K}_1 = \overline{\mathrm{B}(x_1,r_1)} \subset \mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap U_1,$

где $0 < r_1 < \frac{1}{2}$. Так, как $\mathrm{B}(x_1, r_1)$ открытое множество, а U_2 открытое и плотное в X множество, то

$\mathrm{B}(x_1, r_1) \cap U_2 \neq \emptyset$,

и следовательно существует точка $x_2 \in \mathrm{B}(x_1, r_1)$ такая, что можно найти замкнутый шар K_2 удовлетворяющий условию:

$\mathrm{K}_2 = \overline{\mathrm{B}(x_2, r_2)} \subset \mathrm{B}(x_1, r_1) \cap U_2$,

где $0 < r_2 < \frac{1}{2^2}$.

Продолжая этот процесс получим, что для любого целого числа $j \geq 2$, существует точка $x_j \in \mathrm{B}(x_{j-1}, r_{j-1})$ такая, что можно найти замкнутый шар K_j удовлетворяющий условию:

$$\mathrm{K}_j = \overline{\mathrm{B}(x_j, r_j)} \subset \mathrm{B}(x_{j-1}, r_{j-1}) \cap U_j,$$

где $0 < r_j < \frac{1}{2^j}$.

Таким образом, получим

$$\mathrm{B}(x, \varepsilon) \supset \mathrm{K}_1 \supset \mathrm{K}_2 \supset \cdots \supset \mathrm{K}_j \supset \cdots, \quad diam\,\mathrm{K}_j \to 0, \qquad \text{при } j \to \infty.$$

Теперь, если m и n любые натуральные числа такие, что $m > N$ и $n > N$ для некоторого натурального N, то из построения последовательности шаров $\{\mathrm{B}(x_j, r_j)\}_{j=1}^{\infty}$ следует, что $x_n, x_m \in \mathrm{B}(x_N, r_N)$ и, следовательно,

$\rho(x_n, x_m) < 2r_n < \frac{1}{2^{N-1}}$, т.е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в X. А, так как X- полное метрическое пространство, то существует точка $x^* \in X$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Таким образом, получаем, что $x^* \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$, и, учитывая построение последовательности закрытых множеств k_j имеем

$$x^* \in K_j \subset \mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap U_j \text{ ,для всех } j \geq 1,$$

и следовательно

$$x^* \in \mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j.$$

Полученное означает, что множество

$$U = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$$

плотно в пространстве X, что и требовалось доказать.

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть X полное метрическое пространство, а $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ счетное число плотных G_δ множеств в X. Тогда множество $G = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_i$ плотное G_δ множество в пространстве X.*

Доказательство. Пусть $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ - счетное число плотных G_δ множеств в X. Тогда согласно определению G_δ множества, имеем $G_i = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} U_k^i$, где множества U_k^i открытые и плотные в X.

Нетрудно видеть, что

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k^i = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n ,$$

где U_n некоторый набор множеств U_k^i. Так как множества $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ открытые, плотные в X множества, то из Леммы 1 следует, что множество G также является плотным в X множеством. С другой стороны $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, где U_n – открытые множества, т.е. множество G является плотным G_δ множеством в X.

Лемма 2.2 доказана.

Следующая лемма, по сути является модификацией Принципа универсальности:

Лемма 2.3. *Пусть $\mathbb{X}$ полное метрическая пространство, $\mathbb{Y}$ сепарабельное метрическое пространство, а $\mathbb{T}_n : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$ некоторое непрерывные отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Множество $\mathbb{U}$ универсальных элементов является остаточным в $\mathbb{X}$.

(ii) Множество $\mathbb{U}$ универсальных элементов плотно в $\mathbb{X}$.

(iii) $\mathbb{T}_n : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$ топологически транзитивно для пары $(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.

Если одно из этих утверждений выполняется, то множество универсальных точек $\mathbb{U}$ является плотным G_δ подмножеством $\mathbb{X}$.

Доказательство. Сперва покажем, что $(ii) \Rightarrow (i)$.

Допустим, что существует множество элементов

$\mathbb{U} = \{x \in X: \{T_n x: n \in N\}$ плотно в $Y\}$,

которое плотно в X и пусть $U \in X$, $V \in Y$ - любые открытые, непустые множества. Поскольку множество $\mathbb{U}$ плотно в X, то $\mathbb{U} \cap U \neq \emptyset$, следовательно, существует точка $x_0 \in \mathbb{U}$ так, что $x_0 \in U$. С другой стороны, согласно (a) существует натуральное число k такое, что $T_k x_0 \in V$. Отсюда следует, что $x_0 \in T_k(U) \cap V$, т.е. $T_k(U) \cap V \neq \emptyset$, и следовательно, T_n топологически транзитивно для (X, Y), т.е. имеет место утверждение **(i)**.

Теперь покажем, что $(i) \Rightarrow (ii)$.

Допустим имеет место утверждение (i), т.е. T_n топологически транзитивно для (X, Y). Следовательно согласно определению топологической транзитивности, для любых непустых, открытых множеств $U \subset X$ и $V \subset Y$ существует некоторое число $n \geq 0$ такое, что $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$. Отсюда, в частности следует, что для любого открытого множества $U \subset X$ имеем $U \cap T_n{}^{(-)}(V) \neq \emptyset$, где

$$T_n{}^{(-)}(V) = \{x \in X: T_n x \in V\}$$

полный прообраз множества V относительно T_n.

Отсюда, в частности, следует, что для любого открытого множества $U \subset X$ имеем

$$U \cap \bigcup_{s=1}^{\infty} T_s{}^{(-)}(V) \neq \emptyset,$$

т.е. множество $\Theta^{(-)}(V) = \bigcup_{s=1}^{\infty} T_s^{(-)}(V)$ плотно в X.

С другой стороны, множество $\Theta^{(-)}(V)$ открытое. В самом деле, пусть дана любая точка $x_0 \in T_n{}^{(-)}(V)$. Тогда $y_0 = T_n x_0 \in V$. Поскольку T_n непрерывное отображение, то для любого шара $\mathrm{B}_\varepsilon(y_0) \subset V$ существует окружность $\mathrm{B}_\delta(x_0)$ такая, что $T_n(\mathrm{B}_\delta(x_0)) \subset \mathrm{B}_\varepsilon(y_0)$. Следовательно, $T_n(\mathrm{B}_\delta(x_0)) \subset V$. Таким образом, для любой точки $x \in \mathrm{B}_\delta(x_0)$ имеем $T_n x \in V$, т.е. $x \in T_n{}^{(-)}(V)$. Отсюда следует, что множество

${T_n}^{(-)}(V)$ открытое, и следовательно множество $\Theta^{(-)}(V)$ также открытое.

Таким образом, для любого открытого множества $V \subset Y$ множество $\Theta^{(-)}(V)$ открытое и плотное в $U \subset X$. Далее возьмем счетный базис открытых множеств $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$, $V_j \subset Y$ со свойством: для любого открытого множества $V \subset Y$ существует $j \geq 1$ такое, что $V_j \subset V$. Согласно доказанному выше, множества $\{\Theta^{(-)}(V_j)\}_{j=1}^{\infty}$ открытые и плотные в X. Применяя Лемму 2.2 получим, что множество $\Omega = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Theta^{(-)}(V_j)$ также плотно в X. Возьмем любую точку $x_0 \in \Omega$. Тогда имеем $x_0 \in \Theta^{(-)}(V_j) = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} T_s^{(-)}(V_j)$, для всех $j = 1,2,\ldots$. Отсюда следует, что для любого $j \geq 1$ существует $s \geq 1$ так, что $T_s x_0 \in V_j$.

Следовательно

$$V_j \cap \bigcup_{s=1}^{\infty} T_s x_0 \neq \emptyset, \qquad j \geq 1.$$

Теперь пусть дано любое открытое множество $V \subset Y$. Тогда существует V_j такое, что $V_j \subset V$. Отсюда следует, что $V \cap \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} T_s x_0 \neq \emptyset$, т.е. множество $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} T_s x_0$ плотно в Y.

Таким образом, множество $\{T_n x_0 : n \in N\}$ плотно в Y, т.е. точка x_0 универсальна в Y и следовательно $x_0 \in \mathbb{U}$. С другой стороны множество Ω является пересечением счетного числа открытых, плотных в X множеств, следовательно, Ω-плотное G_δ множество.

Лемма 2.3 доказана.

В дальнейшем всегда обозначим через Λ фиксированную последовательность целых чисел m_k для которых $L_{m_k} \to \infty$ при $K \to \infty$. (см. Свойство D).

Лемма 2.4. *Для любого* $x_0 \in (0,1)$ *и последовательности* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$, *последовательность операторов* $T_{n_k}\colon L^p\,(0,1) \to \mathbb{C}$ *определена следующим образом:*

$$T_{n_k} f := S_{n_k}(f, x_0),\ \ f \in L^p\,(0,1)$$

топологически транзитивна для пары $(L^p(0,1), \mathbb{C})$ *т.е. для любых* $g(x) \in L^p(0,1)$, $\varepsilon > 0$ *и* $b \in R$ *существует функция* $f(x) \in L^p(0,1)$ *и число* $k_0 \in \mathbb{N}$ *такие, что*

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, dx < \varepsilon \;, \qquad S_{n_{k_0}}(f, x_0) = b$$

Доказательство. Пусть даны: $g(x) \in L^p(0,1)$, $b \in R$ и $0 < \varepsilon < 1$.

Из Свойства (E) следует, что существует полином $Q^{(a)}(x)$ по системе Ψ_a такой, что

$$\int_0^1 \left|g(x) - Q^{(a)}(x)\right|^p dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.1)$$

Более того из Свойства (D) следует, что для $x_0 \in (0,1)$ и последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$ существует функция $H(x) \in L^p(0,1)$ такая, что $S_{n_k}(H, x_0) \to \infty$. Следовательно, можно найти число k_0 такое, что $n_{k_0} > \deg\{Q^{(a)}\}$ и имеет место неравенство

$$\left|S_{n_{k_0}}(H, x_0)\right| > \left|b - Q^{(a)}(x_0)\right| \cdot \frac{2}{\varepsilon}\left[\int_0^1 |H(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (2.2)$$

Далее рассмотрим функцию

$$\bar{H}(x) = \frac{b - Q^{(a)}(x_0)}{S_{n_{k_0}}(H, x_0)} \cdot H(x) \qquad (2.3)$$

Из соотношений (2.2) и (2.3) следует

$$\left[\int_0^1 \left|\bar{H}(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \frac{b - Q^{(a)}(x_0)}{S_{n_{k_0}}(H, x_0)} \cdot H(x)\frac{2}{\varepsilon}\left[\int_0^1 |H(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.4)$$

и

$$S_n(\bar{H})(x_0) = \frac{b - Q^{(a)}(x_0)}{S_{n_{k_0}}(H, x_0)} \cdot S_{n_{k_0}}(H, x_0) = b - Q^{(a)}(x_0) \qquad (2.5)$$

Положим

$$f(x) = \bar{H}(x) + Q^{(a)}(x) \qquad (2.6)$$

Очевидно, что $f(x) \in L^p(0,1)$. С другой стороны, для $g(x) \in L^p(0,1)$, из (2.1) и (2.6) следует, что

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, dx \le \int_0^1 \left|f(x) - Q^{(a)}(x)\right|^p dx + \int_0^1 \left|Q^{(a)}(x) - g(x)\right|^p dx \le$$

$$\le \int_0^1 \left|\bar{H}(x)\right|^p dx + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Учитывая, что $n_{k_0} > deg\{Q^{(a)}\}$ и следовательно $S_{n_{k_0}}(Q^{(a)},x) = Q^{(a)}(x)$, то из (2.5) получаем

$$S_{n_{k_0}}(f,x_0) = S_{n_{k_0}}(\bar{H},x_0) + Q^{(a)}(x_0) = b - Q^{(a)}(x_0) + Q^{(a)}(x_0) = b$$

Лемма 2.4 доказана.

Применяя Лемму 2.3 и 2.4, получим следующую лемму.

Лемма 2.5. *Для любого $x_0 \in (0,1)$ и последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$ существует функция $f(x) \in L^p(0,1)$ такая, что множество $\{S_n(f,x_0): n \in \{n_k\}_{k=1}^{\infty}\}$ плотно в R, т.е. функция $f(x)$ универсальна в R относительно системы Ψ_a.*

Лемма 2.6. *Для любого конечного множества*

$$E_N = \{x_1,x_2,\dots,x_N\}, N \geq 1, x_k \in (0,1)$$

последовательность операторов $T_n: L^p(0,1) \to R^{E_N}$ определенная следующим образом:

$$T_n(f) := \{S_n(f,x_i), i = 1,2,\dots,N, n \in \Lambda, f \in L^p\}$$

топологически транзитивно для пары $(L^p(0,1), R^{E_N})$, т.е. для любых $g(x) \in L^p(0,1)$, $\varepsilon > 0$ и $h(x) \in R^{E_N}$ существуют функция $f(x) \in L^p(0,1)$ и последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Lambda$ такие, что

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p\, dx < \varepsilon, \qquad |S_{n_k}(f)(x_i) - h(x_i)| < \varepsilon, \qquad i = 1,2,\dots,N.$$

Доказательство. Доказательство проведем с помощью индукции, по количеству точек N множества E.

Если множество E содержит одну точку x_0, т.е. $N = 1$, то доказательство Леммы 2.6 следует из Леммы 2.4 (при $E = \{x_0\}$).

Предположим, что утверждение Леммы 2.6 справедливо для любого конечного множества $F = \{x_1,x_2,\dots,x_N\}$ содержащего N точек. Докажем утверждение Леммы для множества $E = \{x_0\} \cup F = \{x_0,x_1,x_2,\dots,x_N\}$ (содержащего $N+1$ точек).

Пусть даны функции $g \in L^p(0,1)$, $h : E \to R$, $h(x) \in R^E$ и число $\varepsilon > 0$.

Согласно Свойству (E), для функции $g \in L^p(0,1)$ можно найти полином $Q^{(a)}(x)$ по системе Ψ_a так, что

$$\int_0^1 \left|g(x) - Q^{(a)}(x)\right|^p dx < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.7)$$

Применяя предположение Леммы 2.6 для $F = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, $g(x) = 0$, $x \in (0,1)$, $h(x) - Q^{(a)}(x) \in \mathrm{R}^F$ и $\varepsilon > 0$, получим, что существуют функция $U(x) \in L^p(0,1)$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Lambda$ такая, что

$$\int_0^1 |U(x)|^p dx < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.8)$$

$$\left|S_{n_k}(U, x_i) - \left(h(x_i) - Q^{(a)}(x_i)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad i = 1,2,\dots,N. \qquad (2.9)$$

Далее, применяя Лемму 2.6 для последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и соответственно, для числа $h(x_0) - Q^{(a)}(x_0) = b \in \mathrm{R}$, можем найти подпоследовательность $\{n_{k_j}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{n_k\}$ и функцию

$V(x) \in L^p(0,1)$

$$\int_0^1 |V(x)|^p dx < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2.10)$$

$$\left|S_{n_{k_j}}(V, x_0) - \left(h(x_0) - Q^{(a)}(x_0)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (2.11)$$

Теперь рассмотрим вспомогательную функцию $\xi(x) \in C(0,1)$, удовлетворяющую условиям:

$$0 \le \xi(x) \le 1, \ \ \xi(x)|_{U_{x_0}} = 0, \ \ \xi(x)|_{U_{x_i}} = 1, \ i = 1,2,\dots,N. \qquad (2.12)$$

где U_{x_i} некоторые открытые окрестности точек x_i, $i = 1,2,\dots,N$.

В этом случае имеем:

$$U(x) \cdot \xi(x) = \begin{cases} 0, & x \in U_{x_0} \\ U(x), & x \in U_{x_i}, \quad i = 1,2,\dots,N. \end{cases}$$

$$(1 - \xi(x))V(x) = \begin{cases} V(x), & x \in U_{x_0}; \\ 0, & x \in U_{x_i}, \quad i = 1,2,\dots,N. \end{cases}$$

Применяя Принцип Локализации (см. Свойство (F)), для достаточно больших чисел n_{k_j} (в частности $n_{k_j} > deg\{Q^{(a)}\}$ получим следующие неравенства:

$$\left|S_{n_{k_j}}(U\xi, x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.13}$$

$$\left|S_{n_{k_j}}((1-\xi)V, x_0) - S_{n_{k_j}}(V, x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.14}$$

$$\left|S_{n_{k_j}}(U\xi, x_i) - S_{n_{k_j}}(U, x_i)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad i = 1,2,\dots,N. \tag{2.15}$$

$$\left|S_{n_{k_j}}((1-\xi)V, x_i)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad i = 1,2,\dots,N. \tag{2.16}$$

Определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = U(x)\cdot\xi(x) + (1-\xi(x))V(x) + Q^{(a)}(x), \qquad x \in (0,1). \tag{2.17}$$

Из (2.7), (2.8), (2.10) и (2.12) следует, что $f(x) \in L^p(0,1)$ и

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p\,dx \le \int_0^1 |U(x)|^p\,dx + \int_0^1 |V(x)|^p\,dx +$$

$$+ \int_0^1 \left|Q^{(a)}(x) - g(x)\right|^p dx < \varepsilon$$

Учитывая, что $n_{k_j} > deg\{Q^{(a)}\}$ (следовательно $S_{n_{k_j}}(Q^{(a)}, x) = Q^{(a)}(x)$) из соотношения (2.9), (2.15) - (2.17) получим:

$$\left|S_{n_{k_j}}(f, x_i) - h(x_i)\right| \le \left|S_{n_{k_j}}(U\xi, x_i) + S_{n_{k_j}}((1-\xi)V, x_i) + Q^{(a)}(x_i) - h(x_i)\right| \le$$

$$\le \left|S_{n_{k_j}}(U\xi, x_i) - S_{n_{k_j}}(U, x_i)\right| + \left|S_{n_k}(U, x_i) - \left(h(x_i) - Q^{(a)}(x_i)\right)\right| +$$

$$+ \left|S_{n_{k_j}}((1-\xi)V, x_i)\right| < \varepsilon$$

и аналогично из (2.11), (2.13), (2.14) и (2.17) имеем:

$$\left|S_{n_{k_j}}(f, x_0) - h(x_0)\right| \le \left|S_{n_{k_j}}(U\xi, x_0)\right| + \left|S_{n_{k_j}}((1-\xi)V, x_0) - S_{n_{k_j}}(V, x_0)\right| +$$

$$+ \left|S_{n_{k_j}}(V, x_0) - \left(h(x_0) - Q^{(a)}(x_0)\right)\right| < \varepsilon.$$

Из полученных неравенств следует, что

$$\left|S_{n_{k_j}}(f, x_i) - h(x_i)\right| < \varepsilon, i = 0,1,2,\dots,N.$$

Лемма 2.6 доказана.

Из леммы 2.3 и 2.6 непосредственно следует следующая лемма:

Лемма 2.7. *Для любого конечного множества* $E_j = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$, $j \ge 1$, $x_i \in (0,1)$, $i = 1,2,\dots,j$, *множество всех функций из* $L^p(0,1)$ *универсально в* C^{E_j}, *т.е.*

$$\mathcal{F}_j = \{f(x) \in L^p(0,1) : \{S_n(f, x_i) : n \in \Lambda, x_i \in E_j\} \text{ всюду плотна в } C^{E_j}\}$$

является плотным G_δ множеством.

Лемма 2.8. *Пусть множества $E, F \subset ((0,1), \rho^*)$ компактны и не пересекаются, и пусть $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Если $\{S_n(f_0)\}_{n\in\Lambda}$ равномерно универсально на E для некоторой функции $f_0(x) \in L^p(0,1)$ и если для всех $\Lambda' \subset \Lambda$, существует некоторый $f_{\Lambda'}(x) \in L^p(0,1)$ так, что $\{S_n(f)\}_{\Lambda'}$ равномерно универсально на F, тогда существует плотное G_δ – множество $M \subset L^p(0,1)$ такое, что для любой функции $f(x) \in L^p(0,1)$ множество $\{S_n(f)\}_{n\in\Lambda}$ равномерно универсально на $E \cup F$.*

Доказательство Леммы 2.8. Рассмотрим последовательность операторов $T_n : L^p \to L^p(E \cup F)_{n\in\Lambda}$ определенную следующим образом: $T_n f := S_n(f)|_{E\cup F}$ для $n \in \Lambda$. Применяя Лемму 2.7, достаточно показать, что $\{T_n\}_{n\in\Lambda}$ топологически транзитивна, т.е. в данном случае нужно доказать, что для любых $g(x) \in L^p(0,1)$, $\varepsilon > 0$ и $H(x) \in L^p(E \cup F)$, существуют $f(x) \in L^p(0,1)$ и $n \in \Lambda$ такие, что

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p\, dx < \varepsilon \text{ и } \|S_n(f,x) - H\|_{E\cup F} < \varepsilon$$

Пусть даны функции $g(x) \in L^p(0,1)$, $H(x) \in L^p(E \cup F)$, и число $\varepsilon > 0$. Возьмем полином $Q^{(a)}$ по системе Ψ_a такое, что

$$\int_0^1 \left|g(x) - Q^{(a)}(x)\right|^p dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

Поскольку множество $\{S_n(\alpha f_0) : n \in \Lambda\}$ плотно в $L^p(E)$ для любого $\alpha > 0$, то выберем достаточно маленькое число α так, что

$$U(x) = \alpha f_0 \in L^p(0,1) \text{ и } \int_0^1 |U(x)|^p\, dx < \frac{\varepsilon}{3}$$

Следовательно, существует множество $\Lambda' \subset \Lambda$ с $|\Lambda'| = \infty$, удовлетворяющее условию

$$\left\|\left(H(x) - Q^{(a)}(x)\right) - S_n(U,x)\right\|_E < \frac{\varepsilon}{3}$$

Аналогично, из предположения о множестве F, мы получаем существование функции

$V(x) \in L^p(0,1)$ и $\int_0^1 |V(x)|^p \, dx < \frac{\varepsilon}{3}$

и соответственно множество $\Lambda'' \subset \Lambda'$ с $|\Lambda''| = \infty$ так,что

$$\int_0^1 \left| \left(H(x) - Q^{(a)}(x) \right) - S_n(V,x) \right|^p dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь определим вспомогательную функцию $\xi \in C(0,1)$, удовлетворяющую условиям:

$$0 \le \xi \le 1, \ \ \xi|_{E_0} = 1, \ \ \xi|_{F_0} = 0,$$

для открытых окрестностей E_0 множества E и F_0 множества F в $(0,1)$.

