ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ ՀԱՄԼԵՏ ԿԱՐԵՆԻ

ՓՈՔՐ ԱՄՊԼԻՏՈՒԴԱՅՈՎ ՍԽԱԼՆԵՐ ՈՒՂՂՈՂ ԿՈԴԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ ԵՎ ԻՐԱԿԱՆԱՑՈՒՄԸ

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ե.13.05 – «Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի համալիրներ» մասնագիտությամբ տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման

Գիտական ղեկավար՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, տ.գ.դ.

Գ.Հ. Խաչատրյան

ԵՐԵՎԱՆ – 2018

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Աշխատանքի արդիականությունը: Սխալներ ուղղող կոդերի տեսությունը ինֆորմատիկայի ճյուղ է, որն առաջացել և բուռն զարգացում է ապրել համեմատաբար ոչ վաղ անցյալում՝ XX-րդ դարի երկրորդ կեսին: Տեսության սկիզբը դրվել է 40-ական թվականների վերջին Գոլեյի [1], Հեմմինգի [2] և Շենոնի [3] աշխատանքներով:

Համակարգում կապուղով հաղորդագրություններ փոխանցելիս տարբեր գործոնների պատճառով սովորաբար տեղի են ունենում որոշակի սխալներ: Դրա համար պահանջվում են այնպիսի կոդեր, որոնք կարողանան ոչ միայն հայտնաբերել այլ նաև ուղղել այդ սխալները:

Սխալներ ուղղող կոդերի տեսության հիմնական խնդիրներից են՝

1. կոդերի հատկությունների ուսումնասիրությունը
2. կոդերի կառուցման մեթոդների ստեղծումը
3. կոդավորման և ապակոդավորման արդյունավետ ալգորիթմների կառուցումը:

Սխալներ ուղղող կոդերի տեսությունը ունի լայն կիրառություն հեռուստատեսության մեջ, ինչպես նաև արբանյակային ալեհավաքներով հաղորդագրություններում սխալներ հայտնաբերելու և ուղղելու նպատակով: Սխալներ ուղղող կոդերը օգտագործվում են նաև հեռախոսային գծերում և բջջային կապերում սխալներ հայտնաբերելու և ուղղելու համար: Չնայած սխալներ ուղղող կոդերի ամենալայն կիրառությունը կապի գծերում է, այնուամենայնիվ այժմ կան նաև կիրառություններ, որոնք այդքան էլ ուղղակի կապ չունեն կապի գծերի հետ: CD և DVD սկավառակներն աշխատում են երկար և անթերի նույնիսկ արտաքին վնասվածքների պարագաներում, որովհետև նրանք օգտագործում են սխալներ ուղղող կոդեր [5]: Սխալներ ուղղող կոդերը օգտագործվում են նաև տվյալների կրիչներում և հիշողության սարքերում (մասնավորապես ֆլեշ հիշողություններում) (Նկար 1):

Քանի որ ֆլեշ հիշողություններում առաջացած սխալները հիմնականում լինում են ասիմետրիկ և փոքր ամպլիտուդայով, անհրաժեշտ է կառուցել հենց այս տիպի սխալներ ուղղող կոդեր: Ֆլեշ հիշողությունների ծավալների մեծացմանը զուգընթաց խնդիր է առաջանում ստեղծել ավելի արագագործ կոդավորման և ապակոդավորման համակարգեր: Այս տիպի կոդերը հիմնականում դիտարկվում են ամբողջ օղակների վրա: Գրականությանը հայտնի են այնպիսի կոդեր, որոնք կարողանում են ուղղել ± 1 մեծությամբ մինչև 2 սխալներ, որոնք սակայն օպտիմալ չեն և ունեն շատ փոքր երկարություններ, ուստի չունեն լայն կիրառություններ:

Սխալներ ուղղող կոդերի խնդիրների վրա դրված 3 հիմնական պահանջներն են՝

1. Կոդերի կառուցումներ, որոնք կկարողանան պատշաճ կերպով ուղղել սխալներ:
2. Կոդավորման մեթոդի պրակտիկ իրականացում:
3. Սխալների հայտնաբերման և ուղղման էֆեկտիվ ալգորիթմի մշակում:

Կառուցված կոդերի համար պետք է մաթեմատիկորեն ցույց տալ, որ նրանք կարող են պատշաճ կերպով ուղղել հաղորդագրության փոխանցման ընթացքում տեղի ունեցած բոլոր սխալները: Այդ կոդերը պետք է ունենան հստակ մաթեմատիկական ստրուկտուրա, որը հետագայում օգտագործվում է կոդավորման և սխալների ուղղման (ապակոդավորման) ալգորիթմների իրականացման ժամանակ:

Նկար 1 Տվյալների կրիչներ

Պրակտիկ տեսանկյունից առավել մեծ հետաքրքրություն են առաջացնում Z_{2m} կամ Z_{2m+1} օղակների վրա դիտարկված կոդերը, քանի որ նրանք ունեն լայն կիրառություն $2^{2m}-QAM$ (Quadrature Amplitude Modulation) մոդուլյացիոն սխեմաներում: Առաջին աշխատությունները, որոնք վերաբերվում են այս տեսակ կոդերին կատարվել են I.Blake – ի կողմից [4,5]: Կան նաև այլ գործեր որոնք վերաբերվում են Z_A օղակներում կառուցված տարբեր տիպի կոդերին [6-9]:

Ատենախոսության նպատակն է կառուցել ինչպես ± 1 այնպես էլ ± 2 մեծությամբ ասիմետրիկ սխալներ ուղղող նոր օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդեր, որոնք կունենան ավելի մեծ հաղորդման արագություն, կկարողանան ուղղել ոչ միայն եզակի այլ նաև կրկնակի սխալներ, նաև այդ կոդերով կոդավորման և ապակոդավորման պրոցեսների տեխնիկական իրականացումը:

Աշխատանքի գիտական նորույթը

- Ներկայացված են փոքր ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդերի կառուցումներ տարբեր մեծության օղակների վրա, որոնք կարողանում են ուղղել ինչպես ± 1 այնպես էլ ± 2 մեծությամբ սխալներ:
- Ապացուցվել է թեորեմ կոդի երկարության կրկնապատկման մասին, որի հիման վրա մշակվել է ալգորիթմ, որի միջոցով արդեն իսկ հայտնի կրկնակի ±1 սխալ ուղղող գծային օպտիմալ $C(N,N-4)$ կոդերին ավելացնելով երկու ստուգող սիմվոլներ, կարող ենք ստանալ նոր $C\ (2N,2N-6)$ կոդեր, որոնք կունենան երկու անգամ ավելի մեծ երկարություն, և հետևաբար ավելի մեծ հաղորդման արագություն:
- Մշակվել և իրականցվել են այդ տեսակ կոդերի համար կոդավորման և ապակոդավորման (սխալների ուղղման) ալգորիթմներ $C++$ ծրագրավորման լեզվի միջոցով:

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները հրապարակված են [10–15] աշխատանքերում:

Աշխատանքի արդյունքների հավաստիությունը հիմնավորվում է մշակված ծրագրային համակարգի կիրառմամբ ստացված փորձնական արդյունքներով:

Ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ ֆլեշ մեխանիզմներում տեղի ունեցող սխալները հիմնականում լինում են ասիմետրիկ և ունենում են փոքր ամպլիտուդա, նաև նրանք անկախ են այբուբենի մեծությունից, որոնք կարող են լինել զգալիորեն ավելի մեծ քան սխալի մեծությունը: Դրա համար անհրաժեշտ է կառուցել հենց այդ տիպի սխալները գտնող և ուղղող կոդեր: Փոքր ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդերի կառուցումները և իրագործումը ֆլեշ հիշողություններում և մոդուլյացիոն սխեմաներում զգալիորեն կարող են ավելացնել նրանց աշխատանքի կայունությունը և արագությունը:

Ձևակերպենք պաշտպանությանը ներկայացվող հիմնական դրույթները.

1. Փոքր ամպլիտուդաներով կրկնակի սխալներ ուղղող օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդերի կառուցումներ տարբեր մեծությամբ օղակներում:
2. Ապացուցվել է թեորեմ կոդի երկարության կրկնապատկման մասին, ըստ որի մշակվել է ալգորիթմ, որի հիման վրա արդեն իսկ հայտնի կրկնակի սխալներ ուղղող օպտիմալ $C(N, N-4)$ կոդերին ավելացնելով երկու ստուգող սիմվոլ, կարող ենք ստանալ $C\ (2N, 2N-6)$ կոդեր, որոնք կունենան երկու անգամ ավելի մեծ երկարություն, և հետևաբար ավելի մեծ հաղորդման արագություն:
3. Փոքր ամպլիտուդաներով կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերով կոդավորման և ապակոդավորման(սխալների ուղղման) ալգորիթմների մշակումը և նրանց ծրագրային իրականացումը $C++$ լեզվի միջոցով:

Աշխատանքի արդյունքները զեկուցվել են ՀՀ ԳԱԱ ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտի ընդհանուր սեմինարում, ինչպես նաև ինստիտուտի Կոդավորման և ազդանշանների մշակման բաժնի մասնագիտական սեմինարներում:

ԳԼՈՒԽ 1

ԳԾԱՅԻՆ ՍԽԱԼՆԵՐ ՈՒՂՂՈՂ ԿՈԴԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ

Աշխատանքի առաջին գլխում նկարագրված են կոդավորման տեսության հիմնական խնդիրները, բերված են գծային հանրահաշվի որոշ տերմինների սահմանումներ, որոնց հետ գործ ենք ունենում հետագա աշխատանքի ընթացքում: Այս գլխում առավել մանրամասն դիտարկվել են սխալներ ուղղող գծային կոդերը և նրանց ներկայացումները մատրիցների միջոցով: Սույն գլխի վերջին երկու պարագրաֆում արդեն ներկայացվում են փոքր ամպլիտուդայով կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերը, նրանց կիրառական նշանակությունը և դերը գիտության մեջ: Բացի այդ գլխի վերջում կատարվում է համեմատություն ասիմետրիկ կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերի և հնուց մեզ արդեն հայտնի Հեմմինգի ու ԲՉՀ (Bose–Chaudhuri–Hocquenghem) կոդերի միջև:

1.1 Ներածություն

Համակարգերում կապուղով հաղորդագրություններ փոխանցելիս տարբեր գործոնների պատճառով հիմնականում տեղի են ունենում որոշակի սխալներ: Դրա համար պահանջվում են այնպիսի կոդեր, որոնք կարողանան ոչ միայն հայտնաբերել այլ նաև ուղղել տարբեր տիպի և մեծության սխալներ: Այս կոդերը չեն կարող ուղղել բոլոր տիպի սխալները, հիմնականում նրանք կառուցվում են այնպես, որպեսզի կարողանան հայտնաբերել և ուղղել առավել հաճախ հանդիպող մի որոշակի տիպի սխալներ: Հիմնականում համակարգերում օգտագործվում են երկկողմանի կապուղիներ: Այս փաստը անպայման պետք է հաշվի առնել այս տեսակ կոդեր կառուցելուց: Օրինակ երկկողմանի կապուղու դեպքում կարելի է օգտագործել միայն սխալ հայտնաբերող կոդեր, քանզի եթե մի կողմում սխալ է հայտնաբերվում կարելի է հարցում անել, որպեսզի հաղորդագրությունը ևս մեկ անգամ փոխանցեն: Այս կերպ կարելի է էֆեկտիվ ուղղել առաջացած սխալները:

Նկար 1.1 Հաղորդագրության փոխանցման սխեմա

Կոդերը մուտքում ստանում է սիմվոլների մի որոշ հաջորդականություն, իսկ նրա ելքում առաջանում է մեկ ուրիշ ավելի երկար հաջորդականություն: Դեկոդերը կատարում է հակառակ գործողությունները և ելքում ստանում է ուղարկված հաջորդականությունը: Կանոնակարգը որով պետք է աշխատեն կոդերը և դեկոդերը որոշվում են նախօրոք կախված կոդի տեսակից: Բլոկային կոդի դեպքում կոդերը ստացված հաղորդագրությունը բաժանում են առանձին բլոկների, որոնք պարունակում են k հատ սիմվոլ: Ամեն մի այդպիսի բլոկի համապատասխանության մեջ է դրվում n չափանի մի հավաքածու, որտեղ միշտ $n > k$: Հենց այդ հավաքածուն, որին կանվանենք **կոդային բառ** փոխանցվում է կապուղով (Նկար 1.1): n – ով կնշանակենք կոդի երկարությունը, իսկ k-ն կլինի կոդային բառի ինֆորմացիոն սիմվոլների քանակը :

Կոդավորման խնդիրների վրա դրված 3 հիմնական պահանջներն են՝

1. Կոդերի կառուցումներ, որոնք կկարողանան պատշաճ կերպով ուղղել առաջացած սխալները:
2. Կոդավորման մեթոդի պրակտիկ իրականացում:
3. Սխալների հայտնաբերման և ուղղման էֆեկտիվ ալգորիթմի մշակում:

Սովորաբար ավելի էֆեկտիվ են համարվում մեծ երկարություն ունեցող կոդերը: Այդպիսի կոդը կարող է ունենալ 10^{100} հատ կոդային բառ և մի քանի անգամ ավելի շատ ելքում ստանալու հնարավոր բառեր: Իհարկե հնարավոր է կառուցել դեկոդավորման աղյուսակ և այդպես կատարել դեկոդավորումը, սակայն դրա կառուցումը և բոլոր կոդային բառերի թվարկումը կլինեն պրակտիկորեն անհնար:

Դրա համար իմանալով կոդի մաթեմատիկական ստրուկտուրան կարող ենք զգալիորեն թեթևացնել նրա հատկությունների ուսումնասիրման պրոցեսը, ինչը կարող է տալ մեծ հնարավորություններ ստեղծելու ծրագրեր (հետագայում նաև սարքեր), որոնք կարող են իրականացնել տվյալ կոդով կոդավորման և դեկոդավորման ալգորիթմները: Կառուցված կոդերի համար պետք է մաթեմատիկորեն ցույց տալ, որ նրանք կարող են պատշաճ կերպով ուղղել հաղորդագրության փոխանցման ընթացքում տեղի ունեցած բոլոր սխալները: Այդ կոդերը պետք է ունենան հստակ մաթեմատիկական ստրուկտուրա, որը օգտագործվում է հետագայում կոդավորման և սխալների ուղղման (դեկոդավորման) ալգորիթմների իրականացման ժամանակ: Այդ ալգորիթմների իրականացումը մեծ երկարությամբ կոդերի համար շատ ավելի բարդ է քան փոքր երկարությամբ կոդերի դեպքում: Նմանատիպ ալգորիթմ ներկայացված է [16] – ում օպտիմալ $(4,2)$ ± 1 մեծությամբ կրկնակի սխալ ուղղող կոդի համար:

1.2 Խմբեր, օղակներ, դաշտեր

Աշխատանքի այս հատվածում մենք կներկայացնենք որոշ մաթեմատիկական տերմինների սահմանումներ, որոնց հետ գործ ենք ունենալու աշխատանքի հաջորդ գլուխներում: Դիցուք տրված է որևէ $\boldsymbol{G}$ բազմություն: Ընդունված է ասել, որ այդ բազմության վրա սահմանված է գործողություն, եթե տրված է արտապատկերում $\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{G}$ դեկարտյան արտադրյալից $\boldsymbol{G}$ բազմություն: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$- ին համապատասխանող տարրը սովորաբար նշանակում են $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ – ով և ասում են, որ $\boldsymbol{G}$ բազմության վրա սահմանված է բազմապատկման գործողություն:

Սահմանում 1.2.1 $\boldsymbol{G}$ բազմությունը կոչվում է **խումբ** բազմապատկման գործողության նկատմամբ, եթե տեղի ունեն հետևյալ 3 պայմանները [17].

1. Ասոցիատիվության պայման. $(a * b)\ c = a(b * c)$
2. Միավոր տարրի գոյության պայման. գոյություն ունի e G–ից , որ կամայական a – ի համար G – ից $a * e = e * a = a$
3. Հակադարձ տարրի գոյության պայման. $a * b = b * a = e$

Եթե բացի 1-3 պայմաններից տեղի է ունենում նաև $a * b = b * a$ պայմանը, ապա G խումբը կոչվում է տեղափոխելի կամ աբելյան:

Օրինակ. Նշանակենք Z – ով ամբողջ թվերի բազմությունը և որպես խմբի բազմապատկման գործողություն դիտարկենք ամբողջ թվերի գումարումը: Նշանակենք ստացված համակարգը $(\mathbf{Z},+)$ – ով: Հեշտությամբ ստուգվում է որ $(\mathbf{Z},+)$ - ն աբելյան խումբ է, որտեղ որպես միավոր տարր հանդես է գալիս 0 թիվը:

Շատ դեպքերում մեզ անհրաժեշտ է լինում գործ ունենալ խմբի ենթաբազմության հետ, որը նույնպես հանդիսանում է խումբ սահմանված գործողության նկատմամբ:

Սահմանում 1.2.2 G խմբի H ենթաբազմությունը կոչվում է ենթախումբ, եթե

1. H ենթաբազմությունը փակ է G-ի բազմապատկման գործողության նկատմամբ ՝ $a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$:
2. H ենթաբազմությունը փակ է հակադարձին անցնելու գործողության նկատմամբ՝ $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$:

Ենթախմբի սահմանման երկու պայմանները կարելի է փոխարինել մեկ համարժեքով.

$$a, b \in H \Rightarrow a^{-1} * b \in H$$

Դիցուք A բազմության վրա տրված է 2 գործողություն, որոնցից առաջինը կանվանենք գումարում +, իսկ երկրորդը՝ բազմապատկում *:

Սահմանում 1.2.3 $(A,+,*)$ համակարգը կոչվում է օղակ, եթե

1. $(\boldsymbol{A},+)$ համակարգը տեղափոխելի խումբ է, որի միավոր տարրը հանդիսանում է 0 – ն:
2. $(\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b})\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c})$
3. $\boldsymbol{A}$ – ում գոյություն ունի տարր, որը կնշանակենք 1-ով, այնպիսին, որ $\boldsymbol{a} * \mathbf{1} = \mathbf{1} * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
4. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} * \boldsymbol{c}$

Եթե տեղի ունի նաև $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{a}$ պայմանը $\boldsymbol{A}-$ ի բոլոր տարրերի համար, ապա օղակը կոչվում է տեղափոխելի [17]:

Սահմանում 1.2.4 Տեղափոխելի օղակը կոչվում է դաշտ, եթե յուրաքանչյուր ոչ զրոյական տարր ունի հակադարձ ըստ բազմապատկման, միշտ գոյություն ունի այնպիսի $\boldsymbol{b}$ տարր, որ $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{a} = 1$:

Ամփոփելով վերը նշվածը կարելի է ասել, որ օղակը դա այն հանրահաշվական համակարգն է, որում կարելի է գումարել, հանել և բազմապատկել, իսկ դաշտում նաև բաժանել:

Օրինակ. Դյուրին է ստուգել, որ $(\boldsymbol{A},+,*)$ - ը տեղափոխելի օղակ է, իսկ $(\boldsymbol{Q},+,*)$, $(\boldsymbol{R},+,*)$,$(\boldsymbol{C},+,*)$ - ը դաշտեր են:

Դիտարկենք $(Z_n,+,*)$ օղակը, որտեղ Z_n- ը ըստ $\boldsymbol{mod\,n}$ – ի մնացքների դասերի բազմությունն է: Ակնհայտ է, որ $(Z_n,+,*)$ - ը տեղափոխելի օղակ է: Ինչպես գիտենք Z_n – ում ըստ բազմապատկման հակադարձ ունեն միայն այն ոչ զրոյական տարրերը, որոնք փոխադարձաբար պարզ են մոդուլի հետ: Ուրեմն $(Z_n,+,*)$ - ը դաշտ է միայն, երբ $\boldsymbol{n}$ –ը պարզ թիվ է:

Հետագայում կոդեր կառուցելիս մենք դիտարկելու ենք հենց այս տիպի դաշտերը և օղակները:

1.3 Գծային կոդերի նկարագրումը մատրիցների օգնությամբ

V բազմությունը կանվանենք վեկտորական տարածություն F դաշտի վրա, եթե այդ բազմության համար տեղի ունեն հետևյալ աքսիոմաները [17] ՝

1. V – ն հանդիսանում է աբելյան ադիտիվ խումբ:
2. Կամայական v վեկտորի համար այդ բազմությունից և կամայական c սկալյարի համար դաշտից, cv արտադրյալը ևս պետք է հանդիսանա վեկտոր:
3. Եթե u և v – ն վեկտորներ են V բազմությունից, իսկ c – ն սկալյար F դաշտից, ապա $c(u+v)=cu+cv$:
4. $(c+d)v=cv+dv$, որտեղ c ու d – ն սկալյարներ են F-ից:
5. $(cd)v=c(dv)$ և $1v=v$: Ասոցիատիվություն

Դաշտի n–երկարությամբ հավաքածու կանվանենք այն n էլեմենտանի համակարգված բազմությունը՝ $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, որտեղ ամեն a_i – ն հանդիսանում է F դաշտի էլեմենտ: Դաշտի միավոր էլեմենտ կհամարենք 0 էլեմենտը՝ $0=(0,0,\dots,0)$: Վեկտորական տարածության ենթաբազմությունը կանվանենք վեկտորական ենթատարածություն, եթե այն բավարարում է վեկտորական տարածության աքսիոմաներին: $u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\dots+a_kv_k$ արտադրյալը, որտեղ a_k – ներն հանդիսանում են սկալյարներ F դաշտից, կանվանենք $v_1, v_2, \dots, v_k$ – վեկտորների գծային կոմբինացիա:

Սահմանում 1.3.1 n - երկարությամբ վեկտորների բազմությունը կանվանենք գծային կոդ այն և միայն այն դեպքում, եթե այն հանդիսանում է n-չափանի վեկտորական տարածության ենթատարածություն [17]:

Դիցուք ունենք v վեկտոր: Նրա կշիռն ըստ Հեմմինգի $\omega(v)$-ն կսահմանենք որպես մեր վեկտորի ոչ զրոյական կոմպոնենտների քանակը: Երկու վեկտորների հեռավորությունն ըստ Հեմմինգի հավասար է նրանց այն կոմպոնենտների քանակին որոնցով նրանք տարբերվում են: Սրանից հետևում է, որ երկու v_1 և v_2 վեկորների հեռավորությունը հավասար կլինի $\omega(v_1 - v_2)$: Եթե v_1 և v_2 վեկտորները հանդիսանում են կոդային բառեր, ապա այդ դեպքում նրանց $v_1 - v_2$ տարբերությունը ևս պետք է հանդիսանա կոդային բառ, քանի որ բոլոր կոդային բառերի բազմությունը հանդիսանում է վեկտորական տարածություն: Այստեղից կարող ենք անել հետևություն, որ երկու կոդային վեկտորների հեռավորությունը հավասար է մի ուրիշ կոդային վեկտորի կշռի: Ստացվում է, որ գծային կոդի մինիմալ հեռավորությունը հավասար է նրա ոչ զրոյական վեկտորների մինիմալ կշռին: Այս հատկությունը շատ օգտակար է այն ժամանակ, երբ փորձ է արվում հասկանալ, թե հնարավոր է արդյոք այս կամ այն գծային կոդի միջոցով ուղղել որոշակի սխալներ:

Գծային կոդի բազիսային վեկտորների կամայական բազմություն կարող ենք դիտարկել որպես G մատրիցի տողեր, որը կանվանենք կոդի **ծնող մատրից**: Վեկտորը կլինի կոդային այն և միայն այն ժամանակ, եթե այն հանդիսանում է G մատրիցի տողերի գծային կոմբինացիա: Եթե մեր V վեկտորական տարածության չափողականությունը հավասար է k -ի, ապա G-ի տողերի քանակը ևս պետք է հավասար լինի k –ի:

Եթե ինչ-որ 2 գծային կոմբինացիա լինեին հավասար, ապա կստացվեր գծային կախվածություն G մատրիցի 2 տողերի միջև ինչը հնարավոր չէ: Այդ պատճառով կամայական 2 տարբեր գծային կոմբինացիա տալիս են տարբեր կոդային վեկտորներ, և քանի որ ունենք k գործակիցներ, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է ընդունել q հնարավոր արժեք (եթե մեր կոդը դիտարկում ենք q էլեմենտ ունեցող դաշտում), ապա կստացվի որ V վեկտորական տարածությունը պարունակում է q^k կոդային վեկտորներ: Բացառությամբ այն դեպքերի, երբ q-ն և k-ն բավականաչափ փոքր են, ավելի հարմար է կոդերը ներկայացնել մատրիցների միջոցով :