Определяя функцию f следующим образом:

$$f(x) = U(x) \cdot \xi(x) + \left(1 - \xi(x)\right) V(x) + Q^{(a)}(x), x \in (0,1).$$

и повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве Леммы 2.3, получим:

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, dx < \varepsilon$$

$$\|S_n(f) - H\|_E < \varepsilon, \|S_n(f) - H\|_F < \varepsilon$$

Лемма 2.8 доказана.

2.3. Доказательство теоремы о поточечной универсальности

Доказательство Теоремы 2.1. Пусть дано любое счетное множество $E = \{x_1, x_2, \dots, \}$. Представим E следующим образом:

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, E_j = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}, j = 1,2, \dots$$

Тогда согласно Леммы 2.4 и 2.5 для любого $j \ge 1$ множество

$$\mathcal{F}_j = \{f(x) \in L^p(0,1) : \ \{S_n(f, x_i) : n \in \Lambda, x_i \in E_j\} \text{ плотна в } \mathbb{R}^{E_j}\}$$

является плотным G_δ множеством в $L^p(0,1)$. Следовательно из принципа универсальности следует, что

$$\mathcal{F} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j \neq \emptyset$$

также является плотным G_δ множеством в $L^p(0,1)$.

Возьмем любую функцию $\tilde{f} \in \mathcal{F}$. Отсюда следует, что $\tilde{f} \in \mathcal{F}_j$ для всех $j \geq 1$.

Пусть теперь дана любая функция $h \in R^E$.Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что для любого x_i, $i = 1,2, \dots ,j$ имеем

$$\left|S_{n_k^{(j)}}(\tilde{f}, x_i) - h(x_i)\right| < \frac{1}{k}$$

Возьмем последовательность $m_j = n_j^{(j)}$, при $j = 1,2, \dots$. Тогда для любого $x \in \{x_1, x_2, \dots , x_j\}$ имеем:

$$\left|S_{m_j}(\tilde{f})(x_i) - h(x)\right| < \frac{1}{j} \qquad (2.18)$$

Для любой точки $x \in E$ можем найти число $k_0 \geq 1$ так, что $\bar{x} = x_{k_0}$. Теперь пусть дано произвольное положительное число ε.

Положим $j_0 = k_0 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда для любого $j \geq j_0$ имеем $x_{k_0} \in E_j = \{x_1, x_2, \dots , x_j\}$ и следовательно из (2.18) получим:

$$\left|S_{m_j}(\tilde{f}, \bar{x}) - h(\bar{x})\right| = \left|S_{m_j}(\tilde{f}, x_{k_0}) - h(x_{k_0})\right| < \frac{1}{j} < \varepsilon$$

откуда и следует, что $S_{m_j}(\tilde{f}, x) - h(x)$, при $j \to \infty$.

Таким образом, для любого счетного множества $E \subset (0,1)$ существует

плотное G_δ множество

$$\mathcal{F} = \bigcap_{j=1}^{\infty}\{f(x) \in L^p(0,1) : \{S_n(f, x_i) : n \in \Lambda, x_i \in E_j\} \text{ плотна в } R^{E_j}\}$$

обладающее следующим свойством: последовательность частичных сумм ряда Фурье по системе Ψ_a любой функции из $\mathcal{F}$ является точечно универсальным в $\mathbb{C}^E$.

Теорема 2.1 доказана.

Следствие. Из критерия универсальности и из доказательства Теоремы 2.1 следует, что для любого счетного множества E, система Кристенсона Леви топологический транзитивно для пары $\{L^p(0,1)\ ;\ \mathbb{C}^E\}$.

ГЛАВА III

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ КРИСТЕНСОНА – ЛЕВИ , УНИВЕРСАЛЬНЫХ В $L^p_\mu(0,1)$, $1 \le p < \infty$ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕСТАНОВОК

3.1. Некоторые известные результаты

В этой главе диссертации рассматриваются вопросы существования рядов по системе Кристенсона-Леви, универсальные в $L^p_\mu(0,1)$, $1 \le p < \infty$ относительно знаков, перестановок и подрядов. Отметим, что вопросам существования рядов (одномерных и двумерных) универсальных в обычном смысле и относительно перестановок, подрядов, знаков в смысле сходимости почти всюду, по мере, в весовом пространстве $L^p_\mu(0,2\pi)$, $1 \le p < \infty$ посвящено много работ (см. [38]- [50]).

Первые обычные универсальные в смысле сходимости почти всюду тригонометрические ряды были построены в 1945г. Д. Е. Меньшовым [38]. А именно им был построены ряды вида

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

такие, что для всякой измеримой на $(0,2\pi)$ функции $f(x)$ можно найти такую возрастающую последовательность натуральных чисел n_k, что у ряда последовательность частичных сумм с номерами n_k сходится к $f(x)$ почти всюду на $(0,2\pi)$. (Отметим, что в этом результате , при $f(x) \in L^1(0,2\pi)$,нельзя сходимость почти всюду заменить сходимостью в метрике $L^1(0,2\pi)$).

В 1950 году В.Я. Козлов [39] по существу показал, что существует универсальный тригонометрический ряд такой, что, если функция непрерывна на $(0,2\pi)$, то сходимость почти всюду можно заменить на локально равномерную сходимость в $(0,2\pi)$.

Этот результат был распространен А.А.Талаляном на произвольные ортонормированные полные системы (см [40]). Им же в работе [41], установлено также, что, если $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - нормированный базис пространства $L^p(0,1), p > 1$, то существует ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(x), a_k \to 0$$

со свойством: для любой измеримой функции $f(x)$, члены ряда можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился по мере на $(0,1)$ к $f(x)$.

Следует отметить, что факт о существовании функциональных рядов, универсальных относительно перестановок в смысле сходимости почти всюду в классе почти везде конечных измеримых функций, был отмечен В. Орличем [42]. И наконец напомним, что Риман доказал, что всякий неабсолютно сходящийся числовой ряд является универсальным относительно перестановок в классе всех действительных чисел (см [43] , стр. 317).

В [45] М. Григорян доказал следующий результат:

Теорема. *Существует тригонометрический ряд вида*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}, \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^r < \infty, \forall\ r > 2\ C_{-k} = \overline{C_k}$$

который универсален в весовом пространстве $L^1_\mu(0,1)$ относительно подрядов, при некоторой весовой функции $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \le 1$.

Далее С. Епископосяном доказан следующий результат [49]:

Теорема. *Существует ряд по системе Кристенсона-Леви вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x),\, |c_k| \searrow 0 \text{ с } \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^r < \infty ,\forall\ r > 2\,,$$

со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ *существует измеримая функция*

$\mu(x)\,, 0 < \mu(x) \leq 1\,, mes\{x \in (0,1) : \mu(x) \neq 1\} < \varepsilon$

такая, что ряд является универсальным в $L_\mu^1\,(0,1)$ *одновременно относительно перестановок и подрядов.*

Далее, обозначим

$$L_\mu^p\,(0,1) = \left\{ f\,;\, \int_0^1 |f(x)|^p\, \mu(x) dx < \infty \right\}$$

-класс всех определенных на $(0,1)$ измеримых функций с нормой

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^p\, \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1.$$

где весовая функция $\mu(x)$ измеримая на $(0,1)$ положительная функция .

В связи с этими результатами, возникают следующие вопросы:

- Существует ли ряд по системе Кристенсона-Леви, все ненулевые коэффициенты которого расположены в убывающем порядке, который является универсальным в $L_\mu^p\,(0,1)$, $1 \leq p < \infty$, при некотором $\mu(x)$ относительно знаков.
- Можно ли построить ряд по системе Кристенсона-Леви и соотвествующее весовое пространство $L_\mu^p\,(0,1)$, таким образом, чтобы ряд был универсальным одновременно относительно знаков , перестановок и подрядов.

Оказывается, что поставленные вопросы имеют положительные ответы. В частности, в данной главе получены следующие результаты:

Теорема 3.1. *Существует ряд по системе Кристенсона-Леви вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x), |c_k| \searrow 0 \text{ с } \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^r < \infty, \forall\ r > 2,$$

со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция

$\mu(x), 0 < \mu(x) \le 1$, $mes\{x \in (0,1): \mu(x) \ne 1\} < \varepsilon$

так, что ряд является универсальным в $L_\mu^p(0,1)$, $1 \le p < \infty$ относительно знаков (перестановок и подрядов) , и все ненулевые члены в последовательности $\{|c_k|\}$ расположены в убывающем порядке.

Теорема 3.1. следует из более общей теоремы , формулировка которой такова:

Теорема 3.2. *Существует ряд по системе Кристенсона-Леви вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x), |c_k| \searrow 0 \text{ с } \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^r < \infty, \forall\ r > 2,$$

со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция

$\mu(x), 0 < \mu(x) \le 1$, $mes\{x \in (0,1): \mu(x) \ne 1\} < \varepsilon$

такая, что ряд является универсальным относительно знаков , перестановок и подрядов , во всех весовых пространствах в $L_\mu^p(0,1)$, $1 \le p < \infty$.

3.2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Введем некоторые обозначения. Для любого $a \ge 2$ разобьем полуинтервал $(0,1)$ на a^m равных частей и обозначим эти полуинтервалы через $\Delta_m^{(i)}$, которые будем в дальнейшем называть двоичными интервалами или просто интервалами вида $\Delta_m^{(i)}$.

Положим

$$S_n(x,f)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{A}_k\psi_k^{(a)}(x) \text{ где } \mathcal{A}_k(f)=\int_0^1 f(x)\overline{\psi_k^{(a)}(x)}dx\,, \tag{3.1}$$

Мы будем пользоваться следующими свойствами системы Кристенсона-Леви (см. [8])

$$\begin{cases} |S_n(x,\gamma\Delta)|\le 4|\gamma| \quad \text{где} \quad x\in(0,1)\,, n\ge 0\,, \\ \left(\int_0^1 |S_n(x,f)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \Theta_p\left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \forall\ n\ge 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

для всех $1\le p<\infty$, Θ_p зависит только от p , Δ - интервал вида $\Delta_m^{(i)}$, а γ - некоторое комплексное число.

Далее, для любых $m=1,2,\dots$ и $1\le k\le a^m$ расмотрим функцию

$$\Lambda_m^{(k)}(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1)\backslash\Delta_m^{(k)},\\ 1-a^m, x\in\Delta_m^{(k)}\end{cases} \tag{3.3}$$

и продолжим функцию периодически на $\mathbb{R}^1$ с периодом 1.

Через $\chi_E(x)$ обозначим характеристическую функцию множества E, т.е.

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, \text{при } x\in E,\\ 0, \text{при } x\notin E.\end{cases} \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. *Для функций* $\Lambda_m^{(k)}(x)$ и $\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x)$ *имеет место следующее:*

$$\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x)=\sum_{i=0}^{a^m-1}\mathcal{A}_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right)\psi_i^{(a)} \tag{3.5}$$

$$\Lambda_m^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{a^m-1}\mathcal{B}_i(\Lambda_m^{(k)})\psi_i^{(a)} \tag{3.6}$$

где коэффициенты Фурье вычисляются следующим образом

$$\mathcal{A}_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right)=\int_0^1\chi_{\Delta_m^{(k)}}(t)\cdot\overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt=\begin{cases}0, & \text{при} \quad i\ge a^m\\ \frac{\Im}{a^m}, & \text{при } 0\le i<a^m\end{cases} \tag{3.7}$$

$$\mathcal{B}_i\left(\Lambda_m^{(k)}\right) = \int_0^1 \Lambda_m^{(k)}(t)\cdot\overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } i = 0 \text{ и } i \geq a^m, \\ -\mathfrak{J}, & \text{при } 0 \leq i < a^m. \end{cases} \qquad (3.8)$$

при $\mathfrak{J} = const \in \Omega_a = \{1, \omega_a, \omega_a^2, \dots, \omega_a^{a-1}\}$, *и* $|\mathfrak{J}| = 1$.

Доказательство . Очевидно , что

$$\Lambda_m^{(k)}(x) = \psi_0^{(a)}(x) - a^m\cdot\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x) \qquad (3.9)$$

вычислим коэффициент Фурье функции $\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x)$:

$$\mathcal{A}_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right) = \int_0^1 \chi_{\Delta_m^{(k)}}(t)\cdot\overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt = \int_{\Delta_m^{(k)}} \overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt. \qquad (3.10)$$

1) Если $i \geq a^m$, то $i = a^m + j$, $0 \leq j < a^m$,

следовательно из (3.5) имеем

$$\overline{\psi_i}^{(a)}(t) = \overline{\varphi_m}^{(a)}(t)\cdot\overline{\psi_j}^{(a)}(t) \qquad (3.11)$$

Учитывая , что в каждом интервале $\Delta_m^{(k)}$,$0 \leq k < a^m$

$\overline{\psi_j}^{(a)}(t) = \mathfrak{J} = const \in \Omega_a$ и $|\mathfrak{J}| = 1$,

то из (D) и (3.4) получим

$$\mathcal{A}_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right) = \mathfrak{J}\cdot\int_{\Delta_m^{(k)}} \overline{\varphi_m}^{(a)}(t)\,dt =$$

$$= \mathfrak{J}\cdot\sum_{s=0}^{a-1}\int_{\Delta_{m+1}^{(s)}} \omega_a^s\,dt = \mathfrak{J}\cdot\frac{1}{a^{m+1}}\cdot\sum_{s=0}^{a-1}\omega_a^s = 0 \qquad (3.12)$$

2) Если $0 \leq i < a^m$,то $\overline{\psi_j}^{(a)}(t) = \mathfrak{J} = const \in \Omega_a$, следовательно

$$\mathcal{A}_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right) = \mathfrak{J}\cdot\left|\Delta_m^{(k)}\right| = \frac{\mathfrak{J}}{a^m}. \qquad (3.13)$$

Таким образом условия (3.5) и (3.6) Леммы 3.1 выполнены. Докажем условия (3.7) и (3.8).

Из Определения 1.1 и 1.2 имеем

$$\mathcal{B}_i(\Lambda_m^{(k)}) = \int_0^1 \Lambda_m^{(k)}(t) \cdot \overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \varphi_0^{(a)}(t) \cdot \overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt - a^m \int_0^1 \chi_{\Delta_m^{(k)}}(t) \cdot \overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt = \Lambda_1 - a^m \cdot \Lambda_2 . \qquad (3.14)$$

Так как система Ψ_a является ортонормированной системой на $(0,1)$, то имеем

$$\Lambda_1 = \begin{cases} 0, \text{при } i > a^m, \\ 1, \text{при } i = 0. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Из условий (3.12),(3.13) получим

$$\Lambda_2 = \begin{cases} 0, \text{при } i > a^m, \\ \dfrac{1}{a^m}, \text{при } i = 0, \\ \dfrac{\mathfrak{I}}{a^m}, \text{при } 1 \le i < a^m. \end{cases} \qquad (3.16)$$

Из условий (3.15),(3.16) получим (3.8).

Лемма 3.1. доказана.

Лемма 3.2 *Пусть даны числа* $\gamma_0 \neq 0, \varepsilon_0 > 0, \delta_0 > 0, N, k_0 \in \mathbb{N}\,(N > k_0), p_0 > 1$ *и двоичный интервал* $\Delta_0 = [\frac{i_0 - 1}{a^{m_0}}, \frac{i_0}{a^{m_0}})$ *Тогда существуют множество* $E \subset \Delta_0$, *функция* $g(x)$ *и полином по системе* Ψ_a *вида*

$$Q(x) = \sum_{k=k_0}^{N} c_n \psi_{n_k}^{(a)}(x), \qquad (n_{k_0} > N)\, n_k \nearrow ,$$

Удовлетворяющие условиям:

1) $$|\mathrm{E}| > (1 - \delta_0)|\Delta_0|,$$

2) $$g(x) = \gamma_0 X\Delta_0(x), \;\; \forall x \in E \cup ((0,1)\backslash\Delta_0),$$

3) $$|Q(x)| \le \varepsilon_0 \;, \; \forall\, x \in \; ((0,1)\backslash\Delta_0)\,),$$

4) $$\|g(x)\|_\infty = \sup_{x\in(0,1)}(|g(x)|) \le \frac{|\gamma_0|}{\delta_0},$$

5) $$\|g(x) - Q(x)\|_\infty = \sup_{x\in(0,1)}(|g(x) - Q(x)|) \le \varepsilon_0,$$

6) $$\max_{k_0<M\le N}\left(\sup_{x\in\Delta_0}\left|\sum_{k=k_0+1}^{M} c_k\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right)\le\frac{2|\gamma_0|}{\delta_0}\ ,$$

7) $$\max_{k_0<M\le N}\left(\sup_{x\in(0,1)\setminus\Delta_0}\left|\sum_{k=k_0+1}^{M} c_k\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right)\le|\gamma_0|\ ,$$

8) $$|c_k|>|c_{k+1}|>0\,,\qquad k\in(k_0\,,N)$$

9) $$\sum_{k=k_0}^{N}|c_k|^{2+\varepsilon}<\frac{\varepsilon_0}{4},$$

10) $$\max_{k_0\le M\le N}\int_0^1\left|\sum_{n=k_0}^{M} c_n\psi_n^{(a)}(x)dx<\right|2|\gamma_0|\sqrt{\frac{1}{\delta_0}|\Delta_0|},$$

11) $$\max_{k_0\le M\le N}\left(\int_E\left|\sum_{n=k_0}^{M} c_n\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\ \theta\cdot\frac{|\gamma_0||\Delta_0|^{\frac{1}{p}}}{\delta_0^{1-\frac{1}{p}}},$$

где θ — некоторое число.

Доказательство Леммы 3.2. Разделим отрезок Δ_0 на конечное число интервалов $\Delta_{1,}\dots.\Delta_{\nu_0}$. так чтобы

$$\max_{1\le\nu\le\nu_0}\left(\frac{\Theta_{p_0}|\gamma_0||\Delta_\nu|^{\frac{1}{p_0}}}{\varepsilon_0\delta_0}\right)^{\varepsilon_0}<\min\left\{\frac{\varepsilon_0\delta_0}{4^{\sigma+1}(\gamma_0^2|\Delta|+1)};\ \frac{|\gamma_0||\Delta_0|^{\frac{1}{p_0}}}{2}\right\}$$

$$|\Delta_1|=\cdots=|\Delta_{\nu_0}|\tag{3.17}$$

где

$$\sigma=\left[log_a\frac{1}{\delta_0}\right],\tag{3.18}$$

Θ_{p_0} — константа неравенства (3.2) и через $[a]$ обозначена целая часть числа a .

Положим

$$m=log_a\frac{1}{|\Delta_1|},|\Delta_1|=\cdots=|\Delta_{\nu_0}|=a^{-m}\tag{3.19}$$

$$s_1=[log_2N_0]+m\tag{3.20}$$

Продолжим функцию $\Lambda_\sigma^{(1)}\ (x)$ с отрезка $(0,1)$ на всю действительную ось с периодом 1.