Օրինակ. $n = 5$ և $q = 2$ դեպքում վեկտորների հետևյալ բազմությունը՝ (0 0 0 0 0), (1 0 0 1 1), (0 1 0 1 0), (1 1 0 0 1), (0 0 1 0 1), (1 0 1 1 0), (0 1 1 1 1), (1 1 1 0 0) կազմում է V_1 վեկտորական տարածություն, հետևաբար նաև հանդիսանում է գծային երկուական կոդ: Նրա մինինալ կշիռը հավասար է 2-ի, որն էլ իր հերթին հավասար է նրա կոդային վեկտորների մինիմալ հեռավորությանը:

Այս կոդի համար ծնող մատրիցներ կլինեն հետևյալ 2 մատրիցաները՝

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} :$$

Գոյություն ունի նաև մեկ այլ մեթոդ մատրիցների օգնությամբ կոդերի ներկայացման համար: Այս աշխատանքում ստացված կոդերը հիմնականում ներկայացվելու են հենց այդ մեթոդով:

Դիցուք ունենք V ենթատարածություն k չափողականությամբ: Նրա զրոյական տարածությունը ևս հանդիսանում է $[n-k]$ – չափանի վեկտորական տարածություն: Այդ տարածությունը կանվանենք V': Կարող ենք կառուցել մի H մատրից, որի ռանգը հավասար կլինի $(n-k)$ և նրա տողերը կհանդիսանան V' տարածության բազիսային վեկտորները: Մեր V ենթատարածությունն իր հերթին կհանդիսանա զրոյական V'-ի համար, հետևաբար v վեկտորը կպատկանի V-ին այն և միայն այն ժամանակ, եթե այն օրթոգոնալ է H մատրիցի կամայական տողին, այսինքն երբ՝

$$vH^T = 0 :$$

Եթե $v = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, իսկ H մատրիցի i-րդ տողում և j-րդ սյունում գտնվող էլեմենտը նշանակենք h_{ij}-ով, ապա կստացվի մատրիցի յուրաքանչյուր տողի համար պետք է տեղի ունենա՝

$$\sum_j a_j h_{ij} = 0 :$$

$vH^T = 0$ հավասարությունը տեղի ունի V ենթատարածության կամայական v վեկտորի համար, այդ թվում նաև G մատրիցի k բազիսային վեկտորների համար:

Այդ k հավասարումները կարող ենք գրել այսպես՝

$$\boldsymbol{G}H^T = 0,$$

որտեղ 0 - ն նշանակում է զրոյական մատրից $k * (n-k)$ չափողականությամբ: Իսկ H մատրիցին կանվանենք կոդի ստուգող մատրից :

Օրինակ, վերևում բերված V_1 վեկտորական տարածության համար նրա զրոյական տարածությունն՝ V_2-ը պարունակում է հետևյալ վեկտորներն՝ $(0\ 0\ 0\ 0\ 0)$, $(1\ 1\ 0\ 1\ 0)$, $(1\ 0\ 1\ 0\ 1)$, $(0\ 1\ 1\ 1\ 1)$: Առաջին 2 ոչ զրոյական վեկտորները գծորեն անկախ են և կազմում են բազիս: H մատրիցը մեր օրինակում կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}:$$

V_1 կոդը իրենից ներկայացնում է այս մատրիցի զրոյական տարածությունը: Նրա կոդային վեկտորներից յուրաքանչյուրը պետք է բավարարի $vH^T = 0$ հավասարումներին:

Օրինակ. $(0\ 1\ 1\ 1\ 1)$ վեկտորին համապատասխանում է հետևյալ հավասարումը՝

$$0a_1 + 1a_2 + 1a_3 + 1a_4 + 1a_5 = 0,$$

որին պետք է բավարարի յուրաքանչյուր $v = (a_1, a_2, \dots, a_5)$ կոդային վեկտոր:

V վեկտորական տարածությունը և նրա V' զրոյական տարածությունը հանդիսանում են n– չափանի վեկտորական տարածության ենթատարածություններ, հետևաբար երկուսն էլ հանդիսանում են գծային կոդեր: Եթե V-ն հանդիսանում է (n, k) կոդ, ապա V'-ն կլինի $(n, n-k)$ կոդ: Նրանց անվանում են նաև երկակի կոդեր [17]: G ծնող մատրիցից կարող ենք ստանալ մեկ այլ G' մատրից կատարելով G մատրիցի սյուների և տողերի հետ էլեմենտար գործողություններ: Ստացված G' մատրիցը պարունակում է k հատ սյուն, որոնցից ամեն մեկն ունի $k-1$ հատ 0-ներ և 1 էլեմենտը: Այս դեպքում նրանք երկուսնել ծնում են միևնույն կոդը: Կատարելով սյուների տեղափոխություն G' մատրիցում կարող ենք խմբավորել այդ k հատ սյուները ձախ կողմում, որոնցից յուրաքանչյուրի առաջին ոչ զրոյական էլեմենտը հավասար է 1-ի: Կստացվի նրան կոմբինատոր-էկվիվալենտ G'' մատրից.

$$G'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & \cdots & p_{1,n-k} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & p_{21} & \cdots & p_{2,n-k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{k1} & \cdots & p_{k,n-k} \end{bmatrix} = [I_K\, P]$$

Ձախ կողմում ունենք $(k \times k)$ չափանի միավոր մատրից: Կասենք, որ այս մատրիցը բերված է աստիճանային տեսքի: Դիցուք ունենք $v = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ կամայական k – չափանի հավաքածու: Դիտարկենք մի u վեկտոր, որը հանդիսանում է G'' մատրիցի տողերի գծային կոմբինացիա, որտեղ որպես i-րդ գործակից հանդես է գալիս a_i էլեմենտը.

$$u = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-k}),$$

որտեղ

$$c_j = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\, p_{ij}\right)$$

Ստացված u վեկտորի առաջին k կոմպոնենտները կարող ենք դիտարկել որպես **ինֆորմացիոն սիմվոլներ**, իսկ հաջորդ $n-k$ կոմպոնենտներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է առաջին k կոմպոնենտների գծային կոմբինացիա: Սրա շնորհիվ կոդավորումը զգալիորեն հեշտանում է: Այս տիպի կոդերը կոչվում են **սիստեմատիկ** կոդեր, որտեղ առաջին k կոմպոնենտներին կանվանենք ինֆորմացիոն սիմվոլներ, իսկ հաջորդ $n-k$ կոմպոնենտներին **ստուգող սիմվոլներ**:

Գոյություն ունի պարզ մեթոդ կոդի ստուգող մատրիցը գտնելու համար, եթե տրված է նրա ծնող մատրիցը [17]:

ԹԵՈՐԵՄ 1.3.1 Եթե V-ն $\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{I_k}|\boldsymbol{P}]$ մատրիցի տողերի տարածությունն է, որտեղ $\boldsymbol{I_k}$ -ն $(k \times k)$ չափանի միավոր մատրից է, իսկ P-ն մատրից $(k \times n-k)$ չափի, ապա V-

ն հանդիսանում է $\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{P}^T | \boldsymbol{I}_{n-k}]$ մատրիցի զրոյական տարածություն, որտեղ $\boldsymbol{I}_{n-k}$ – ն $(n - k \times n - k)$ չափանի միավոր մատրից է:

Ապացույց: Հեշտ է ստուգել, որ $\boldsymbol{GH}^T = 0$, և քանի որ 2 մատրիցների ռանգերն էլ հավասար են n-ի, հետևում է որ $\boldsymbol{G}$-ի տողերի տարածությունը հանդիսանում է զրոյական տարածություն H -ի համար:

Եթե $u = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k,}\ c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-k})$ կոդային վեկտոր է, ապա

$$uH^T = 0 = \left(-\textstyle\sum_i a_i\, p_{i,1} + c_1, \dots, \sum_i a_i\, p_{i,n-k} + c_{n-k}\right)$$

G-ի և H-ի միջև կապն ավելի լավ կտեսնենք, եթե նկատի ունենանք, որ P մատրիցի i–րդ տողի և j-րդ սյան p_{ij} էլեմենտը հանդիսանում է i-րդ ինֆորմացիոն սիմվոլի (a_i) գործակիցը j-րդ (c_j) ստուգող սիմվոլի հետ գումարելիս:

Օրինակ ներկայացնենք նախորդ օրինակում բերված կոդի համար ծնող մատրիցը, որը բերված է աստիճանային տեսքի.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I_3\ P]$$

H մատրիցը հետևաբար կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-P^T\ I_2]$$

Կստացվի, որ $GH^T = HG^T = 0$ և ամեն մի մատրիցի տողերի տարածությունը հանդիսանում է զրոյական տարածություն մյուսի համար: Այս դեպքում ամեն մի $(a_1, a_2, \dots, a_5)$ կոդային վեկտորի առաջին երեք կոմպոնենտները կարող ենք ընտրել կամայական կերպով, իսկ մնացած երկու ստուգող սիմվոլները պետք է բավարարեն հետևյալ հավասարություններին՝

$$a_4 = a_1 + a_2 \qquad \text{և} \qquad a_5 = a_1 + a_3$$

Քանի որ H մատրիցի յուրաքանչյուր տողը պատկանում է այս կոդի զրոյական տարածությանը, ապա ամեն մի կոդային վեկտոր պետք է լինի օրթոգոնալ H – ի կամայական տողի հետ:

Մասնավորապես դա տեղի ունի առաջին տողի համար՝

$$1a_1 + 1a_2 + 0a_3 + 1a_4 + 0a_5 = 0,$$

որտեղից կստանանք a_4-ի համար հավասարությունը:

1.4 Փոքր ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդեր

Այս պարագրաֆի շրջանակներում կներկայացվեն փոքր ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդերը և կնշվեն նրանց կիրառական նշանակությունները:

Քանի որ ֆլեշ հիշողություններում և մոդուլյացիոն սխեմաներում առաջացած սխալները հիմնականում լինում են ասիմետրիկ և փոքր ամպլիտուդայով, անհրաժեշտ է կառուցել հենց այսպիսի սխալներ ուղղող կոդեր: Գրականությանը հայտնի են այնպիսի կոդեր, որոնք կարողանում են ուղղել $\pm\mathbf{1}$ մեծությամբ մինչև $\mathbf{2}$ սխալներ: Այս կոդերը հիմնականում դիտարկվում են ամբողջ օղակների վրա: Պրակտիկ տեսանկյունից առավել մեծ հետաքրքրություն են առաջացնում $\boldsymbol{Z_{2m}}$ կամ $\boldsymbol{Z_{2m+1}}$ օղակների վրա դիտարկված կոդերը, քանի որ նրանք ունեն լայն կիրառություն $\mathbf{2^{2m}}$– $\boldsymbol{QAM}$ մոդուլյացիոն սխեմաներում և ֆլեշ հիշողություններում: Բացի այդ այս տեսակ կոդերով շատ ավելի հարմար և էֆեկտիվ են իրականացվում կոդավորման և ապակոդավորման պրոցեսները:

Ֆլեշ հիշողությունը ներկայումս հանդիսանում է գերիշխող հիշողություն, քանի որ այն էժան է և կարող է հեշտությամբ ծրագրավորվել և ջնջվել: Ֆլեշ հիշողության սարքերը ավելի թեթև են, արագ և հարվածների հանդեպ դիմացկուն քան ավանդական մագնիսական կոշտ կրիչները: Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ ֆլեշ մեխանիզմներում տեղի ունեցող սխալները հիմնականում լինում են ասիմետրիկ և ունենում են փոքր ամպլիտուդա, նաև անկախ են այբուբենի մեծությունից, որոնք կարող են լինել զգալիորեն ավելի մեծ քան սխալի մեծությունը: Փոքր ամպլիտուդայով սխալ ուղղող կոդերի կառուցումները և իրագործումը ֆլեշ հիշողություններում զգալիորեն կարող են ավելացնել նրանց աշխատանքի կայունությունն ու արագությունը:

Նմանատիպ կոդերի հետազոտության համար մենք գործ կունենանք հետևյալ պարամետրների հետ.

1. L – սխալի ամենամեծ հնարավոր մեծությունը (ամպլիտուդան):
2. t – n երկարությամբ կոդային բառում մաքսիմալ հնարավոր սխալների քանակը:

Ստորև ներկայացված օրինակը ցույց է տալիս տվյալ կոդավորման խնդրի դրվածքը և ներկայացնում է այս տեսակ կոդերի կառուցման հիմնական գաղափարները:

Օրինակ. Դիցուք ունենք 8 երկարության կոդային բառ, որի կոմպոնենտներից յուրաքանչյուրը կարող են ընդունել $0,1,\dots,4$ արժեքներ: Մեր նպատակն է փորձել կառուցել այնպիսի սխալներ հայտնաբերող և ուղղող կոդ, որը կարողանա ուղղել L = $\pm$1 մեծության t = 2 սխալ: Հետագայում այս աշխատանքի շրջանակներում կկառուցվեն նաև կոդեր, որոնք կկարողանան ուղղել նաև L = $\pm$2 մեծության կրկնակի սխալներ:

Օրինակ՝

ա) 3 4 3 1 1 2 2 0 - կոդային բառ

բ) 4 4 3 2 1 2 2 0

գ) **4** 4 3 **2** 1 2 2 0

դ) **3** 4 3 **1** 1 2 2 0

ա) Առաջին քայլում մեր ունեցած կոդային բառը փոխանցում ենք կապուղով:

բ) Երկրորդ քայլում փոխանցման ընթացքում տեղի է ունենում 2 սխալ $+1$ մեծությամբ:

գ) Երրորդ քայլում հայտնաբերվում են այդ սխալները, ինչպես տեսնում ենք դրանք տեղի են ունեցել առաջին և չորրորդ կոմպոնենտներում:

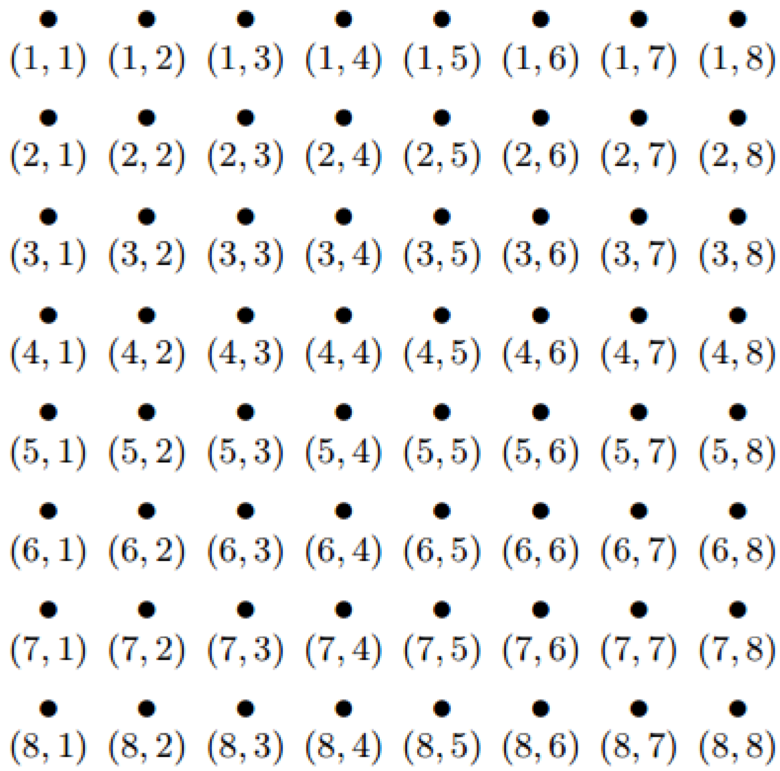
դ) Եվ վերջապես չորրորդ վերջին քայլում կատարվում է սխալների ուղղում ՝ հանելով 1 այն սիմվոլներից, որտեղ սխալ է հայտնաբերվել:

Ելնելով այս խնդրից հասկանում ենք, որ մեզ անհրաժեշտ է կառուցել այնպիսի կոդեր, որոնցով միարժեքորեն կկարողանանք որոշել այն կոմպոնենտները, որոնցում սխալ է տեղի ունեցել և նաև սխալի մեծության չափը՝ ամպլիտուդան: Դրանից հետո իմանալով տվյալ կոմպոնենտների համարները մենք հեշտությամբ կարող ենք ուղղել նրանցում առաջացած սխալները: Ասիմետրիկ կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերը ավելի նպատակահարմար է ներկայացնել նրանց ստուգող մատրիցների միջոցով: Այդ իսկ պատճառով մենք տվյալ խնդիրը հանգեցնում ենք մեկ այլ խնդրի, ըստ որի պետք է կառուցել այնպիսի մատրիցաներ, որոնց սյուները բավարար են որոշակի պայմանների, որոնք և կներկայացնենք այս պարագրաֆի շրջանակներում: Առաջին աշխատությունները, որոնք վերաբերվում են այս տեսակ կոդերին կատարվել են I.Blake – ի կողմից [4,5]: Կան նաև այլ գործեր, որոնք վերաբերվում են $\boldsymbol{Z_A}$ օղակներում կառուցված տարբեր տիպի ասիմետրիկ սխալներ ուղղող կոդերին [6-9]: Գրականության մեջ առկա այս տիպի կոդերը հիմնականում կառուցված են շատ մեծ օղակների վրա և ունեն շատ փոքր երկարություններ, հետևաբար նաև փոքր հաղորդման արագություն: Այս աշխատանքում կառուցվելու են ասիմետրիկ կրկնակի սխալներ ուղղող օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդեր, որոնք ունենալու են զգալիորեն ավելի մեծ հաղորդման արագություն:

Ինչո՞ւ ±1 մեծության սխալներ ուղղող կոդեր:

[18] - ում ներկայացված է $M - QAM$ մոդուլյացիոն սխեման քառակուսային տեսքով: Մեր սխեմայում ամեն մի ազդանշանը նշանակենք s_{ij} – ով, որտեղ $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) \in \boldsymbol{Z_A} \times \boldsymbol{Z_A}$ $(\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{2K})$: Որոշակիության համար համարակալումը սկսենք ձախ վերին անկյունից, որտեղ $\boldsymbol{i}$-ն տողի համարն է, իսկ $\boldsymbol{j}$ –ն սյան:

Օրինակ $\boldsymbol{M} = 64$ դեպքում սխեման կունենա հետևյալ տեսքը՝



Նկար 1.2 Indexing a 64-QAM constellation [18]

Ենթադրենք s_{ij} ազդանշանը փոխանցվել է ասիմետրիկ կապուղով և տեղ է հասել s_{kl} ազդանշանն: Եթե $(i,j) \neq (k,l)$ հետևում է սխալ ազդանշան է տեղ հասել: Այսպիսի սխեմայում առավել հավանական է, որ (i,j) – ի փոխարեն տեղ հասնի նրա հարևան ազդանշաններից որևէ մեկը՝ $(i \pm 1, j)$, $(i, j \pm 1)$,$(i \pm 1, j \pm 1)$: Որոշ դեպքերում կարող են առաջանալ նաև նմանատիպ սխալներ բայց արդեն ± 2 մեծությամբ: Այդ դեպքերի համար մենք ևս կկառուցենք կոդեր, որոնք կկարողանան ուղղել ± 1 և ± 2 մեծությամբ կրկնակի սխալներ: Հետևաբար, օգտագործելով Z_A օղակների վրա ± 1 և ± 2 ամպլիտուդայով սխալ ուղղող կոդերը մենք զգալիորեն կնվազեցնենք առաջացած հնարավոր սխալների քանակը:

Նման կոդերի համար կոդավորման և դեկոդավորման ալգորիթմները կառուցվում են հիմնվելով L – ի չափի վրա, այլ ոչ թե կոդի այբուբենի մեծության (որը կարող է զգալիորեն ավելի մեծ լինել L – ից): Սա հանդիսանում է այս տեսակ կոդերի հիմնական առավելությունը ֆլեշ հիշողություններում կիրառվող այլ կոդերի նկատմամբ:

Ստորև կներկայացվեն որոշ սահմանումներ, որոնք մեզ անհրաժեշտ կլինեն նմանատիպ կոդերի հետագա ուսումնասիրությունների համար [19] ՝

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.4.1 Դիցուք Z_A – ն ամբողջ օղակ է:

$$C\,(H,d) = \{c \in Z_A^n \mid cH^T = d \bmod A\},$$

որտեղ $d \in Z_A^m$, $H \in Z_A^{m*n}$ C կոդի ստուգող մատրիցն է:

Հիմնականում d – ն հանդիսանում է զրոյական վեկտոր, իսկ C – ն կհանդիսանա $[n, n-m]$ n –երկարությամբ և $n-m$ հատ ինֆորմացիոն սիմվոլներով կոդ:

Երբ աղմկոտ կապուղով փոխանցվում է c կոդային բառը տեղ հասած վեկտորը կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով.

$$r = c + e,$$

որտեղ $e = (e_1, \ldots, e_n) \in Z_A^n$ դա սխալների վեկտորն է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.4.2 $C\,(H,d)$ կոդը հանդիսանում է t - բազմակի սխալ ուղղող, եթե այն կարողանում է ուղղել մինչև t հատ սխալ $(\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_s)$ արժեքներով, որոնք կարող են տեղի ունենալ կոդային բառի փոխանցման արդյունքում:

Առանց ընդհանրությունը խախտելու նախորդ սահմանումներում կարող ենք ենթադրել, որ $d = 0$:

ԹԵՈՐԵՄ 1.4.1 C կոդը դիտարկված $\boldsymbol{Z_{2m}}$ օղակի վրա ներկայացված $H = (1,2,3, \ldots, 2^{m-1} - 1)$ ստուգող մատրիցի միջոցով հանդիսանում է ± 1 մեծության մեկ սխալ ուղղող կոդ: [19]

Ապացույց: Ապացուցելու համար, որ այս կոդը հանդիսանում է ± 1 մեծության մեկ սխալ ուղղող պետք է ցույց տալ, որ H -ի բոլոր սինդրոմները միմյանցից տարբեր են $(\pm h_i \neq \pm h_j)$, որտեղ $h_i, h_j \in H$:

H – ի սահմանումից հետևում է, որ $h_i \neq h_j$ և $-h_i \neq -h_j$ $\boldsymbol{Z_{2m+1}}$ -ում: Նաև ունենք, որ $-h_i \in \{2^{m-1} + 1, 2^{m-1} + 2, \ldots , 2^m - 1\}$ այստեղից կհետևի, որ $(\pm h_i \neq \pm h_j)$:

Մեկ սխալ ուղղող այսպիսի կոդերը նկարագված են [18,19] – ում:

[20] -ում հայտնաբերված է նաև $\boldsymbol{Z_5}$ օղակում մեկ սխալ ուղղող օպտիմալ և կատարյալ կոդ, որն ունի 2 ստուգող սիմվոլ և մաքսիմալ հնարավոր երկարություն, որը տվյալ դեպքում հանդիսանում է 12: Ներկայացնենք այդ կոդը նրա ստուգող մատրիցի միջոցով՝

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Որպեսզի այս կոդը հանդիսանա ± 1 մեծության մեկ սխալ ուղղող, պետք է որ H -ի բոլոր սինդրոմները լինեն միմյանցից տարբեր $(\pm h_i \neq \pm h_j)$, որտեղ $h_i, h_j \in H$: Այս կոդն ունի հնարավոր մաքսիմալ երկարություն,քանի որ նրան ևս մեկ սյուն ավելացնելու դեպքում արդեն $(\pm h_i \neq \pm h_j)$ պայմանը չի բավարարվի: Քանզի այս կոդը դիտարկված է $\boldsymbol{Z_5}$ օղակում, ապա $\mathbf{4 = -1}$ *և* $\mathbf{3 = -2}$ և վերևի տողում $\mathbf{3}$ կամ $\mathbf{4}$ ավելացնելու դեպքում արդեն կխախտվի $(\pm h_i \neq \pm h_j)$ պայմանը, իսկ եթե շարունակենք 0-յով սկսվող սյունակներն, ապա արդեն հաջորդ իսկ h_{13} սյունակն ավելացնելու դեպքում, որը կլինի $\binom{0}{3}$-ը, կստացվի որ

$h_{12} = -h_{13}$ ՝ $\binom{0}{2} = \binom{0}{-3}$, այս դեպքում արդեն H-ով ներկայացված կոդը չի հանդիսանա ±1 մեծության մեկ սխալ ուղղող կոդ:

Այս մոտեցումով կարելի է կառուցել նաև $\boldsymbol{Z_7}$ օղակում մեկ սխալ ուղղող օպտիմալ կոդ, որը կունենա 2 ստուգող սիմվոլ և մաքսիմալ հնարավոր երկարություն, որը տվյալ դեպքում կհանդիսանա՝ 24:

Ներկայացնենք այդ կոդը նրա ստուգող մատրիցի օգնությամբ՝

$$H_7 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ընդհանուր դեպքում $\boldsymbol{Z_q}$ օղակում ±1 մեծությամբ մեկ սխալ ուղղող կոդերի մաքսիմալ երկարությունը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ բանաձևով՝

$$N = \frac{q^2-1}{2}$$

[20] -ում հայտնաբերված է նաև օպտիմալ և կատարյալ կոդ, որը կարողանում է ուղղել $\{+1,+2\}$ կամ $\{-1,-2\}$ մեծության մեկ սխալ $\boldsymbol{Z_5}$ օղակում:

Ներկայացնենք այդ կոդի ստուգող մատրիցը՝

$$H_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ինչպես տեսնում ենք այս կոդը ևս ունի 12 երկարություն, որից 2-ը դա ստուգող սիմվոլներն են, իսկ 10-ը՝ ինֆորմացիոն: Ի տարբերություն միայն ±1 մեծության սխալ ուղղող կոդերի այս մատրիցի սյուները բավարարում են նաև $(+2h_i \neq +h_j)$ և $(-2h_j \neq -h_i)$ պայմաններին, ինչի շնորհիվ այս կոդի միջոցով կարելի է ուղղել հաղորդագրության մեջ առաջացած նաև ±2 մեծության սխալներ: Սակայն գիտությանը դեռևս հայտնի չեն այնպիսի կոդեր, որոնք կկարողանան ուղղել $\{+1,+2\}$ կամ $\{-1,-2\}$ մեծությամբ կրկնակի սխալներ:

Բազմակի տարբեր մեծության սխալներ ուղղող կոդերի համար ստուգող մատրիցների կառուցման պրոցեսը շատ ավելի բարդ է: Անգամ ±1 մեծության կրկնակի սխալ ուղղող կոդի կառուցման համար նրա ստուգող մատրիցի ճշգրիտ տեսքը գտնելու համար անհրաժեշտ է կատարել լուրջ գիտահետազոտական աշխատանք:

Դիցուք H – ը C կոդի ստուգող մատրիցն է.

$$H = \begin{pmatrix} \boldsymbol{h_{11}} & \boldsymbol{h_{12}} & \boldsymbol{h_{13}} & \cdots & \boldsymbol{h_{1n}} \\ \boldsymbol{h_{21}} & \boldsymbol{h_{22}} & \boldsymbol{h_{23}} & \cdots & \boldsymbol{h_{2n}} \end{pmatrix}:$$

Պայմանը, որի դեպքում C-ն կլինի կրկնակի ± 1 մեծության սխալ ուղղող կոդ հետևյալն է.

$$h_{ij} \neq \pm h_{im} \qquad\qquad j \neq m$$

$$\pm h_{ij} \pm h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \qquad (j,m) \neq (l,k)$$

Նման տեսակ կոդերի կառուցումներ կատարված են [19, 21, 26] – ում:

$$H_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Օրինակ. H_9 – ստուգող մատրիցի օգնությամբ ներկայացված այս կոդը, որը պարունակում է 2 ինֆորմացիոն և 2 ստուգող սիմվոլ, կարող է ուղղել ± 1 մեծության կրկնակի սխալներ $\boldsymbol{Z_9}$ օղակում:

Գոյություն ունեն նաև կոդեր, որոնք կառուցված են ավելի մեծ մեծություն ունեցող օղակների վրա և ունեն ավելի մեծ երկարություն քան նախորդ օրինակում դիտարկված կոդը, որն ուներ ընդամենը 4 երկարություն:

$$H_{17} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 7 & 3 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Օրինակ՝ H_{17} ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված կոդը կառուցված է $\boldsymbol{Z_{17}}$ օղակում և ունի 8 երկարություն, որից 6-ը հանդիսանում են ինֆորմացիոն, իսկ 2-ը ստուգող սիմվոլներ:

Ֆիքսված Z_m օղակում կառուցված կոդի համար օպտիմալության պայմանը կարող է դրվել 2 ձևով [22]: Առաջին պայմանն ասում է, որ n երկարության կոդը օպտիմալ է, եթե այն պարունակում է մինիմալ քանակով ստուգող սիմվոլներ: Երկրորդ պայմանն այն է, որ տրված ստուգող սիմվոլների քանակի համար այն պետք է ունենա հնարավոր ամենամեծ երկարությունը: Մեզ դեռ հայտնի չեն այնպիսի կոդեր, որոնք բավարարեն օպտիմալության 2-րդ պայմանին: Հետագայում հարց է առաջանում, թե ինչպես համեմատել այնպիսի տարբեր կոդեր, որոնք բոլորն էլ բավարարում են օպտիմալության առաջին պայմանին:

Դիտարկենք 2 տարբեր մեծություններ, որոնք կօգնեն մեզ համեմատել նմանատիպ կոդերը.

1. Ինֆորմացիոն սիմվոլների քանակի հարաբերությունը կոդի երկարությանը:

2.Կոդի միջոցով հնարավոր ուղղելի սխալների քանակի հարաբերությունն այբուբենի երկարությանը՝ նրանից նախապես հանելով 1:

Այսպիսով համեմատելու համար 2 օպտիմալ կոդեր կհաշվենք վերևում նկարագրված 2 մեծությունների արտադրյալը և կտեսնենք, թե որն է ավելի մեծ:

Վերևում բերված մինչև 2 սխալ ուղղող օպտիմալ $(8,6)$ կոդի համար Z_{17} օղակում այդ մեծությունը հավասար կլինի.

$$(6/8) * (2/16) = 0.1,$$

իսկ $\boldsymbol{Z_9}$ – ում կառուցված $(4,2)$ կոդի համար, որը ներկայացված էր H_9 ստուգող մատրիցի միջոցով, այդ մեծությունը հավասար կլինի.

$$(2/4) * (2/8) = 0.125 :$$

Գոյություն ունեն նաև ուրիշ մեզ հայտնի օպտիմալ կոդեր կառուցված տարբեր մեծության օղակներում, որոնց համար այս մեծությունը զգալիորեն ավելի փոքր է:

Այս աշխատանքում կառուցվելու են ±1 մեծության կրկնակի սխալներ ուղղող օպտիմալ կոդեր տարբեր մեծության օղակների վրա, որոնք ունենալու են շատ ավելի մեծ երկարություն, և հետևաբար նաև ավելի մեծ հաղորդման արագություն, որոնց համար վերևում նկարագրված մեծությունն ունենալու է ավելի մեծ արժեք, քան արդեն իսկ այլ աշխատանքներում կառուցված կրկնակի ±1 սխալ ուղղող օպտիմալ կոդերի համար (մասնավորապես 0.2 –ից մինչև 0.33): Մասնավորապես կկառուցվեն նաև ±2 մեծության կրկնակի սխալներ ուղղող կոդեր:

1.5 Փոքր ամպլիտուդայով կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերի համեմատումը սխալներ ուղղող այլ գծային կոդերի հետ

Այս կոդերի ուսումնասիրությունից հետո կարող է հարց առաջանալ, թե ինչու այս տեսակի սխալներ ուղղելու համար մենք չենք օգտագործում հնուց արդեն մեզ հայտնի և լայն կիրառություն ունեցող Հեմմինգի և ԲՉՀ (Боуз — Чоудхури — Хоквингем) կոդերը: Այս պարագրաֆի շրջանակներում մենք կփորձենք կատարել համեմատություն փոքր ամպլիտուդայով կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերի և վերը նշված երկու կոդերի միջև: Ցույց կտանք նաև, թե ինչու է ավելի նպատակահարմար այս տեսակ սխալներ ուղղելու համար օգտվել հենց այս աշխատանքում կառուցված կոդերից:

1.5.1 Հեմմինգի կոդ: Հեմմինգի կոդի մասին դեռևս առաջին աշխատությունները կատարվել 50-ական թվականներին [28]: Երկուական Հեմմինգի կոդը հարմար է ներկայացնել նրա ստուգող մատրիցի օգնությամբ [17]: Ներկայացնենք H ստուգող մատրիցը, որը բաղկացած կլինի 0-երից և 1-երից, այն կունենա m հատ տող և $2^m - 1$ հատ սյուն, որոնք կլինեն m երկարության բոլոր ոչ զրոյական հավաքածուները: Այս դեպքում կոդային բառերը կունենան $2^m - 1$ երկարություն, իսկ ստուգող սիմվոլների քանակը կլինի հենց m: Կարելի է կառուցել կամայական n-ի համար Հեմմինգի կոդ, եթե կառուցենք H ստուգող մատրից այն ամենափոքր m թվի համար, որի դեպքում տեղի կունենա $2^m - 1 \leq n$ անհավասարությունը, և հետո արտաքսելով բոլոր ավելորդ սյուները թողնենք n հատ սյուն: Այսպիսով, կամայական n-ի համար կարող ենք կառուցել Հեմմինգի կոդ, որը կկարողանա ուղղել կոդային բառում առաջացած բոլոր հնարավոր մեկական սխալները, և որը կհանդիսանա օպտիմալ կոդ երկուական սիմետրիկ կապուղու համար: Ենթադրենք կապուղով փոխանցվել է u կոդային բառը և նրանում առաջացել է մեկ սխալ: Այս դեպքում տեղ կհասնի $(u + e)$ վեկտորն, որտեղ e – ն դա սխալի վեկտորն է, որը կպարունակի մեկ այն կոմպոնենտում, որտեղ սխալ է տեղի ունեցել և 0 մնացած բոլոր կոմպոնենտներում:

Սինդրոմը կստացվի՝

$$(u + e)\,H^T = uH^T + eH^T = eH^T$$

քանի որ u-ն հանդիսանում է կոդային վեկտոր, ապա քանի որ H մատրիցը ինչպես գիտենք հանդիսանում է այդ կոդի ստուգող մատրիցան հետևաբար $uH^T = 0$ և eH^T–ն կլինի հենց սխալի սինդրոմը: Քանզի e վեկտորը միայն պարունակում է 1 այն կոմպոնենտում, որտեղ սխալ է տեղի ունեցել, իսկ մնացած կոմպոնենտներում պարունակում է 0 - ներ, ապա այն կհամընկնի հենց H մատրիցի այն սյան հետ, որը համապատասխանում է տեղի ունեցած սխալին: Շատ ավելի հեշտ է Հեմմինգի կոդի օգնությամբ կատարել սխալների ուղղում, եթե H մատրիցը կառուցվի այնպես, որ ամեն i –րդ սյուն բաղկացած լինի հենց i թվի երկուական ներկայացումից:

Օրինակ $m = 3$ և $n = 2^3 - 1 = 7$ պարամետրերի դեպքում որտեղ m – ը դա կոդի ստուգող սիմվոլների քանակն է, իսկ n-ը կոդային բառի երկարությունը H մատրիցը կառուցվում է հետևյալ ձևով՝

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

այս դեպքում, եթե սխալի սինդրոմը ստացվի օրինակ $(1\ 0\ 1)$, որը հանդիսանում է 5 թվի երկուական ներկայացումը, ապասխալը տեղի է ունեցել կոդային բառի 5-րդ կոմպոնենտում և այդ սխալը կարող ենք հեշտությամբ ուղղել փոխարինելով 5-րդ կոմպոնենտում գրված էլեմենտը մյուսով (եթե 0-է 1-ով և հակառակը) :

Կարող ենք կառուցել նաև Հեմմինգի կոդ, որի մինիմալ կշիռը հավասար կլինի 4-ի, ավելացնելով ընդամենը մեկ ստուգող սիմվոլ: Այդ դեպքում կունենանք $m+1$ հատ ստուգող սիմվոլներ և հետևաբար $2^m - m - 1$ հատ ինֆորմացիոն սիմվոլներ, իսկ կոդի երկարությունը հավասար կլինի հավասար 2^m :

Օրինակ $(8,4)$ Հեմմինգի կոդի ստուգող մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

այս կոդի միջոցով կարող ենք հայտնաբերել և ուղղել բոլոր եզակի սխալները և միայն հայտնաբերել կրկնակի սխալները:

Հնարավոր է կառուցել նաև Հեմմինգի կոդ $q > 2$ դեպքի համար, այսինքն երբ բացի 0 1 սիմվոլներից կոդը կարող է պարունակել նաև այլ սիմվոլներ: Այս դեպքում ընդհանրացված Հեմմինգի կոդը կարող է ունենալ մաքսիմում $n = (q^m - 1) / (q - 1)$ երկարություն: Սակայն ի տարբերություն այս աշխատանքում կառուցված մեկ սխալ ուղղող կոդերի նրանք պարտադիր պետք է ունենան գոնե 3 ստուգող սիմվոլ, իսկ ինչպես ցույց ենք տվել նախորդ պարագրաֆում մենք կարող ենք կառուցել ասիմետրիկ ± 1 մեծության մեկ սխալ ուղղող օպտիմալ կոդեր, որոնք ունեն ընդամենը 2 ստուգող սիմվոլ և $n = \frac{q^2-1}{2}$ հնարավոր մաքսիմալ երկարություն :

1.5.2 ԲՉՀ կոդեր: ԲՉՀ կոդերը հանդիսանում են ցիկլիկ կոդերի լայն դաս, որոնք նախապես տրված **t** թվի համար հնարավորություն են տալիս կառուցել **t** սխալ ուղղող կոդ: Կան մի շարք աշխատություններ, որոնք նվիրված են ԲՉՀ կոդերին [29-33]: Դրանք պարունակում են կոդերի ընտրանքներ, որոնք օժտված են այս կամ այն իմաստով օպտիմալ հատկություններով (Րիդ-Սոլոմոնի կոդ, երկու սխալ ուղղող պրիմիտիվ կոդ և այլն)[17,27]: ԲՉՀ կոդերը սահմանվում են ծնող բազմանդամի արմատների միջոցով (որպես ցիկլիկ կոդ) կենտ երկարությունների դեպքում: Ինչպես հայտնի է կամայական n երկարությամբ C ցիկլիկ կոդի ծնող բազմանդամը հանդիսանում է $\mathrm{x}^{\mathrm{n}} - 1$ բազմանդամի բաժանարար: Հայտնի է նաև, որ գոյություն ունի փոքրագույն ամբողջ m այնպես, որ $(2^{\mathrm{m}} - 1)$-ը բաժանվում է n-ի: Այդ դեպքում կասենք, որ m-ը 2-ի մուլտիպլիկատիվ կարգն է ըստ մոդուլ n-ի: Այսպիսով $\mathrm{x}^{\mathrm{n}} - 1$ բազմանդամի արմատները (որոնք կոչվում են 1-ից n-րդ աստիճանի արմատներ) ընկած են $\mathrm{GF}(2^{\mathrm{m}})$ դաշտում և ընկած չեն նրա որևէ ավելի փոքր ենթադաշտում: Հայտնի է նաև, որ $\mathrm{x}^{\mathrm{n}} - 1$ բազմանդամի արմատները $\mathrm{GF}(\mathrm{q}^{\mathrm{m}})$ մուլտիպլիկատիվ խմբի ցիկլիկ ենթախումբ են, կամ որ նույնն է, գոյություն ունի α այնպես, որ

$$\mathrm{x}^{\mathrm{n}} - 1 = \prod_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}-1} (\mathrm{x} - \alpha^{\mathrm{i}}):$$

n երկարությամբ և δ կոնստրուկտիվ հեռավորությամբ ԲՉՀ կոդ կոչվում է այն կոդը, որի ծնող բազմանդամը բավարարում է հետևյալ պայմանին.

$$g(x) = \text{Ա.Ը.Բազ.}\{M(\alpha^b), M(\alpha^{b+1}), \dots, M(\alpha^{b+\delta-2})\} \ ,$$

որտեղ $M(\beta)$-ով նշանակվում է β էլեմենտի մինիմալ բազմանդամը:

Սահմանումից հետևում է, որ n երկարությամբ և δ կոնստրուկտիվ հեռավորությամբ ԲՉՀ կոդի ծնող բազմանդամը ամենափոքր աստիճանի բազմանդամն է, որի արմատներն են $\alpha^b, \alpha^{b+1}, \dots, \alpha^{b+\delta-2}$ էլեմենտները, որոնց կանվանենք նաև ԲՉՀ կոդի 0 -ներ:

Հաշվի առնելով այն, որ ցիկլիկ կոդի բոլոր կոդային բառերը բաժանվում են $g(x)$ – ի վրա, ապա ՝

$$V(x) \in C \Rightarrow v(\alpha^i) = 0 \qquad i = 1, \dots, 2t :$$

Ստացած հաղորդագրության սինդրոմ կանվանենք $w(x)$ բազմանդամի արժեքը կոդի 0 – ներում ՝

$$s_i = w(\alpha^i), \text{ i = 1 ,…, 2t:}$$

Բոլոր սինդրոմները հավասար կլինեն 0-ի այն և միայն այն դեպքում, երբ $w(x)$ – ը հանդիսանում է կոդային բառ:

Օրինակ Հեմմինգի կոդը հանդիսանում է ԲՉՀ կոդերի մասնակի դեպք, երբ t = 1: Հետևաբար Հեմմինգի կոդի զրոները կլինեն α –ն և α^2- ն, որտեղ α –ն դա F_2^l դաշտի պրիմիտիվ էլեմենտն է: Ստացած $w(x)$ բառի դեկոդավորման համար պետք է գտնենք $s_1 = w(\alpha)$ սինդրոմն: Եթե $s_1 = 0$, ապա $w(x)$ –ն հենց ինքը կհանդիսանա կոդային բառ՝ $V(x) = w(x)$: Ենթադրենք, որ հաղորդագրությունը կապուղով փոխանցելիս տեղի է ունեցել մեկ սխալ, այս դեպքում $w(x) = v(x) + e(x)$, որտեղ սխալների բազմանդամ $e(x) = x^j$: Սխալի դիրքը գտնելու համար պետք է հաշվենք սխալների բազմանդամի բոլոր արժեքները α կետում բոլոր $j = 1, \dots, n$ կետերի համար:

Եթե $e(\alpha) = \alpha^j = s_1$, ապա j – ն հենց ցույց կտա սխալանքի դիրքը և $v(x) = w(x) + x^j$: Հակառակ դեպքում, եթե $\alpha^j \neq s_1$ կամայական j – ի դեպքում, ապա հաղորդագրության կապուղով փոխանցման ընթացքում տեղի է ունեցել մեկից ավելի սխալ, որոնք մենք չենք կարող ուղղել:

Օրինակ. Դիտարկենք ԲՉՀ կոդեր $F_2^3 = F_2[x] / (x^3 + x + 1)$ դաշտի դեպքում: Այստեղ $l = 3$ և $n = 7$, իսկ $x^3 + x + 1$ բազմանդամը հանդիսանում է պրիմիտիվ բազմանդամ F_2 – ի համար: α – ով կնշանակենք այդ բազմանդամի կամայական արմատը:

Կառուցենք ԲՉՀ կոդ, որը կարողանում է ուղղել մեկ սխալ: Նրա ծնող բազմանդամ $g(x)$ – ը կառուցվում է որպես մինիմալ բազմանդամ α, α^2 էլեմենտների համար: Այս էլեմենտները մտնում են միևնույն հարակից դասի մեջ α, α^2, α^4 , հետևաբար $g(x) = m_\alpha(x) = m_{\alpha^2}(x) = x^3 + x + 1$: Քանզի ծնող բազմանդամի կարգը հավասար է 3-ի հետևաբար մեր կոդն ունի ընդամենը 3 ստուգող սիմվոլ: Արդյունքում ստանում ենք $(7,4,3)$ – կոդ , որը հենց հանդիսանում է Հեմմինգի կոդ: Ենթադրենք, որ մեր մուտքային բազմանդամը դա $u(x) = x^3 + x^2$ բազմանդամն է, որը համապատասխանում է 0011 հաղորդագրությանն: Նրա սիստեմատիկ կոդավորումը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$v(x) = x^m u(x) + mod(x^m u(x), g(x)) = x^3 u(x) + mod(x^3 u(x), g(x)) = x^6 + x^5 + mod(x^6 + x^5, x^3 + x + 1) = x^6 + x^5 + x:$$

Հետևաբար մեր արդեն իսկ կոդավորված բազմանդամը կլինի $v(x) = x^6 + x^5 + x$ բազմանդամը, որը համապատասխանում է 0100011 հաղորդագրությանը: Ինչպես գիտենք սիստեմատիկ կոդավորման դեպքում սկզբնական հաղորդագրությունը պահվում է աջ դիրքերում գտնվող բիթերում, իսկ ձախ կողմի բիթերում գտնվում են զույգության սիմվոլները:

Հիմա ենթադրենք, որ հաղորդագրությունը կապուղով փոխանցելիս տեղի է ունեցել սխալ 5-րդ բիթում, և մեզ հասել է $w(x) = x^6 + x$ բազմանդամը, իսկ

$e(x) = x^5$ կլինի հենց մեր սխալի բազմանդամը: Ապակոդավորում կատարելու համար մեզ նախ և առաջ պետք է գտնել սինդրոմը՝

$s_1 = w(\alpha) = \alpha^6 + \alpha = (\alpha^3)^2 + \alpha = (\alpha + 1)^2 + \alpha = \boldsymbol{\alpha^2 + \alpha + 1}$: Հաջորդ քայլում պետք է հաշվել բոլոր α^j –երը , երբ $j = 0, \ldots, 6$ ՝ ($\alpha^3 = \alpha + 1$ քանի որ α –ն հանդիսանում է $x^3 + x + 1$ – բազմանդամի արմատ)

$$\alpha^0 = 1,$$

$$\alpha^1 = \alpha,$$

$$\alpha^2 = \alpha^2,$$

$$\alpha^3 = \alpha + 1,$$

$$\alpha^4 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha,$$

$$\alpha^5 = \alpha^2(\alpha + 1) = \alpha^3 + \alpha^2 = \boldsymbol{\alpha^2 + \alpha + 1},$$

$$\alpha^6 = (\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 1:$$

Այստեղից հետևում է, որ $\alpha^5 = s_1$ և սխալը տեղի է ունեցել 5-րդ դիրքում, հետևաբար՝

$$v(x) = w(x) + x^5 = x^6 + x^5 + 1:$$

Այս օրինակում մենք ներկայացրեցինք ԲՉՀ կոդով կոդավորման և ապակոդավորման ալգորիթմներն այն դեպքի համար երբ տեղի է ունեցել միայն մեկ սխալ: Իսկ այն դեպքերի համար, երբ տեղի են ունեցել մեկից ավելի սխալներ ապակոդավորումը կատարվում է Պետերսոնի ալգորիթմի միջոցով [34]:

Եթե փորձենք կառուցել Z_5 օղակում $m = 3$ և $t = 2$ ԲՉՀ կոդ, ապա նրա մաքսիմալ երկարությունը կլինի՝ $n = (5^m - 1) / (5 - 1) = 31$, իսկ ստուգող սիմվոլների քանակը կլինի հավասար՝ $r = 2mt = 12$: Հետևաբար կոդի ինֆորմացիոն սիմվոլների և երկարության հարաբերությունը հավասար կլինի $19/31 = 0.61$, իսկ Z_5 օղակում ասիմետրիկ կրկնակի ± 1 սխալներ ուղղող կոդի համար այն հավասար է $8/12 = 0.66$ կամ 24 երկարությամբ կոդի դեպքում $18/24 = 0.75$ և մեզ անհրաժեշտ են ընդամենը համապատասխանաբար 4 և 6 ստուգող սիմվոլներ 12-ի փոխարեն: Եթե կառուցենք Z_7 օղակում $m = 3$ և $t = 2$ ԲՉՀ կոդ, ապա նրա մաքսիմալ երկարությունը կլինի՝ $n = (7^m - 1) / (7 - 1) = 57$ և կունենաք ևս 12 ստուգող սիմվոլ, սակայն այս դեպքում ստացվում է, որ մենք 57 երկարությամբ կոդային բառի վրա կարողանում ենք ուղղել ընդամենը 2 սխալ, իսկ ասիմետրիկ փոքր ամպլիտուդայով կոդի դեպքում Z_7 օղակում մենք կարողանում ենք ուղղել 2 սխալ 16 երկարությամբ կոդային բառում և ունենում ենք ընդամենը 4 ստուգող սիմվոլներ: Ակնհայտ է, որ եթե ունենք փոքր երկարության հաղորդագրություններ և գիտենք, որ սխալները լինելու են փոքր ամպլիտուդայով մասնավորապես ±1 և ±2 ավելի նպատակահարմար է օգտվել ասիմետրիկ փոքր սխալներ ուղղող կոդերից: Ճիշտ է ԲՉՀ կոդերի միջոցով մենք կարող ենք ուղղել ցանկացած մեծությամբ սխալներ, սակայն ինչպես նշել ենք նախորդ պարագրաֆներում այս աշխատանքում կառուցված կոդերը օգտագործվում են այն համակարգերում, որտեղ սխալները հիմնականում լինում են փոքր ամպլիտուդայով (մասնավորապես ±1 և ±2) :