Определим функцию (полином) $g_1(x)$ и числа $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{A}_j$, $\mathcal{B}_i$, и $\mathcal{A}_k^{(1)}$ следующим обрезом:

$$g_1(x) = \gamma_0 X_{\Delta_1}(X)\, \Lambda_\sigma^{(1)}(a^{s_1}x), x \in (0,1) \qquad (3.21)$$

$$\mathcal{C}_n\,(g_1) = \int_0^1 g_1(x)\psi_n^{(a)}(x)dx, \quad \forall\, n \geq 0 \qquad (3.22)$$

$$\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i\big(X_{\Delta m}^{(k)}\big), 0 \leq i < a^m\,, \mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j\big(\Lambda_\sigma^{(1)}\big)\,, \quad 0 < j < a^\sigma \qquad (3.23)$$

Принимая во внимание равенство

$$\psi_i^{(a)}(x)\cdot\psi_j^{(a)}(a^{s_1}x) = \psi_{j\cdot a^{s_1}+i}^{(a)}(x), \qquad \text{при } 0 \leq i\,, j < a^{s_1},$$

и учитывая соотношения (3.5)-(3.8) ,(3.17) будем иметь

$$g_1(x) = \gamma_0 \sum_{i=0}^{a^m-1} \mathcal{B}_i\psi_i^{(a)}(x) \sum_{j=1}^{a^\sigma-1} \mathcal{A}_j\psi_j^{(a)}(a^{s_1}x) =$$

$$= \gamma_0 \sum_{j-1}^{a^\sigma-1} \mathcal{A}_j \cdot \sum_{i=0}^{a^m-1} \mathcal{B}_i\psi_{j\cdot a^{s_1}+i}^{(a)}(x) = \sum_{n=N_0}^{N} \mathcal{C}_n\psi_n^{(a)} = \sum_{k=k_0}^{N_1-1} \mathcal{A}_k^{(1)}\psi_{n_k}^{(a)}(x), \qquad (3.24)$$

$$\mathcal{C}_n(g_1) = \begin{cases} \frac{k|\gamma_0|}{a^m} \text{ или } 0\,, \text{если } n \in [N_0, N_1), \\ \\ 0\,, \qquad \text{если } n \notin [N_0, N_1) \end{cases} \qquad N_1 = a^{s_1+\sigma} + a^m - a^{s_1} + 1. \qquad (3.25)$$

$$\mathcal{A}_k^{(1)} = \mathcal{C}_{n_k}(g_1)\,, \quad \{n_k\}_{k\,=\,k_0}^{N\,-\,1} = spec\;(g_1) \qquad (3.26)$$

Пусть $\mathrm{M} \in [N_0, N_1]$, тогда для некоторого $j_0 \in [1, a^\sigma]$, $i_0 \in [0, a^m]$ см. (3.24) – (3.26) будем иметь

$$\sum_{k=N_0}^{\mathrm{M}} \mathcal{C}_k(g_1)\psi_k^{(a)}(x) = \gamma_0 \sum_{j=0}^{j_0-1} \mathcal{A}_j \left(\sum_{i=0}^{a^m-1} \mathcal{B}_i\psi_i^{(a)}(x)\right) \varphi_j^{(a)}(a^S x) +$$

$$+\gamma_0\mathcal{A}_{j_0}\psi_{j_0}^{(a)}(a^S x) \sum_{i=0}^{io} \mathcal{B}_i\psi_i^{(a)}(x)$$

Отсюда из (3.17), (3.25), (3.26) имеем

$$\left|\sum_{k=N_0}^{\mathrm{M}} \mathcal{C}_k(g_1)\psi_k^{(a)}(x)\right| = |\gamma_0|(j_0-1)X\Delta_1(x) + \frac{i_0}{a^m} \leq \begin{cases} a^\sigma|\gamma_0|; & x \in \Delta_1\,, \\ |\gamma_0|; & x \in (0,1)\backslash\Delta_1 \end{cases},$$

Значит, для $\forall x \in (0,1)\backslash\Delta_1$ имеем

$$\max_{N_0 \le M \le N_1} \left\| \sum_{k=N_0}^{M} C_k(g_1)\psi_k^{(a)}(x) \right\|_\infty \le |\gamma_0| a^\sigma ,$$

$$\max_{N_0 \le M \le N_1} \left| \sum_{k=N_0}^{M} C_k(g_1)\psi_k^{(a)}(x) \right| \le |\gamma_0| ,$$

Положим

$$E_1 = \{x; g_1(x) = \gamma_0\}, \tag{3.28}$$

Легко видеть что (см. (1.7), (3.21) ,(3.28))

$$|E_1| = |\Delta_1|(1 - a^{-\sigma}),$$

$$g_1(x) = \begin{cases} \gamma_0, \text{при } x \in E_1, \\ \gamma_0(1 - a^\sigma), \text{при } x \notin E_1 \\ 0, \text{вне } \Delta_1 \end{cases} ,$$

$$\int_0^1 |g_1|^2 dx = |\gamma_0|^2 |E_1| + |\gamma_0|^2 (1 - a^\sigma)^2 \left(|\Delta_1| \frac{1}{a^\sigma}\right) =$$

$$= |\gamma_0|^2 \cdot \frac{|\Delta_1|}{a^\sigma} |a^\sigma - 1 + 1 - 2a^\sigma + a^{2\sigma}| =$$

$$|\gamma_0|^2 \cdot \frac{|\Delta_1|}{a^\sigma} a^\sigma |a^\sigma - 2| < a \cdot |\gamma_0|^2 \frac{|\Delta_1|}{\delta_0}$$

$$\left(\int_0^1 |g_1(x)|^2 dx\right) < \frac{a}{\delta_0} |\gamma_0|^2 |\Delta_1|, \tag{3.29}$$

Следовательно , на основании неравенства Бесселя

$$\sum_{k=k_0}^{N-1} \left|\mathcal{A}_k^{(1)}\right|^2 = \left[\int_0^1 |g_1(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{a}{\delta_0} |\gamma_0|^2 |\Delta_1|, \tag{3.30}$$

$$\max_{N_0 \le M \le N} \left(\left| \sum_{k=N_0}^{m} \mathcal{A}_k^{(1)} \psi_{n_k}^{(a)}(x) \right| \right) \le \frac{a|\gamma_0|}{\delta_0} X\Delta_1(x) + |\gamma_0| \tag{3.31}$$

Продолжая эти рассуждения , мы можем по индукции определить числа $s_1 < \cdots s_\upsilon < \cdots s_{\upsilon_0}$ $, N < \ldots N_\upsilon < \ldots N_{\upsilon_0}$, множества $E_1 < \ldots E_{\upsilon_0}$ функции $g_1(x), \ldots, g_\upsilon(x)$ $, \ldots$ $g_{\upsilon_0}(x)$ вида

$$g_v(x) = \gamma_0 X\Delta_v(x) I_\sigma^{(1)}(a^{s_v}x) = \sum_{k=N_v-1}^{N_v-1} \mathcal{A}_k^{(v)} \psi_{n_k}^{(a)}(x)\ v \in (1, v_0] \tag{3.32}$$

удовлетворяющие условиям при $v = 1,2, \cdots v_0$:

$$s_v = [\log_a N_{v-1}] + m \tag{3.33}$$

$$\mathcal{A}_k^{(v)} = \int_0^1 g_v(x) \psi_{n_k}^{(a)}(x) dx, \qquad \{n_k\}_{k = N_{v-1}}^{N_{v-1}} = spec(g_v), \tag{3.34}$$

$$\mathcal{A}_k^{(v)} = \mathcal{C}_{n_k}(g_v), \ \{n_k\}_{k = k_0}^{N_1 - 1} = spec(g_v), \tag{3.35}$$

$$|\mathcal{A}_k^{(v)}| = \frac{|\gamma_0|}{a^m}, \tag{3.36}$$

$$g_v(x) = \begin{cases} \gamma_0, & x \in N_v \\ 0, & x \notin \Delta_v \end{cases}, \tag{3.37}$$

$$|E_v| > (1 - \delta_0)|\Delta_v| \tag{3.38}$$

$$\int_0^1 |g_v(x)|^2 dx < \frac{a}{\delta_0} |\gamma_0|^2 |\Delta_v| \tag{3.39}$$

$$\max_{N_{v-1} < m < N_v} \left(\left| \sum_{k=N_{v-1}}^{m} \mathcal{A}_k^{(v)} \psi_{n_k}^{(a)}(x) \right| \right) \le \frac{a|\gamma_0|}{\delta_0} X\Delta_v(x) + |\gamma_0| \tag{3.40}$$

Положим

$$E = \bigcup_{v=1}^{v_0} E_v, \tag{3.41}$$

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k^{(v)}, \quad k \in [N_{v-1}, N_v], 1 \le v \le v_0 \tag{3.42}$$

$$g(x) = \sum_{v=1}^{v_0} g_v(x) = \sum_{v=1}^{v_0} \mathcal{A}_j \sum_{k=N_v-1}^{N_v-1} \mathcal{A}_k^{(v)} \psi_{n_k}^{(a)}(x) =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\bar{k}} \mathcal{A}_k^{(v)} \psi_{n_k}^{(a)}(x), \quad \bar{k} = N_{v_0} - 1 \tag{3.43}$$

Учитывая соотношения (3.20)-(3.43), получим

$$g(x) = \gamma_0 X\Delta_0(x), \ \ \forall\, x \in E \cup \big((0,1) \backslash \Delta_0\big),$$

$$|E| > (1 - \delta_0)|\Delta_0|,$$

$$|\mathcal{A}_k| = \frac{|\gamma_0|}{a^m} \tag{3.44}$$

На основании неравенства Бесселя из (3.35)-(3.39) для всех $v \in [1, v_0]$имеем

$$\sum_{k=N_v-1}^{N_v-1} \left|\mathcal{A}_k^{(v)}\right|^2 = \int_0^1 |g_v(x)|^2 dx \ \le \frac{a}{\delta_0} |\gamma_0|^2 \Delta_v| \tag{3.45}$$

Отсюда и из (3.17)-(3.20) и (3.32)-(3.41) следует

$$\sum_{k=k_0}^{\bar{k}} |\mathcal{A}_k|^2 = \sum_{v=1}^{v_0} \left[\sum_{|k|=N_v-1}^{N_v-1} \left|\mathcal{A}_k^{(v)}\right|^2 \right] \le \frac{a}{\delta_0} v_0^2 |\Delta_v| \,,$$

и

$$\sum_{k=k_0}^{\bar{k}} |\mathcal{A}_k|^{2+\varepsilon_0} < \left(\max_{k_0 < k \le \bar{k}} |\mathcal{A}_k|^{\varepsilon_0} \right) \sum_{v=1}^{v_0} \left[\sum_{|k|=N_v-1}^{N_v-1} \left|\mathcal{A}_k^{(v)}\right|^2 \right] \le \max_{1 \le v \le v_0} |\gamma_0| \sqrt{\frac{\Delta_v}{\delta_0}}$$

положим

$$\mathcal{C}_k = \mathcal{A}_k + 2^{-k} \max_{1 \le v \le v_0} \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2}, \frac{|\gamma_0||\Delta_v|}{a^m} \right\}, k \in [N_v - 1, N_v), 1 \le v \le v_0 \tag{3.46}$$

$$Q(x) = \sum_{k=k_0}^{\bar{k}} \mathcal{C}_k \psi_{n_k}^{(a)}(x) \tag{3.47}$$

Учитывая соотношения (3.32)-(3.47), получим

$$|\mathcal{C}_k| > |\mathcal{C}_{k+1}| > 0 \,, \qquad k \in (k_0, \overline{k})$$

$$\sum_{k=k_{0+1}}^{\bar{k}} |\mathcal{C}_k|^{2+\varepsilon_0} < \frac{\varepsilon_0}{4},$$

$$|Q(x)| \le \varepsilon_0 \ , \forall \ x \in ((0,1) \setminus \Delta_0)$$

$$\|g(x)\|_\infty = \sup_{x \in (0,1)} (|g(x)|) \le \frac{|\gamma_0|}{\delta_0},$$

$$\|g(x) - Q(x)\|_\infty = \sup_{x \in (0,1)} (|g(x) - Q(x)|) < \varepsilon_0,$$

Теперь проверим выполнение утверждения 6) леммы 3. Для любого $k_0 \le N \le \bar{k}$ определим v из условия $N_{v-1} \le N \le N_v$ Согласно (3.43), имеем , что

$$\sum_{k=k_0+1}^{N} \mathcal{A}_k \psi_{n_k}^{(a)}(x) = \sum_{j=1}^{v-1} \sum_{k=N_j-1}^{N_j-1} \mathcal{A}_k \psi_{n_k}^{(a)}(x) + \sum_{k=N_v-1}^{N} \mathcal{A}_k \psi_{n_k}^{(a)}(x), \tag{3.48}$$

Отсюда и из (1.1) ,(1.2), (3.29), (3.30) следует

$$\left|\sum_{k=k_0+1}^{N} \mathcal{A}_k \psi_{n_k}^{(a)}(x)\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{v-1} g_n(x)\right| + \left|\sum_{k=N_v-1}^{N} \mathcal{A}_k \psi_{n_k}^{(a)}(x),\right| \leq$$
$$\leq \frac{|\gamma_0|}{\delta_0} X\Delta_0(x) + |\gamma_0| X_{(0,1)\setminus\Delta_0}(x) .$$

Следовательно

$$\max_{k_0<m\leq\bar{k}} \left(\sup_{x\in(0,1)} \left|\sum_{k=k_0+1}^{m} c_k \psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right) \leq \frac{a|\gamma_0|}{\delta_0}$$

В силу (3.39)- (3.44) для всех $p \geq 1$ и $1 < v \leq v_0$ получим

$$\int_0^1 |g(x)|^p dx = \sum_{i=1}^{v_0} \int_{\Delta_i} \left|\sum_{n=1}^{v_0} g_n(x)\right|^p dx = \sum_{i=1}^{v_0} \int_{\Delta_i} |g_i(x)|^p dx \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{v_0} \frac{a^p |\gamma_0|^p |\Delta_i|}{\delta^{p-1}} \leq \frac{a^p}{\delta^{p-1}} |\gamma_0|^p |\Delta_0| .$$

Пустъ θ такое число, что

$$(1 + \delta_0{}^{1/p_0}\Theta_{p_0} + \tfrac{1}{a}\delta_0{}^{1-1/p_0}|\Delta_0|^{1-1/p_0} < \theta).$$

Отсюда и из (3.48) для всех $p \in [1, p_0]$ будем иметъ

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=k_0+1}^{N} c_k \psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{v-1} g_n(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} +$$
$$+ \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=N_{v-1}}^{N} \mathcal{A}_k \psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{|\Delta_0||\gamma_0|}{2} \leq$$
$$\leq \left(\int_0^1 |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + a\Theta_{p_0} \frac{|\gamma_0|}{\delta_0} |\Delta_v|^{\frac{1}{p_0}} + \frac{|\Delta_0||\gamma_0|^{\frac{1}{p_0}}}{2} \leq$$

$$\leq \frac{a}{\delta_0^{-\frac{1}{p}}}|\gamma_0||\Delta_0|^{\frac{1}{p}} + a\Theta_{p_0}\frac{|\gamma_0|}{\delta_0}|\Delta_0|^{\frac{1}{p}} + \frac{|\Delta_0||\gamma_0|}{2} =$$

$$= \frac{a|\gamma_0||\Delta_0|^{\frac{1}{p}}}{\delta_0^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \left(1 + \delta_0^{-\frac{1}{p}}\Theta_{p_0} + \frac{1}{a}\delta_0^{1-\frac{1}{p}}|\Delta_0|^{1-\frac{1}{p}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{a|\gamma_0||\Delta_0|^{\frac{1}{p}}}{\delta_0^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \left(1 + \delta_0^{\frac{-1}{p_0}}\Theta_{p_0} + \frac{1}{a}\delta_0^{1-\frac{1}{p_0}}|\Delta_0|^{1-\frac{1}{p_0}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{a|\gamma_0||\Delta_0|^{\frac{1}{p}}}{\delta_0^{1-\frac{1}{p}}} \cdot \left(1 + \delta_0^{\frac{-1}{p_0}}\Theta_{p_0} + \delta_0|\Delta_0|\right) \leq \theta\frac{|\gamma_0||\Delta_0|^{\frac{1}{p}}}{\delta_0^{1-\frac{1}{p}}}, \theta = const$$

Лемма 3.2 доказана.

Повторяя рассуждения приведенные при доказательстве Леммы 3 в работе [50] и применяя Лемму 3.2 вместо леммы 2, получим следующую лемму:

Лемма 3.3 . *Пусть* $\Psi_a = \{\psi_k^{(a)}(x)\}$ *–система Кристенсона-Леви. Тогда для любого* $0 < \varepsilon < 1$ *существует измеримая функция* $\mu(x)$ *с*, $mes\{x \in (0,1): \mu(x) = 1\} < 1 - \varepsilon$ *такая, что для любых чисел* $\delta, \varepsilon \in (0,1), N \in \mathbb{N}, p_0 > 1$ *и для каждой функции* $f(x) \in L^{p_0}(0,1)$ *можно найти полином* $Q(x)$ *по системе* Ψ_a *вида*

$$Q(x) = \sum_{k=N}^{M} \mathcal{B}_k\psi_k^{(a)}(x)$$

обладающих следующими свойствами: все ненулевые члены в последовательности $\{|\mathcal{B}_n|, \ n \in spec(Q)\}$ *расположены в убывающем порядке*

$$\sum_{k=N_0}^{M} |\mathcal{B}_k|^{2+\varepsilon} < \varepsilon$$

$$\int_0^1 |Q(x) - f(x)|^{p_0}\mu(x)dx < \delta^{p_0},$$

$$\max_{N \leq m \leq M}\int_0^1 \left|\sum_{k=N}^{m} \mathcal{B}_k\psi_k^{(a)}(x)\right|^p \mu(x)dx \leq$$

$$\leq 5 \int_0^1 |f(x,y)|^p \mu(x) dx + \varepsilon, \qquad \forall\ p \in [1, p_0].$$

3.3. Доказательство теоремы о универсальности рядов по системе Кристенсона–Леви

Доказательство Теоремы 3.2. Пронумеровав все полиномы по системе Кристенсона-Леви с рациональными коэффициентами, мы можем представить их в виде последовательности

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \qquad (3.49)$$

Положим

$$\sigma_n = 2 \sum_{j=1}^{n} 2^{4j} \left[\|f_j(x)\|_{\infty} + 1 \right], n \geq 1, \qquad (3.50)$$

Пусть даны число $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность

$$p_n \nearrow \infty \qquad (3.51)$$

Последовательно применив Лемму 3.3, можем найти измеримую весовую функцию $\mu(x)$ с

$$0 < \mu(x) \leq 1, \qquad mes\{(x) \in (0,1), \mu(x) = 1\} > 1 - \varepsilon/2, \qquad (3.52)$$

последовательность полиномов вида

$$H_n^{(j)}(x) = \sum_{k=M_n^{(j-1)}+1}^{M_n^{(j)}} \mathcal{B}_k^{(n,j)} \psi_k^{(a)}(x), \qquad 1 \leq j \leq \sigma_n, n = 1,2 \ldots, \qquad (3.53)$$

где

$$0 \le M_1^{(0)} < M_1^{(1)} = M_2^{(0)} < M_2^{(1)} < M_2^{(2)} <$$

$$< M_{n-1}^{(n-1)} = M_n^{(0)} < M_n^{(1)} < \cdots < M_n^{(n)} = M_{n+1}^{(0)} < M_{n+1}^{(1)} \dots, \qquad (3.54)$$

которые удовлетворяют условиям:

$$\left(\int_0^1 \left|H_n^{(j)}(x) - f_n(x)\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < (\sigma_n)^{-1}2^{-4n}, \qquad (3.55)$$

при $\quad 1 \le j \le \sigma_n, \ \forall\, p \in [1, p_n], \ \forall\, n \ge 1,$

$$\max_{M_n^{(j-1)} \le m \le M_n^{(j)}} \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=M_n^{(j-1)}+1}^{m} \mathcal{B}_k^{(n,j)} \psi_k^{(a)}(x)\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< 5\left(\int_0^1 |f_n(x)|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} + 2^{-4k-1}, \qquad (3.56)$$

все ненулевые члены в последовательности $\left\{\left|\mathcal{B}_k^{(n,j)}\right|,\ k \in (M_n^{(j-1)};\ M_n^{(j)}],\right\}$ для каждых фиксированных $n \ge 1,$ и $j \in [1, \sigma_n]$ расположены в убывающем порядке

$$\max_{k \in (M_n^{(j)}, M_n^{(j+1)}]} \left|\mathcal{B}_k^{(n,j)}\right| < \min_{k \in (M_n^{(j-1)}, M_n^{(j)}]} \left|\mathcal{B}_k^{(n,j)}\right| < 2^{-2n},$$

для всех $\quad 1 \le j \le \sigma_n, \quad n = 1,2 \dots.$ (3.57)

$$\max_{k \in (M_{n+1}^{(0)}, M_{n+1}^{(1)}]} \left|\mathcal{B}_k^{(n,1)}\right| < \min_{k \in (M_n^{(n-1)}, M_n^{(n)}]} \left|\mathcal{B}_k^{(n,n)}\right|,$$

для всех $\quad n = 1,2 \dots$ (3.58)

$$\sum_{k=M_n^{(j-1)}+1}^{M_n^{(j)}} \left|\mathcal{B}_k^{(n,j)}\right|^{2+n^{-1}} < (\sigma_n)^{-1}2^{-4n},$$

$1 \le j \le \sigma_n, \ \ k \in (M_n^{(j-1)}; M_n^{(j)}], \quad$ при $n \ge 1$ (3.59)

Положим

$$H_n(x) = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{j=1}^{\sigma_n} H_n^{(j)}(x), \qquad (3.60)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{\sigma_n} \left(\sum_{k=M_n^{(j-1)}+1}^{M_n^{(j)}} \mathcal{B}_k^{(n,j)} \psi_k^{(a)}(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x) \qquad (3.61)$$

где

$$\mathcal{B}_k = \frac{1}{\sigma_n} \mathcal{B}_k^{(n,j)}, \ \ k \in \left(M_n^{(j-1)}; M_n^{(j)}\right], \ \ 1 \le j \le \sigma_n, \ \ n \ge 1 \qquad (3.62)$$

Очевидно , что все ненулевые члены последовательности $\{\mathcal{B}_k\} \to 0$ расположены в убывающем порядке и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{B}_k|^r < \infty \ \forall \ r > 2 \,,$$

Учитывая соотношения (3.55), (3.60)-(3.62) получим

$$\left(\int_0^1 |H_n(x) - f_n(x)|^p \, \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < 2^{-4n} \,, \forall \, p \in [1, p_n], n \ge 1 \qquad (3.63)$$

Положим

$$R_n(x) = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{\sigma_n} (-1)^j \, H_n^{(j)}(x), \qquad (3.64)$$

В силу условий (3.50), (3.55) и (3.64) для всех $p \in [1, p_n], n \ge 1$ имеем

$$\left(\int_0^1 |R_n(x)|^p \, \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 \left| \frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{\sigma_n} (-1)^j \left(H_n^{(j)}(x) - f_n(x)\right) \right|^p \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< \left(\frac{1}{\sigma_n}\right) \sum_{j=1}^{\sigma_n} \left(\int_0^1 \left| H_n^{(j)}(x) - f_n(x) \right|^p \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< (\sigma_n)^1 (\sigma_n)^{-1} 2^{-4n} = 2^{-4n} \,, \qquad (3.65)$$

Аналогично для всех $, m > 1, n \ge 1$ получим

$$\left(\int_0^1 |S_m(x, R_n)|^p \ \mu(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < 2^{-4n} \,, m > 1 \qquad (3.66)$$

где $S_m(x, g) - m -$ ая частичная сумма функции $g(x)$ по системе Кристенсона-Леви.