Աշխատանքի հաջորդ գլխում կկառուցվեն տարբեր մեծությամբ օղակներում կրկանի ±1 և ±2 սխալներ ուղղող նոր օպտիմալ և քվազի–օպտիմալ կոդեր:

ԳԼՈՒԽ 2

ՓՈՔՐ ԱՄՊԼԻՏՈՒԴԱՅՈՎ ՍԽԱԼՆԵՐ ՈՒՂՂՈՂ ԿՈԴԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

Աշխատանքի երկրորդ գլխում ներկայացվում են ± 1 և ± 2 մեծությամբ կրկնակի սխալներ ուղղող օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդերի կառուցումներ տարբեր մեծության օղակներում: Բացի այդ ապացուցված է թեորեմ կոդի երկարության կրկնապատկման մասին, որի հիման վրա մշակվել է մի մեթոդ, որի միջոցով հիմնվելով մեզ արդեն հայտնի $C(N, N-4)$ օպտիմալ կոդերի վրա, կարող ենք կառուցել $C\,(2N, 2N-6)$՝ երկու անգամ ավելի մեծ երկարություն ունեցող կոդեր ավելացնելով ընդամենը 2 ստուգող սիմվոլ:

2.1 Ներածություն

Քանի որ ֆլեշ հիշողություններում և մոդուլյացիոն սխեմաներում առաջացած սխալները հիմնականում լինում են ասիմետրիկ և փոքր ամպլիտուդայով, անհրաժեշտ է կառուցել հենց այսպիսի սխալներ ուղղող կոդեր: Գրականությանը հայտնի են այնպիսի կոդեր, որոնք կարողանում են ուղղել $\pm\mathbf{1}$ մեծությամբ մինչև $\mathbf{2}$ սխալներ: Այս կոդերը հիմնականում դիտարկվում են ամբողջ օղակների վրա: Պրակտիկ տեսանկյունից առավել մեծ հետաքրքրություն են առաջացնում $\boldsymbol{Z_{2m}}$ կամ $\boldsymbol{Z_{2m+1}}$ օղակների վրա դիտարկված կոդերը, քանի որ նրանք ունեն լայն կիրառություն $\mathbf{2^{2m}}$– $\boldsymbol{QAM}$ մոդուլյացիոն սխեմաներում և ֆլեշ հիշողություններում: Աշխատանքի այս գլխում կառուցվելու են ասիմետրիկ ± 1 և ± 2 մեծությամբ կրկնակի սխալներ ուղղող օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդեր տարբեր մեծության օղակներում: Այս տեսակ սխալներ ուղղող կոդերն ունեն լայն կիրառություն ֆլեշ հիշողություններում և մոդուլյացիոն սխեմաներում, որտեղ սխալները հիմնականում լինում են ասիմետրիկ և փոքր ամպլիտուդայով: Նաև կներկայացնենք ալգորիթմ, որի միջոցով արդեն մեզ հայտնի օպտիմալ կոդերի միջոցով կստանանք նոր ավելի մեծ երկարություն ունեցող կոդեր, ավելացնելով ընդամենը երկու ստուգող սիմվոլ:

Ինչպես նշել ենք աշխատանքի առաջին գլխի 1.3 պարագրաֆում, ֆիքսված Z_m օղակում կառուցված կոդի համար օպտիմալության պայմանը կարող է դրվել 2 ձևով [22]: Առաջին պայմանն ասում է, որ n երկարության կոդն օպտիմալ է, եթե այն պարունակում է մինիմալ քանակով ստուգող սիմվոլներ (այսինքն ավելի քիչ ստուգող սիմվոլներով հնարավոր չէ կառուցել այդ երկարության կոդ): Երկրորդ պայմանն այն է, որ տրված ստուգող սիմվոլների քանակի համար այն պետք է ունենա հնարավոր ամենամեծ երկարությունը: Մեզ դեռ հայտնի չեն այնպիսի կոդեր, որոնք բավարարեն օպտիմալության 2-րդ պայմանին: Այս գլխում կառուցված օպտիմալ կոդերը կբավարարեն օպտիմալության առաջին պայմանին՝ այսինքն կպարունակեն մինիմալ քանակության ստուգող սիմվոլներ: Կկառուցվեն նաև կոդեր, որոնք կհանդիսանան քվազի-օպտիմալ, բայց կունենան շատ մեծ երկարություններ:

2.2 Z_5 օղակում ± 1 մեծության կրկնակի սխալ ուղղող օպտիմալ կոդի ներկայացումը

Նախ ներկայացնենք [22] – ում կառուցված $C\,(12,8)$ օպտիմալ կոդը, որն ունի 12 երկարություն, որից 4–ը դա ստուգող սիմվոլներն են, իսկ 8–ը՝ ինֆորմացիոն, և այն բավարարում է օպտիմալության առաջին պայմանին: Z_5 օղակում կառուցված այս կոդը կարողանում է ուղղել ± 1 մեծության մինչև 2 սխալ:

Նախորդ գլխում մենք խոսեցինք մի մեծության մասին, որի միջոցով կարողանում ենք համեմատել երկու տարբեր երկարությունների օպտիմալ կոդեր: Այդ մեծությունը հանդիսանում է մեկ այլ երկու մեծությունների արտադրյալ, որոնցից առաջինը դա ինֆորմացիոն սիմվոլների քանակի հարաբերությունն է կոդի երկարությանը, իսկ երկրորդը այդ կոդի միջոցով հնարավոր ուղղելի սխալների քանակի հարաբերությունն այբուբենի երկարությանը՝ նրանից նախապես հանելով 1: Դիտարկվող $C(12,8)$ կոդի համար Z_5 -ում այդ մեծությունը կլինի հետևյալը՝

$$(8/12) * (2/4) = 0.3333$$

Ինչպես տեսնում ենք այս մեծությունը տվյալ կոդի համար շատ ավելի մեծ է քան արդեն մեզ հայտնի նույն դասի այլ կոդերի համար (մասնավորապես նախորդ դեպքերում այդ մեծությունը հավասար էր 0.1 և 0.125):

Դիցուք այս $C(12,8)$ գծային օպտիմալ կոդը տրված է իր ստուգող H մատրիցի միջոցով.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ԹԵՈՐԵՄ 2.2.1 Z_5 օղակում դիտարկված այս կոդը՝ տրված H մատրիցի միջոցով կարող է ուղղել ± 1 ամպլիտուդայով մինչև 2 սխալ:

Ապացույց: Այս թեորեմն ապացուցելու համար պետք է ցույց տալ, որ H մատրիցն ունի հատկություն ըստ որի նրա բոլոր սյուներն $h_i \neq \pm h_j$ և բոլոր հնարավոր $\pm h_i \pm h_j$ սինդրոմները, որտեղ $h_i \neq h_j$ միմյանցից տարբեր են:

Ապացույցը կատարվում է օգտվելով $\{3,2,4,4,2\}$ բազմության հատկությունից, որը կայանում է նրանում, որ ըստ դիտարկված բոլոր հեռավորությունների այս բազմության 2 էլեմենտների տարբերությունները միշտ տարբեր են: Օրինակ, եթե դիտարկում ենք ըստ

1-հեռավորության $(2 - 3 = 4,\ 4 - 2 = 2,\ 4 - 4 = 0, 2 - 4 = 3,\ 3 - 2 = 1)$:

Առաջին տեղում գրված 3-ն ունի 0 ինդեքս և վերջին տեղում գրված 2 –ն ունի 4 ինդեքսը և հետևաբար $0 - 4 = 1$ ըստ $(mod5)$-ի քանի որ բոլոր գործողությունները կատարվում են Z_5 օղակում:

Ապացույցը կատարելու համար հնարավոր բոլոր սինդրոմների բազմությունը բաժանենք 3 չհատվող ենթաբազմությունների, որտեղ $S(i)$ – ն այն ենթաբազմությունն է, որի սիմդրոմների առաջին էլեմենտը i- ն է: Թեորեմն ապացուցելու համար պետք է ցույց տալ, որ նույն ենթաբազմությանը պատկանող բոլոր սինդրոմները միմյանցից տարբեր են:

Բաժանենք մեր H մատրիցի բոլոր սյուները երեք տարբեր խմբերի. առաջին խմբի մեջ կմտնեն ձախ կողմի առաջին 5 սյուները, երկրորդ խմբի մեջ հաջորդ 5 սյուները, իսկ երրորդ խումբը կպարունակի վերջին 2 սյուները:

Սկսենք $S(0)$ ենթաբազմությունից: Այն բաժանենք 3 ենթախմբի՝

1. $S_1(0)$ – այս ենթախմբին պատկանում են առաջին խմբի երկու տարբեր սյուների բոլոր հնարավոր տարբերությունները:
2. $S_2(0)$ – այս ենթախմբին պատկանում են 2-րդ խմբի առաջին սյունը և 2-րդ խմբի 2-րդ սյան և առաջին խմբի կամայական սյան տարբերությունները:
3. $S_3(0)$ – այս ենթախմբին պատկանում են առաջին խմբի կամայական սյան և 3-րդ խմբի 2 սյուների տարբերություններն և միայն 3-րդ խմբի 2 սյուների տարբերությունը:

Նախ ստուգենք, որ $S_1(0)$ ենթախմբի բոլոր սինդրոմները միմյանցից տարբեր են: Այս խմբի կամայական սինդրոմի համար նրա երկրորդ դիրքում կլինեն ± 1 կամ ± 2 արժեքները: Այս արժեքներից յուրաքանչյուրի դեպքում սինդրոմի երրորդ դիրքում գտնվող արժեքներն կլինեն տարբեր համաձայն $\{3, 2, 4, 4, 2\}$ բազմության հատկության: Օրինակ, եթե երկրորդ դիրքում ստացվել է 1, ապա դա նշանակում է, որ բոլոր համապատասխան տարբերությունները՝

$2 - 3 = 4, 4 - 2 = 2, 4 - 4 = 0, 2 - 4 = 3, 3 - 2 = 1$ կլինեն տարբեր

(3 էլեմենտը համապատասխանում է 0 ինդեքսին, իսկ վերջին դիրքում գրված 2 էլեմենտը՝ 4 և գիտենք, որ $0 - 4 = 1$ ըստ $mod 5$ - ի):

Նույն եղանակով կարող ենք ստուգել, որ $S_2(0)$ ենթախմբի կամայական սինդրոմի համար, եթե նրանք ունեն 2-րդ դիրքում նույն էլեմենտն ինչ $S_2(0)$ – ի մյուս սինդրոմները, ապա նրանք անպայման կտարբերվեն վերջին 2 դիրքերում գտնվող էլեմենտներով: Նույնը նաև $S_3(0)$ ենթախմբի սինդրոմների համար:

Հաջորդ քայլում պետք է ցույց տանք, որ $S(1)$ ենթաբազմության բոլոր սինդրոմները պետք է լինեն տարբեր:

Այս դեպքում բաժանենք $S(1)$ –ը 4 ենթախմբի՝

1. $S_1(1)$ – այն բաղկացած է առաջին խմբին պատկանող սյուներից, երկրորդ խմբի 1 –ով սկսվող 2-րդ սյունից և երրորդ խմբի 2 սյուներից:
2. $S_2(1)$ – այս ենթախմբին պատկանում են երկրորդ խմբի 3-րդ սյան և առաջին խմբի կամայական սյան տարբերությունները: Այն ներառում է նաև առաջին խմբի կամայական սյան և երկրորդ խմբի առաջին սյան բոլոր տարբերությունները:
3. $S_3(1)$ – այն բաղկացած է երկրորդ խմբի սյուների 1-ով սկսվող տարբե-րություններից:
4. $S_4(1)$ – այս ենթախմբին պատկանում են երկրորդ խմբի 3-րդ սյան և երրորդ խմբի 2 սյուների տարբերությունները: Նրան կպատկանեն նաև երրորդ խմբի 2 սյուների և երկրորդ խմբի 0-ով սկսվող առաջին սյան տարբերությունները:

Նախորդ ենթաբազմության համար բերված համանման եղանակով կարող ենք ցույց տալ, որ եթե $S(1)$-ի սինդրոմներն համընկնում են 2-րդ տեղում գտնվող էլեմենտով, ապա անպայման կտարբերվեն վերջին 2 դիրքերում գտնվող էլեմենտներով:

$S\ (2)$ ենթաբազմությունն իր հերթին կբաժանենք 5 ենթախմբի՝

1. $S_1(2)$ – այն բաղկացած է առաջին և երրորդ խմբերին պատկանող սյուների բոլոր հնարավոր գումարներից:
2. $S_2(2)$ – այս ենթախմբին պատկանում են երկրորդ խմբին պատկանող սյուների բոլոր տարբերություններն, որոնք սկսվում են 2 էլեմենտով:
3. $S_3(2)$ – բաղկացած է երկրորդ խմբի 1-ով սկսվող 2-րդ սյան և առաջին կամ երրորդ խմբի կամայական սյան գումարներից:

4. $S_4(2)$ – այն ներառում է երկրորդ խմբի 3-րդ սյան և առաջին կամ երրորդ խմբի կամայական սյան ժխտված գումարները:

5. $S_5(2)$ - այն ներառում է առաջին կամ երրորդ խմբի կամայական սյան և երկրորդ խմբի վերջին սյան բոլոր հնարավոր տարբերությունները:

Կրկին կարող ենք ցույց տալ, որ եթե $S(2)$ ենթաբամզության սինդրոմները ունեն նույն երկրորդ էլեմենտը, հետևում է որ նրանք անպայման կտարբերվեն վերջին 2 դիրքերում գտնվող էլեմենտներով: Այս քայլով ավարտվում է թեորեմի ապացույցը:

Թեորեմի այս ապացույցը կրում է միայն ֆորմալ բնույթ, ավելի պատկերավոր ցույց տալու համար, թե ինչ մոտեցում է ընկած այս տիպի ստուգող մատրիցների կառուցման հիմքում: Աշխատանքի երրորդ գլխում կներկայացվի ծրագիր գրված C++ ծրագրավորման լեզվով, որը ստուգում է արդյոք տրված ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված կոդը Z_A օղակում հանդիսանում է կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդ թե ոչ:

Հիմա ապացուցենք ևս մեկ լեմմա, որի միջոցով ցույց կտանք, որ Z_5 օղակում կառուցված կոդը բավավարարում է օպտիմալության առաջին պայմանին:

Լեմմա 2.2.1 Z_5 օղակում դիտարկված այս $\boldsymbol{C}(12,8)$ գծային կոդը ներկայացված H մատրիցի միջոցով, որն ուղղում է ± 1 ամպլիտուդայով մինչև 2 սխալ, օպտիմալ է այն իմաստով, որ այն պարունակում է մինիմալ քանակով ստուգող զույգության սիմվոլներ:

Ապացույց: Քանի որ այս կոդը կարողանում է ուղղել ± 1 ամպլիտուդայով մինչև 2 սխալ, ապա բոլոր հնարավոր կոմբինացիաների քանակը, որոնք կարող են ուղղվել հավասար կլինի.

$$(1 + 12 * 2 + (12 choose 2) * 4) = 289,$$

Այս պարագայում կունենանք, որ $289 * 5^8 <= 5^{12}$ և հնարավոր լավագույն կոդի հզորությունը կլինի $<= 5^{12}/289 < 5^9$:

Հետևաբար այս կոդի օգնությամբ կարող ենք ուղղել 288 հնարավոր սխալ: 289 –րդ սինդրոմը դա $(0,0,0,0)$ սինդրոմն է, որը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ սխալ տեղի չի ունեցել:

Աշխատանքի հաջորդ պարագրաֆում օգտագործելով տվյալ մոտեցումը կառուցվելու են նոր օպտիմալ կրկնակի ± 1 ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդեր Z_7 և Z_9 օղակներում, որոնք ունեն ավելի մեծ երկարություն քան Z_5 օղակում կառուցված կոդը և հանդիսանում են օպտիմալ այն իմաստով, որ պարունակում են մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ:

2.3 Z_7 և Z_9 օղակներում ± 1 մեծությամբ կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերի կառուցումներ

Նախորդ պարագրաֆի շրջանակներում մենք կառուցեցինք ասիմետրիկ կրնակի ±1 մեծության սխալ ուղղող կոդ Z_5 օղակում, որը ուներ 4 ստուգող սիմվոլ և 8 ինֆորմացիոն սիմվոլներ: Այդ կոդը հանդիսանում է օպտիմալ կոդ այն պայմանով, որ պարունակում է մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ: Հարց է առաջանում կարող ենք արդյոք կառուցել նմանատիպ կոդեր ավելի մեծ մեծություն ունեցող օղակներում Z_7, Z_9 և այլն: Ինչպես նշեցինք նախորդ պարագրաֆում տվյալ կոդերն ավելի նպատակահարմար է ներկայացնել նրանց ստուգող մատրիցների օգնությամբ: Այդ ստուգող մատրիցների կառուցման հիմքում ընկած է այնպիսի մի ամբողջ թվերի հաջորդականություն գտնելու գաղափարը, որի ըստ դիտարկած բոլոր հեռավորությունների նրա 2 էլեմենտների տարբերությունները միշտ կլինեն տարբեր: Հետևաբար այլ օղակներում ասիմետրիկ փոքր ամպլիտուդայով կոդեր կառուցելու համար մեկ հանգում ենք մեկ այլ խնդրի, այն է՝ գտնել նմանատիպ բազմություններ տվյալ օղակներում: Մենք այդ խնդիրը կլուծենք օգտվելով համակարգչային ծրագրից: Պետք է գրենք այնպիսի մի ծրագիր, որն անցնի այդ օղակի բոլոր մեզ անհրաժեշտ երկարությամբ հաջորդականությունների վրայով և հերթականությամբ ստուգի այն պայմանները, որոնց պետք է բավարարի տվյալ հաջորդականությունը: Ճիշտ է, հնարավոր է, որ տրված օղակում մենք ընդհանրապես չկարողանանք գտնել մեզ անհրաժեշտ երկարությամբ այդպիսի հաջորդականություն, ինչպես կտեսնենք աշխատանքի հաջորդ հատվածում մենք կհանգենք նման խնդրի Z_9 օղակը դիտարկելուց: Այդ դեպքում արդեն կփորձենք կիրառել ալտերնատիվ լուծումներ խնդիրը լուծելու համար: Աշխատանքի այս հատվածում կներկայացնենք Z_7 և Z_9 օղակներում փոքր ամպլիտուդայով կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերի կառուցումներ, որոնք կբավարարեն այս տիպի կոդերի առաջ դրված օպտիմալության առաջին պայմանին:

2.3.1 $C\ (16, 12)$ օպտիմալ կոդի կառուցում Z_7 օղակում

Մեր խնդիրը կայանում է նրանում, որ կառուցենք այնպիսի կոդ, որը բավարարի օպտիմալության առաջին պայմանին և կարողանա ուղղել ±1 մեծությամբ կրնակի սխալներ Z_7 օղակում: Դրա համար պետք է կառուցենք H ստուգող մատրիցը, այնպես որ նրա սյուների գումարման և հանման արդյունքում ստացված բոլոր սինդրոմները լինեն միմյանցից տարբեր$\left(\pm h_i \pm\ h_j, \text{որտեղ}\ \left(\ h_i \neq \pm h_j\ \right)\right)$: Այս տեսակ մատրից կառուցելու համար մեզ նախևառաջ պետք է գտնել այնպիսի մի բազմություն Z_7 օղակում, որ ըստ դիտարկած բոլոր հեռավորությունների նրա 2 էլեմենտների տարբերությունները միշտ լինեն տարբեր. օրինակ Z_5-ի համար դա $\{3,2,4,4,2\}$ բազմություններ: Համապատասխան ծրագրի միջոցով մենք ստացել ենք $\{4,3,6,6,3,4,2\}$ 7 երկարությամբ բազմությունը, որը բավարարում է այդ պայմաններին: Օրինակ՝ 1- հեռավորության դեպքում բոլոր համապատասխան՝

$$\left(3 – 4 = \mathbf{6},\ 6 - 3\ = \mathbf{3},\ 6 - 6\ = \mathbf{0},\ 3 - 6 = \mathbf{4},\ 4 - 3\ = \mathbf{1},\ 2 - 4\ = \mathbf{5},\ 4 - 2\ = \mathbf{2}(mod7)\right)$$

տարբերությունները կլինեն միմյանցից տարբեր: Առաջին տեղում գրված 4-ն ունի 0 ինդեքս և վերջին տեղում գրված 2 – ն ունի 6 ինդեքս և հետևաբար $0 - 6\ = \ 1$ ըստ $(mod7)$-ի (բոլոր գործողությունները կատարված են ըստ $(mod7)$ – ի քանի որ մեր կոդը դիտարկված է Z_7 օղակում): Օգտվելով այդ բազմությունից մենք ստացել ենք H ստուգող մատրիցը, որով ներկայացված է Z_7 օղակում ±1 մեծությամբ կրնակի սխալներ ուղղող $C(16,12)$ օպտիմալ կոդը, որն ունի 12 ինֆորմացիոն և 4 ստուգող սիմվոլներ: Այս կոդը բավարարում է օպտիմալության այն պայմանին, որ պարունակում է մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ:

Այն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Մոտեցումը որով կառուցվել է այս մատրիցը, նույնն է ինչ Z_5 օղակում կառուցված $C(12,8)$ օպտիմալ կոդի համար: Մատրիցը բաղկացած է 3 մասերից, առաջին մասը ներառում է առաջին 7 սյուները ձախից վերցված, երկրորդ մասը հաջորդ 7 սյուները և երրորդը վերջին 2 սյուներն (այսպես կոչված մատրիցի պոչը): Առաջին և երկրորդ մասերի առաջին 2 տողերում դրված են 1-եր 2-ներ և Z_7 օղակի բոլոր ամբողջ թվերի բազմությունները $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ և $\{6,5,4,3,2,1,0\}$, իսկ երրորդ տողերում դրված է մեր ստացած բազմությունը: Հեշտությամբ կարելի է ստուգել, որ այս մատրիցի օգնությամբ ներկայացված կոդը հանդիսանում է ±1 մեծությամբ մինչև 2 սխալ ուղղող կոդ Z_7 օղակում: Դա կարելի է ցույց տալ օգտվելով նախորդ պարագրաֆում կառուցված $(12,8)$ օպտիմալ կոդի համար բերված ապացույցից կամ օգտվելով համակարգչային ծրագրերից, որոնք կներկայացվեն աշխատանքի երրորդ գլխում:

Լեմմա 2.3.1 Z_7 օղակում դիտարկված այս $C(16,12)$ գծային կոդը տրված H մատրիցի միջոցով, որն ուղղում է ±1 մեծությամբ մինչև 2 սխալ, օպտիմալ է այն իմաստով, որ այն պարունակում է մինիմալ քանակով ստուգող զույգության սիմվոլներ:

Ապացույց: Քանի որ այս կոդը կարողանում է ուղղել ±1 ամպլիտուդայով մինչև 2 սխալ, բոլոր հնարավոր կոմբինացիաների քանակը, որոնք կարող են ուղղվել հավասար կլինի՝

$$(1 + 16 * 2 + (16 choose 2) * 4) = 513:$$

Այս պարագայում կունենանք, որ $513 * 7^{12} <= 7^{16}$ և հնարավոր լավագույն կոդի հզորությունը կլինի՝

$$7^{16}/513 < 7^{13}:$$

Հետևաբար այս կոդի օգնությամբ կարող ենք ուղղել 512 հնարավոր սխալ:

513 –րդ սինդրոմը դա $(0,0,0,0)$ սինդրոմն է, որը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ սխալ տեղի չի ունեցել:

2.3.2 $C\ (20,16)$ օպտիմալ կոդի կառուցում Z_9 օղակում

Այս պարագրաֆի շրջանակներում մենք կկառուցենք օպտիմալ $C(20,16)$ կոդ Z_9 օղակում, որը կունենա 20-երկարություն, որից 16-ը կհանդիսանան ինֆորմացիոն սիմվոլներ, իսկ մնացած 4-ը ստուգող սիմվոլներ: Ինչպես նախորդ դեպքում այնպես էլ հիմա H ստուգող մատրիցը կառուցելու համար մեզ անհրաժեշտ է գտնել այնպիսի բազմություն, որ ըստ դիտարկած բոլոր հեռավորությունների նրա 2 էլեմենտների տարբերությունները միշտ լինեն տարբեր Z_9–ում: Բայց ի տարբերություն Z_7 օղակի դեպքում, երբ մենք ունեինք 7 երկարության նմանատիպ բազմություն, հիմա մեր բազմությունն ունի 8 երկարություն, քանի որ 9 չի հանդիսանում պարզ թիվ: Այդ բազմությունն ունի հետևյալ տեսքը՝ $\{7,3,2,4,4,2,3,7\}$: Այս բազմությունում ըստ դիտարկած բոլոր հեռավորությունների $(1,2,3,4\ldots)$ կամայական 2 էլեմենտների տարբերությունները միշտ կտարբերվեն: Օրինակ՝ 1-հեռավորության դեպքում համապատասխան տարբերությունները՝

$$\left(3-7=5,\ 2-3\ =8,\ 4-2\ =2,\ 4-4=0,\ 2-4\ =7,\ 3-2\ =1,\ 7-3\ =4\ (mod9)\right)$$