Пусть $p \geq 1$ *и* $f \in L^p_\mu(0,1)$ по индукции определим последовательности функции $\{f_{v_q}(x)\}_{q=1}^{\infty} \subset \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v_q\} \nearrow \infty$, полиномов $\{H_{v_q}(x)\}$ и $\{Q_{v_q}(x)\}$, для всех $q \geq 1$ удовлетворяющих условиям

$$v_q \geq q + v_{q-1}, q \geq 1, v_0 = 1, \tag{3.67}$$

$$Q_{v_q}(x) = \sum_{k=v_{q-1}+1}^{v_q-1} R_k(x) + H_{v_q}(x), q \geq 1, \tag{3.68}$$

$$\left(\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=1}^{q-1} Q_{v_n}(x) - f_{v_q}(x)\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\sigma_q v_{q-1}} 2^{-4v_{q-1}}, \forall\, q \geq 1, \tag{3.69}$$

$$\left(\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{j=1}^{n} Q_{v_j}(x)\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < 2^{-4v_{n-1}}, n \leq q-1, \forall\, q \geq 1, \tag{3.70}$$

Положим

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{v_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=v_{n-1}+1}^{v_n-1} R_k(x) + H_{v_n}(x)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} \sum_{j=1}^{\sigma_n} \pm H_n^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \pm \mathcal{B}_k^{(n,j)} \psi_k^{(a)}(x), \tag{3.71}$$

Согласно (3.50), (3.53), (3.60) и (3.64), имеем , что

$$\left(\int_0^1 \left| S_m\left(x, \sum_{k=v_{n-1}+1}^{v_n-1} R_k\right)\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < 2^{-n}, \quad n, m > 1 \tag{3.72}$$

$$\int_0^1 |S_m(x, H_{v_n})|\, \mu(x)dx < 2^{-n}, n, m > 1 \tag{3.73}$$

В силу условий (3.68)-(3.73) для всех, $n \geq 1$ имеем

$$\left(\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=1}^{m} \pm \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x)\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad m \to \infty$$

т.е. ряд (3.61) универсальным в $L^p_\mu(0,1)$ относительно знаков.

Для любого $p \geq 1$ и для каждой функции $f \in L^p_\mu(0,1)$ выберем подпоследовательность полиномов $\left\{H_{N_q}(x)\right\}_{q=1}^{\infty}$ из $\{H_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяющих условиям:

$$\left(\int_0^1 \left|f(x) - \sum_{n=1}^{m} H_{N_q}(x)\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < 2^{-2m}, \forall\, m \geq 1,$$

$$\left(\int_0^1 \left|S_m(x, H_{N_q})\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < 2^{-q}, \qquad \forall\, q \geq 1, m > 1,$$

Отсюда следует, что ряд (3.61) является универсальным в $L^p_\mu(0,1)$ относительно подрядов.

Теперь покажем, что ряд (3.61) является универсальным в $L^p_\mu(0,1)$ относительно перестановок.

Пусть (см. (3.61))

$$H_n(x) = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{j=1}^{\sigma_n} H_n^{(j)}(x) = \sum_{i=N_{n-1}}^{N_n - 1} \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x), \tag{3.74}$$

Пусть $p \geq 1$ и пусть $f \in L^p_\mu(0,1)$. Возьмем функцию $f_{v_1}(x)$ из последовательности (3.49) такую, что

$$\left(\int_0^1 \left|f(x) - f_{v_1}(x)\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < 2^{-2}, v_1 > k_0, \tag{3.75}$$

Отсюда и из (1.6), (3.55), (3.56), вытекает

$$\left(\int_0^1 \left|f(x) - H_{v_1}(x) - \mathcal{B}_1\psi_1^{(a)}(x)\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{-2v_1} + |\mathcal{B}_1| \tag{3.76}$$

$$\max_{N_{v_1-1} \leq N < N_{v_1}} \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=N_{v_1-1}}^{N} \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x)\right| \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< 2\int_0^1 \left|f_{v_1}(x)\right|^p \mu(x)dx)^{\frac{1}{p}} + 2^{-k_1} \tag{3.77}$$

Предположем , что уже определены числа $2< v_1<\ldots.<v_{q-1}$, $1= s(1)$, ... $s(q-1)$, функции $\mathcal{B}_{s(1)}W_{s(1)}, \ldots.\mathcal{B}_{s(q-1)}W_{s(q-1)}$ и полиномы из (3.53)

$$H_{v_n}(x) = \sum_{k=N_{v_n}-1}^{N_{v_n}-1} \mathcal{B}_k\psi_k^{(a)}(x), \quad n = 1,2\ldots.q-1, \tag{3.78}$$

$$\left(\int_0^1 \left|f(x) - \sum_{n=1}^{j}\left[H_{v_n}(x) + \mathcal{B}_{s(n)}\psi_{s(n)}^{(a)}(x)\right]\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< 2^{-(j+3)} + \left|\mathcal{B}_{s(j)}\right|, 1 \le j \le m-1, \tag{3.79}$$

$$\max_{N_{v_j}-1\le N< N_{v_j}} \left(\int_0^1 \left|\sum_{k= N_{v_j}-1}^{N} \mathcal{B}_k\psi_k^{(a)}(x)\right|^p \mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < 2^{-j} + \left|\mathcal{B}_{s(j-1)}\right| \tag{3.80}$$

где

$$s(j) = \min\{n \in N: n \notin \left\{\{N_{v_{k-1},} \ldots., N_{v_k}-1\}_{k=1}^{j} \cup \{ s(n)\}_{n=1}^{j-1}\right\}, s(1) = 1.$$

Возьмем функцию $f_{v_m}(x)$, $v_m > v_{m-1}$ из последовательности (3.49) такую, что

$$\left[\int_0^1 \left|f(x) - \sum_{n=1}^{m-1}\left[Q_{v_n}(x) + \mathcal{B}_{s(n)}\psi_{s(n)}^{(a)}(x)\right] - f_{v_m}(x)\right|^p \mu(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2^{m+4}}, \tag{3.81}$$

После выбора числа $v_m > v_{m-1}$ следовательно и полинома

$$H_{v_n}(x) = \sum_{k=N_{v_m}-1}^{N_{v_m}-1} \mathcal{B}_k\psi_k^{(a)}(x)$$

определим число $s(m)$ следующим образом

$$s(m) = \min\{n \in N: n \notin \left\{\{N_{v_{k-1},} \ldots., N_{v_{k-1}}+1 \ldots, N_{v_k}-1\}_{k=1}^{m} \cup \{ s(k)\}_{k=1}^{m-1}\right\} \tag{3.82}$$

Из (3.52), (3.79) и (3.81) вытекает

$$\left[\int_0^1 \left|f_{v_m}(x)\right|^p \mu(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} < 2^{m+4} + \left|\mathcal{B}_{s(m-1)}\right|.$$

Отсюда и из условий (3.52), (3.74) (3.56) и (3.81) будем иметь

$$\max_{N_{v_{m-1}}\le N<N_{v_m}}\left(\int_0^1\left|\sum_{k=N_{v_{m-1}}}^{N}\mathcal{B}_k\psi_k^{(a)}(x)\right|^q\mu(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}<2^{-m}+2\left|\mathcal{B}_{s(m-1)}\right|. \quad (3.83)$$

$$\left(\int_0^1\left|f(x)-\sum_{n=1}^{m}\left[H_{v_n}(x)+\mathcal{B}_{s(n)}\psi_{s(n)}^{(a)}(x)\right]\right|^p\mu(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}<$$

$$<2^{-(m+3)}+\left|\mathcal{B}_{s(m)}\right|. \quad (3.84)$$

Таким образом, мы можем, по индукции из ряда (3.61) выбрать последовательности полиномов (см(3.78),(3.80))

$$H_{v_m}(x)=\sum_{k=N_{v_{m-1}}}^{N_{v_m}-1}\mathcal{B}_k\psi_k^{(a)}(x)\,, m=1,2\,....$$

и функции

$$\left\{\mathcal{B}_{s(m)}\psi_{s(m)}^{(a)}(x)\right\}_{m=1}^{\infty},\quad m=1,2\ \ldots\quad (s(1)=1)$$

удовлетворяющие условиям (3.82)–(3.84) для всех $m\ge 1$.

Учитывая выбор $H_{v_n}(x)$ и $\mathcal{B}_{s(m)}\psi_{s(m)}^{(a)}(x)$ (см (3.78), (3.80) получим , что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{k=N_{v_{m-1}}}^{N_{v_m}-1}\mathcal{B}_k\psi_k^{(a)}(x)+\mathcal{B}_{s(m)}\psi_{s(m)}^{(a)}(x)\right]$$

Получается из ряда (3.61) перестановкой его членов .

Обозначим этот ряд через

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{B}_{\sigma(m)}\psi_{\sigma(k)}^{(a)}(x) \quad (3.85)$$

Ввиду того, что (см (3.62), (3.67),(3.82))

$$\lim_{m\to\infty}\mathcal{B}_{s(m)}=0$$

Из (3.83) и (3.84) следует что ряд (3.85) сходится к $f(x)$ в метрике $L^p_\mu(0,1)$ т.е. ряд (3.61) – универсальный относительно перестановок в $L^p_\mu(0,1)$.

Теорема 3.2 доказана.

ГЛАВА IV

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ КРИСТЕНСОНА - ЛЕВИ

4.1. Некоторые известные результаты

В этой главе диссертации рассматриваются вопросы равномерной сходимости двойных рядов Фурье по системе Ψ_a после исправления функции . Следует отметить , что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н.Н. Лузину [52] . Им в 1912г. был получен следующий знаменитый результат (С- свойство Лузина):

Теорема Лузина. *Для любой измеримой, почти всюду конечной на* $(0,1)$ *функции* f *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют измеримое множество* E *с мерой* $|E| > 1 - \varepsilon$ *и непрерывная на* $(0,1)$ *функция* g, *совпадающая с* f *на* E.

Далее в этом направлении интересные результаты получены в работах [40] - [50].

В 1939г. Д.Е. Меньшов [53] доказал, что тригонометрическая система обладает усиленным C - свойством:

Теорема (Меньшов). *Пусть* f *измеримая функция , конечная почти всюду* *на* $(0,2\pi)$. *Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$ *можно определить непрерывную функцию* g *, совпадающую с* f *на некотором множестве* $E, |E| > 2\pi - \varepsilon$ *и такую , что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на* $(0,2\pi)$.

Далее в этом направлении важные результаты получили А.А. Талалян [54], У. Прайс [55], Ф.Г. Арутюнян [56], Р.И. Осипов [57], О.Д. Церетели [58], Л.Д. Гоголадзе, Т. Зерекидзе [59], А.М. Олевский [60], М.Г. Григорян [61] и другие авторы.

В 1988г. М.Г. Григорян [61], доказал что тригонометрическая система обладает усиленным L^1 –свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем .

Теорема (Григорян). *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует измеримое множество* $E \subset (0,1)$ *с мерой* $|E| > 1 - \varepsilon$*, такое , что для каждой функции* $f \in L^1(0,1)$ *можно найти функцию* $g \in L^1(0,1)$*, совпадающую с* f *на* E*, ряд Фурье которой по триогонометрической системе сходится к ней по* $L^1(0,1)$ *норме.*

Отметим, что ряд классических результатов невозможно перенести с одномерного случая на двумерный. Например:

Теорема (Л.Карлесон [62]). Ряд Фурье любой функции $f(x) \in L^2\,(0,2\pi)$ сходится почти всюду.

Теорема (М.Рисс [63]). Ряд Фурье каждой функции $f(x) \in L^p(0,2\pi)$, $p > 1$ сходится в метрике L^p .

Теорема (А.Н.Колмогоров [64]). Ряд Фурье каждой функции $f(x) \in L^1$ сходится в метрике L^q , $q < 1$.

В этом случае даже разные (сферические, прямоугольные, квадратные) частичные суммы резко отличаются друг от друга по своим свойствам в таких вопросах, как сходимость в L^p , , $p \geq 1$ (смотри обзорные статьи Л.В.Жижиашвили [65], М.И.Дьяченко [66]). Подтверждением сказанного выше служат следующие теоремы.

Теорема (Ч.Фефферман [67]). Существует непрерывная на $(0,2\pi)^2$ функция, двойной ряд Фурье которой по тригонометрической системе по прямоугольникам расходится в каждой внутренней точке $(0,2\pi)^2$.

Теорема (Ч.Фефферман [68]). Для любого p, $p \neq 2$ существует функция $f(x) \in L^p$, двойной ряд Фурье которой по тригонометрической системе по сферам расходится в метрике L^p.

В работе [69] Д. Г. Харрис доказал, что для любого $p \in [1,2)$ существует функция из $L^p(0,1)^2$, сферические частичные суммы двойного ряда Фурье – Уолше которой расходятся почти всюду и по $L^p(0,1)^2$ норме .

В работе [70] С. В. Конягин доказал, что ограниченность констант Лебега L_{n_k} не является необходимым и достаточным условием для сходимости почти всюду частичных сумм $S_{m_k,n_k}(x,y,f)$ любой интегрируемой функцией f .

В работе [71] С. Ф. Лукомский получил критерий для сходимости почти всюду квадратных частичных сумм Фурье-Уолша интегрируемых функции.

В работе [72] Р. Д. Гецадзе доказал , что существует непрерывная функция f, прямоугольные частичные сумм Фурье- Уолша которой расходятся почти всюду.

В работе [73] М. Г. Григорян доказал существование функции $f \in L^1(0,2\pi)^2$ двойной ряд Фурье которой по тригонометрическтой системе, по сферам расходятся в метриках $L^p(0,2\pi)^2$ для любого $p \in (0,1)$.

В работе [74] для любого числа $\varepsilon > 0$ построена весовая функция $\mu(x,y)$ со свойством

$$0 < \mu(x) \leq 1 \;, mes\{(x,y) \in T(0,1)^2 : \mu(x,y) \neq 1\} < \varepsilon$$

так, чтобы для всякой функции $f(x,y) \in L^1_\mu(T)$ существует двойной ряд по системе Кристенсона-Леви вида

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} C_{n,k}\psi_n^{(a)}(x)\psi_k^{(a)}(y),$$

где последовательность абсолютных величин коэффициентов $\{C_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ монотонна в смысле Харди, которая сходится к $f(x,y)$ в $L^1_\mu(T)$ как по сферам, так и по прямоугольникам.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 4.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой функции $f \in L^0(0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\,\{f \neq f\} < \varepsilon$ такую, что ее ряд Фурье по двойной системе Кристенсона-Леви по сферам сходится к ней равномерно на $(0,1)$, и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье по двойной системе Ψ_a вновь полученной функции по модулю расположены в убывающем порядке по всем направлениям.*

Теорема 4.2. *Для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой функции $f \in L^0(0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\,\{f \neq f\} < \varepsilon$ такую, что ее ряд Фурье по двойной системе Кристенсона-Леви по прямоугольникам сходится к ней равномерно на $(0,1)$, и все ненулевые члены в последовательности коэффицентов Фурье по двойной системе Ψ_a вновь полученной функции по модулю расположены в убывающем порядке по всем направлениям.*

Теоремы 4.1 и 4.2 следуют из более общей теоремы.

А именно имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Существует ряд по двойной системе Ψ_a вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{D}_{k,s}\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y), \qquad \text{с} \quad \sum_{k,s=0}^{\infty} |\mathcal{D}_{k,s}|^{2+\delta} < \infty, \qquad \forall\, \delta > 0$$

со свойством:

1) все ненулевые члены в последовательности $\{|\mathcal{D}_{k,s}|\}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям,

2) для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой функции $f \in L^0(0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\,\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ такую, что ее ряд Фурье по двойной системе Кристенсона-Леви как по сферам, так и по прямоугольникам сходится к ней равномерно на $(0,1)^2$, и $\mathcal{C}_{k,s}(\tilde{f}) = \mathcal{D}_{k,s}$, $\forall (k,s) \in spec(\tilde{f})$.

4.2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Обозначим интервал ранга n относительно a следующим образом:

$$\Delta_k^{(n)} = \Delta_k^{(n)}(a) = \left[\frac{k}{a^n}, \frac{k+1}{a^n}\right), k = 0,1, \dots, a^n - 1, n = 1,2, \dots \qquad (4.1)$$

Как уже отметили выше системы Ψ_a и Φ_a удовлетворяют следующим свойством:

A). Если $\varphi_n^{(a)}(x)$ n –ая функция Радемахера порядка a, то

$$\varphi_n^{(a)}(x) = \omega_a^k = e^{\frac{2\pi k}{a}i}, x \in \Delta_k^{(n+1)} = \left[\frac{k}{a^{n+1}}, \frac{k+1}{a^{n+1}}\right)$$

B). Каждая n –ая функция Радемахера имеет период $\frac{1}{a^n}$ и

$\varphi_n^{(a)}(x) = const \in \Omega_a = \{1, \omega_a, \omega_a^2, \dots, \omega_a^{a-1}\}$,

при $x \in \Delta_{n+1}^{(k)}, k = 0,1, \dots, a^{n+1} - 1, n - 1,2, \dots$

C). $$\psi_i^{(a)}(x)\psi_j^{(a)}(a^s x) = \psi_{ja^s+i}^{(a)}(x) \quad \text{где} \quad 0 \le i,j < a^s \qquad (4.2)$$

D). $$\psi_{a^k+j}^{(a)}(x) = \varphi_k^{(a)}(x) \cdot \psi_j^{(a)}(x) \ , \text{где} \quad 0 \le j < a^k - 1 . \qquad (4.3)$$

Пусть $\omega_a = e^{\frac{2\pi}{a}i}$. Тогда для любого натурального числа m имеем

E). $$\sum_{k=0}^{a-1} \omega_a^{km} = \begin{cases} a, \text{если } m = 0(mod\ a), \\ 0, \text{если } m \ne 0(mod\ a). \end{cases} \qquad (4.4)$$

Далее, для любых $m = 1,2, \dots$ и $1 \le k \le a^m$ рассмотрим функцию

$$\Lambda_m^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, x \in (0,1) \backslash \Delta_m^{(k)}, \\ 1 - a^m, x \in \Delta_m^{(k)} \end{cases} \qquad (4.5)$$

и продолжим функцию периодически на R^1 с периодом 1. Через $\chi_E(x)$ обозначим характеристическую функцию множества E, т.е.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, \text{при } x \in E, \\ 0, \text{при } x \notin E. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Очевидно , что

$$\Lambda_m^{(k)}(x) = \psi_0^{(a)}(x) - a^m \cdot \chi_{\Delta_m^{(k)}}(x) \qquad (4.7)$$

вычислим коэффициент Фурье функции $\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x)$:

$$\mathcal{A}_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right) = \int_0^1 \chi_{\Delta_m^{(k)}}(t) \cdot \overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt = \int_{\Delta_m^{(k)}} \overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt . \tag{4.8}$$

1) Если $i \geq a^m$, то $i = a^m + j, 0 < j < a^m$,

следовательно, из (4.3) имеем

$$\overline{\psi_i}^{(a)}(t) = \overline{\varphi_m}^{(a)}(t) \cdot \overline{\psi_j}^{(a)}(t) \tag{4.9}$$

Учитывая , что в каждом интервале $\Delta_m^{(k)}$,$0 \leq k < a^m$

$$\overline{\psi_j}^{(a)}(t) = \mathfrak{I} = const \in \Omega_a \text{ и } |\mathfrak{I}| = 1,$$

то из (4.4) и (4.6) получим

$$\mathcal{A}_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right) = \mathfrak{I} \cdot \int_{\Delta_m^{(k)}} \overline{\varphi_m}^{(a)}(t)\, dt =$$

$$= \mathfrak{I} \cdot \sum_{s=0}^{a-1} \int_{\Delta_{m+1}^{(s)}} \omega_a^s dt = \mathfrak{I} \cdot \frac{1}{a^{m+1}} \cdot \sum_{s=0}^{a-1} \omega_a^s = 0 \tag{4.10}$$

2) Если $0 \leq i < a^m$,то

$\overline{\psi_j}^{(a)}(t) = \mathfrak{I} = const \in \Omega_a$, следовательно

$$\mathcal{A}_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right) = \mathfrak{I} \cdot |\Delta_m^{(k)}| = \frac{\mathfrak{I}}{a^m} . \tag{4.11}$$

Таким образом для функции $\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x)$ имеет место следующее:

$$\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x) = \sum_{i=0}^{a^m-1} \mathcal{A}_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right)\psi_i^{(a)}$$

где коэффициенты Фурье вычисляются следующим образом

$$\mathcal{A}_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right) = \int_0^1 \chi_{\Delta_m^{(k)}}(t) \cdot \overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{при } \quad i \geq a^m \\ \dfrac{\mathfrak{I}}{a^m}, & \text{при } 0 \leq i < a^m \end{cases}$$

Из системы Кристенсона-Леви имеем

$$\mathcal{B}_i(\Lambda_m^{(k)}) = \int_0^1 \Lambda_m^{(k)}(t) \cdot \overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \varphi_0^{(a)}(t)\cdot\overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt - a^m\int_0^1 \chi_{\Delta_m^{(k)}}(t)\cdot\overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt$$
$$= \Lambda_1 - a^m\cdot\Lambda_2\,. \qquad (4.12)$$

Так как система Ψ_a является ортонормированной системой на $[0,1)$, то имеем

$$\Lambda_1 = \begin{cases} 0, \text{при } i > a^m, \\ 1, \text{при } i = 0. \end{cases} \qquad (4.13)$$

Из условий (10),(11) получим

$$\Lambda_2 = \begin{cases} 0, \text{при } i > a^m, \\ \dfrac{1}{a^m}, \text{при } i = 0, \\ \dfrac{\Im}{a^m}, \text{при } 1 \le i < a^m. \end{cases} \qquad (4.14)$$

Из условий (4.13), (4.14) для функции $\Lambda_m^{(k)}(x)$ имеет место следующее:

$$\Lambda_m^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{a^m-1} \mathcal{B}_i(\Lambda_m^{(k)})\,\psi_i^{(a)}$$

$$\mathcal{B}_i(\Lambda_m^{(k)}) = \int_0^1 \Lambda_m^{(k)}(t)\cdot\overline{\psi_i}^{(a)}(t)dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } i = 0 \text{ и } i \ge a^m, \\ -\Im, & \text{при } 0 \le i < a^m\,. \end{cases}$$

при $\Im = const \in \Omega_a = \{1, \omega_a, \omega_a^2, \dots, \omega_a^{a-1}\}$, и $|\Im| = 1$.