կլինեն բոլորը միմյանցից տարբեր (բոլոր գործողությունները կատարված են ըստ $mod9$ – ի): Նախորդ կառուցման ժամանակ H մատրիցի տողերում մենք գրել ենք հաջորդականություն, որը պարունակում եր Z_7 օղակի բոլոր էլեմենտները՝ $\{0,1,2,3,4,5,6\}$: Քանի որ տվյալ դեպքում մեր ստացած $\{7,3,2,4,4,2,3,7\}$ բազմությունն ունի 8 երկարություն, մենք կառուցման ժամանակ կօգտագործենք 8 նիշից բաղկացած հաջորդականություններ՝ $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ կամ $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$:

Այս դեպքում Z_9 օղակում ± 1 մեծությամբ կրնակի սխալներ ուղղող $C(20,16)$ օպտիմալ կոդի ստուգող մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}:$$

Մոտեցումը որով կառուցվել է այս մատրիցը, նույնն է ինչ Z_7 օղակում կառուցված $C(16,12)$ օպտիմալ կոդի համար: Մատրիցը բաղկացած է 3 մասերից, առաջին մասը ներառում է առաջին 8 սյուները ձախից վերցված, երկրորդ մասը հաջորդ 8 սյուները և երրորդը վերջին 4 սյուներն (այսպես կոչված մատրիցի պոչը): Առաջին և երկրորդ մասերի առաջին 2 տողերում դրված են 1-եր 2-ներ և Z_9 օղակի բոլոր ամբողջ թվերի հաջորդականությունները, բայց արդեն 8 երկարությամբ $\{7,6,5,4,3,2,1,0\}$ և $\{8,7,6,5,4,3,2,1\}$, իսկ երրորդ տողերում դրված է մեր ստացված բազմությունը: Քանզի մեր խնդիրը կայանում է նրանում, որպեսզի կառուցված կոդը լինի օպտիմալ, դրա համար տվյալ կոդի դեպքում անհրաժեշտ է, որ այն ունենա մինիմում 20 երկարություն, ուստի այս դեպքում պոչը բաղկացած է 4 սյուներից, ի տարբերություն նախորդ երկու դեպքերի, որտեղ այն բաղկացած էր 2 սյունակից :

Դրանք են հետևյալ սյուները՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}:$$

Հեշտությամբ կարելի է ստուգել, որ այս մատրիցի օգնությամբ ներկայացված կոդը կարող է ուղղել ± 1 մեծության մինչև 2 սխալ Z_9 օղակում: Դա կարելի է ցույց տալ օգտվելով $C(12,8)$ օպտիմալ կոդի համար բերված թեորեմի ապացույցից, ինչպես նաև օգտվելով համակարգչային ծրագրից, որը կներկայացվի աշխատանքի երրորդ գլխում:

Լեմմա 2.3.2 Z_9 օղակում դիտարկված այս $C(20,16)$ գծային կոդը տրված H մատրիցի միջոցով, որն ուղղում է ± 1 ամպլիտուդայով մինչև 2 սխալ, օպտիմալ է այն իմաստով, որ այն պարունակում է մինիմալ քանակով ստուգող զույգության սիմվոլներ:

Ապացույց: Քանի որ այս կոդը կարողանում է ուղղել ± 1 ամպլիտուդայով մինչև 2 սխալ, բոլոր հնարավոր կոմբինացիաների քանակը, որոնք կարող են ուղղվել հավասար կլինի՝

$$(1 + 20 * 2 + (20\ choose\ 2) * 4) = 801:$$

Այս պարագայում կունենանք, որ $801 * 9^{16} \leq 9^{20}$ և հնարավոր լավագույն կոդի հզորությունն կլինի՝

$$9^{20}/801 < 9^{17}:$$

Հետևաբար այս կոդի օգնությամբ կարող ենք ուղղել 800 հնարավոր սխալ:

801–րդ սինդրոմը դա $(0, 0, 0, 0)$ սինդրոմն է, որը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ սխալ տեղի չի ունեցել:

2.4 $C(2N, 2N-6)$ կոդերի կառուցումներ հիմնված $C(N, N-4)$ օպտիմալ կոդերի վրա

Այս պարագրաֆի շրջանակներում մենք կներկայացնենք մի նոր մեթոդ, որի միջոցով հիմնվելով մեզ արդեն հայտնի $C(N, N-4)$ օպտիմալ կոդերի վրա, կարող ենք կառուցել $C\ (2N, 2N-6)$՝ երկու անգամ ավելի մեծ երկարություն ունեցող կոդեր ավելացնելով ընդամենը 2 ստուգող սիմվոլ: Այս կոդերը նույնպես կհանդիսանան Z_n օղակում ± 1 ամպլիտուդայով կրկնակի սխալներ ուղղող կոդեր: Դիցուք $C(N, N-4)$ օպտիմալ կոդ է Z_n օղակում: Մեր կառուցած նոր $C\ (2N, 2N-6)$ կոդերի ստուգող H մատրիցը պետք է ունենա 6 տող և $2N$ հատ սյուն, որտեղ առաջին 4 տողերը հանդիսանում են $C(N, N-4)$ կոդի ստուգող մատրիցի 4 տողերը, իսկ $2N$

հատ սյուներն իրենցից ներկայացնում են $C(N,N-4)$ կոդի N սյուները կրկնած 2 անգամ: Փորձենք կառուցել H մատրիցին ավելացված 2 տողերը: Կնշանակենք $\boldsymbol{group}$ **1** և $\boldsymbol{group}$ **2**-ով համապատասխանաբար ավելացված 2 տողերի առաջին N և վերջին N սյուները: $Group$ 1–ի առաջին տողում ձախից հերթով դնում ենք n հատ 2 և n հատ 1, ապա $N-2n$ հատ մեկ այլ ամբողջ թիվ x (տարբեր (1,2,3,4) –ից) Z_n–ից: Հետո $group$ 1-ի երկրորդ տողում կդնենք հերթով Z_n օղակի բոլոր ամբողջ թվերը $\{0,1,\ldots\, n-1\}$ կրկնելով 2 անգամ, ապա նույն բազմության առաջին $N-2n$ կոմպոնենտները: Համապատասխանաբար $group$ 2 – ի երկրորդ տողում կդնենք 3 և 4 թվերը կրկնելով n անգամ, և մնացած դիրքերում նույն x ամբողջ թիվը, իսկ առաջին տողում կկրկնենք $group$ 1-ի երկրորդ տողը: Միակ պայմանին, որ պետք է բավարարի x ամբողջ թիվն այն է, որ՝

$$x + x \neq 1 \ (mod\ n):$$

Վերը նշված նկարագրությունից հետևում է, որ մեր կառուցած նոր $C\ (2N, 2N-6)$ կոդի ստուգող մատրիցը պետք է ունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{array}{ccc} Group\ 1 & | & Group\ 2 \\ C\ (N,N\ -\ 4) & & C\ (N,N\ -\ 4) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & \ldots & 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 & x & x & \ldots & 0 & 1 & \ldots & n-1 & 0 & 1 & \ldots & n-1 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & n-1 & 0 & 1 & \ldots & n-1 & 0 & 1 & \cdots & 3 & 3 & \ldots & 3 & 4 & 4 & \ldots & 4 & x & x & \ldots \end{bmatrix}$$

Այժմ կարող ենք ապացուցել հետևալ թեորեմը.

Թեորեմ 2.4.1 Տրված $C\ (N,N\ -\ 4)$ օպտիմալ կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդի համար միշտ կարող ենք կառուցել նոր $C\ (2N, 2N-6)$ կոդ ավելացնելով 2 ստուգող սիմվոլ, որը կունենա երկու անգամ ավելի մեծ երկարություն և իր հերթին նույնպես կհանդիսանա կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդ:

Ապացույց: Այս թեորեմն ապացուցելու համար նախևառաջ պետք է ցույց տանք, որ երկու խմբերի բոլոր սյուների հետ կատարված գումարման և հանման գործողությունների արդյունքում ստացված բոլոր սինդրոմները, որոնք բաղկացած են 6 կոմպոնենտներից, պետք է լինեն միմյանցից տարբեր: Բաժանենք $group\ 1$ – ի բոլոր սյուների բազմությունը 3 ենթախմբի: Առաջին ենթախումբը ($subgroup\ 1.1$) կպարունակի առաջին 5 սյուները վերցված ձախից, որոնց առաջին կոմպոնենտը 2 է, երկրորդ ենթախումբը ($subgroup\ 1.2$) կպարունակի հաջորդ 5 սյուները, որոնց առաջին կոմպոնենտը 1 է, իսկ վերջին երրորդ ենթախումբը ($subgroup\ 1.3$) կպարունակի վերջին սյուները, որոնց առաջին կոմպոնենտը x – ն է: Համապատասխանաբար, նույն ձևով 3 ենթախմբի կբաժանենք $group\ 2$ – ի բոլոր սյուների բազմությունը ($subgroup\ 2.1, 2.2$ և 2.3):

Մենք կարիք ունենք դիտարկելու միայն այն դեպքերը, երբ սինդրոմի առաջին 4 կոմպոնենտները ստացվել են նույնը, իսկ դա հնարավոր է քանի որ մատրիցի երկու կողմերում մենք ունենք դրված նույն $C\ (N, N-4)$ կոդի ստուգող մատրիցը: Թեորեմը կապացուցենք միայն այն դեպքի համար, երբ առաջին սխալն ունի $+1$ մեծություն, իսկ երկրորդը՝ -1, մնացած դեպքերի համար ապացույցը կկատարվի նույն մոտեցումով:

Դիտարկենք հնարավոր 3 դեպքերը՝

1) Ենթադրենք 2 սխալներն էլ տեղի են ունեցել առաջին խմբում: Քանի որ H ստուգող մատրիցի առաջին 4 տողերում ունենք միևնույն կոդը դրված 2 անգամ, մենք չենք կարող իմանալ, թե որ խմբում են սխալները տեղի ունեցել: Դրա համար պետք է դիմենք ավելացված 2 տողերի օգնությանը: Այստեղ հնարավոր են 3 դեպքեր՝

1.1) Առաջին դեպքում պետք է քննարկենք այն դեպքը, երբ սխալները տեղի են ունեցել $subgroup\ 1.1$-ում, պետք է ստուգենք արդյոք դրանք տեղի են ունեցել $subgroup\ 1.1$-ում թե $subgroup\ 2.1$–ում: Այս դեպքում ստացված սինդրոմի առաջին կոմպոնենտում կունենանք միշտ 0 (քանի որ ունենք գրված n հատ 2), սակայն $subgroup$ 2.1–ում դա հնարավոր չէ քանի որ ունենք $\{0, 1, \ldots\ n-1\}$ բազմությունը, և հետևաբար սինդրոմները միշտ կլինեն տարբեր:

1.2) Երկրորդ դեպքում քննարկենք այն դեպքը, երբ սխալներից առաջինը տեղի է ունեցել $subgroup$ 1.1-ում, իսկ երկրորդը $subgroup$ 1.2–ում: Այս դեպքում սինդրոմի առաջին կոմպոնենտում միշտ կունենանք 1, իսկ եթե սխալները տեղի ունեցած լինեն $subgroup$ 2.1-ում և 2.2 –ում երկրորդ կոմպոնենտում միշտ կունենանք -1 այսինքն՝ 4: Սինդրոմները միշտ կտարբերվեն քանի որ մնացած 2 դիրքերում մենք միշտ կունենանք նույն թվերը (քանի որ $group$ 1 –ի երկրորդ տողը համընկնում է $group$ 2 – ի առաջին տողի հետ):

1.3) Եթե սխալներից մեկը տեղի է ունեցել $subgroup$ 1.3–ում, ապա եթե մյուսը տեղի է ունեցել $subgroup$ 1.1-ում սինդրոմները միշտ կտարբերվեն քանի որ $subgroup$ 1.1-ում առաջին դիրքում ունենք 2-ներ, իսկ $subgroup$ 2.1- ի բոլոր սյուների երկրորդ դիրքում ունենք 3-ներ, իսկ $subgroup$ 1.3–ում և $subgroup$ 2.3–ում ունենք միևնույն x կոմպոնենտը: Ինչպես նախորդ 1.2 դեպքում այնպես էլ հիմա մնացած 2 կոմպոնենտներում կունենանք նույն թվերը, քանի որ group 1-ի երկրորդ տողը համընկնում է $group$ 2–ի առաջին տողի հետ: Այն դեպքում, երբ մյուս սխալը տեղի ունեցած լինի $subgroup$ 1.2 կամ $subgroup$ 2.2–ում ապացույցը կկատարվի միևնույն մոտեցումով:

Այսպիսով ապացույցի առաջին մասն ավարտված է:

2) Ապացույցի երկրորդ մասում կենթադրենք, որ սխալներից մեկը տեղի է ունեցել $group$ 1–ում, իսկ մյուսն $group$ 2 –ում: Այստեղ կրկին հնարավոր են 3 դեպքեր՝

2.1) Դիցուք սխալներից մեկը տեղի է ունեցել $subgroup\ 1.1$-ում, իսկ երկրորդը $subgroup\ 2.1$-ում: Քանի որ H ստուգող մատրիցի առաջին 4 տողերում ունենք միևնույն սյուները հնարավոր են նաև սխալները տեղի ունեցած լինեն միևնույն խմբում: Կրկին մեզ օգնության են հասնում ավելացված երկու տողերը:

Եթե երկուսն էլ տեղի ունեցած լինեն $subgroup\ 1.1$-ում, ապա սինդրոմի առաջին կոմպոնենտում միշտ կունենանք 0, բայց մեր դիտարկած դեպքում 0 կունենանք միայն այն դեպքում, երբ սխալը լինի $subgroup\ 2.1$– ի 2-ով սկսվող երրորդ սյան մեջ: Այս սինդրոմները կտարբերվեն այն հանգամանքի շնորհիվ, որ $subgroup\ 1.1$– ի երրորդ սյան երկրորդ կոմպոնենտում 2 – է, իսկ $subgroup\ 2.1$– ի երրորդ սյան երկրորդ կոմպոնենտում ՝ 3 (Իսկ եթե երկու սխալներն էլ տեղի ունեցած լինեն ոչ թե $subgroup\ 1.1$-ում այլ $subgroup\ 2.1$-ում ապացույցը կկատարվի նույն ձևով ուղակի հիմա արդեն սինդրոմի երկորդ կոմպոնենտում միշտ կունենանք 0):

2.2) Հիմա դիտարկենք այն դեպքը, երբ սխալներից առաջինը տեղի է ունեցել $subgroup\ 1.1 -$ ում, իսկ երկրորդը $subgroup\ 2.2$-ում: Եթե երկուսնել լինեն $group\ 1$-ում, այսինքն $subgroup\ 1.1$-ում և $subgroup\ 1.2$-ում, ապա սինդրոմի առաջին կոմպոնենտում միշտ կունենանք 1, իսկ մեր դեպքում 1 հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ սխալը լինի $subgroup\ 2.2$–ի 1-ով սկսվող երկրորդ սյան մեջ: Այս սինդրոմները կտարբերվեն այն փաստով, որ $subgroup\ 2.2$–ի երկրորդ սյան երկրորդ կոմպոնենտում ունենք 4, իսկ $subgroup\ 1.2$-ի երկրորդ սյան երկրորդ կոմպոնենտում՝ 1: Եթե երկու սխալներն էլ տեղի ունենան $group\ 2$-ում, այսինքն $subgroup\ 2.1$-ում և $subgroup\ 2.2$-ում, ապա սինդրոմի երկրորդ կոմպոնենտում միշտ կունենանք -1 և ապացույցը կկատարվի նույն մոտեցումով: Ապացույցը նույն ճանապարհով կկատարվի նաև այն դեպքի համար, երբ սխալներն տեղի ունեցած լինեն $subgroup\ 2.1$-ում և $subgroup\ 1.2$-ում:

2.3) Վերջապես, եթե սխալներից մեկը տեղի է ունեցել $subgroup$ 1.1-ում կամ $subgroup$ 2.1-ում, իսկ մյուսը $subgroup$ 2.3-ում, ապա տարբերելու համար արդյոք նրանք եղել են նույն խմբի մեջ թե ոչ, պետք է օգտվենք այն փաստից, որ $subgroup$ 1.3 –ում և $subgroup$ 2.3-ում ունենք համապատասխան նույն տողերն ուղղակի շրջած՝ $\begin{pmatrix} x & x & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots \\ x & x & \cdots \end{pmatrix}$: Հետևաբար, երբ մենք $subgroup$ 1.1-ի և $subgroup$ 1.2-ի նույն սյուներից հանենք այդ սյունակները, ստացված սինդրոմները միշտ կլինեն տարբեր:

Այսպիսով ապացույցի երկրորդ մասը նույնպես կարող ենք համարել ավարտված:

3) Երրորդ վերջին դեպքում մենք կենթադրենք, որ սխալները տեղի են ունեցել 2 խմբերի միրնույն սյունակներում: Այս դեպքում մեր ստացած բոլոր սինդրոմների առաջին 4 կոմպոնենտները կլինեն 0 ՝ (0 0 0 0) և նրանք կլինեն $2N$ հատ: Այս դեպքում ևս ստացված բոլոր սինդրոմները կլինեն տարբեր քանի որ մենք $group$ 1 – ի և $group$ 2-ի ընտրությունը կատարել ենք այնպես, որ նրանցից ամեն մեկը հանդիսանում է մեկ սխալ ուղղող կոդ և քանի որ այս դեպքում մենք ունենք երկու խմբերում էլ մեկական սխալ նույն կոմպոնենտում, ապա դրանք հեշտությամբ կարող են գտնվել և հետագայում նաև ուղղվել:

Այս անալիզը լիովին ավարտում է այս թեորեմի ապացույցը:

Աշխատանքի այս հատվածում մենք կներկայացնենք որոշ արդյունքներ, որոնք ստացվել են օգտագործելով նախորդ պարագրաֆում նկարագրված մեթոդը: Մասնավորապես կառուցվել են $C(24, 18)$, $C(32, 26)$ և $C(40, 34)$ կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդերը, որոնք ինչպես տեսնում ենք ի տարբերություն այս աշխատանքի մեջ կառուցված այլ կոդերի ունեն 2 անգամ ավելի մեծ երկարություն և 4-ի փոխարեն 6 ստուգող սիմվոլներ:

Ներկայացնենք այդ կոդերը վերը նշված հերթականությամբ՝

1. C (24, 18)

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C\,(24,18)$ – կրկնակի ±1 սխալ ուղղող կոդը կառուցված Z_5 օղակում, որը ներկայացված է H_5 ստուգող մատրիցի օգնությամբ, ստացվել է $(12,8)$ օպտիմալ կոդի միջոցով, որին ավելացվել է 2 ստուգող սիմվոլ, դրանց համապատասխան նրա H_5 ստուգող մատրիցին ավելացվել են հետևյալ 2 տողերը՝

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. C (32, 26)

$$H_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$C\,(32,16)$ – կրկնակի ±1 սխալ ուղղող կոդը կառուցված Z_7 օղակում, որը ներկայացված է H_7 ստուգող մատրիցի օգնությամբ, ստացվել է $(16,12)$ օպտիմալ կոդի միջոցով, որին ավելացվել է 2 ստուգող սիմվոլ, դրանց համապատասխան նրա H_7 ստուգող մատրիցին ավելացվել են հետևյալ 2 տողերը՝

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

3. C (40, 34)

$$H_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 & 1 & 2 & 4 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 & 3 & 7 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$C\ (40,34)$ – կրկնակի ±1 սխալ ուղղող կոդը Z_9 օղակում, որը ներկայացված է H_9 ստուգող մատրիցի օգնությամբ, ստացվել է $(20,16)$ օպտիմալ կոդի միջոցով, որին ավելացվել է 2 ստուգող սիմվոլ, դրանց համապատասխան նրա H_9 ստուգող մատրիցին ավելացվել են հետևյալ 2 տողերը՝

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Այս ստացված կոդերը հանդիսանում են քվազի-օպտիմալ կոդեր կառուցված Z_m տարբեր մեծությունների օղակներում, որոնք կարողանում են ուղղել կրկնակի ± 1 մեծության սխալներ շատ երկար հաղորդագրությունների մեջ:

2.5 Կրկնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող կոդերի կառուցումներ հիմնված $C(N, N-4)$ օպտիմալ կոդերի վրա

Նախորդ պարագրաֆների շրջանակներում մենք կառուցեցինք փոքր ամպլիտուդայով կրնակի ±1 մեծության սխալ ուղղող օպտիմալ կոդեր Z_5 ,Z_7 և Z_9 օղակներում, որոնք ունեին ընդամենը 4 ստուգող սիմվոլներ: Այդ կոդերը հանդիսանում էին օպտիմալ կոդեր այն պայմանով, որ պարունակում են մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ: Հարց է առաջանում կարող ենք արդյոք կառուցել նմանատիպ կոդեր, որոնք կկարողանան ուղղել ոչ միայն ± 1 այլ նաև ± 2 միևնույն մեծությամբ կրկնակի սխալներ: Արդյոք կկարողանան տարբերել այն դեպքերը, երբ սխալները տեղի կունենան հաղորդագրության միևնույն կոմպոնենտներում, բայց տարբեր մեծություններով: Այս պարագրաֆի շրջանակներում մենք կտանք այս և այլ հարցերի պատասխանները կախված կրկնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող կոդերի հետ: Կկառուցվեն նոր օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդեր տարբեր մեծության օղակներում, որոնք կկարողանան ուղղել միևնույն մեծությամբ $(\pm 1 \; կամ \pm 2)$ բոլոր կրկնակի սխալները: Այս դեպքում մենք կունենանք սխալների հնարավոր 8 դեպքեր՝

- $+1 \; և + 1$
- $+1 \; և - 1$
- $-1 \; և + 1$
- $-1 \; և - 1$
- $+2 \; և + 2$
- $+2 \; և - 2$
- $-2 \; և + 2$
- $-2 \; և - 2$

Նոր կառուցված կոդերը պետք է կարողանան ուղղել այս տիպի բոլոր սխալները: Ինչպես գիտենք, որպիսի կոդը հանդիսանա կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդ, նրա ստուգող մատրիցի բոլոր սյուների հետ գումարման և հանման գործողությունների արդյունքում ստացված սինդրոմները պետք է բավարար էին հետևյալ 2 պայմաններին՝

$$h_{ij} \neq \pm h_{im} \qquad\qquad j \neq m$$

$$\pm h_{ij} \pm h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \qquad\qquad (j,m) \neq (l,k)$$

Իսկ տվյալ դեպքում, որպիսի կոդը հանդիսանա նաև կրկնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող կոդ, անհրաժեշտ է, որպեսզի բավարարվեն նաև հետևյալ 2 պայմանները՝

$$\pm 2 * h_{ij} \neq \pm h_{im} \qquad\qquad j \neq m$$

$$\pm 2 * h_{ij} \pm 2 * h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \qquad\qquad (j,m) \neq (l,k)$$

Նախ կառուցենք Z_5 օղակում կրկնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող $C(13,8)$ կոդը, որի հիմք հանդիսանում է 2.2 պարագրաֆում ներկայացված օպտիմալ $C(12,8)$ կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդը:

2.5.1 Կրնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող օպտիմալ $C(13,8)$ կոդի կառուցում Z_5 օղակում

Մեր նպատակն է կառուցել կոդ, որը կկարողանա ուղղել ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ կրկնակի բոլոր սխալները (մասնավորապես վերը նշված սխալների բոլոր 8 դեպքերը): Նախ վերհիշենք 2.2 պարագրաֆում կառուցված օպտիմալ $C(12,8)$ կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդը, որը ներկայացված է նրա H ստուգող մատրիցի միջոցով՝

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Նոր կոդի կառուցման համար մենք պետք է նույնությամբ վերցնենք այս մատրիցի առաջին 10 սյունակները, դեն նետելով վերջին երկուսը՝

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Մենք գիտենք, որ այս մատրիցը հանդիսանում է կրկնակի ±1 սխալ ուղղող կոդի ստուգող մատրից, և հետևաբար նրա սյուներից առաջացած սինդրոմները բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$h_{ij} \neq \pm h_{im} \qquad\qquad j \neq m$$

$$\pm h_{ij} \pm h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \qquad\qquad (j,m) \neq (l,k)$$

Սակայն հնարավոր է լինեն համընկնումներ

$$\pm 2 * h_{ij} \pm 2 * h_{im} \text{ և } \pm h_{il} \pm h_{ik} \qquad\qquad (j,m) \neq (l,k)$$

սինդրոմներում: Այդ համընկնումներից խուսափելու համար մեզ անհրաժեշտ է կոդին ավելացնել ևս մեկ ստուգող սիմվոլ: Համապատասխանաբար կոդի ստուգող մատրիցին պետք է ավելացնել ևս մեկ տող (քանի որ գիտենք, որ գծային կոդերի դեպքում ստուգող մատրիցի տողերի քանակը համապատասխանում է այդ կոդի ստուգող սիմվոլների քանակին): Տվյալ կոդի դեպքում այդ տողը կլինի հետևյալը՝

$$[1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 4]:$$

Կոդի ստուգող մատրիցին այս տողն ավելացնելուց հետո նրա սյուների հետ գումարման և հանման գործողությունների արդյունքում ստացված բոլոր համապատասխան սինդրոմները կլինեն միմյանցից տարբեր՝

$$\pm 2 * h_{ij} \neq \pm h_{im} \qquad j \neq m$$

$$\pm 2 * h_{ij} \pm 2 * h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \quad (j,m) \neq (l,k):$$

Հետևաբար ստորև բերված H_5 ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված կոդը կառուցված Z_5 օղակում կհանդիսանա միևնույն մեծությամբ կրկնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող կոդ՝

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ինչպես տեսնում ենք, ի տարբերություն $C(12,8)$ կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդի, այն 4-ի փոխարեն ունի 5 ստուգող սիմվոլ: Սակայն այս կոդը չի բավարարում օպտիմալության այն պայմանին ըստ որի այն պետք է ունենա մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ: Որպեսզի մեր ստացած կոդը լինի օպտիմալ պետք է որ այն ունենա նվազագույնը 13 երկարություն 10-ի փոխարեն: Դրա համար մենք կոդի ստուգող մատրիցին պետք է ավելացնենք ևս 3 սյուն, որոնք գտնվել են օգտվելով համապատասխան համակարգչային ծրագրից:

Դրանք են հետևյալ սյունակները՝

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Այսպիսով մենք ստացանք օպտիմալ $C(13,8)$ կոդ, որը կարողանում է ուղղել ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ կրկնակի սխալներ Z_5 օղակում, որը ներկայացված է նրա H_5 ստուգող մատրիցի միջոցով՝

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Քանի որ այս կոդը կարողանում է ուղղել ± 1 և ± 2 ամպլիտուդաներով 1 կամ 2 սխալներ, հետևաբար բոլոր հնարավոր կոմբինացիաների քանակը, որոնք կարող են ուղղվել այս կոդի միջոցով հավասար կլինի՝

$(1 + 13 * 4 + (13 choose 2) * 8) = 677$

այս պարագայում կունենանք, որ $677 * 5^8 <= 5^{13}$ և հնարավոր լավագույն կոդի հզորությունը կլինի $5^{13}/677 < 5^9$, հետևաբար այն հանդիսանում է օպտիմալ այն իմաստով, որ պարունակում է մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ:

2.5.2 Կրնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող $C(17,12)$ կոդի կառուցում Z_7 օղակում

Այժմ կկառուցենք կոդ, որը նույնպես կկարողանա ուղղել ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ սխալներ, բայց արդեն Z_7 օղակում: Ի տարբերություն նախորդ պարագրաֆում կառուցված $C(13,8)$ կոդի, որը հանդիսանում էր օպտիմալ կոդ այն իմաստով, որ պարունակում էր մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ, այս $C(17,12)$ կոդը չի բավարարում այդ օպտիմալության պայմանին: Այս տիպի կոդերին մենք կանվանենք քվազի-օպտիմալ կոդեր:

Այս կոդի հիմքում ընկած է 2.3 պարագրաֆում կառուցված $C(16,12)$ կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող օպտիմալ կոդը, որը պարունակում է 4 – ստուգող և 12 - ինֆորմացիոն սիմվոլներ: Վերհիշենք այդ կոդը, որը ներկայացված է նրա ստուգող մատրիցի միջոցով՝

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Նոր կոդի կառուցման համար մենք պետք է նույնությամբ վերցնենք այս մատրիցի առաջին 14 սյունակները, դեն նետելով վերջին երկուսը՝

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Ինչպես նախորդ դեպքում այս դեպքում ևս մենք պետք է ավելացնենք մեկ ստուգող սիմվոլ (համապատասխանաբար մեկ լրացուցիչ տող նրա ստուգող մատրիցին), որպեսզի խուսափենք սինդրոմների հնարավոր համընկնումներից:

Տվյալ դեպքում այդ տողը կլինի հետևյալը՝

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Կոդի ստուգող մատրիցին այս տողն ավելացնելուց հետո նրա սյուների հետ գումարման և հանման գործողությունների արդյունքում ստացված բոլոր համապատասխան սինդրոմները կլինեն միմյանցից տարբեր՝

$$\pm 2 * h_{ij} \neq \pm h_{im} \qquad\qquad j \neq m$$

$$\pm 2 * h_{ij} \pm 2 * h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \quad (j,m) \neq (l,k)$$

Հետևաբար ստորև բերված H_7 ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված կոդը կառուցված Z_7 օղակում կհանդիսանա միևնույն մեծությամբ կրկնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող կոդ՝

$$H_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Սակայն ի տարբերություն $\boldsymbol{C}(16,12)$ կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդի, տվյալ կոդը պարունակում է 5 – ստուգող և 9 - ինֆորմացիոն սիմվոլ: Մենք ցանկանում ենք, որպեսզի այս նոր կառուցված կոդը ունենա նույն քանակությամբ ինֆորմացիոն սիմվոլ որքան ունի $\boldsymbol{C}(16,12)$ – կոդը, այսինքն ՝12: Դրա համար մեզ անհրաժեշտ է որպեսզի այս կոդը պարունակի ևս 3 ինֆորմացիոն սիմվոլներ:

Այդ իսկ նպատակով մենք կավելացնենք կոդի H_7 ստուգող մատրիցին ևս 3 սյունակ՝

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Այսպիսով մենք ստացանք $C(17,12)$ կոդ, որը կարողանում է ուղղել ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ կրկնակի սխալներ Z_7 օղակում, որը ներկայացված է նրա H_7 ստուգող մատրիցի միջոցով՝

$$H_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 6 & 5 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}:$$

2.5.3 Կրնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող $C(21,16)$ կոդի կառուցում Z_9 օղակում

Այս պարագրաֆի շրջանակներում կկառուցենք կոդ, որը նույնպես կկարողանա ուղղել ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ սխալներ, բայց արդեն Z_9 օղակում: Այս կոդը ևս հանդիսանում է քվազի-օպտիմալ կոդ Z_9 օղակում:

Այս կոդի հիմքում ընկած է 2.3 պարագրաֆում կառուցված $C(20,16)$ կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող օպտիմալ կոդը, որը պարունակում է 4 – ստուգող և 16 - ինֆորմացիոն սիմվոլներ:

Վերհիշենք այդ կոդը, որը ներկայացված է նրա ստուգող մատրիցի միջոցով՝

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 6 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}:$$

Նոր կոդի կառուցման համար մենք պետք է նույնությամբ վերցնենք այս մատրիցի առաջին 16 սյունակները, դեն նետելով վերջին չորսը՝

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}:$$

Ինչպես նախորդ դեպքերում այս դեպքում ևս մենք պետք է ավելացնենք մեկ ստուգող սիմվոլ (համապատասխանաբար մեկ լրացուցիչ տող նրա ստուգող մատրիցին), որպիսի խուսափենք սինդրոմների հնարավոր համընկնումներից:

Տվյալ կոդի դեպքում այդ տողը կլինի հետևյալը՝

$$[2 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \quad 1 \quad 8 \quad 7 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \quad 1 \quad 8 \quad 7 \quad 3]:$$

Այս տողի ավելացումից հետո արդեն մատրիցի բոլոր սյունակները կբավարարեն հետևյալ պայմաններին՝

$$\pm 2 * h_{ij} \neq \pm h_{im} \qquad j \neq m$$

$$\pm 2 * h_{ij} \pm 2 * h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \qquad (j,m) \neq (l,k)$$

Ստորև բերված H_9 ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված կոդը կառուցված Z_9 օղակում կհանդիսանա միևնույն մեծությամբ կրկնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող կոդ՝

$$H_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 8 & 7 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Ի տարբերություն $C(20,16)$ կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդի, տվյալ կոդը պարունակում է 5 – ստուգող և 11- ինֆորմացիոն սիմվոլ: Սակայն այս նոր կառուցված կոդը պետք է ունենա նույն քանակությամբ ինֆորմացիոն սիմվոլ որքան ունի $C(20,16)$ – կոդը, այսինքն ՝ 16: Դրա համար մենք ավելացնում ենք կոդի H_9 ստուգող մատրիցին ևս 5 սյունակ, որոնք ստացվել են օգտվելով համապատասխան համակարգչային ծրագրից՝

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 8 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Այսպիսով մենք ստացանք $C(21,16)$ կոդ, որը կարողանում է ուղղել ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ կրկնակի սխալներ Z_9 օղակում, որը ներկայացված է նրա H_9 ստուգող մատրիցի միջոցով՝

$$H_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 & 8 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 2 & 3 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 7 & 3 & 7 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 8 & 7 & 3 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 8 & 7 & 3 & 3 & 7 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Այսպիսով այս գլխի շրջանակներում մենք կառուցեցինք տարբեր մեծությամբ օղակներում օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդեր, որոնք կարողանում են ուղղել միայն ± 1 մեծությամբ կրկնակի սխալներ կամ ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ սխալներ տրված օղակում: Նրանցից ոմանք բավարարում են այն օպտիմալության պայմանին, ըստ որի պետք է պարունակեն մինիմալ քանակությամբ ստուգող սիմվոլներ, իսկ մնացածը չեն բավարարում այդ պայմանին ուստի հանդիսանում են քվազի-օպտիմալ կոդեր:

Աշխատանքի հաջորդ երրորդ գլխում մենք կներկայացնենք այս կոդերով հաղորդագրությունների կոդավորման և ապակոդավորման (սխալների հայտնաբերման և ուղղման) պրոցեսները և նրանց ծրագրային իրականացումը: Բացի այդ կներկայացնենք ևս մեկ ծրագիր գրված C++ ծրագրավորման փաթեթի միջոցով, որի օգնությամբ կկարողանանք ստուգել արդյոք տրված ստուգող մատրիցը հանդիսանում է ասիմետրիկ կրկնակի սխալներ ուղղող կոդի ստուգող մատրից թե ոչ:

ԳԼՈՒԽ 3

ԿՈԴԱՎՈՐՄԱՆ ԵՎ ԱՊԱԿՈԴԱՎՈՐՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄԸ ԵՎ ԻՐԱԿԱՆԱՑՈՒՄԸ

Աշխատանքի երրորդ գլխում կներկայացնենք այս կոդերով հաղորդագրությունների կոդավորման և ապակոդավորման (սխալների ուղղման) պրոցեսները ինչպես կրկնակի ± 1 մեծությամբ սխալներ ուղղող կոդերի դեպքում այլ նաև ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ սխալներ ուղղող կոդերի համար: Բացի այդ կներկայացնենք ևս մեկ ծրագիր գրված C++ ծրագրավորման փաթեթի միջոցով, որի օգնությամբ կկարողանանք ստուգել արդյոք տրված ստուգող մատրիցը հանդիսանում է փոքր ամպլիտուդաներով կրկնակի սխալներ ուղղող կոդի ստուգող մատրից թե ոչ: Կներկայացվի նաև փոքր ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդերով կոդավորման և ապակոդավորման ալգորիթմների ծրագրային իրականացումը: Ստացված արդյունքներն ավելի պատկերավոր ներկայացնելու համար կկառուցենք նաև MFC դիալոգային պատուհան, որի վրա տարբեր դաշտերում դուրս են բերվում մեր կոդի ստուգող, ծնող և կոմբինատոր-էքվիվալենտ մատրիցաները, հաղորրդագրության վեկտորը, սխալներ տեղի ունեցած կոմպոնենտների համարները և համապատասխան սինդրոմը:

3.1 Ներածություն

Աշխատանքի նախորդ գլուխներում մենք ներկայացրեցինք ասիմետրիկ փոքր ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդերը՝ նրանց գիտական նշանակությունները, կիրառությունները և տվյալ կոդերի մաթեմատիկական բնութագիրը: Կառուցվեցին նաև նոր օպտիմալ կոդեր, որոնք մինչ այժմ գիտությանը հայտնի չէին և որոնք ունեին բավականին մեծ երկարություններ: Մասնավորապես Z_9 օղակում կառուցված C $(40,34)$ կոդն ունի 40 երկարություն, որոնցից միայն 6-ն են հանդիսանում զույգության սիմվոլներ, այսինքն այդ կոդի միջոցով կարող ենք կոդավորել 34 սիմվոլ ունեցող հաղորդագրություններ և ուղղել նրանցում երկուական ±1 մեծությամբ սխալներ:

Աշխատանքի այս գլխում կներկայացվեն փոքր ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդերով էֆեկտիվ կոդավորման և սխալների ուղղման ալգորիթմները ինչպես կրկնակի ±1 մեծությամբ սխալներ ուղղող կոդերի դեպքում այլ նաև ±1 և ±2 միևնույն մեծությամբ սխալներ ուղղող կոդերի համար: Այդ ալգորիթմները կիրականացնենք ծրագրավորման լեզուների: Կներկայացվեն նաև ծրագրային ալգորիթմներ ասիմետրիկ կոդերի համար, որոնց միջոցով կարող ենք ստուգել արդյոք տրված ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված կոդը հանդիսանում է ասիմետրիկ ±1 կրկնակի սխալ ուղղող կոդ թե ոչ: Կիրականացնենք նաև մի ալգորիթմ, որի միջոցով կստանանք այդ մատրիցի սյուների հետ գումարման և հանման գործողությունների արդյունքում ստացված բոլոր սինդրոմների աղյուսակը, որի օգնությամբ էլ հետագայում պետք է իրականացվեն կոդավորման և ապակոդավորման պրոցեսները: Այդ ալգորիթմները կիրականացվեն C++ ծրագրավորման փաթեթի միջոցով և արդյունքներն ավելի պատկերավոր ներկայացնելու համար դրանք կցուցադրվեն MFC դիալոգային պատուհանի միջոցով:

3.2 Կոդավորման և ապակոդավորման ալգորիթմը կրկնակի սխալ ուղղող կոդերի համար

Այս համակարգում հաղորդագրությունը ներկայացվում է Z_m –ում n երկարությամբ վեկտորների միջոցով: Նրանց ընդհանուր քանակը կլինի m^n, իսկ կոդային վեկտորների քանակը՝ m^{n+k} որտեղ k – ն ստուգող սիմվոլների քանակն է: Նախորդ պարագրաֆներում մենք կառուցել ենք կոդեր, որոնք ներկայացվել են իրենց ստուգող մատրիցի օգնությամբ: Որպեսզի կարողանանք կոդավորել կամայական վեկտոր մեզ անհրաժեշտ է լինելու կառուցել նաև այդ կոդերի ծնող մատրիցաները: Դրա համար մեզ արդեն հայտնի ստուգող մատրիցը՝ H – ը պետք է ներկայացնենք նրան կոմբինատոր-էկվիվալենտ մատրիցի տեսքով բերված աստիճանային տեսքի:

Այդ տեսքը ստանալու համար պետք է կատարել տարրական գործողություններ H մատրիցի տողերի և սյուների հետ: Ստացված H' կոմբինատոր-էկվիվալենտ մատրիցը ևս կպահպանի H մատրիցի բոլոր առանձնահատկությունները (այսինքն բոլոր սինդրոմները կլինեն տարբեր՝ $h_{ij} \neq \pm h_{im}, \pm h_{ij} \pm h_{im} \neq \pm(h_{il} \pm h_{ik})$: Հետագայում H' մատրիցի միջոցով շատ ավելի հեշտ կարող ենք գտնել կոդի G ծնող մատրիցան. օգտվելով առաջին գլխում բերված թեորեմներից և սահմանումներից: Կատարենք վերը նշված գործողությունները նախորդ պարագրաֆում բերված (12,8) օպտիմալ կոդի H ստուգող մատրիցի համար:

H մատրիցի համար նրա կոմբինատոր-էկվիվալենտ մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 4 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Օգտվելով առաջին գլխում բերված թեորեմից կոդի ծնող մատրիցը գտնելու մասին, եթե տրված է նրա ստուգող մատրիցը բերված աստիճանային տեսքի (այսինքն եթե $H'=[-P^T\ I_{n-k}]$ որտեղ (I_{n-k} - ն (n-k) չափանի միավոր մատրից է, ապա $G = [I_k\ P]$ և $GH^T = 0$) կգտնենք մեր կոդի ծնող մատրիցան:

Այն կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Տեսնում ենք, որ G մատրիցի աջ կողմում ունենք I_{n-k} (այս դեպքում I_8) միավոր մատրիցը:

Կոդավորում: Գտնելով G ծնող մատրիցան կարող ենք կոդավորել մեր 5^8 հնարավոր վեկտորներից յուրաքանչյուրը: Ենթադրենք մեր վեկտորն է $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_8)$– վեկտորը, այն կոդավորելու համար պետք է բազմապատկենք G - ի բոլոր սյուներով սկսած առաջինից, արդյունքում կստանանք 12 չափանի **սիստեմատիկ կոդ**, որի առաջին չորս կոմպոնենտներն կլինեն ստուգող սիմվոլները, իսկ մնացած ութը կլինեն հենց մեր սկզբնական վեկտորի սիմվոլները՝ [35]

$$u = vG = (c_1, c_2, c_3, c_4, a_1, a_2, a_3, \dots, a_8),$$

որտեղ

$$c_j = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\, p_{ij}\right) mod5$$

Բոլոր գործողությունները կատարվում են ըստ մոդուլ 5-ի, քանի որ այս կոդը դիտարկված է Z_5 օղակի վրա:

Օրինակ. Փորձենք կոդավորել մի ինչ-որ վեկտոր:

Դիցուք ունենք $(\mathbf{2\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3\ 1\ 0})$ վեկտորը, որը կհանդիսանա մեր հաղորդագրությունը:

Առաջին ստուգող սիմվոլը գտնելու համար բազմապատկենք G - ի առաջին սյունով՝

$$c_1 = (2*2) + (4*4) + (4*0) + (3*2) + (3*1) + (3*2) + (1*1) + (0*0) =$$

$$= 4 + 16 + 0 + 6 + 3 + 6 + 1 + 0 = 36(mod5) = 1:$$

Նմանատիպ կերպով կգտնենք մնացած ստուգող սիմվոլները բազմապատկելով համապատասխան սյուներով: Արդյունքում կստացվի՝

$c_2 = 0,\ c_3 = 3,\ c_4 = 1$:

Կատարելով մյուս բազմապատկումները մեր մատրիցի մնացած սյուներով կստանանք ճիշտ և ճիշտ մեր վեկտորի կոմպոնենտները (քանի որ G – ն իր մեջ պարունակում է $[8 \times 8]$ չափի միավոր մատրից)։ Արդյունքում կստանանք 12 երկարությամբ կոդավորված վեկտոր՝ $(1\ 0\ 3\ 1\ 2\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3\ 1\ 0)$, որի առաջին 4 կոմպոնենտներում գտնվում են ստուգող սիմվոլները, իսկ հաջորդ 8-ում ինֆորմացիոն։

Սխալների ուղղում (Ապակոդավորում)։ Համոզվելու համար արդյոք եղել է սխալ կոդային վեկտորը փոխանցելուց հետո թե ոչ, և հետագայում այդ սխալն ուղղելու համար պետք է կատարենք հետևյալ գործողություններն.

1. Վեկտորը ստանալուց հետո այն բազմապատկում ենք H' մատրիցի տողերով, որպեսզի գտնենք $S = \boldsymbol{v} H'$ սինդրոմը։

   Եթե բոլոր բազմապատկումները կատարելուց հետո $S = (0\ 0\ 0\ 0)$, հետևում է որ ոչ մի սխալ փոխանցման ժամանակ տեղի չի ունեցել։

2. Եթե սինդրոմը ստացվել է ոչ զրոյական, հետևում է տեղի են ունեցել ինչ-որ քանակությամբ սխալներ։ Գիտենք, որ այս կոդի միջոցով կարող ենք ուղղել մինչև 2 սխալ ± 1 մեծության։ Ունենք 288 հատ իրարից տարբեր սինդրոմներ, որոնք ստացվել են H'մատրիցի սյուների գումարումից ու հանումից՝ $\pm h_i \pm h_j$ և որոնք մենք ունենք պահված նախապես ստացված աղյուսակում։ Հաշվելով ստացված սինդրոմը մենք միարժեք կերպով կարող ենք որոշել, թե որ 2 սյուների գումարման կամ հանման արդյունքում է այն ստացվել, որոնք իրենց հերթին ցույց են տալիս այն կոմպոնենտների համարները, որտեղ սխալ է տեղի ունեցել և սխալի ուղղությունը $(-$ ով թե $+$ ով)։

3. Գտնելով այդ կոմպոնենտները գումարում կամ հանում ենք նրանցից 1 (կախված սխալի ուղղությունից) և ստանում հենց սկզբնական ուղարկված

կոդային վեկտորը՝$(c_1, c_2, c_3, c_4, a_1, a_2, a_3, \dots, a_8)$: Ստանալու համար սկզբնական 8 երկարության վեկտորը նրանից կարտաքսենք առաջին 4 ստուգող սիմվոլներն և կստացվի $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_8)$ հաղորդագրությունը:

Օրինակ. Դիցուք վերևի օրինակում ստացված կոդային վեկտորը փոխանցելուց տեղի է ունեցել սխալ. $(1\ 0\ 3\ 1\ 2\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3\ 1\ 0)$ – կոդային վեկտորի փոխարեն տեղ է հասել $(1\ 0\ 3\ 1\ 2\ 4\ 4\ \mathbf{2}\ 3\ 3\ \mathbf{2}\ 0)$ վեկտորը: Նախ այն բազմապատկում ենք H' մատրիցի տողերով և արդյունքում ստանում ենք $(1\ 0\ 4\ 3)$ սինդրոմը: Հետո սինդրոմների աղյուսակում գտնում ենք նրան համապատասխան սյուները, որոնցից այն ստացվել է.