Лемма 4.1. *Пусть даны числа* $\gamma_0 \ne 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, N_0 , $k_0 \in \mathbb{N}$ $(N_0 > k_0)$ *a - ичный интервал* $\Delta = \left[\frac{i_0-1}{a^{m_0}}, \frac{i_0}{a^{m_0}}\right)$*. Тогда существует множество* $E \subset \Delta$ *, функция* $g(x)$ *и полином по системе Кристенсона-Леви вида*

$$Q^{(a)}(x) = \sum_{k=k_0}^{\bar{k}} C_k\psi_{n_k}^{(a)}(x), \;\; n_k \nearrow (n_k > N_0)$$

Удовлетворяющие условиям:

1) $\qquad |E| > (1-\delta_0)|\Delta_0|,$

2) $\qquad g(x) = \gamma_0\chi\Delta(x), \;\; \forall\, x \in E \cup \big((0,1)\setminus\Delta\big),$

3) $\qquad \left|Q^{(a)}(x)\right| \le \varepsilon_0\,, \;\; \forall x \in \big((0,1)\setminus\Delta\big)\,,$

4) $$\|g(x)\|_\infty = \sup_{x\in(0,1)} (|g(x)|) \le \frac{|\gamma_0|}{\delta_0}$$

5) $$\left\|g(x) - Q^{(a)}(x)\right\|_\infty = \sup_{x\in(0,1)} \left(\left|g(x) - Q^{(a)}(x)\right|\right) \le \varepsilon_0$$

6) $$\max_{k_0<m\le\bar{k}} \left(\sup_{x\in\Delta} \left|\sum_{k=k_0+1}^{m} C_k \psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right) \le \frac{2|\gamma_0|}{\delta_0}$$

7) $$\max_{k_0<m\le\bar{k}} \left(\sup_{x\in(0,1)\setminus\Delta} \left|\sum_{k=k_0+1}^{m} C_k \psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right) \le |\gamma_0|$$

8) $$|C_k| > |C_{k+1}| > 0\,, \quad k \in (k_{0\,,}\bar{k}),$$

9) $$\sum_{k=k_0}^{\bar{k}} |C_k|^{2+\varepsilon} < \frac{\varepsilon_0}{4}\,.$$

Доказательство леммы 4.1

Разделим отрезок Δ на конечное число интервалов $\Delta_1 .... \Delta_{v_0}$ так, чтобы $|\Delta_1| = \dots = |\Delta_{v_0}|$

$$\max_{1\le v\le v_0} \left(\frac{|\gamma_0||\Delta_v|^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon_0\delta_0}\right) < min\left\{\frac{\varepsilon_0\delta_0}{4^{\sigma+1}(\gamma_0^2|\Delta| + 1)}; \frac{|\gamma_0||\Delta_0|^{\frac{1}{2}}}{2}\right\} \qquad (4.15)$$

где $$\sigma = \left[\log_2 \frac{1}{\delta_0}\right] \qquad (4.16)$$

И через $[a]$ обозначена целая часть числа

Положим

$$m = \log_a \frac{1}{|\Delta_1|}, |\Delta_1| = \cdots . = |\Delta_{v_0}| = a^{-m} \qquad (4.17)$$

$$s_1 = [\log_a N_0] + m \qquad (4.18)$$

Продолжим функцию $\Lambda_\sigma^{(1)}(x)$ с отрезка $(0,1)$ на всю действительную ось с периодом 1.

Определим функцию (полином) $g_1(x)$ и числа C_n, $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_i$ следуюшим образом:

$$g_1(x) = \gamma_0 \chi_{\Delta_1}(x) \Lambda_\sigma^{(1)}(2^{s_1}x), \quad x \in (0,1), \tag{4.19}$$

$$\mathcal{C}_n(g_1) \int_0^1 g_1(x)\psi_n^{(a)}(x)dx \,, \forall n \geq 0, \tag{4.20}$$

$$\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right), \ \ 0 \leq i < 2^m, \qquad \mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j\left(\Lambda_\sigma^{(1)}\right) \ ,0 < j < 2^\sigma, \tag{4.21}$$

Принимая во внимание равенство

$$\psi_i^{(a)}(x) \cdot \psi_j^{(a)}(2^{s_1}x) = \psi_{j \cdot 2^{s_1}+i}^{(a)}(x), \quad \text{при} \ \ 0 \leq i \,, \quad j < a^{s_1},$$

и учитывая соотношения (4.12)-(4.14), (4.19) будем иметь

$$g_1(x) = \gamma_0 \sum_{i=0}^{a^m-1} \mathcal{B}_i \psi_i^{(a)}(x) \sum_{j=0}^{a^\sigma-1} \mathcal{A}_j \, \psi_j^{(a)}(a^{s_1}x) =$$

$$= \gamma_0 \sum_{j=0}^{a^\sigma-1} \mathcal{A}_j \cdot \sum_{i=0}^{a^m-1} \mathcal{B}_i \psi_{j \cdot 2^{s_1}+i}^{(a)}(x) = \sum_{n=N_0}^{N} \mathcal{C}_n \psi_n^{(a)}(x) = \sum_{k=k_0}^{N-1} \mathcal{A}_k^{(1)} \psi_{n_k}^{(a)}(x), \tag{4.22}$$

где

$$\mathcal{C}_n(g_1) = \begin{cases} \pm \dfrac{\gamma_0}{a^{2m}} \ \text{или} \ 0\,, & n \in [N_0, N) \\ 0, \quad \text{при} & n \notin [N_0, N) \end{cases} \qquad N = a^{s_1+\sigma} + a^m - a^{s_1} + 1, \tag{4.23}$$

$$\mathcal{A}_k^{(1)} = \mathcal{A}_{n_k}(g_1), \ \ \{n_k\}_{k=k_0}^{N-1} = spec(g_1) \tag{4.24}$$

Пусть $M \in [N_0, N]$ тогда для некоторого $j_0 \in [1, a^\sigma]$, $i_0 \in [0, a^m]$ (см.(4.22)-(4.24))

$$\sum_{k=N_0}^{m} \mathcal{C}_k(g_1)\psi_k^{(a)}(x) = \gamma_0 \sum_{j=0}^{j_0-1} \mathcal{A}_j \left(\sum_{i=0}^{a^m-1} \mathcal{B}_i \psi_i^{(a)}(x) \right) \psi_j^{(a)}(2^s x) +$$

$$+\gamma_0 \mathcal{A}_{j_0} \psi_{j_0}^{(a)}(a^s x) \sum_{i=0}^{i_0} \mathcal{B}_i \psi_i^{(a)}(x).$$

Отсюда и из (4.16), (4.23), (4.24) имеем

$$\left| \sum_{k=N_0}^{M} \mathcal{C}_k(g_1)\psi_k^{(a)}(x) \right| = |\gamma_0| [(j_0 - 1) \cdot \chi_{\Delta_1}(x) + \frac{i_0}{2^m}] \leq \begin{cases} a^\sigma |\gamma_0| \,; x \in \Delta_1, \\ |\gamma_0|; \ x \in (0,1) \backslash \Delta_1. \end{cases}$$

Значит,

$$\max_{N_0 \leq M \leq N} \left\| \sum_{k=N_0}^{M} \mathcal{C}_k(g_1)\psi_k^{(a)} \right\|_\infty \leq |\gamma_0| a^\sigma,$$

$$\max_{N_0 \le M \le N} \left| \sum_{k=N_0}^{M} \mathcal{C}_k(g_1)\psi_k^{(a)}(x) \right| \le |\gamma_0|, \forall\, x \in (0,1)\backslash\Delta_1. \tag{4.25}$$

Положим

$$E_1 = \{x\,; g_1(x) = \gamma_0\}. \tag{4.26}$$

Легко видеть, что (см.(4.14), (4.19), (4.26))

$$g_1(x) = \begin{cases} \gamma_0\,, & \text{при } \; x \in E_1 \\ \gamma(1-a^{\sigma})\,, & \text{при } \; x \notin E_1, \\ 0, & \text{вне } \; \Delta_v \end{cases}$$

$$|E_1| = |\Delta_1|(1-a^{-\sigma}), \quad \int_0^1 |g_1(x)|^2 dx < 2\frac{2}{\delta}|\gamma_0|^2|\Delta_1| \tag{4.27}$$

Следовательно , на основании неравенства Бесселя,

$$\sum_{k=N_0}^{N-1} \left|\mathcal{A}_k^{(1)}\right|^2 = \int_0^1 |Q_1(x)|^2 dx \frac{2}{\delta_0}|\gamma_0|^2|\Delta_1|, \tag{4.28}$$

$$\max_{N_0 \le M \le N} \left(\left| \sum_{k=N_0}^{M} \mathcal{A}_k^{(1)}\psi_{n_k}^{(a)}(x) \right| \right) \le \frac{2|\gamma_0|}{\delta_0}\chi_{\Delta_1}(x) + |\gamma_0| \tag{4.29}$$

Продолжая эти рассуждения , мы можем по индукции определить числа $s_1 < \ldots < s_v < \ldots\; s_{v_0}$ а также $N_1 < \ldots < N_v < \ldots < N_{v_0}$ множества $E_1, \ldots E_{v_0}$ и функции $g_1(x)$, . . . $g_v(x)$, ... $g_{v_0}(x)$ вида

$$g_v(x) = \gamma_0\chi_{\Delta_v}(x)\Lambda_\sigma^{(1)}(a^{s_v}x) = \sum_{k=N_{v-1}}^{N_v-1} \mathcal{A}_k^{(v)}\psi_{n_k}^{(a)}(x)\,, v = \{1,2,\ldots v_0\} \tag{4.30}$$

Удовлетворяющие условиям:

$$s_v = [\log_a N_{v-1}] + m \tag{4.31}$$

$$\mathcal{A}_k^{(v)} = \int_0^1 g_v(x)\psi_{n_k}^{(a)}(x)dx\,, \{n_k\}_{k=N_{v-1}}^{N_v-1} = spec(g_v) \tag{4.32}$$

$$\mathcal{A}_k^{(v)} = \mathcal{C}_{n_k}(g_v), \{n_k\}_{k=N_{v-1}}^{N_v-1} = spec(g_v), \qquad \left|\mathcal{A}_k^{(v)}\right| = \frac{|\gamma_0|}{a^m}, v \in (1, v_0] \tag{4.33}$$

$$g_v(x) = \begin{cases} \gamma_0 \;, & x \in E_v\,; \\ \gamma(1-a^{\sigma}) & \text{при } \; x \notin E_v \\ 0, & \text{вне } \; x \notin \Delta_v \end{cases} \tag{4.34}$$

$$|E_v| > (1-\delta_0)|\Delta_v|, \tag{4.35}$$

$$\int_0^1 |g_v(x)|^2 dx < 2\frac{2}{\delta_0}|\gamma_0|^2|\Delta_v|, \tag{4.36}$$

$$\max_{N_{v-1}\le M<N_v}\left(\left|\sum_{k=N_{v-1}}^{M} \mathcal{A}_k^{(v)}\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right) \le \frac{2|\gamma_0|}{\delta_0}\chi_{\Delta_v}(x)+|\gamma_0| \tag{4.37}$$

Положем

$$E=\bigcup_{v=1}^{v_0} E_v\ ,\quad \mathcal{A}_k=\mathcal{A}_k^{(v)},\quad k\in[N_{v-1},N_v)\quad 1\le v\le v_0, \tag{4.38}$$

$$g(x)=\sum_{v=1}^{v_0} g_v(x)=\sum_{v=1}^{v_0}\sum_{k=N_{v-1}}^{N_v-1}\mathcal{A}_k^{(v)}\psi_{n_k}^{(a)}(x)=\sum_{k=k_0}^{\bar{k}}\mathcal{A}_k\psi_{n_k}^{(a)}(x), \bar{k}=N_{v_0}-1, \tag{4.39}$$

учитывая соотношения (4.33)-(4.35), (4.38), (4.39) получим

$$g(x)=\gamma_0\chi\Delta_0(x), \forall\, x\in E\cup\big((0,1)\backslash\Delta_0\big), \tag{4.40}$$

$$|E|>(1-\delta_0)|\Delta_0|, |\mathcal{A}_k|=\frac{|\gamma_0|}{a^m}\ . \tag{4.41}$$

На основании неравенства Бесселя, из (4.30), (4.33)-(4.37) для всех $v\in(1,v_0]$ имеем

$$\sum_{k=N_{v-1}}^{N_v-1}\left|\mathcal{A}_k^{(v)}\right|^2=\int_0^1|g_v(x)|^2dx\le\frac{2}{\delta_0}|\gamma_0|^2|\Delta_v|, \tag{4.42}$$

Отсюда и из (4.16), (4.27) и (4.28), (4.30), (4.33), (4.40), (4.42) следует

$$\sum_{k=k_0}^{\bar{k}}|\mathcal{A}_k|^2=\sum_{v=1}^{v_0}\left[\sum_{k=N_{v-1}}^{N_v-1}\left|\mathcal{A}_k^{(v)}\right|^2\right]\le\frac{2}{\delta_0}\gamma_0^2|\Delta_0|,$$

и

$$\sum_{k=k_0}^{\bar{k}}|\mathcal{A}_k|^{2+\varepsilon_0}<\left(\max_{k_0<k\le\bar{k}}|\mathcal{A}_k|^{\varepsilon_0}\right)\sum_{v=1}^{v_0}\left[\sum_{k=N_{v-1}}^{N_v-1}\left|\mathcal{A}_k^{(v)}\right|^2\right]\le$$

$$\le\max_{1\le v\le v_0}\left(|\Delta_v|^{\frac{1}{2}}\delta_0^{-\frac{1}{2}}|\gamma_0|\right)^{\varepsilon_0}\sum_{k=k_0}^{\bar{k}}|\mathcal{A}_k|^2\le\varepsilon_0,$$

Положим

$$C_k = \mathcal{A}_k + a^{-k} \min_{1\le v\le v_0}\left\{\frac{\varepsilon}{2};\ \frac{|\gamma_0||\Delta_0|}{a^m}\right\},\quad k\in[N_{v-1},N_v)\quad 1\le v\le v_0, \tag{4.43}$$

$$Q^{(a)}(x) = \sum_{k=k_0}^{\bar{k}} C_k\psi_{n_k}^{(a)}(x), \tag{4.44}$$

Учитывая соотношения (4.38)-(4.44), получим

$$|C_k| > |C_{k+1}| > 0,\qquad k\in\ (k_0,\bar{k}),\qquad \sum_{k=k_0+1}^{\bar{k}} |C_k|^{2+a} < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left|Q^{(a)}(x)\right| \le \varepsilon_0,\ \ \forall x\in((0,1)\backslash\Delta)$$

$$\|g(x)\|_\infty \le \frac{|\gamma_0|}{\delta_0},$$

$$\left\|g(x) - Q^{(a)}(x)\right\|_\infty \le \varepsilon_0,$$

Теперь проверим выполнение утверждения 6) леммы. Для любого $k_0 < N \le \bar{k}$ определим v из условия $N_{v-1} \le N < N_v$. Согласно (4.31) имеем, что

$$\sum_{k=k_0+1}^{N} C_k\psi_{n_k}^{(a)}(x) = \sum_{j=1}^{v-1}\sum_{k=N_{j-1}}^{N_j-1} C_k\psi_{n_k}^{(a)}(x) + \sum_{k=N_{v-1}}^{N} \mathcal{A}_k\psi_{n_k}^{(a)}(x). \tag{4.45}$$

Отсюда и из (4.30), (4.33), (4.34) и (4.37) следует

$$\left|\sum_{k=k_0+1}^{N} \mathcal{A}_k\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right| \le \left|\sum_{n=1}^{v-1} g_n(x)\right| + \left|\sum_{k=N_{v-1}}^{N} \mathcal{A}_k\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right| \le$$
$$\le \frac{|\gamma_0|}{\delta_0}\chi\Delta(x) + |\gamma_0|\chi_{(0,1)\backslash\Delta}(x).$$

Следовательно

$$\max_{k_0<k\le\bar{k}}\left(\sup_{x\in(0,1)}\left|\sum_{k=k_0+1}^{m} C_k\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right) \le \frac{2|\gamma_0|}{\delta_0}.$$

Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *Для любых чисел* $a \ge 2$, $\gamma \ne 0$, ε, $\delta \in (0,1)$, $N_0 > 1, M_0 > 1$ *и для любого квадрата* $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset (0,1)^2$ *существует измеримое множество* $E \subset \Delta$ *функция* $g\,(x,y)$, *полином* $Q^{(a)}\,(x,y)$ вида

$$Q^{(a)}(x,y) = \sum_{k,s=N_0,M_0}^{N,M} C_{k,s}\psi_{n_k}^{(a)}(x)\,\psi_{n_s}^{(a)}(y), C_{k,s} \neq 0$$

Обладающие следующими свойствами: члены в последовательности

$\{|C_{k,s}|, N_0 \le k \le N, \quad M_0 \le s \le M\}$

Расположены в убывающем порядке по всем лучам и

1) $$\sum_{k,s=N_0,M_0}^{N,M} |C_{k,s}|^{2+\varepsilon} < \varepsilon,$$

2) $$|E| > \left(1 - \frac{1}{2}\delta\right)|\Delta|,$$

3) $$g(x,y) = \gamma\chi_E(x,y), \quad \forall\ (x,y) \in E \cup ((0,1)\backslash\Delta),$$

где $\chi_E(x,y)$ характеристическая функция множества E,

4) $$\|g(x,y)\|_\infty = \sup_{(x,y)\in(0,1)^2}(|g(x,y)|) \le \frac{12}{\delta^2}|\gamma|,$$

5) $$\sup_{(x,y)\in(0,1)^2}\left(|Q^{(a)}(x,y)| - g(x,y)\right) < \varepsilon^2,$$

6) $$\sup_{(x,y)\in(0,1)^2}(|Q^{(a)}(x,y)|) < \varepsilon^2, \qquad \forall (x,y) \in ((0,1)^2\backslash\Delta)$$

7) $$\max_{N_0{}^2+M_0^2 \le R^2 \le N^2+M^2}\left(\sup_{(x,y)\in(0,1)^2}\left|\sum_{N_0{}^2+M_0^2\le k^2+s^2\le R^2} C_{k,s}\,\psi_{n_k}^{(a)}(x)\psi_{n_s}^{(a)}(y)\right|\right) \le \frac{12}{\delta^2}$$

8) $$\max_{N_0,M_0 \le n,m \le N,M}\left(\sup_{(x,y)\in(0,1)^2}\left|\sum_{k=N_0}^{n}\sum_{s=M_0}^{m} C_{k,s}\,\psi_{n_k}^{(a)}(x)\psi_{n_s}^{(a)}(y)\right|\right) \le \frac{4}{\delta^2}|\gamma|,$$

Доказательство леммы 4.2.