դրանք են -8 և 11 :

Այսինքն $(1\ 0\ 4\ 3)$ սինդրոմը ստացվել է H' մատրիցի ժխտված 8-րդ սյան և 11 –րդ սյան գումարից՝

$$\begin{matrix} -3 & +4 \\ -4 & +4 \\ -4 & +3 \\ 0 & +3 \end{matrix} = \begin{matrix} +1 \\ 0 \\ -1 \\ +3 \end{matrix} (mod 5) = (1\ 0\ 4\ 3)$$

(ըստ $mod5$ – ի $0 = 5, -1 = 4, -2 = 3\ , -3 = 2, -4 = 1$):

Այստեղից հետևում է, որ ստացված վեկտորի 8-րդ կոմպոնենտում տեղի է ունեցել -1 մեծությամբ սխալ, իսկ 11-րդ ում $+1$:

$(1\ 0\ 3\ 1\ 2\ 4\ 4\ \mathbf{2}\ 3\ 3\ \mathbf{2}\ 0)$ վեկտորում 8-րդ տեղում գրված 2-ին գումարելով 1 և 11-րդ տեղում գրված 2-ից հանելով 1 կստանանք հենց մեր սկզբնական ուղարկված կոդավորված վեկտորը՝ $(1\ 0\ 3\ 1\ 2\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3\ 1\ 0)$:

Արտաքսելով առաջին 4 կոմպոնենտներում գրված ստուգման սիմվոլները, կստանանք սկզբնական ուղարկված հաղորդագրությունը, որը հենց $(2\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3\ 1\ 0)$ վեկտորն է:

Այսպիսով մենք կարող ենք ուղղել այս բազմության կամայական 5^8 հատ հաղորդագրություններում առաջացած սխալները 5^{12} կոդային բառերի միջոցով:

Կոդավորման և սխալների ուղղման ալգորիթմը Z_m օղակում ± 1 և ± 2 միևնույն ամպլիտուդայով կրկնակի սխալ ուղղող կոդերի համար

Այժմ տեսնենք թե ինչպես են աշխատում ասիմետրիկ կրնակի սխալներ ուղղող կոդերի համար կոդավորման և ապակոդավորման ալգորիթմներն այն կոդերի համար որոնք ուղղում են ոչ միայն ± 1, այլ նաև ± 2 մեծությամբ սխալներ:

Նախ վերհիշենք երկրորդ գլխի 2.5 պարագրաֆում կառուցված Z_5 օղակում կրկնակի ± 1 և ± 2 սխալներ ուղղող $C(13,8)$ օպտիմալ կոդը, որը տրված է նրա ստուգող մատրիցի միջոցով՝

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ինչպես նախորդ դեպքում այս դեպքում նույնպես մեզ անհրաժեշտ է ունենալ այս կոդի ստուգող մատրիցին կոմբինատոր-էկվիվալենտ մատրիցը և նրա ծնող մատրիցը՝ կոդավորման և ապակոդավորման գործողությունները իրականացնելու համար:

H_5 մատրիցի համար նրա կոմբինատոր-էկվիվալենտ մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 4 & 0 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Կրկին օգտվելով առաջին գլխում բերված թեորեմից (եթե $H'=[-P^T\ I_{n-k}]$ որտեղ (I_{n-k} -ն (n-k) չափանի միավոր մատրից է, ապա $G = [I_k\ P]$ և $GH^T = 0$) կգտնենք այս կոդի ծնող մատրիցան, որն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Գիտենք, որ այս կոդի միջոցով ևս կարող ենք ուղղել 5^8 հաղորդագրություններում առաջացած կրկնակի ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ բոլոր սխալները, հաղորդագրությանն ավելացնելով 5- ստուգող սիմվոլ:

Օրինակ. Կրկին վերցնենք նախորդ օրինակում բերված $(\mathbf{2\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3\ 1\ 0})$ վեկտորը, որը հենց հանդիսանում է մեր հաղորդագրությունը և կատարենք կոդավորման գործողությունը:

Առաջին ստուգող սիմվոլը գտնելու համար բազմապատկենք G - ի առաջին սյունով՝

$$c_1 = (2*4)+(4*1)+(4*1)+(3*1)+(3*0)+(3*4)+(1*4)+(0*0) =$$

$$= 8 + 4 + 4 + 3 + 0 + 12 + 4 + 0 = 35(mod5) = 0:$$

Նմանատիպ կերպով կգտնենք մնացած ստուգող սիմվոլները բազմապատկելով $2-5$ սյունակներով:

Արդյունքում կստացվեն հետևյալ զույգության սիմվոլները՝

$$c_2 = 2,\ c_3 = 4,\ c_4 = 4,\ c_5 = 0:$$

Արդյունքում ստացանք 13 երկարության կոդավորված վեկտոր՝ (0 2 4 4 0 2 4 4 3 3 3 1 0), որի առաջին 5 կոմպոնենտներում գտնվում են ստուգող սիմվոլներն, իսկ հաջորդ 8-ում ինֆորմացիոն: Հիմա փորձենք իրականացնել ապակոդավորման պրոցեսը, որի համար մեզ անհրաժեշտ է ստացված կոդային վեկտորի մեջ առաջացնել կրկնակի սխալներ ± 1 կամ ± 2 մեծություններով: Որպեսզի ավելի լավ տեսնենք թե ինչով է այս դեպքը տարբերվում նախորդ օրինակում բերված դեպքից, որտեղ կարողանում էինք ուղղել միայն ± 1 մեծությամբ կրկնակի սխալներ, սխալներն ավելացնենք հենց նույն կոմպոնենտներում ուղակի արդեն ± 2 մեծությամբ: Ինչպես հիշում ենք նախորդ օրինակում սխալներն եղել էին 8-րդ և 11- րդ կոմպոնենտներում ± 1 մեծությամբ: Հիմա ենթադրենք, որ կրկին տեղի են ունեցել սխալներ հաղորդագրության այդ նույն կոմպոնենտներում բայց արդեն ± 2 մեծությամբ և $(0\ 2\ 4\ 4\ 0\ 2\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3\ 1\ 0)$ վեկտորի փոխարեն տեղ է հասել $(0\ 2\ 4\ 4\ 0\ 2\ 4\ \mathbf{2}\ 3\ 3\ \mathbf{1}\ 1\ 0)$ վեկտորը: Նախ այն բազմապատկում ենք H' մատրիցի տողերով և արդյունքում ստանում ենք $(0\ 1\ 3\ 0\ 4)$ սինդրոմը: Գիտենք, որ այս կոդի ստուգող մատրիցը բավարարում է՝

$$\pm 2 * h_{ij} \pm 2 * h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \quad (j,m) \neq (l,k)$$

հետևյալ պայմանին, հետևաբար մենք միարժեք կերպով կարող ենք որոշել, թե որ սյունակներում է սխալ տեղի ունեցել և ինչ մեծությամբ: Սինդրոմների աղյուսակում փնտրում ենք $(0\ 2\ 3\ 0\ 4)$ սինդրոմը և տեսնում ենք, որ այն ստացվել է 8-րդ և 11-րդ սյունակների ժխտումների գումարումից բազմապատկած 2–ով: Ստացվում է որ սխալները տեղի են ունեցել 8 –րդ և 11-րդ կոմպոնենտներում -2 մեծությամբ՝

$$2 * \begin{matrix} -4 & -1 \\ -4 & 0 \\ -4 & -2 \\ -1 & -4 \\ -4 & -4 \end{matrix} = \begin{matrix} -10 \\ -8 \\ -12 \\ -10 \\ -16 \end{matrix} (mod 5) = (0\ 2\ 3\ 0\ 4)$$

$(0\ 2\ 4\ 4\ 0\ 2\ 4\ \mathbf{2}\ 3\ 3\ \mathbf{1}\ 1\ 0)$ վեկտորում 8–րդ տեղում գրված 2-ին գումարելով 2 և 11-րդ տեղում գրված 1-ին գումարելով 2 կստանանք հենց մեր սկզբնական ուղարկված կոդավորված վեկտորը՝

$$(0\ 2\ 4\ 4\ 0\ 2\ 4\ \mathbf{4}\ 3\ 3\ \mathbf{3}\ 1\ 0)$$

Արտաքսելով առաջին 5 կոմպոնենտներում գրված ստուգման բիթերը, կստանանք սկզբնական ուղարկված հաղորդագրությունը, որը հենց $(2\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3\ 1\ 0)$ վեկտորն է: Այսպիսով մենք կարող ենք ուղղել այս բազմության կամայական 5^8 հատ հաղորդագրություններում առաջացած կրկնակի ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ բոլոր սխալները 5^{13} կոդային բառերի միջոցով: Այս ալգորիթմը տեղի ունի նաև 2.5

պարագրաֆում կառուցված $\boldsymbol{C}(17,12)$ և $\boldsymbol{C}(21,16)$ կրկանկի ± 1 և ± 2 միևնույն մեծությամբ սխալներ ուղղող քվազի-օպտիմալ կոդերի համար: Նրանք իրականացնելու համար մեզ անհրաժեշտ է ունենալ այդ կոդերի ստուգող մատրիցին կոմբինատոր-էկվիվալենտ և ծնող մատրիցաները:

Այս պարագրաֆում մենք ներկայացրեցինք փոքր ամպլիտուդայով կրկնակի սխալներ ուղղող կոդերի կոդավորման և սխալների ուղղման ալգորիթմները, դրանք տեղի ունեն նաև այս աշխատանքում ստացված մյուս բոլոր կոդերի համար: Մասնավորապես Z_7 օղակում կառուցված $C(16,12)$ օպտիմալ կոդի համար: Նրա ստուգող՝ H' (հիշեցնենք, որ H' - ով նշանակում ենք կոդի ստուգող մատրիցին կոմբինատոր-էքվիվալենտ մատրիցը) և ծնող՝ G մատրիցները կունենան հետևյալ տեսքը՝

$$H'_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 5 & 1 & 5 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 5 & 0 & 6 & 4 & 1 & 4 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 6 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 5 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 0 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$G_7 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Իսկ Z_9 օղակում կառուցված կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող $C(20,16)$ օպտիմալ կոդի համար նրա ստուգող՝ H'_9 և ծնող՝ G_9 մատրիցները ունեն հետևյալ տեսքը.

$$H'_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 7 & 8 & 5 & 0 & 6 & 6 & 0 & 7 & 3 & 5 & 4 & 7 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 4 & 7 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 4 & 5 & 6 & 6 & 3 & 0 & 6 & 3 & 5 & 6 & 3 & 7 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 5 & 2 & 1 & 6 & 8 & 6 & 3 & 0 & 6 & 4 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_9 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Այս ալգորիթմները տեղի ունեն նաև այս աշխատանքում կառուցված մնացած բոլոր կոդերի համար:

Աշխատանքի հաջորդ մասում կներկայացվեն այս կոդավորման և ապակոդավորման ալգորիթմների իրականացումը $C++$ ծրագրային փաթեթի միջոցով: Նաև կբերվեն որոշ ծրագրային իրականացումներ փոքր ամպլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդերի հետ աշխատելու համար:

3.3 Ծրագրային իրականացման ալգորիթմներ ասիմետրիկ սխալներ ուղղող կոդերի համար

Այս պարագրաֆի շրջանակներում կներկայացնենք մի ալգորիթմ, որը կօգնի մեզ ստուգել տրված մատրիցի միջոցով ներկայացված կոդը հանդիսանում է ասիմետրիկ կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդ, թե ոչ: Այս ալգորիթմի միջոցով հետագայում հնարավոր է ավելի հեշտությամբ կառուցել ավելի մեծ երկարությամբ կոդեր: Ինչպես գիտենք, որպեսզի H մատրիցով ներկայացված կոդը հանդիսանա

±1 կրկնակի սխալ ուղղող կոդ անհրաժեշտ է, որպեսզի նրա սյուները բավարարեն հետևյալ երկու պայմաններին՝

1. $h_{ij} \neq \pm h_{im}$, $j \neq m$
2. $\pm h_{ij} \pm h_{im} \neq \pm(h_{il} \pm h_{ik})$ $(j,m) \neq (l,k)$

Եթե բավարարվի միայն առաջին պայմանը, ապա H մատրիցով ներկայացված կոդը կհանդիսանա ±1 մեկ սխալ ուղղող կոդ: Դրա համար մեզ անհրաժեշտ է, որպիսի ծրագիրը կարողանա ստուգել նաև երկրորդ պայմանը և ըստ դրա մենք կիմանանք հանդիսանում է արդյոք H մատրիցով ներկայացված կոդը ±1 կրկնակի սխալ ուղղող կոդ թե ոչ:

Ներկայացնենք այս պայմանները ստուգող ծրագիրը գրված C++ ծրագրավորման լեզվով:

Որպես մուտքային տվյալ ծրագիրը պետք է ստանա կոդի ստուգող մատրիցը, որը կներբեռնենք տեքստային ֆայլից *open* հրամանի միջոցով՝

```
ifstream inp;
inp.open ("Ֆայլի հասցե");
```

Իհարկե այս հրամաններից օգտվելու համար մեզ անհրաժեշտ է ծրագրի սկզբում ծրագրին կցել նաև <fstream> գրադարանը ՝

```
#include <fstream>:
```

Այնուհետև պահում ենք այդ մատրիցն ինչ-որ մի երկչափ զանգվածում: Հաջորդ քայլերում մեզ անհրաժեշտ է գրել ֆունկցիաներ, որոնց միջոցով կհաշվենք և կհամեմատենք այն սինդրոմները, որոնք ստացվում են տվյալ մատրիցի սյուների հետ հանման և գումարման գործողություններ կատարելուց հետո: Որպեսզի այդ մատրիցը հանդիսանա փոքր ամլիտուդայով կրնակի ±1 սխալ ուղղող կոդի մատրից, պետք է որ այդ բոլոր սինդրոմները լինեն միմյանցից տարբեր՝

$$\pm h_{ij} \pm h_{im} \neq \pm h_{il} \pm h_{ik} \; , \quad (j,m) \neq (l,k)$$

Այս բոլոր սինդրոմները կհաշվենք 4 ֆունկցիաների միջոցով՝

1.

```
        void Asimetsum (int*a[], int*b[], int nc, int m, int n, int mo)
{
        int i, j;
        int y;

        for (j = nc + 1; j < n; j++)
        {
                for (i = 0; i < m; i++)
                {
                        y = (a[i][j] + a[i][nc]) %mo;
                        b[i][j] = (a[i][j] + a[i][nc]) %mo;
                }
        }
}
```

Այս ֆունկցիայի միջոցով կատարում ենք մատրիցի սյուների սովորական գումարում: Ֆունկցիան որպես մուտքային տվյալներ ստանում է ստուգող մատրիցը - a, մատրիցի չափերը - m, n (m – տողերի քանակն և n - սյուների), և մոդուլը - mo ըստ որի պետք է կատարվեն գործողությունները (օրինակ, եթե տվյալ կոդը դիտարկված է Z_5 օղակում, ապա մոդուլը հավասար կլինի 5-ի): Գումարումները կատարելուց հետո ստացված սինդրոմները լցնում ենք մի նոր մատրիցի մեջ, որը հանդիսանում է $\boldsymbol{b}$ մատրիցը և պահվում է այն համարը՝ nc, որից հետո այդ մատրիցի մեջ պետք է լցվեն մյուս ֆունկցիաների կատարման արդյունքում ստացված սինդրոմները: Այս ֆունկցիայի կատարման արդյունքում կստանանք C_n^2 հատ սինդրոմ և $np = C_n^2$ հետևաբար հաջորդ ֆունկցիան կսկսի b մատրիցի մեջ լցնել սինդրոմներ C_n^2 – րդ դիրքից հետո: Արդյունքում կունենանք $4 * C_n^2$ հատ սինդրոմ b մատրիցում, որոնք էլ հենց պետք է ստուգենք որ լինեն միմյանցից տարբեր, որպիսի սկզբնական $\boldsymbol{a}$ մատրիցի միջոցով տրված կոդը հանդիսանա կրկնակի ±1 սխալներ ուղղող կոդ Z_p – օղակում: Ստորև ներկայացված են հաջորդ 3 ֆունկցիաները որոնք կատարում են մյուս գումարման գործողություններն a մատրիցի սյուների միջև՝

2.

```
void Asimetsum1 (int*a[], int*b[], int nc, int m, int n, int mo)
{
    int i, j;
    int y;

    for (j = nc + 1; j < n; j++)
    {
        for (i = 0; i < m; i++)
        {
            y = (-a[i][j] - a[i][nc]) %mo;
            if (abs(y) > mo)
            {
                y += 2*mo;
            }
            else
            {
                y += mo;
                if (abs(y) == mo)
                    y = 0;
            }

            b[i][j] = y;
        }
    }
}
```

3.

```
        void Asimetsubtr1(int*a[], int*b[], int nc, int m, int n, int mo)
{
        int i, j;

        int y;

        for (j = nc + 1; j < n; j++)
        {
                for(i = 0; i < m; i++)
                {
                   y = (a[i][j] - a[i][nc]);
                        if (y < 0)
                        {
                                b[i][j] = y + mo;
                        }
                        else
                                b[i][j] = (a[i][j] - a[i][nc]);
                }
        }
}
```

4.

```
        void Asimetsubtr2(int*a[], int*b[], int nc, int m, int n, int mo)
{
        int i, j;

        int y;

        for (j = nc + 1; j < n; j++)
        {
                for (i = 0; i < m; i++)
                {
```

```
                y = (a[i][nc] - a[i][j]);
                    if (y < 0)
                    {
                        b[i][j] = y + mo;
                    }
                    else
                        b[i][j] = (a[i][nc] - a[i][j]);
            }
        }
}
```

Արդյունքում ստանում ենք մի սինդրոմների մատրից b՝ բաղկացած բոլոր հնարավոր $\pm h_{ij} \pm h_{im}$ սինդրոմներից:

Հաջորդ քայլում պետք է համեմատենք բոլոր ստացված սինդրոմները, որպեսզի նրանք չկրկնվեն: Քանզի ամեն ֆունկցիայի միջոցով ստացված սինդրոմներ քանակը հավասար կլինի՝ C_n^2 , ապա կունենանք ընդհանուր $4 * C_n^2$ հատ սինդրոմ: C_n^2 – թիվը կպահենք $ccount$ փոփոխականի մեջ: Հետո կհամեմատենք այս բոլոր սինդրոմները comp ֆունկցիայի միջոցով:

Ստորև ներակայացնենք այդ ֆունկցիան գրված $C++$ ծրագրավորման լեզվով՝

```
int comp (int*b[], int m, int n, int &col1, int &col2)
{
    int i, j, k, coun;
    int res = 1;

    for (i = 0; i < n; i++)
    {
        for (j = i + 1; j < n; j++)
        {
            coun = 0;
            for (k = 0; k < m; k++)
```

```
                    {
                        if (b[k][i] == b[k][j])
                        {
                            coun++;
                        }
                    }
                    if (coun == m)
                    {
                        col1 = i;
                        col2 = j;
                        return 0;
                    }
                }
            }

            return 1;
        }
```

Ինչպես տեսնում ենք, ի տարբերություն նախորդ ֆունկցիաների այս ֆունկցիան հայտարարված է int տիպի այլ ոչ թե $void$, ինչը նշանակում է որ այն պետք է վերադարձնի կոնկրետ արժեք՝ տվյալ դեպքում 0 կամ 1: Ֆունկցիան որպես մուտքային տվյալներ ստանում է սինդրոմների b մատրիցը, նրա տողերի և սյուների քանակը՝ համապատասխանաբար m և n: Որևէ երկու սյան համընկման դեպքում ֆունկցիան պետք է վերադարձնի նաև այդ սյուների համարները՝ int $\&col1$ և int $\&col2$: Ֆունկցիան անցնում է մատրիցի բոլոր սյուների վրայով և հերթով համեմատում նրանք: Եթե համընկած կոմպոնենտների քանակը հավասարվում է m – ի նշանակում է սյուները համընկել են և այդտեղ $col1$ և $col2$ – ն համապատասխանաբար ստանում են i և j արժեքներն այսինքն համընկել են i –րդ և j -րդ սյուները, և ֆունկցիան վերադարձնում է 0 արժեք: Հակառակ դեպքում, եթե մատրիցի բոլոր սյուներով անցնելուց հետո ոչ մի համընկնում չի եղել, ֆունկցիան կվերադարձնի 1- արժեք: Կվերագրենք հաջորդ քայլում այդ վերադարձվող արժեքն priz փոփոխականին՝

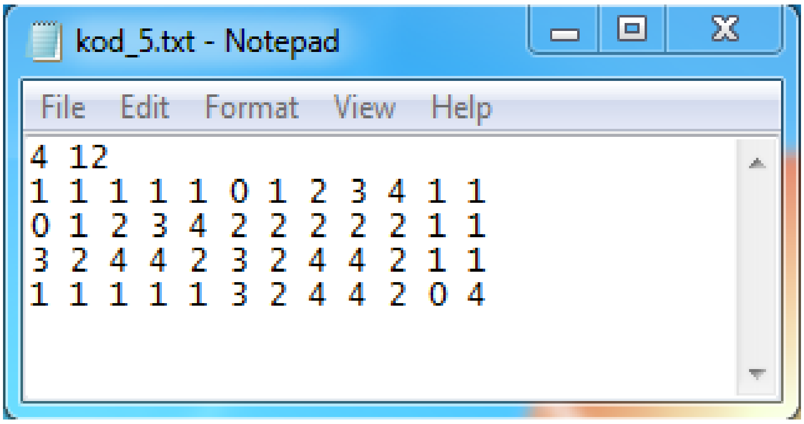
```
for (i = 0; i < 4*ccount; i++)
	{
		priz = comp (res, m, 4*ccount, col1, col2);
		if (priz == 0)
		{
			cout << " *** ERROR ****" << endl;
			cout << "col = " << col1 << ", " << col2;
			cin >> k;
		}
	}

	if (priz == 1)
	{
		cout << " *** OK **** ";
	}
```

4*ccount – ով նշանակված է մատրիցի բոլոր սյուների քանակը: Եթե ֆունկցիան վերադարձնում է 0 և հետևաբար $priz = 0$, ապա էկրանին դուրս է բերվում *** ERROR **** գրառումն ու այն սյուների ինդեքսներն, որոնք համընկել են: Հակառակ դեպքում էկրանին դուրս է բերվում *** OK **** գրառումը, որը նշանակում է, որ սինդրոմների մեջ ոչ մի համընկնում չի եղել և մեր սկզբնական H մատրիցի միջոցով ներկայացված կոդը հանդիսանում է ±1 կրկնակի սխալ ուղղող կոդ:

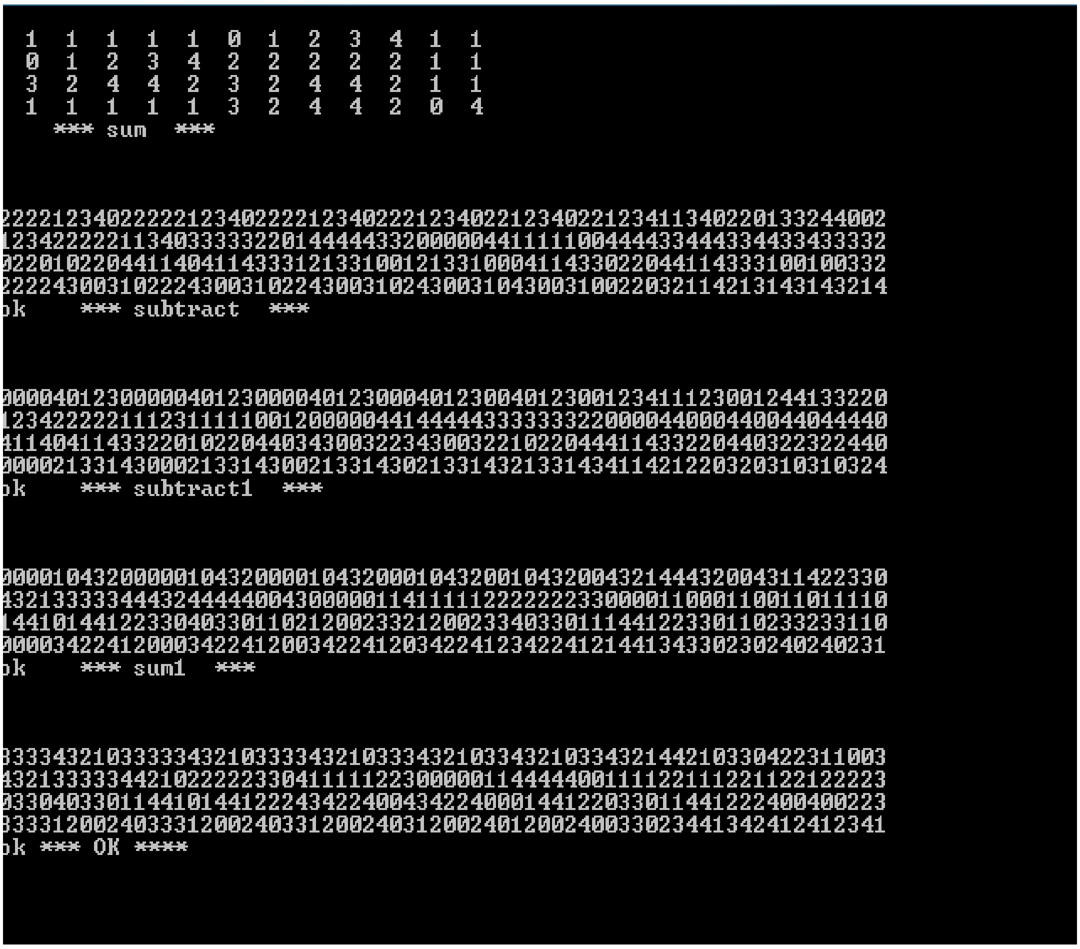
Աշխատեցնենք վերը նկարագրված ծրագիրը:

Ինչպես տեսնում ենք նկար 3.1 –ում որպես H ստուգող մատրից վերցնում ենք Z_5 օղակում կառուցված $C(12,8)$ կոդի ստուգող մատրիցը, որը այն կարդում է “kod_5.txt” տեքստային ֆայլից (նկար 3.1) ՝