Применим лемму 4.1, полагая в ее формулировке

$$\gamma_0 = \gamma, \Delta = \Delta_1, k_0 = N_0, \delta_0 = \frac{\delta}{2}, \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon\delta}{16|\Delta_2|}$$

Тогда определяется измеримое множество $E_1 \subset (0,1)$, функция $g_1(x)$ полином $Q_1^{(a)}(x) = \sum_{k=N_0}^{N} \mathcal{A}_k \psi_{n_k}^{(a)}(x)$ удовлетворяющие условиям 1) - 9) леммы 4.1:

$$|E_1| > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)|\Delta_1|, \qquad g_1(x) = \gamma\chi\Delta_1(x), \qquad \forall\, x \in E_1 \subset \big((0,1)\backslash\Delta_1\big),$$

$$\max_{k_0<m\leq\bar{k}}\left(\sup_{x\in(0,1)}\left|\sum_{k=k_0+1}^{m}\mathcal{A}_k\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right) \leq \frac{2}{\delta}|\gamma|,$$

$$\sup_{x\in(0,1)}\left|Q_1^{(a)}(x)\right| < \frac{\varepsilon^3}{16|\Delta_2|}, \qquad \forall\, x \in E_1 \cup ((0,1)\backslash\Delta_1),$$

$$\max_{k_0<m\leq\bar{k}}\left(\sup_{x\in(0,1)}\left|\sum_{k=k_0+1}^{m}\mathcal{A}_k\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right) \leq 2|\gamma|,$$

$$\sup_{x\in(0,1)}\left|Q_1^{(a)}(x) - g_1(x)\right| < \frac{\varepsilon^3}{16|\Delta_2|},$$

$$\sup_{x\in(0,1)}|g_1(x)| \leq \frac{2}{\delta}|\gamma|, \quad |\mathcal{A}_k| > |\mathcal{A}_{k+1}| > 0 \;\; k \in (k_0, \bar{k}),$$

$$\sum_{k=N_0}^{N}|\mathcal{A}_k|^{2+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Положим

$$M_0 = 2(N^2 + 1). \tag{4.46}$$

Снова применим лемму 4.1 , полагая в ее формулировке

$$\gamma_0 = 1, \qquad \Delta = \Delta_2,\; k_0 = M_0, \delta_0 = \frac{\delta}{2}, \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon^2}{4\sup\limits_{x\in(0,1)}\left|Q_1^{(a)}(x)\right|}.$$

Тогда определяются измеримое множество $E_2 \subset (0,1)$, функция $g_2(y)$, полином $Q_2^{(a)}(y)$ вида

$$Q_2^{(a)}(y) = \sum_{s=M_0}^{M}\mathcal{B}_s\psi_{n_s}^{(a)}(y),$$

Снова удовлетворяющие условиям 1) - 9) леммы 4.1:

$$g_2(y) = \chi_{\Delta_2}(y), \qquad \forall\, y \in E_2 \cup \big((0,1)\backslash\Delta_2\big), |E_2| > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)|\Delta_2|,$$

$$\max_{M_0<m\leq M}\left(\sup_{y\in(0,1)}\left|\sum_{k=M_0}^{m}\mathcal{B}_k\psi_{n_k}^{(a)}(y)\right|\right) \leq \frac{2}{\delta}|\Delta_2|,$$

$$\sup_{y\in(0,1)}\left|Q_2^{(a)}(y)\right| < \frac{\varepsilon^2}{4\sup\limits_{x\in(0,1)}\left|Q_1^{(a)}(y)\right|}, \forall y \in E_2 \cup \left((0,1)\backslash\Delta_2\right),$$

$$\sup_{y\in(0,1)}\left|Q_2^{(a)}(y) - g_2(y)\right| < \frac{\varepsilon^2}{4\sup\limits_{x\in(0,1)}\left|Q_1^{(a)}(x)\right|},$$

$$\sup_{y\in(0,1)}|g_2(y)| \le \frac{2}{\delta}|\Delta_2|,$$

$$|\mathcal{B}_s| > |\mathcal{B}_{s+1}| > 0, s \in [M_0, M],$$

$$\sum_{k=M_0}^{M}|\mathcal{B}_s|^{2+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{4},$$

Определим множество E, функцию $g(x,y)$, полином $Q^{(a)}(x,y)$ следующим образом:

$$g(x,y) = g_1(x)g_2(y), \quad E = E_1 \times E_2,$$

$$Q^{(a)}(x,y) = Q_1{}^{(a)}(x)Q_2{}^{(a)}(y) = \sum_{k,s=N_0,M_0}^{N,M} C_{k,s}\,\psi_{n_k}^{(a)}(x)\psi_{n_s}^{(a)}(y) =$$

$$= \sum_{n=N_0}^{N}\mathcal{A}_k\psi_{n_k}^{(a)}(x)\sum_{n=M_0}^{M}\mathcal{B}_s\psi_{n_s}^{(a)}(y),$$

где

$$C_{k,s} = \begin{cases}\mathcal{A}_k\mathcal{B}_s, & N_0 \le k \le N, M_0 \le s \le M;\\ 0, & k \notin [N_0,N], \quad n \notin [M_0,M]\end{cases}$$

Отсюда вытекает

$$g(x,y) = \gamma\chi_\Delta(x,y), (x,y) \in E \cup \left((0,1)\backslash\Delta\right), \qquad |E| > (1-\delta)|\Delta|,$$

члены в последовательности $\{|C_{k,s}|, N_0 \le k \le N, M_0 \le s \le M\}$ расположены в убывающем порядке по всем лучам и

$$\sum_{k,s=N_0,M_0}^{N,M}\left|C_{k,s}\right|^{2+\varepsilon} < \varepsilon, \quad \sup_{(x,y)\in(0,1)^2}|g(x,y)| \le \frac{12}{\delta^2}|\gamma|.$$

$$\sup_{(x,y)\in(0,1)^2}\left(\left|Q^{(a)}(x,y) - g(x,y)\right|\right) \le$$

$$\le \left(\left|Q_2^{(a)}(y) - g_2(y)\right|\right)\left(\left|Q_1^{(a)}(x)\right|\right) + \left(\left|Q_1^{(a)}(x) - g_1(x)\right|\right)\left(|g_2(y)|\right) \le \varepsilon^2$$

Теперь проверим выполнение утверждений 7) и 8) леммы 4.2. Пусть

$N_0^2+M_0^2<R^2<N^2+M^2$ тогда для некоторого m_0 имеем $m_0\le R< m_0+1$.Из (4.46) следует $R^2-N^2\ge (m_0-1)^2$ и, следовательно, получим

$$\max_{N_0^2+M_0^2<R^2<N^2+M^2}\left(\sup_{(x,y)\in(0,1)^2}\left|\sum_{N_0^2+M_0^2\le k^2+s^2\le R^2} C_{k,s}\,\psi_{n_k}^{(a)}(x)\psi_{n_s}^{(a)}(y)\right|\right)\le$$

$$\le \sup_{(x,y)\in(0,1)^2}\left|\sum_{k=N_0}^{N}\sum_{s=M_0}^{m_0-1} C_{k,s}\,\psi_{n_k}^{(a)}(x)\psi_{n_s}^{(a)}(y)\right|+$$

$$+\sup_{(x,y)\in(0,1)^2}\left|\sum_{k=N_0}^{s} C_{k,m_0}\,\psi_{n_k}^{(a)}(x)\psi_{n_{m_0}}^{(a)}(y)\right|=$$

$$=\left(\sup_{(x,y)\in(0,1)^2}\left|\sum_{k=N_0}^{N}\mathcal{A}_k\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right)\left(\sup_{(x,y)\in(0,1)^2}\left|\sum_{s=M_0}^{m_0-1}\mathcal{B}_n\psi_{n_s}^{(a)}(y)\right|\right)+$$

$$+\left(|\mathcal{B}_{m_0}|\right)\left(\max_{N_0\le m\le N}\left(\sup_{x\in(0,1)}\left|\sum_{k=N_0}^{N}\mathcal{A}_k\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right)\right)<\frac{12}{\delta^2}|\gamma|$$

Аналогично получим

$$\max_{N_0,M_0<n,m<N,M}\left(\sup_{(x,y)\in(0,1)^2}\left|\sum_{k,s=N,M_0}^{n,m} C_{k,s}\,\psi_{n_k}^{(a)}(x)\,\psi_{n_s}^{(a)}(y)\right|\right)\le$$

$$\le\max_{N_0<n<N}\left(\sup_{x\in(0,1)}\left|\sum_{k=N_0}^{n}\mathcal{A}_k\,\psi_{n_k}^{(a)}(x)\right|\right)\max_{N_0<m<M}\left(\sup_{y\in(0,1)}\sum_{s=M_0}^{m}\mathcal{B}_n\,\psi_{n_s}^{(a)}(y)\right)<\frac{2}{\delta}|\gamma|\frac{2}{\delta}=\frac{4}{\delta^2}|\gamma|$$

Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. *Для любых чисел* $\delta\in(0,1),\varepsilon\in(0,1),N_0>1$ *и для любой функции* $f(x,y)\in C(0,1)^2$ *можно найти измеримое множество* $E\subset(0,1)^2$, *функцию* $g(x,y)$ *полином* $Q(x,y)$ *вида*

$$Q^{(a)}(x,y)=\sum_{k,m=N_0}^{M} C_{n,m}\,\psi_n^{(a)}(x)\psi_m^{(a)}(y),$$

Обладающие следующими свойствами:

1) *Все ненулевые члены в последовательности*

$$\{\, |C_{k,n}\ (Q)|,\qquad (k,n\,) \in spec(Q)\}$$

расположены в убывающем порядке по всем лучам и

2) $$\sum_{k,n=N_0}^{M} \left|C_{k,n}\right|^{2+\varepsilon} < \varepsilon,$$

3) $$g(x,y) = f(x,y),\ \forall (x,y) \in E, \qquad |E| > 1-\delta,$$

4) $$\sup_{(x,y)\in(0,1)^2} |g(x,y)| \le \frac{21}{\delta^2} \sup_{(x,y)\in(0,1)^2} |f(x,y)|,$$

5) $$\sup_{(x,y)\in(0,1)^2} \left|Q^{(a)}(x,y) - g(x,y)\right| < \varepsilon,$$

6) $$\max_{\sqrt{2}N_0 \le R\sqrt{2}\,M} \left(\sup_{(x,y)\in(0,1)^2} \left| \sum_{2N_0^2 \le k^2+s^2 \le R^2} C_{k,s}\, \psi_{n_k}^{(a)}(x) \psi_{n_s}^{(a)}(y) \right| \right) \le$$
$$\le \frac{17}{\delta^2} \left(\sup_{(x,y)\in(0,1)^2} |f(x,y)| \right),$$

7) $$\max_{N_0, < n,m < M} \left(\sup_{(x,y)\in(0,1)^2} \left| \sum_{k,s=N_0}^{n,m} C_{k,s}\, \psi_{n_k}^{(a)}(x)\, \psi_{n_s}^{(a)}(y) \right| \right) \le$$
$$\le \frac{9}{\delta^2} \left(\sup_{(x,y)\in(0,1)^2} |f(x,y)| \right).$$

Доказательство леммы 4.3.

Возьмем ступенчатую функцию

$$\psi(x,y) = \sum_{v=1}^{v_0} \gamma_v \chi \Delta_v(x,y) \tag{4.47}$$

Такую, что

$$\sup_{(x,y)\in(0,1)^2} |f(x,y) - \psi(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.48}$$

Последовательным применением леммы 4.2, можно определить функции $g_1(x,y), \dots . g_{v_0}(x,y)$, множества $E_v \subset \Delta_v, v = 1,2 \dots \dots v_0$ и полиномы

$$Q_v^{(a)}(,x,y) = \sum_{k=N_{v-1}}^{N_v-1} \sum_{s=M_{v-1}}^{M_v-1} C_{k,s}^{(v)} \psi_{n_k}^{(a)}(x) \psi_{n_s}^{(a)}(y), C_{k,s,}\, v = 1,2 \dots \dots v_0 \tag{4.49}$$

Такие, что члены в последовательности

$$\{\,|C_{k,s}^{(v)}|, N_{v-1} \le k \le N_v,\ \ M_{v-1} \le s < M_v\,\}$$

расположены в убывающем порядке по всем лучам и

$$\max_{N_v \le k < N_{v+1},\ M_v \le s < M_{v+1}} |C_{k,s}^{(v+1)}| < \max_{N_{v-1} \le k < N_v,\ M_{v-1} \le s < M_v} |C_{k,s}^{(v)}|, \forall n = 1,2 \dots \qquad (4.50)$$

$$\sum_{k=N_{v-1}}^{N_v-1} \sum_{s=M_{v-1}}^{M_v-1} |C_{k,s}^{(v)}|^{2+\varepsilon} < 2^{-v_0}\varepsilon, \qquad (4.51)$$

$$|E_v| > (1-\delta)\cdot|\Delta_v|, \qquad (4.52)$$

$$g_v(x,y) = \gamma_v \chi E_v(x,y), \forall (x,y) \in E_v \cup ((0,1)^2 \backslash \Delta_v), \qquad (4.53)$$

$$\sup_{(x,y)\in(0,1)^2} (|g_v(x,y)|) \le \frac{21}{\delta^2} |\gamma_v|^p |\Delta_v|, \qquad (4.54)$$

$$\sup_{(x,y)\in(0,1)^2} \left(|Q_v^{(a)}(x,y) - g_v(x,y)|\right) < \frac{\varepsilon}{2^{v_0}}, \qquad (4.55)$$

$$\max_{N_{v-1}^2+M_{v-1}^2 \le R^2 \le N_v^2+M_v^2} \left| \sum_{N_{v-1}^2+M_{v-1}^2 \le k^2+s^2 \le R^2} C_{k,n}^{(v)} \psi_{n_k}^{(a)}(x) \psi_{n_s}^{(a)}(y) \right| \le \frac{12}{\delta^2} |\gamma_v|, \qquad (4.56)$$

$$\max_{N_{v-1},\, M_{v-1} \le n,m \le N_v, M_v,} \left| \sum_{k,s=N_{v-1},\, M_{v-1}}^{n,m} C_{k,s}^{(v)} \psi_{n_k}^{(a)}(x) \psi_{n_s}^{(a)}(y) \right| \le \frac{4}{\delta^2} |\gamma_v|, \qquad (4.57)$$

Таким образом , для фиксированного $v, 1 \le v \le v_0$ определяются множество $E_v \subset T$ и полином $Q_v^{(a)}(x,y)$ вида (4.49), удовлетворяющие условиям (4.50)-(4.57) , при этом можно взять

$$N = N_0, \qquad N_v = M_{v-1} + 1, \qquad 1 \le v \le v_0, \qquad (4.58)$$

Определим множество E функцию $g(x,y)$, полином $Q(x,y)$ следующим образом

$$E = \bigcup_{v=1}^{v_0} E_v, \qquad (4.59)$$

$$g(x,y) = \sum_{v=1}^{v_0} g_v(x,y) + [f(x,y) - \psi(x,y)], \qquad (4.60)$$

$$Q^{(a)}(x,y) = \sum_{v=1}^{v_0} Q_v^{(a)}(x,y) =$$
$$= \sum_{v=1}^{v_0} \sum_{k=N_{v-1}}^{N_v-1} \sum_{s=M_{v-1}}^{M_v-1} C_{k,s}^{(v)} \psi_{n_k}^{(a)}(x) \psi_{n_s}^{(a)}(y) = \sum_{n,m=N_0}^{M} C_{n,m} \psi_n^{(a)}(x) \psi_m^{(a)}(y),$$
$$M = M_{v_0} - 1, \qquad (4.61)$$

Где

$$C_{j,m} = \begin{cases} C_{k,s}^{(v)}, j = n_k, m = n_s \;\; N_{v-1} \le k \le N_v, \;\; M_{v-1} \le s < M_v, 1 \le v \le v_0, \\ 0, \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad (4.62)$$

Из условий (4.46)-(4.52),(4.58)-(4.62) следует:

$g(x,y) = f(x,y), \;\; \forall (x,y) \in E \quad |E| > 1 - \delta,$

$|Q^{(a)}(x,y) - g(x,y)| < \varepsilon,$

Все ненулевые члены в последовательности $\{|C_{k,n}(Q)|, \forall (k,n) \in spec(Q)\}$ расположены в убывающем порядке по всем лучам и $\sum_{n,m=N_0}^{M} |C_{k,s}|^{2+\varepsilon} < \varepsilon$, т. е утверждения 1), 2), 3) и 5) леммы 4.3 выполнены.

Теперь проверим выполнение утверждений 4),6), и 7) леммы 4.3. Прежде всего заметим, что для всех $(x,y) \in (0,1)^2$ и $v \in [1, v_0]$

$$\left| \sum_{s=1}^{v-1} g_s(x,y) \right| \le \frac{5}{\delta^2} \sup_{(x,y)\in(0,1)^2} |f(x,y)| \qquad (4.63)$$

Принимая во внимание равенство $g_v(x,y) = 0$ при $(x,y) \in ((0,1) \backslash \Delta_v)$, $\forall$ $v \in [1, v_{0,}]$ (см.(4.53)) в силу (4.46), (4.47) и (4.54) для всех $(x,y) \in ((0,1))^2$ и $v \in [1, v_0]$ будем иметь

$$\left| \sum_{s=1}^{v-1} g_s(x,y) \right| \le \sum_{v=1}^{v-1} |g_s(x,y)| \le \sum_{v=1}^{v_0} \frac{4}{\delta^2} |\gamma_v| \chi_\Delta(x,y) = \frac{4}{\delta^2} |\psi(x,y)| \le$$
$$\le \frac{5}{\delta^2} \sup_{(x,y)\in(0,1)^2} |f(x,y)|.$$

Пусть $R \in [\sqrt{2} N_0, \sqrt{2}\, M]$ тогда для некоторого $v \in [1, v_0]$ из (4.63) будем иметь

$$\sum_{2N_0^2 \le k^2+s^2 \le R^2} C_{k,s}\, \psi_{n_k}^{(a)}(x)\psi_{n_s}^{(a)}(y) =$$

$$= \sum_{s=1}^{v-1} Q_s^{(a)}(x,y) + \sum_{2N_v^2+M_v^2 \le k^2+s^2 \le R^2} C_{k,s}^{(v)}\, \psi_{n_k}^{(a)}(x)\psi_{n_s}^{(a)}(y).$$

Отсюда и из соотношения (4.48), (4.49) и (4.56) для всех $(x,y) \in (0,1)^2$ будем иметь

$$\left|\sum_{2N_0^2 \le k^2+s^2 \le R^2} C_{k,s}\, \psi_{n_k}^{(a)}(x)\psi_{n_s}^{(a)}(y).\right| \le \sum_{s=1}^{v-1}\left|Q_s^{(a)}(x,y) - g_s(x,y)\right| + \left|\sum_{s=1}^{v-1} g_s(x,y)\right| +$$

$$+\left|\sum_{N_v^2+M_v^2 \le k^2+s^2 \le R^2} C_{k,s}^{(v)}\, \psi_{n_k}^{(a)}(x)\psi_{n_s}^{(a)}(y).\right| \le \frac{5}{\delta^2}|f(x,y)| + \frac{12|\gamma_v|}{\delta^2} \le \frac{17}{\delta^2}|f(x,y)|$$

Аналогично , получим

$$\max_{N_0 \le n,m \le M}\left(\left|\sum_{k,s=N_0}^{n,m} C_{k,s}\, \psi_{n_k}^{(a)}(x)\, \psi_{n_s}^{(a)}(y)\right|\right) \le \frac{12}{\delta^2}|f(x,y)|.$$

Лемма 4.3 доказана.

4.3 Доказательство Теоремы о равномерной сходимости двойных рядов по системе Кристенсона–Леви

Доказательство Теоремы 4.3.

Если обозначим через $\{f_k(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность всех полиномов Уолша с рациональными коэффициентами и последовательно применим лемму 1.3, то можем найти последовательности ограниченных функций$\{g_n^{(j)}(x,y)\}_{j=1}^{n}$, $1 \le j \le n,\ n \ge 1$ множеств $\{E_n^{(j)}\}_{j=1}^{n}$; $n \ge 1$ и полиномов

$$Q_n^{(j)}(x,y) = \sum_{k,s=M_n^{(j-1)}+1}^{M_n^{(j)}} \mathcal{A}_{k,s}^{(n,j)}\, \psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y) \qquad (4.64)$$

где

$$0 \le M_1^{(0)} < M_1^{(1)} = M_2^{(0)} < M_2^{(1)} < M_2^{(2)} < M_{n-1}^{(n-1)} = M_n^{(0)} < M_n^{(1)} < \cdots <$$
$$< M_n^{(n)} = M_{n+1}^{(0)} < M_{n+1\ldots}^{(1)} \qquad (4.65)$$

которые удовлетворяют условиям

$$g_n^{(j)}(x,y) = f_n(x,y), \text{при} \quad (x,y) \in E_n^{(j)}, \left|E_n^{(j)}\right| > 1-2^{-j} \qquad (4.66)$$

$$\max_{(x,y)}\left|g_n^{(j)}(x,y)\right| = \left\|g_n^{(j)}\right\|_\infty \le 2^j \left\|f_n(x,y)\right\|_\infty, \quad 1 \le j \le n, \qquad (4.67)$$

$$\left\|Q_n^{(j)}(x,y) - g_n^{(j)}\right\|_\infty < 2^{-2n}, 1 \le j \le n \quad n \ge 1 \qquad (4.68)$$

$$\max_{N_0 \le n, m \le M}\left\|\sum_{k,s=N_0}^{n,m} \mathcal{A}_{k,s}^{(n,j)}\, \psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y)\right\|_\infty \le 2^j \left\|f_n(x,y)\right\|_\infty, \qquad (4.69)$$

$$\max_{\sqrt{2N_0} \le R\sqrt{2M}}\left\|\sum_{2N_0^2 \le k^2+s^2 \le R^2} \mathcal{A}_{k,s}^{(n,j)} \psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y)\right\| \le 2^j \left\|f_n(x,y)\right\|_\infty \qquad (4.70)$$

и все ненулевые члены в последовательности $\left\{\left|\mathcal{A}_{k,s}^{(n,j)}\right|, k,s \in (M_n^{(j-1)}, M_n^{(j)}]\right\}$, для каждых фиксированных $n \ge 1$, и $j \in [1, n]$ расположены в убывающем порядке по всем лучам и

$$\max_{k,s \in \left(M_n^{(j)}, M_n^{(j+1)}\right]}\left|\mathcal{A}_{k,s}^{(n,j+1)}\right| < \min_{k,s \in \left(M_n^{(j-1)},\ M_n^{(j)}\right]}\left|\mathcal{A}_{k,s}^{(n,j)}\right| \qquad (4.71)$$

для всех $1 < j < n,\ n = 1,2$.

$$\max_{k,s \in (M_{n+1}^{(0)}, M_{n+1}^{(1)}]}\left|\mathcal{A}_{k,s}^{(n,1)}\right| < \min_{k,s \in (M_n^{(n-1)}, M_n^{(n)}]}\left|\mathcal{A}_{k,s}^{(n,n)}\right| \text{ для всех, } n = 1,2 \ \ldots. \ . \qquad (4.72)$$

$$\sum_{k,s \in M_n^{(j-1)}+1}^{M_n^j}\left|\mathcal{A}_{k,s}^{(n,j)}\right|^{2+2^{-(n+j)}} < 4^{-8(n+j)},$$

$$n \ge 1, 1 \le j \le n, \quad k,s \in \left(M_n^{(j-1)}, M_n^{(j)}\right] \qquad (4.73)$$

Положим

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} \mathcal{A}_{k,s}\, \psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k,s=M_n^{(j-1)}+1}^{M_n^{(j)}} \mathcal{A}_{k,s}^{(n,j)}\, \psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y)\right) \qquad (4.74)$$

где

$$\mathcal{A}_{k,s} = \mathcal{A}_{k,s}^{(n,j)}, k,s \in (M_n^{(j-1)}, M_n^{(j)}], \ \ 1 \le j \le n, \ \ n \ge 1 \qquad (4.75)$$

Из (4.71)-(4.73) и (4.75) следует, что все ненулевые члены в последовательности $\{|\mathcal{A}_{k,s}|,\ k,s \in [0,\infty)\}$ расположены в убывающем порядке по всем лучам и

$$\sum_{k,s=1}^{\infty} |\mathcal{A}_{k,s}|^r < \infty, \qquad \forall\, r > 2.$$

Пусть $f(x,y) \in C(0,1)^2$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ из последовательности $\{f_{k_n}(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} f_{k_n}(x,y) - f(x,y) \right\|_c = 0 \qquad (4.76)$$

$$\max_{(x,y)} |f_{k_n}(x,y)| = \|f_{k_n}(x,y)\|_c \le \varepsilon \cdot 2^{-8(n+1)}, \qquad n \ge 2 \qquad (4.77)$$

где

$$k_1 > j_0 = \left[\log_{\frac{1}{2}} \varepsilon\right] + 1. \qquad (4.78)$$

Положим

$$g_1(x,y) = g_{k_1}^{(j_0+1)}, Q_1(x,y) = Q_{k_1}^{(j_0+1)} \ \text{и}\ G_1 = E_{k_1}^{(j_0+1)}$$

Предположим, что уже определены числа $k_1 > v_1 < \cdots < v_q - 1$, β_n, $1 \le n \le q-1$ функции а $f_{v_n}(x), g_n(x)$ $1 \le n \le q-1$ множеств $G_2, \ \ldots, G_{q-1}$ и полиномы

$$Q_n(x,y) = E_{v_n}^{(n+j_0)}(x,y) = Q_n^{(j)}(x,y) =$$

$$= \sum_{k,s=M_{v_n}^{(n+j_0-1)}+1}^{M_{v_n}^{(n+j_0)}} \mathcal{A}_{k,s}\, \psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y), \qquad (4.79)$$

Которые для всех $n \le q-1$ удовлетворяют условиям

$$g_n(x,y) = f_{k_n}(x,y), \quad (x,y) \in G_n, \qquad (4.80)$$

$$|G_n| > 1 - 2^{-j_0-n}, \quad 1 \le n \le q-1 \tag{4.81}$$

$$\|g_n(x,y)\|_\infty \le 2^{j_0+n} \cdot \left\|f_{v_n}(x,y)\right\|_\infty < 2^{-n}, \; 1 \le n \le q-1 \tag{4.82}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\left(Q_j^{(a)}(x,y) - g_j(x,y)\right)\right\|_\infty < 2^{-2n}, 1 \le n \le q-1 \tag{4.83}$$

$$\max_{\sqrt{2}\, M_{v_n}^{(n+j_0-1)} \le R \le \sqrt{2}\, M_{v_n}^{(n+j_0)}} \left\|\sum_{\sqrt{2}\left(M_{v_n}^{(n+j_0-1)}\right)^2 \le k^2+s^2 \le R^2} \mathcal{A}_{k,s}\, \psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y)\right\|_\infty \le$$

$$\le 2^{-n}\left\|f_{v_n}(x,y)\right\|_\infty \tag{4.84}$$

Возьмем функцию $f_{v_q}(x,y)$ $(v_q > v_{q-1})$ из последовательности $\{f_k(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ такую,что

$$\left\|f_{v_q}(x,y) - \left(f_{k_q}(x,y) - \sum_{n=1}^{q-1}[Q_n(x,y) - g_n(x,y)]\right)\right\|_\infty < 2^{-8(q+1)} \tag{4.85}$$

Отсюда вытекает

$$\left\|f_{v_q}(x,y)\right\|_\infty \le 2^{-4q} \tag{4.86}$$

Положим

$$Q_q(x,y) = Q_{v_q}^{(q+j_0)}(x,y) = \sum_{k,s=M_{v_q}^{(q+j_0-1)}+1}^{M_{v_q}^{(q+j_0)}} \mathcal{A}_{k,s}\, \psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y), \tag{4.87}$$

$$g_q(x,y) = f_{k_q}(x,y) + [f_{v_q}(x,y) - g_{v_q}^{(j_0+q)}(x,y)], \qquad G_q = E_{v_q}^{(j_0+q)} \tag{4.88}$$

Учитывая соотношения (4.80), (4.82)-(4.86)

$$g_q(x,y) = f_{k_q}(x,y), \quad (x,y) \in G_q, \tag{4.89}$$

$$\|g_q(x,y)\|_\infty \le \left\|f_{v_q}(x,y) - \left(f_{k_q}(x,y) - \sum_{j=2}^{q-1}[Q_j(x,y) - g_j(x,y)]\right)\right\|_\infty +$$

$$+ \left\|g_{v_q}^{(j_0+q)}(x,y)\right\|_\infty + \left\|\sum_{j=2}^{q-1}[Q_j(x,y) - g_j(x,y)]\right\|_\infty < 4^{-3q} \tag{4.90}$$

В силу (4.69)-(4.82), (4.86)-(4.90) имеем

$$\left\|\sum_{j=1}^{q}(Q_j(x,y)-g_j\,(x,y))\right\|_\infty \le$$

$$\le \left\|f_{v_q}(x,y)-\left(f_{k_q}(x,y)-\sum_{j=1}^{q-1}[Q_j(x,y)-g_j\,(x,y)]\right)\right\|_\infty +$$

$$+\left\|Q_{v_q}^{(q+j_0)}(x,y)\ -g_{v_q}^{(j_0+q)}(x,y)\right\|_\infty < 4^{-8(q+1)}$$

$$\max_{\sqrt{2}\,M_{v_q}^{(q+j_0-1)}\le R\le\sqrt{2}\,M_{v_q}^{(q+j_0)}}\left\|\sum_{2\left(M_{v_q}^{(q+j_0-1)}\right)^2\le k^2+s^2\le R^2}\mathcal{A}_{k,s}\,\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y)\right\|_\infty \le 2^{-2q} \quad (4.91)$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x,y)\}$ и полиномов $\{Q_q(x,y)\}$ удовлетворяющих условиям (4.80)-(4.85) для всех $q\geq 1$

$$E=\bigcap_{q=1}^{\infty}G_q, \qquad (4.92)$$

$$g(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(x,y), \qquad (4.93)$$

$$\sum_{k,s=0}^{\infty}\beta_{k,s}\,\mathcal{A}_{k,s}\,\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y)=\sum_{q=1}^{\infty}\left[\sum_{k,s=M_{v_q}^{(q+j_0-1)}}^{M_{v_q}^{(q+j_0)}}\mathcal{A}_{k,s}\,\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y)\right], \qquad (4.94)$$

$$\beta_{k,s}=\begin{cases}-1, |k|, |s|\in \cup_{q=1}^{\infty}\left(M_{v_q}^{(q+j_0-1)},\right)=M_{v_q}^{(q+j_0)}\\ 0, \qquad \text{в остальных случаях}\end{cases} \qquad (4.95)$$

Отсюда и из условий (4.66), (4.83), (4.85), (4.89)-(4.92), вытекает

$g(x,y)\in L^\infty(0,1)^2,\ \ g(x,y)=\ f(x,y),\quad x\in E\ \ f(x,y)\in\ L^\infty(0,1)^2.$

Пусть далее произвольное число $R>1$, тогда для некоторого q имеем

$M_{v_q}^{(q+j_0-1)}\le R<M_{v_{q+1}}^{(q+j_0)}$, из соотношений (4.90)-(4.91) и (4.92)-(4.95) будем иметь

$$\left\| \sum_{2\left(M_{v_q}^{(q+j_0-1)}\right)^2 \le k^2+s^2 \le R^2}^{N} \beta_{k,s}\,\mathcal{A}_{k,s}\,\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y) - g(x,y) \right\|_\infty \le$$

$$\le \left\| \sum_{i=1}^{q-1} [Q_i(x,y) - g_i\,(x,y)] \right\|_\infty + \sum_{j=q}^{\infty} \|g_j\,(x,y)\|_\infty +$$

$$+ \max_{\sqrt{2}\,M_{v_q}^{(q+j_0-1)} \le R \le \sqrt{2}\,M_{v_q}^{(q+j_0)}} \left\| \sum_{2\left(M_{v_q}^{(q+j_0-1)}\right)^2 \le k^2+s^2 \le R^2} \mathcal{A}_{k,s}\,\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y) \right\|_\infty \le 2^{-2q}.$$

Аналогично получим

$$\max_{M_{v_q}^{(q+j_0-1)} \le n,m \le M_{v_q}^{(q+j_0)}} \left\| \sum_{k,s=N}^{n,m} \mathcal{A}_{k,s}^{n,j}\,\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y) - g(x,y) \right\|_\infty < 2^{-q} \to 0, n \to \infty$$

и, следовательно,

$$\mathcal{D}_{k,s} = \beta_{k,s}\,\mathcal{A}_{k,s} = \int_0^1 \int_0^1 g(x,y)\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y)\,dxdy\,, k,s = 0,1,2\,\ldots$$

Теорема 4.3 доказана.

Таким образом в работе исследованы и получены следующие результаты:

1. Исследован вопрос интегрирования и сходимости рядов по системы Крестенсона-Леви с монотонными коэффициентами. В частности, получены следующие результаты:

- *Пусть коэффициенты $\mathcal{B}_n$ удовлетворяют условиям* $\mathcal{B}_n \downarrow 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} < \infty$$

тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

сходится к суммируемой функции и является ее рядом Фурье по системе

Кристенсона-Леви .

- *Существует монотонно убывающая, стремящаяся к нулю последовательность* $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} = \infty ,$$

а сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

не принадлежит классу $L^1(0,1)$, *т.е. не является рядом Фурье по системе Кристенсона - Леви некоторой функции из класса* $L^1(0,1)$, *несмотря на то, что ряд (3) сходится всюду на* $(0,1)$ *и сходится равномерно на любом интервале* $(\delta, 1)$, *где* $0 < \delta < 1$.

- *Если* $\mathcal{C}_n \downarrow 0$, *то функция*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

принадлежит пространстве $L^p(0,1)$, $\forall\, p \in (0,1)$, *причем имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\, \mathcal{S}_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0$$

где $\mathcal{S}_n(x)$ *- n-ая частичная сумма ряда.*

2. Для любого счетного множества $E \subset (0,1)$ установлены точечная и L^p-универсальность рядов Фурье по системе Кристенсона-Леви класса $L^p(0,1)$, а также топологической транзитивности системы Кристенсона-Леви для пары $\{L^p(0,1)\, ; \mathbb{C}^E\}$, $\mathbb{C}^E$ множество всех функций $h(x)$ определенных на E и принимающие комплексные значения, т.е. $h(x_k) = y_k \in \mathbb{C}\,, k = 1,2, \ldots$.

Доказаны следующие утверждения:

- *существует плотное* G_δ *множество* $M \subset L^p(0,1)$ *обладающее следующим свойством: последовательность частичных сумм ряда Фурье по системе* Ψ_a *любой функции из* M *является точечно универсальным в* $\mathbb{C}^E$.
- *система Кристенсона-Леви является топологически транзитивной для пары* $\{L^p(0,1)\,;\,\mathbb{C}^E\}$.

3. Исследован вопрос о существовании универсальных (относительно знаков , перестановок и подрядов) рядов по системе Крестенсона-Леви в весовых пространствах $L^p_\mu(0,1)$, $1 \le p < \infty$.

Доказано следующее утверждение:

- *Существует ряд по системе Кристенсона-Леви вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x),\ |c_k| \searrow 0 \ \text{с} \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^r < \infty\,, \forall\ r > 2\,,$$

со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ *существует измеримая функция*

$\mu(x)\,,0 < \mu(x) \le 1\,, mes\{x \in (0,1): \mu(x) \ne 1\} < \varepsilon$

так, что ряд является универсальным относительно знаков , перестановок и подрядов , во всех весовых пространствах в $L^p_\mu(0,1)$, $1 \le p < \infty$.

- *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует измеримая функция*

$\mu(x)\,,0 < \mu(x) \le 1\,, mes\{x \in (0,1): \mu(x) \ne 1\} < \varepsilon$

такая, что в весовом пространстве $L^p_\mu(0,1)$ *можно построить нуль - ряд по системе Кристенсона-Леви, а именно существует ряд вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x) \ \text{с} \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 > 0\,,$$

который сходится к нулю по метрике $L^p_\mu(0,1)$.

4. Исследован вопрос равномерной сходимости двойных рядов Фурье по системе Кристенсона-Леви (по сферическим и прямоугольним частичным суммам)

после исправления значений функции на множестве малой меры, а также монотонность коэффициентов Фурье вновь полученной функции.

Доказано следующее утверждение:

- *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и для каждой функции* $f \in L^0(0,1)^2$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\{f \neq f\} < \varepsilon$ *такую, что ее ряд Фурье по двойной системе* Ψ_a *по сферам сходится к ней равномерно на* $(0,1)^2$, *и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье по двойной системе* Ψ_a *вновь полученной функции по модулю расположены в убывающем порядке по всем направлениям.*
- *Для любого* $\varepsilon > 0$ *и для каждой функции* $f \in L^0(0,1)^2$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\{f \neq f\} < \varepsilon$ *такую, что ее ряд Фурье по двойной системе* Ψ_a *по прямоугольникам сходится к ней равномерно на* $(0,1)^2$, *и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье по двойной системе* Ψ_a *вновь полученной функции по модулю расположены в убывающем порядке по всем направлениям.*
- *Существует ряд по двойной системе Кристенсона-Леви вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{D}_{k,s}\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y), \qquad \text{с} \quad \sum_{k,s=0}^{\infty} |\mathcal{D}_{k,s}|^{2+\delta} < \infty, \quad \forall\, \delta > 0$$

со свойством:

1) все ненулевые члены в последовательности $\{|\mathcal{D}_{k,s}|\}$ *расположены в убывающем порядке по всем направлениям,*

2) для любого $\varepsilon > 0$ *и для каждой функции* $f \in L^0(0,1)^2$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\,\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ *такую, что ее ряд Фурье по двойной системе Кристенсона-Леви как по сферам, так и по прямоугольникам сходится к ней равномерно на* $(0,1)^2$ *и* $c_{k,s}(\tilde{f}) = \mathcal{D}_{k,s}$, $\forall\,(k,s) \in spec(\tilde{f})$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Walsh J. L. , *A closed set of normal orthogonal functions*, Amer. J. Math. 1923. v.45. p. 5–24.

[2] Paley, R. E. A. C., A *Remarkable Series of Orthogonal Functions. I, II* , Proc. Lond. Math. Soc. 1932. v. 34. p. 241–279.

[3] Chrestenson H.E., *A class of generalized Walsh functions*, Pacific J. Math., 1955,

v. 45, p. 17-31.

[4] Levy P., *Sur une generalisation des fonctions orthogonales de Rademacher*, Comment. math. helv., 1944, v. 16, p. 146-152.

[5] Fine J., *The generalized Walsh functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 1950, v.69, p. 66-77.

[6] Watari C., *On generalized Walsh-Fourier series*, Proc. Japan Acad., 1957, v. 33, p. 435-438.

[7] Виленкин Н. Я., *Об одном классе полных ортонормальных систем* , Изв. АН СССР. Сер. матем., 1947, т. 11, вып. 4, стр. 363–400.

[8] Young W., *Mean convergence of generalized Walsh - Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc., 1976, v. 218, p. 311-320.

[9] Yano S., *On Walsh Fourier series*, Toshoku Math. Jour., 1951, v. 3, p. 223-242.

[10] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А., *Ряды и преобразования Уолша, теория и применения*, Москва , 1987.

[11] Бари Н.К., *Тригономерические ряды*, Физматгиз, М.,1961.

[12] Ульянов П.Л., *О рядах по системе Хаара с монотонными коэффициентами* , Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, т. 28, вып. 4, стр. 925–950.

[13] Temlyakov V.N., *Greedy approximation*, Cambridge University Press, 2011.

[14] Shneider A.A., *On series with respect to Walsh functions with monotone coefficients*, Известия А.Н. СССР, сер. мат., 1948, т. 12, стр. 179-192.

[15] Rubenstein A.I., *The A - integral and series in the Walsh system*, Успехи мат. наук, 1963, т.18, стр. 191-197.

[16] Balashov L.A., *On series with respect to a Walsh system with monotone coefficients*, Сибирский мат. журнал, 1970, т.12, стр. 25-39.

[17] Olevskii A.M., *Order growth of the Lebesque functions of bounded orthonormal systems*, Докл. А.Н. СССР, 1967, т. 176, стр. 1247-1250.

[18] Müller J., *Continuous functions with universally divergent Fourier series on small subsets of the circle*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2010, v. 348, p.1155-1158.

[19] Episkoposian S.A., Müller J., *Universality properties of Walsh-Fourier series*, Monatshefte fur Mathematik, Springer, (2014) 175, p. 511–518.

[20] Епископосян С.А., Мюллер Ю. , *О поточечной универсальности частичных*

сумм рядов Фурье по обобщенной системе Уолша, Известия вузов., сер. Математика, 2016, №3, с. 1–10.

[21] Bayart F., Grosse-Erdmann K.-G., Nestoridis V. and Papadimitropoulos C., *Abstract theory of universal series and applications*, Proc. London Math. Soc., 2008, v.96, n. 3, p. 417 - 463.

[22] Grosse-Erdmann K.G., Manguillot A.P., *Linear Chaos*, Springer, 2011.

[23] Меньшов Д.Е., *Sur l'unicieté du développment trigonometrique*, C.R. de l'Acad. des Sci. a Paris, v.163, p. 433- 436, (1916).

[24] Талалян А.А., *О сходимости ортогональных рядов*, ДАН Арм. ССР, 1956, т. 110, стр. 510-516.

[25] Кашин Б.С. , *Об одной полной ортонормированной системе*, Мат. Сборник, 1976, т. 99, стр. 356-365.

[26] Шнейдер А.А. , *О единственности разложений по системе функций Уолша* , Матем. сб., 1949, т. 24, стр. 279-300.

[27] Геворкян Г. Г., Теоремы единственности для рядов по системе Франклина, *Мат. заметки*, 2015, т. 98, н. 5, стр. 786–789.

[28] Episkoposian S.A., *On the existence of universal series by trigonometric system*, Journal of Functional Analysis, 2006, v. 230, p. 169 – 189.

[29]Episkoposian S.A., *On uniqness of series with generalized Walsh system*, Mathematica Montisnigri, 2015, v. XXXII, p. 8-54.

[30]Епископосян С.А., *О равномерной сходимости жадного алгоритма по обобщенной системе Уолша*, Сиб. матем. журн., 2013, v.54, n.5, стр. 1015-1022.

[31]Grigorian M.G., Minasyan A., *Representation of Functions in weighted spaces by series with monotone coefficients in the Walsh genrealized system*, Applied Mathematics, 2013, v.11, n.11, p. 6-12.

[32] Fekete M., *Untersuchungen über absolut Reihen, mit Anwendung auf dirichletsche und Fouriersche Reihen*, Math. És. Termész. Ért., 1914, v.32 , p. 389 - 425.

[33] Pal J., *Zwei kleine Bemerkungen*, Tôhoku Math. J., 1914, v. , p. 42 - 43.

[34] Birkhoff G. D., *Démonstration d'un théoréme élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1929, v.189, p. 473 - 475.

[35] Marcinkiewicz J.,*Sur les nombres derives*, Fund. Math., 1935, v. 24, p. 305 - 308.

[36] MacLane G. R., *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math., 1952, v.2, p. 2 - 87.

[37] Grosse-Erdmann K.-G., *Holomorphe Monster und universelle Funktionen*, Mitt. Math. Sem. Giessen ,1987, v.176, p. 1 - 81 .

[38] Меньшов Д.Е. , *Об универсальных тригонометрических рядах*, Доклады АН СССР, 1945, т.49, стр. 79 - 82.

[39] Козлов В.Я., *О полных системах ортогональных функций* , Мат. Сборник, 1950, т.26, н.3, стр. 351- 364.

[40] Талалян А.А., *О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов*, Известия Акад. наук Арм. ССР, сер. Математика, 1957, т. 10, н. 3, стр. 17- 34.

[41] Талалян А.А., *О рядах универсальных относительно перестановок*, Известия Акад. наук Арм. ССР, сер. Математика, 1960, т. 24, стр. 567- 604.

[42] Orlicz W., *Über die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Reihen*, Bull de l' Academie Polonaise des Sciences, 1927, v.81, p. 117 - 125.

[43] Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, 1996, М., Наука, т. II.

[44] Grigorian M. G., Episkoposian S. A.,*On universal trigonometric series in weighted spaces* $L^1_\mu[0,2\pi]$, East J. Approx., 1999, v.5 , n.4, 483-492.

[45] Григорян М.Г., *О системах универсальности в* L^p *,* $1 \le p < 2$, Изв. вузов., Матем., 2000, н. 5, стр. 19 - 22.

[46] Геворкян Г. Г. , Навасардян К. А. , *О рядах Уолша с монотонными коэффициентами, Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, т. 63, т.1, стр. 41–60.

[47] Григорян М. Г. , Навасардян К. А. , *Универсальные функции в задачах "исправления", обеспечивающего сходимость рядов Фурье–Уолша ,* Изв. РАН. Сер. матем., 2016, т. 80, н.6, стр. 65–91.

[48] Episkoposian S.A., *On the existence of universal series by trigonometric system*, Journal of Functional Analysis, 2006, v. 230, p. 169 - 189.

[49] Episkoposian S.A., *On the existence of universal series by the generalized Walsh system*, Banach J. Math. Anal., 2016, v. 10, n. 2 , p. 415-429.

[50] Grigorian M.G., Davtyan Z., *Universal Walsh series with monotone coefficients in*

weighted L^p spaces, British Journal of Mathematics & Computer Science, 2013, v.7, n. 2, p. 99-108.

[51] Епископосян С.А., *О расходимости алгоритма « Greedy » относительно обобшенной системы Уолша по норме L^1*, Известия НА РА, 2006, т.41, н.2, стр. 14 - 24. 12.

[52] Лузин Н.Н., *К основной теореме интегрального исчисления* , Матем. сб., 1912, т. 28, н.2, стр. 266 - 294.

[53] Menchoff D.E., *Sur la convergence uniforme des series de Fourier*, Матем. сб., 1942, т.11, н.1 - 2, стр.67 - 96.

[54] Талалян А.А., *О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции*, Мат. Заметки, 1983, т.33, n. 5, p. 715 - 722.

[55] Price J.J., *Walsh series and adjustment of functions on small sets*, Illinois J. Math., 1969, v. 13, p. 131 -136.

[56] Арутюнян Ф.Г., *О рядах по системе Хаара*, Доклады АН Арм. ССР, 1966, т. 42, н. 3, стр. 134 -140.

[57] Осипов Р.И., *О сходимости рядов по системе Уолша*, Изв. АН Арм. ССР (сер. мат.), 1966, т.1, N 4, стр. 270 - 283.

[58] Церетели О.Д., *О сходимости почти всюду рядов Фурье*, Сообщ. АН Груз. ССР, 1970, т. 57, н.1, стр. 21 - 24.

[59] Гоголадзе Л. Д. , Зерекидзе Т. Ш., *Об интегрируемости сопряженных функций многих переменных и суммировании кратных рядов Фурье*, Сообщ. АН Груз. ССР, 1982. т. 69. стр. 10-23.

[60] Олевский А.М., *Модификация функций и ряды Фурье*, Успехи мат. наук, 1985, v. 40, n. 5, стр.157 - 193 .

[61] Grigorian M.G., *On the convergence of Fourier series in the metric of L^1*, Analysis Math., 1991, v.17, n. 3, p. 211 - 237.

[62] Carleson L., *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. 1966, v. 116, p. 135 - 157.

[63] Riesz M., *Sur les fonctions conjugees*, Math. Zeit., 1928, v.. 27., p. 218 - 244.

[64] Kolmogorof A.N., *Sur les fonctions harmoniques conjugees et les de Fourier*, Fund. Math., 1925, v. 7, p. 23 - 28.

[65] Жижиашвили Л.В., *О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов*, УМН, 1973, Т.28, вып. 2, стр. 65 - 119.

[66] Дьяченко М.И., *Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов*, УМН, 1992, Т.47, вып. 5(287), стр. 97 - 162.

[67] Fefferman C., *On the divergence of multiple Fourier series*, Bulletin of the American Math. Soc., 1971, v.94, n 2, p.191 -196.

[68] Fefferman C., *The multiply problem for the ball*, Anal. of Math. , 1971, v. 94, n 2, p. 330 - 336.

[69] Harris D.C., Almost everywhere divergence of multiple Walsh - Fourier series, Procedings of the American Mathematical Society, 1987, v. 101, n. 4, p. 637 - 643.

[70] Конягин С.В., О подпоследовательности частных сумм Фурье–Уолша, Матем. Заметки, 1993, т. 54, н. 4, стр. 69 - 75.

[71] Лукомский С.Ф., Критерий сходимости почти всюду квадратных частичных сумм Фурье - Уолша интегрируемых функций, Матем. сборник, 1995, т.186, н. 7, стр.133 - 146.

[72] Гецадзе Р.Д., *О расходимости по мере общих кратных ортогональных рядов Фурье*, Тр. МИАН СССР, 1989, т.190, стр.75 - 87.

[73] Григорян М.Г., *О сходимости в метрике* L_p, $0 < p < 1$*, двойных рядов Фурье суммируемых функций* Изв. АН АрмССР. Матем., 1980, т. 15, н. 1, с. 15-29.

[74] Episkoposian S.A., Existence of double Walsh series universal in weighted $L^1_\mu[0,1]^2$ spaces, International Journal of Modern Mathematics, 2007, v.2, n. 2, p. 231 – 247.

---

[75] **Епископосян С.А. , Сагателян Т.М.** , *Ряды по обобщенной системе Уолша с монотонными коэффициентами в* $L^p(0,1)$, $p \in (0,1)$, Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում, 2014, հատ. 10, թիվ 2., էջ. 21 - 25.

[76] **Епископосян С.А., Сагателян Т.М.,** *О существовании универсальных рядов по системе Кристенсона-Леви в весовых пространствах* $L^p[0,1)$, $p \geq 1$, ՀԱՊՀ, Լրաբեր, 2017թ., մաս 1, էջ 23-27

[77] **Episkoposian S.A., Saghatelyan T. M.,** *Convergence and integrability of series with monotone decreasing coefficients by Chrestenson - Levy systems*, Journal of the Indian Math. Soc. , 2017, vol. 84, n. 3-4, p. 182 - 190.

[78] **Saghatelyan T.M.**, *On the pointwise universality of the partial sums of Fourier series of* $L^p[0,1)$, $p \geq 1$ *class by Chrestenson - Levy system*, Mathematica Montisigri, mathematics, 2017, Vol. XL , p. 24 - 35.

[79] **Сагателян Т.М. ,** *О равномерной сходимости двойных рядов по системе Кристенсона - Леви*, Материалы III Международной научно-практической конференции « Современные проблемы физико-математических наук » , 2017, стр. 86 - 89 г. Орел, Россия.

[80] **Епископосян С.А., Сагателян Т.М.**, *О сходимости двойных рядов Кристенсона-Леви по норме* $L^\infty[0,1)^2$, ՀԱՊՀ, Լրաբեր, 2018թ., ընդ. տպագրության

[81] **Сагателян Т.М.**, *О топологической транзитивности частичных сумм рядов Кристенсона-Леви* , ՀԱՊՀ, Լրաբեր, 2018թ., ընդ. տպագրության

Ամփոփում

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

1. Ուսումնասիրվել են *Կրիսփենսոն - Լևիի համակարգով* մոնոտոն գործակիցներով շարքերի ինտեգրելիության և զուգամիտության հարցերը: Մասնավորապես ստացվել են հետևյան հիմնական արդյունքները՝

- Դիցուք $\mathcal{B}_n$ հաջորդականությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին

$$\mathcal{B}_n \downarrow 0\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} < \infty$$

Այդ դեպքում

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

շարքը զուգամիտում է ինտեգրելի ֆունկցիայի և հանդիսանում է նրա Ֆուրիեի շարքը Կրիստենսոն - Լևիի համակարգով:

- Գոյություն ունի մոնոտոն նվազող և զրոյին ձգտող այնպիսի հաջորդականություն՝ $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} = \infty$$

իսկ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

շարքի գումարը չի պատկանում $L^1(0,1)$ դասին, այսինքն չի հանդիսանում $L^1(0,1)$ դասից ինչ որ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը ըստ Կրիստենսոն-Լևիի համակարգի, չնայած, որ տրված շարքը զուգամիտում է ամենուրեք $(0,1)$ ինտերվալում, իսկ 0-ից կտրված ցանկացած $(\delta, 1)$, $0 < \delta < 1$ ինտերվալում զուգամիտում է հավասարաչափ:

- Եթե $\mathcal{C}_n \downarrow 0$, ապա

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

ֆունկցիան պատկանում է $L^p(0,1)$, $\forall\, p \in (0,1)$ տարածությանը, ընդ որում տեղի ունի հետևյալ հավասարումը՝

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |\, S_n(x) - f(x)|^p\, dx = 0,$$

որտեղ $S_n(x)$ *-ը շարքի n-րդ մասնակի գումարն է:*

2. Յանկացած հաշվելի $E \subset (0,1)$ բազմության համար ուսումնասիրվել է $L^p(0,1)$ դասի ֆունկցիաների Կրիստեննոն - Լևիի համակարգով ֆուրիեի շարքերի կետային և L^p- ունիվերսալության , ինչպես նաև Կրիստեննոն - Լևիի համակարգի տոպոլոգիապես տրանզիտիվության հարցերը: Մասնավորապես ստացվել են հետևյալ արդյունքները՝

- *գոյություն ունի խիտ* G_δ *բազմություն* $M \subset L^p(0,1)$, *որը օժտված է հետևյալ հատկությամբ՝* M *բազմության յուրաքանչյուր ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարը, ըստ Կրիստենսոն - Լևիի համակարգի, հանդիսանում է կետային ունիվերսալ* $\mathbb{C}^E$ *դասի համար, որտեղ* $\mathbb{C}^E$ *-ն բոլոր այն* $h(x)$ *ֆունկցիաների բազմությունն է, որոնք որոշված են* E*-ի վրա և ընդունում են կոմպլեքս արժեքներ՝* $h(x_k) = y_k \in \mathbb{C}\, , k = 1,2, \ldots.$
- *Յանկացած հաշվելի* $E \subset (0,1)$ *բազմության համար Կրիստենսոն - Լևիի համակարգը տոպոլոգիապես տրանզիտիվ է* $\{L^p(0,1)\,;\mathbb{C}^E\}$ *զույգի համար:*

3. Ուսումնասիրվել է Կրիստեննոն - Լևիի համակարգով $L^p_\mu(0,1)$, $1 \le p < \infty$ կշռային տարածություններում նշանների, տեղափոխությունների և ենթաշարքերի նկատմամբ ունիվերսալության հարցերը:
Մասնավորապես ստացվել են հետևյալ արդյունքները՝

- *Գոյություն ունի Կրիստենսոն - Լևիի համակարգով շարք՝*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x), |c_k| \searrow 0 \ , \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^r < \infty, \forall \ r > 2 \ ,$$

օժտված հետևյալ հատկությամբ՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի չափելի ֆուկցիա

$\mu(x)$ *,* $0 < \mu(x) \leq 1$ *,* $mes\{x \in (0,1): \mu(x) \neq 1\} < \varepsilon$ *այնպես, որ շարքը ունիվերսալ է միաժամանակ նշանների, տեղափոխությունների և ենթաշարքերի նկատմամբ, բոլոր* $L_\mu^p(0,1)$ *,* $1 \leq p < \infty$ *կշռային տարածություններում:*

- *Ցանկացած* $\varepsilon > 0$ *թվի համար կարելի է կառուցել այնպիսի չափելի ֆունկցիա՝*

  $\mu(x)$ *,* $0 < \mu(x) \leq 1$ *,* $\quad mes\{x \in (0,1): \mu(x) \neq 1\} < \varepsilon$

որ $L_\mu^p(0,1)$ *կշռային տարածությունում գոյություն ունի Կրիստենսոն - Լևիի համակարգով զրո շարք: Այսինքն, գոյություն ունի*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x) \ , \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 > 0 \ ,$$

շարք, որը զուգամիտում է զրոյի $L_\mu^p(0,1)$ *մետրիկայով:*

4. Ուսումնասիրվել է $L^0(0,1)^2$ դասի ֆունկցիաների արժեքները փոքր չափի բազմության վրա փոխելով, նոր ստացված ֆունկցիայի Կրիստենսոն - Լևիի կրկնակի համակարգով ֆուրիեյի շարքի սֆերիկ և ուղղանկյուն մասնակի գումարներով հավասարաչափ զուգամիտության, ինչպես նաև ստացված ֆունկցիայի ֆուրիեի գործակիցների մոնոտոնության հարցերը:

Մասնավորապես ստացվել են հետևալ արդյունքները՝

- *Ցանկացած* $\varepsilon > 0$ *թվի և յուրաքանչյուր* $f \in L^0(0,1)^2$ *ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել ֆունկցիա՝* $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$ *,* $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ *այնպես, որ նրա Ֆուրիեի շարքը Կրիստենսոն - Լևիի կրկնակի համակարգով զուգամիտում է հավասարաչափ* $(0,1)^2$*-ում սֆերիկ մասնակի գումարներով, իսկ ֆուրիեյի ոչ զրոյական գործակիցները, բացարձակ արժեքներով, դասավորված են բոլոր ուղղություններով նվազման կարգով:*

- *Ցանկացած* $\varepsilon > 0$ *թվի և յուրաքանչյուր* $f \in L^0(0,1)^2$ *ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել ֆունկցիա՝* $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ *այնպես, որ նրա Ֆուրիեի շարքը Կրիստենսոն - Լևիի կրկնակի համակարգով զուգամիտում է հավասարաչափ* $(0,1)^2$*-ում ուղղանկյուն մասնակի գումարներով, իսկ ֆուրիեյի ոչ զրոյական գործակիցները, բացարձակ արժեքներով, դասավորված են բոլոր ուղղություններով նվազման կարգով:*

- *Գոյություն ունի Կրիստենսոն-Լևիի կրկնակի համակարգով շարք՝*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{D}_{k,s}\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y), \quad \sum_{k,s=0}^{\infty} |\mathcal{D}_{k,s}|^{2+\delta} < \infty, \quad \forall\, \delta > 0\,,$$

օժտված հետևյալ հատկությամբ՝

1) $\{|\mathcal{D}_{k,s}|\}$ *հաջորդականության բոլոր ոչ զրոյական անդամները դասավորված են բոլոր ուղղություններով նվազման կարգով,*

2) ցանկացած $\varepsilon > 0$ *թվի և յուրաքանչյուր* $f \in L^0(0,1)^2$ *ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել ֆունկցիա՝* $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ *այնպես, որ նրա Ֆուրիեի շարքը Կրիստենսոն - Լևիի կրկնակի համակարգով զուգամիտում է հավասարաչափ* $(0,1)^2$*-ում ինչպես սֆերիկ, այնպես էլ ուղղանկյուն մասնակի գումարներով և* $c_{k,s}(\tilde{f}) = \mathcal{D}_{k,s}$, $\forall (k,s) \in spec(\tilde{f})$.

SUMMARY

1. There were studied and researched the questions of integration and convergence of series with monotonic coefficients by the Chrestenson-Levy systems. In particular, the following results were obtained:

- Let

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} < \infty, \qquad \mathcal{B}_n \downarrow 0,$$

then the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

converges on interval (0,1) to an integrable function and is its Fourier series by Chrestenson -Levy systems.

- There exists monotone decreasing, tending to zero sequence $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} = \infty$$

and the sum of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

doesn't belong to $L^1(0,1)$.

- If $\mathcal{C}_n \downarrow 0$, then the function

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

belongs to $L^p(0,1)$, $\forall\, p \in (0,1)$, and satisfy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\, \mathcal{S}_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0$$

inequality, where $\mathcal{S}_n(x)$ is the partial sums of the series.

3. For every countable set $E \subset (0,1)$ pointwise and L^p universality of Fourier series by the Chrestenson-Levy system of class $L^p(0,1)$ and the topological transitivity of the Chrestenson-Levy system for the pair $\{L^p(0,1)\,;\, \mathbb{C}^E\}$, where $\mathbb{C}^E$ is the set of all functions $h(x)$ defined on E and taking complex values, i.e. $h(x_k) = y_k \in \mathbb{C}\,, k = 1,2, \ldots$. are established. The following statements are proved:

- there exists a dense G_δ set $M \subset L^p(0,1)$ possessing the following property: the sequence of partial sums of the Fourier series with respect to the system Ψ_a of any function from M is pointwise universal in $\mathbb{C}^E$.

- the Chrestenson-Levy system is topological transitive for the pair $\{L^p(0,1)\,;\,\mathbb{C}^E\}$.

2. The question of the existence of universal (with respect to signs, permutations and contracts) series in the Christenson-Levy system in weighted spaces in $L^p_\mu\,(0,1)$,

$1 \le p < \infty$.

The following assertion is proved:

- *There exists a series by Chrestenson-Levy system of the form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x),\ |c_k| \searrow 0\ \ c\ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^r < \infty, \forall\ r > 2,$$

with the property: for any $\varepsilon > 0$ *there exists a measurable function*

$\mu(x), 0 < \mu(x) \le 1, \quad mes\{x \in (0,1): \mu(x) \ne 1\} < \varepsilon$

so that the series is universal with respect to signs, permutations, and contracts, in all weighted spaces $L^p_\mu\,(0,1)$, $1 \le p < \infty$.

- *For any* $\varepsilon > 0$ 0 *there exists a measurable function*

$\mu(x), 0 < \mu(x) \le 1, mes\{x \in (0,1): \mu(x) \ne 1\} < \varepsilon$

so that , in all weighted spaces $L^p_\mu\,(0,1)$ *there exists null series by Chrestenson-Levy system, i.e. there exists a series*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x)\ \ c\ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 > 0,$$

which convergence to zero by $L^p_\mu\,(0,1)$ *metric .*

4. The question of the uniform convergence of double Fourier series by the Chrestenson-Levy system (with respect to spherical and rectangular partial sums) was studied after correcting the values of the function on a set of small measure, and also the monotonicity of the Fourier coefficients of the newly obtained function.

The following assertion is proved:

There exists a series by the double Chrestenson-Levy system of the form

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{D}_{k,s} \psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y), \qquad \sum_{k,s=0}^{\infty} |\mathcal{D}_{k,s}|^{2+\delta} < \infty, \qquad \forall\ \delta > 0$$

with the property:

1) all nonzero terms in the sequence $\{|\mathcal{D}_{k,s}|\}$ are arranged in descending order in all directions,

2) for any $\varepsilon > 0$ and for each function $f \in L^0(0,1)^2$ we can find a function $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\,\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ such that its Fourier series by the dual Chrestenson-Levy system, both in spheres and in rectangles, converges to it uniformly on $(0,1)^2$

$\mathcal{C}_{k,s}\,(\tilde{f}) = \mathcal{D}_{k,s}, \quad \forall (k,s) \in spec(\tilde{f})$.