Նկար 3.1

Սկզբում գրված են մատրիցի չափերը համապատասխանաբար 4 - տող և 12 - սյուն, որն ինչպես գիտենք ծրագիրը պահում է m և n փոփոխականներում: Այնուհետև հերթով կարդում է մատրիցի էլեմենտները ցիկլերի միջոցով և լցնում նրանք մեր հայտարարած երկչափ զանգվածի մեջ: Ծրագիրն աշխատեցնելու արդյունքում 4 մատրիցների տեսքով դուրս են բերվել H մատրիցի սյուների հետ գումարման և հանման արդյունքում ստացված բոլոր հնարավոր սինդրոմները՝ 4 * C_n^2 հատ տվյալ դեպքում 4 * C_{12}^2 հատ սինդրոմ (Նկար 3.2): Քանզի վերջում էկրանին դուրս է բերվել *** OK **** գրառումը, ապա դա նշանակում է որ ոչ մի կրկնվող սինդրոմներ չկան և H ստուգող մատրիցի միջոցով ներկայացված կոդը հանդիսանում է կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդ Z_5 օղակում (բոլոր գործողությունները կատարված են ըստ $mod5$ – ի): Որպես մուտքային տվյալ մեկ այլ մատրից ստանալու համար մեզ ծրագրում ուղակի անհրաժեշտ է փոփոխել այդ ֆայլի հասցեն, որտեղից ծրագիրը ստանում է մատրիցը:



Նկար 3.2 Console պատուհան

Այս ծրագրի միջոցով մենք կարող ենք ստուգել ցանկացած մատրիցի համար այն հանդիսանում է արդյոք կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդի ստուգող մատրից որևէ Z_p օղակում թե ոչ, անկախ p –ի և մատրիցի m, n – չափերից: Մեկ այլ Z_p օղակում բերված մեկ ուրիշ մատրից ստուգելու համար ծրագրում պետք է փոփոխել միայն այն ֆայլի հասցեն, որից ծրագիրը պետք է կարդա տվյալ ստուգման ենթակա մատրիցը՝

```
ifstream inp;
inp.open("Ֆայլի հասցե");
```

հետևյալ հրամանի մեջ, և mo – փոփոխականը, որի մեջ պահվում է մոդուլը կամ այսպես ասված օղակի մեծությունը p – ն:

Ճիշտ է, երկրորդ գլխի 2.1 պարագրաֆում մենք թեորեմի տեսքով ներակայացրել ենք մի մեթոդ, որի միջոցով կարողանում էինք ստուգել, արդյոք ստուգող մատրիցի միջոցով ներակայացված կոդը հանդիսանում է կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդ թե ոչ, սակայն երբ մատրիցը լինում է զգալիորեն ավելի մեծ չափերի, պրակտիկորեն նրա բոլոր սինդրոմները հաշվել և համեմատել հնարավոր է միայն ծրագրի միջոցով: Օրինակ նախորդ գլխում կառուցված $C\ (40,34)$ կոդն ունի 40 երկարություն և հեևաբար բոլոր սինդրոմները կլինեն 4*C_{40}^{2} հատ, որոնք պրակտիկորեն առանց ծրագրի հնարավոր չի լինի համեմատել:

3.4 Կոդավորման և ապակոդավորման ալգորիթմների ծրագրային իրականացումը

Ինչպես նշել ենք նախորդ գլուխներում այս տիպի գծային կոդերով կոդավորում և ապակոդավորում իրականացնելու համար մեզ անհրաժեշտ է ունենալ կոդի ծնող մատրիցը և ստուգող մատրիցի կոմբինատոր - էքվիվալենտ մատրիցը $H' = [\ -P^T\ I_{n-k}]$՝ բերված այսպիսի տեսքի: Դրանց միջոցով մենք կարողանում ենք տրված օղակում կամայական վեկտոր կոդավորել և եթե նրանում սխալ է առաջացել ± 1 կամ ± 2 մեծությամբ, գտնել և ուղղել այդպիսի սխալները: Ապակոդավորման մեթոդը նկարագրելուց մենք նշել էինք, որ պետք է ունենանք մի սինդրոմների աղյուսակ, որում ամեն մի ստացված սինդրոմի պետք է համապատասխանեն այն երկու սյունակների համարները, որոնց գումարման կամ հանման արդյունքում ստացվել է տվյալ սինդրոմը: Հենց այդ համարներն էլ կհամապատասխանեն վեկտորի այն կոմպոնենտներին որոնցում սխալ է տեղի ունեցել: Իմանալով այդ կոմպոնենտների համարները մենք հեշտությամբ կարող ենք ուղղել նրանցում առաջացած սխալները: Ստորև կներկայացնենք մի ծրագիր որի միջոցով ստանում ենք այդ աղյուսակն, ապա սխալանքի սինդրոմը ստանալուց հետո գտնում ենք համապատասխան կոմպոնենտները և նրանցում ուղղում առաջացած սխալները:

Նախորդ պարագրաֆում ներկայացված ծրագրի միջոցով մենք արդեն ստացել էինք բոլոր սինդրոմները և համեմատել: Այս ծրագրի առաջին քայլում մեզ անհրաժեշտ է դուրս բերել այդ բոլոր սինդրոմները մի տեքստային ֆայլի մեջ և համապատասխանեցնել նրանց համապատասխան սյունակների համարները + կամ – նշաններով: Դա էլ կլինի հենց մեզ անհրաժեշտ աղյուսակը, որի միջոցով հետագայում կգտնենք այն կոմպոնենտներն, որոնցում սխալներ են տեղի ունեցել: Սինդրոմները ֆայլի մեջ դուրս բերելու համար նախ պետք է նշենք համապատասխան ֆայլի հասցեն և օգտվենք մեզ արդեն հայտնի գրադարանից ՝ #include <fstream>.

```
ofstream out4;
out4.open ("ֆայլի հասցե");
```

Այս հրամանի միջոցով $out4$ փոփոխականում պահում ենք այն ֆայլը, որում պետք է լինի հենց մեր աղյուսակը: Հաջորդ քայլում կներկայացնենք թե ինչպես ենք լցնում մեր ստացած սինդրոմներն այդ ֆայլի մեջ և ինդեքսավորում:

Սինդրոմների դուրս բերման գործընթանցը կկատարենք երկու փուլով: Առաջին փուլում դուրս կբերենք այն սինդրոմները որոնք առաջանում են, երբ հաղորդագրության մեջ լինում է մեկ սխալ ±1 մեծությամբ: Դրանք են $\pm h_j$ սինդրոմները՝ $2n$ հատ: Ներկայացնենք ծրագրի այն հատվածը որի միջոցով տեքստային ֆայլ ենք դուրս բերում տվյալ $2n$ հատ սինդրոմները՝

```
for (i = 1; i <= (2*n) ; i++)
 {
       if (i <= n)
          {
                  out4 <<"    0" << "    "<< setw(4) << i <<"    " ;
          }
          else
          {
```

```
                    out4 <<"   0" << setw(4) << "    -"<< i- n <<"    " ;
          }

     for (k = 0; k < m; k++)
       {
          out4 <<" " <<res[k][k1];
      }

          out4<<endl;
          k1++;
      }
```

Առաջին ցիկլի միջոցով կատարում ենք ինդեքսավորումը: Քանի որ բոլոր սինդրոմները պետք է ունենան երկու ինդեքս, ապա որպես առաջին ինդեքս վերցնում ենք 0, իսկ երկրորդ՝ հենց այն սյան համարը, որը հանդիսանում է տվյալ սինդրոմը և լցնում դրանք out4 ֆայլի մեջ: Առաջին n սինդրոմների դեպքում նրանց ինդեքսները կունենան հետևյալ տեսքը $(0,i)$, իսկ հաջորդ n հատի դեպքում $(0,-i)$ տեսքը, քանզի դրանք արդեն հանդիսանում են մատրիցի ժխտված սյունակներն, որոնք ստացվում են այն դեպքում, երբ հաղորդագրության մեջ տեղի է ունենում մեկ սխալ -1 մեծությամբ: Հաջորդ քայլում երկրորդ ցիկլի միջոցով նույն $out4$ ֆայլի մեջ լցնում ենք համապատասխան սինդրոմներն, այնպես որ յուրաքանչյուրը գրված լինի նույն տողում, որում արդեն գրված են նրա ինդեքսները: Սինդրոմները դուրս ենք բերում ֆայլ $\boldsymbol{res}$ մատրիցից, որտեղ նրանք պահված էին: Հետո $\boldsymbol{k1}++$ հրամանի միջոցով ստանում ենք այն վերջին համարը, որի համապատասխան տողում գրված է մեր ստացած վերջին սինդրոմը և հաջորդ սինդրոմները պետք է գրվեն արդեն ֆայլի $\boldsymbol{k1} + \boldsymbol{1}$ -րդ տողից: Երկրորդ փուլում դուրս կբերենք մնացած բոլոր 4 * C_n^2 հատ սինդրոմները, որոնք ստացվում են այն դեպքում, երբ հաղորդագրության մեջ տեղի է ունենում 2 սխալ ± 1 մեծությամբ: Ներկայացնենք ծրագրի տվյալ հատվածը, որի միջոցով կատարվում է այս պրոցեսը՝

```
int k2 = k1;
          for (p = 0; p < 4; p++)
          {
                    for (i = 1; i < n+1; i++)
                    {
                              for (j = i + 1; j < n+1; j++)
                             {
                                switch(p)
                              {
                                   case 0:
                                       out4 << setw(4) << ind_i[i] << setw(4) << ind_j[j] <<"   ";
                                                 break;
                                   case 1:
                                    out4 << " -" << ind_i[i] << setw (4) << ind_j[j] << "   ";
                                       break;
                                   case 2:
                                       out4 << setw(4) << ind_i[i] << "    -" << ind_j[j] << "   ";
                                                 break;
                                   case 3:
                                       out4 << " -" << ind_i[i] << "    -"<< ind_j[j] << "    ";
                                              break;
                                        }
                                          for (k = 0; k < m; k++)
                                         {
                                                out4 <<" "<< res[k][k2];
                                         }
                              out4 << endl;
                              k2++;
                             }
                    }
          }
```

out4.close();

Նախ $k2$ փոփոխականում պահում ենք համապատասխան $k1$ ինդեքսը, որ տողից պետք է սկսենք լցնել ստացված սինդրոմներն աղյուսակում: Գիտենք, որ այդ սինդրոմները ստացվում են 4 տիպի հանման և գումարման գործողությունների արդյունքում, դրա համար առաջին ցիկլը գնում է 0 - ից 4: Ինչպես նախորդ դեպքում, այնպես էլ այս նախ հաջորդ ցիկլերի միջոցով կատարում ենք ինդեքսավորումը: Ի տարբերություն նախորդ դեպքի այստեղ սինդրոմերը ստացվում են 2 սյուների հետ հանման և գումարման գործողությունների ընթացքում, հետևաբար ամեն սինդրոմը պետք է ունենա 2 համապատասխան ինդեքս i և j: Առաջին դեպքում՝ $case\ 0$, երբ $p = 0$ երկու ինդեքսներն էլ ունեն + նշանը, քանի որ այդ սինդրոմները ստացվում են այն դեպքում, երբ տեղի են ունեցել երկու սխալներ +1 մեծությամբ: Երկրորդ դեպքում $case\ 1$, երբ $p = 1$ առաջին ինդեքսը պետք է ունենա – նշանն, իսկ երկրորդը՝ + , քանի որ այս դեպքի սինդրոմները ստացվում են այն դեպքում, երբ առաջին սխալը եղել է -1 մեծությամբ, իսկ երկրորդը՝ $+1$: Համապատասխանաբար երրորդ և չորրորդ դեպքերում ինդեքսների նշաններն կլինեն (+-) և (--) ինչպես տեսնում ենք ծրագրի $case\ 2$ և $case\ 3$ դեպքերում: Բոլոր 4 դեպքերով ցիկլի անցնելուց հետո մենք $out4$ ֆայլում (որտեղ պահված է մեր աղյուսակը) արդեն ունենում ենք բոլոր սինդրոմներին համապատասխան ինդեքսները համապատասխան նշաններով, և մնում է հաջորդ քայլում միայն գրենք համապատասխան սինդրոմները համապատասխան ինդեքսներից հետո նույն տողում: Այս սինդրոմները մենք ևս դուրս ենք բերում ֆայլի մեջ res մատրիցից, որտեղ նրանք պահված էին: Վերջին քայլում զուտ փակում ենք $out4$ ֆայլը (որում արդեն ունենք մեր ամբողջական աղյուսակը) $out4.close\,()$ հրամանի միջոցով: Ծրագրի իրականացումից հետո ֆայլում ստանում ենք արդեն մեր պատրաստի աղյուսակը:

Նկար 3.3–ում ներակայացված է այդ աղյուսակից մի հատված, որում դուրս են բերվել Z_5 օղակում կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող $C(12,8)$ օպտիմալ կոդի սինդրոմները իրենց համապատասխան կոմպոնենտներով՝

File Edit Format View Help

-5	6	4	3	1	2
-5	7	0	3	0	1
-5	8	1	3	2	3
-5	9	2	3	2	3
-5	10	3	3	0	1
-5	11	0	2	4	4
-5	12	0	2	4	3
-6	7	1	0	4	4
-6	8	2	0	1	1
-6	9	3	0	1	1
-6	10	4	0	4	4
-6	11	1	4	3	2
-6	12	1	4	3	1
-7	8	1	0	2	2
-7	9	2	0	2	2
-7	10	3	0	0	0
-7	11	0	4	4	3
-7	12	0	4	4	2
-8	9	1	0	0	0
-8	10	2	0	3	3
-8	11	4	4	2	1
-8	12	4	4	2	0
-9	10	1	0	3	3
-9	11	3	4	2	1
-9	12	3	4	2	0
-10	11	2	4	4	3
-10	12	2	4	4	2
-11	12	0	0	0	4
1	-2	0	4	1	0
1	-3	0	3	4	0
1	-4	0	2	4	0
1	-5	0	1	1	0
1	-6	1	3	0	3
1	-7	0	3	1	4
1	-8	4	3	4	2
1	-9	3	3	4	2
1	-10	2	3	1	4
1	-11	0	4	2	1
1	-12	0	4	2	2
2	-3	0	4	3	0
2	-4	0	3	3	0
2	-5	0	2	0	0
2	-6	1	4	4	3
2	-7	0	4	0	4
2	-8	4	4	3	2
2	-9	3	4	3	2
2	-10	2	4	0	4
2	-11	0	0	1	1
2	-12	0	0	1	2
3	-4	0	4	0	0

ՆԿԱՐ 3.3 Սինդրոմների աղյուսակ

Ինչպես տեսնում ենք նկար 3.3–ում աղյուսակի նույն տողում գրված է սինդրոմը և այն սյուների համարները, որոնցից այդ սինդրոմը ստացվել է: Հենց այս աղյուսակից օգտվելով էլ ծրագրի միջոցով կիրականացնենք այս տիպի կոդերով կոդավորման և ապակոդավորման պրոցեսները: Եթե կոմպոնենտի համարը + նշանով է, ապա տեղի է ունեցել $+1$ մեծությամբ սխալ, իսկ եթե -, ապա՝ -1:

Աշխատանքի հաջորդ հատվածում կնկարագրվեն փոքր ամպլիտուդայով կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող կոդերով կոդավորման և ապակոդավորման ալգորիթմների իրականացումը $C++$ ծրագրավորման լեզվի միջոցով: Ինչպես գիտենք, հաղորդագրությունները կոդավորելու համար մեզ անհրաժեշտ է այդ հաղորդագրությունը նկարագրող վեկտորը բազմապատկել կոդի ստուգող մատրիցի բոլոր սյունակների հետ:

Ներկայացնենք այդ գործողությունը կատարող *coding* ֆունկցիան ՝

```
void coding (int *a[], int m, int n, int inp[], int mo, int out[])
{
        int i;
        int j;

        for (i = 0; i < n; i++)
        {
                out[i] = 0;
                for (j = 0; j < m; j++)
                {
                   out[i] += inp[j] * a[j][i];

                }

                out[i] = out[i] %mo;
        }

}
```

Ֆունկցիան որպես մուտքային տվյալներ ստանում է կոդի ծնող մատրիցը, նրա չափերը, հաղորդագրության վեկտորը, մոդուլը և ևս մեկ *out* վեկտոր, որի միջոցով ֆունկցիան պետք է վերադարձնի արդեն իսկ կոդավորված վեկտորը:

Հաջորդ քայլում մեզ անհրաժեշտ է արդեն իսկ կոդավորված վեկտորում առաջացնել մեկ կամ երկու սխալ ±1 մեծությամբ, որպեսզի ծրագրի հաջորդ՝ ապակոդավորման հատվածում ծրագիրը ուղղի այդ առաջացած սխալները և մեզ վերադարձնի արդեն ճշգրիտ վեկտորը:

Այդ գործողությունները կկատարենք *adding_errors* ֆունկցիայի միջոցով՝

```
void adding_errors (int *a[], int m, int n,int inp[], int out[], int mo,int n_err)
{
        int i;
        int j, r[2];
        for (i = 0; i < n_err; i++)
        {
                r[i] = rand () %n;
                if (n_err == 2)
                {
                        while (r[0] == r[1])
                        {
                                r[i] = rand()%n;
                        }
                }

        switch (inp[r[i]])
                {
                case 0:
                        inp[r[i]] = 4;
                        break;
                case 1:
                        inp[r[i]] = 2;
                        break;
                case 2:
                        inp[r[i]] = 1;
                        break;
                case 3:
                        inp[r[i]] = 2;
                        break;
                case 4:
```

```
                        inp[r[i]] = 0;
                        break;
                }
            }
            for (i = 0; i < m; i++)
            {
                    out[i] = 0;
                    for (j = 0; j < n; j++)
                    {
                            out[i] += inp[j] * a[i][j];

                    }
                    out[i] = out[i] %mo;
            }
}
```

Այս ֆունկցիան ևս որպես մուտքային տվյալներ ստանում է կոդի ստուգող մատրիցը, նրա չափերը, հաղորդագրության վեկտորը, մոդուլը և ելքային out վեկտորը, որում ստանալու ենք սխալանքի սինդրոմը: Բացի դա ի տարբերություն նախորդ $coding$ ֆունկցիայի $adding\_errors$ ֆունկցիան ստանում է ևս մի մուտքային փոփոխական՝ n_err, որի միջոցով ֆունկցիան իմանում է հաղորդագրության մեջ պետք է առաջացնել մեկ թե երկու սխալ: Ֆունկցիայի առաջին մասում $rand()$ ֆունկցիայի միջոցով կամայական կերպով գեներացնում ենք այն կոմպոնենտների համարները որոնցում սխալներ ենք առաջացնելու: Երկրորդ մասում $switch$ օպերատորի միջոցով inp վեկտորի մեջ առաջացնում ենք ± 1 մեծության սխալներ: Քանզի այս օրինակը բերված է Z_5 օղակում կառուցված կոդի համար, ապա մենք ունենք միայն $0, \ldots, 4$ ամբողջ թվերը (±1 մեծության սխալ տեղի ունենալու դեպքում 0 - ն կարող է դառնալ -1(4) կամ 1, 2 –ը՝ 1 կամ 3 և այլն): Վերջին քայլում արդեն սխալներով վեկտորը բազմապատկում ենք ստուգող մատրիցի բոլոր տողերի հետ և out վեկտորի մեջ ստանում ենք արդեն սխալանքի սինդրոմը, որի միջոցով օգտվելով նախորդ քայլում ստացված աղյուսակից, ծրագրի հաջորդ հատվածում գտնելու ենք այն կոմպոնենտները, որոնցում սխալներ են տեղի ունեցել և ուղղենք դրանք: Սխալանքի սինդրոմը գտնելուց հետո ծրագրի հաջորդ քայլում մենք այն պետք է համեմատենք մեր աղյուսակի բոլոր սինդրոմների հետ, որպեսզի գտնենք թե որ կոմպոնենտներում են սխալները տեղի ունեցել:

Ներկայացնենք ծրագրի այն հատվածը, որը կատարում է այդ գործողությունները՝

```
for (i = 0; i < 288; i++)
{
        count = 0;
        for (j = 0; j < 4; j++)
        {
                if (out [j] == sindrom[i] [j])
                {
                        count ++;
                }
        }

        if (count == 4)
        {
                i_current = i;
                break;
        }
}

if (count == 4)
{
        cout <<" komponentner =  "<<ind_i[i_current]<<"
"<<ind_j[i_current];
}
```

Ինչպես գիտենք, Z_5 օղակում ±1 կրկնակի սխալ ուղղող կոդի դեպքում մենք ունենք 288 հատ հնարավոր սխալանքի սինդրոմներ: Օրինակը կբերենք հենց այդ դեպքի համար, երբ աշխատում ենք Z_5 օղակում ±1 կրկնակի սխալ ուղղող օպտիմալ $C(12,8)$ կոդով: Առաջին քայլում ցիկլը անցնելով այդ բոլոր 288 սինդրոմների վրայով համեմատում է մեր ստացած out վեկտորի կոմպոնենտները սինդրոմների բոլոր կոմպոնենտների հետ և ամեն մի համընկման դեպքում $count$ փոփոխականը, որը սկզբում ունի 0 արժեքը, մեծացնում ենք մեկով: Հենց $count$ փոփոխականը հավասարվում է 4-ի, նշանակում է որ սինդրոմներն ամբողջովին համընկել են և ծրագիրը պահում է այդ համապատասխան սինդրոմի համարը $i\_current$ փոփոխականի մեջ ու կանգնեցնում ցիկլը: Հաջորդ քայլում ծրագիրը աղյուսակից դուրս է բերում այդ սինդրոմին համապատասխան կոմպոնենտների համարները և դրանք որպես մուտքային տվյալներ փոխանցում $correction$ ֆունկցիային, որն էլ հենց կատարում է ծրագրի վերջին քայլը՝ ուղղելով բոլոր առաջացած սխալները և դուրս բերելով նախնական կոդավորված վեկտորը, որից արտաքսելով առաջին 4 ստուգող բիթերը, ստանում ենք հենց մեր նախապես գեներացված հաղորդագրության վեկտորը:

Ներկայացնենք վերը նշված $correction$ ֆունկցիայի աշխատանքը ՝

```
void correction (int codvect[], int ind_i[], int ind_j[], int i0,int mo)

{
	if (ind_i[i0] > 0 && ind_j[i0] > 0)
	{
		codvect [ind_i[i0]-1] -= 1;
		codvect [ind_j[i0]-1] -= 1;

		if(codvect[ind_i[i0]-1] == -1)
			codvect[ind_i[i0]-1] += mo;
```

```
            if(codvect[ind_j[i0]-1] == -1)
                        codvect[ind_j[i0]-1] += mo;
}

if (ind_i[i0] < 0 && ind_j[i0] < 0)
{
            codvect [abs (ind_i[i0])-1] += 1;
            if (codvect [abs(ind_i[i0])-1] == mo)
                        Codvect [abs(ind_i[i0])-1] -= mo;

            codvect [abs (ind_j[i0])-1] += 1;
            if (codvect [abs (ind_j[i0])-1] == mo)
                        codvect [abs (ind_j[i0])-1] -= mo;
}

if (ind_i[i0] > 0 && ind_j[i0] < 0)
{
            codvect [ind_i[i0]-1] -= 1;
            if (codvect[ind_i[i0]-1] == -1)
                        codvect [ind_i[i0]-1] += mo;

            codvect [abs(ind_j[i0])-1] += 1;
            if (codvect[abs(ind_j[i0])-1] == mo)
                        codvect [abs(ind_j[i0])-1] -= mo;
}

if (ind_i[i0] < 0 && ind_j[i0] > 0)
{
            codvect [abs (ind_i[i0])-1] += 1;
            if (codvect [abs(ind_i[i0])-1] == mo)
                        Codvect [abs (ind_i[i0])-1] -= mo;
```

```
                codvect [ind_j[i0]-1] -= 1;
                if (codvect[ind_j[i0]-1] == -1)
                        codvect [ind_j[i0]-1] += mo;
        }
}
```

Ֆունկցիան որպես մուտքային տվյալներ ստանում է համապատասխան կոդային վեկտորը՝ $codvect$, այն կոմպոնենտների համարները որոնցում տեղի է ունենցել ±1 մեծության սխալ՝ ind_i և ind_j, մոդուլը՝ mo և աղյուսակում այն սինդրոմի համարը ՝ $i0$, որը համընկել է կոդային վեկտորը ստուգող մատրիցի տողերի հետ բազմապատկելուց հետո ստացված սխալանքի սինդրոմի հետ: Ինչպես գիտենք մենք ունենք սխալների հավանական 4 դեպքեր. երկու սխալների մեծությունն էլ հավասար $+1$ կամ -1 կամ մեկը՝$+1$, մյուսը՝-1: Այդ իսկ պատճառով սխալների ուղղումը ևս կկատարենք քննարկելով բոլոր 4 դեպքերը: Առաջինը կքննարկենք այն դեպքն երբ երկու սխալներն էլ եղել են $+1$ մեծությամբ, այսինքն մեր աղյուսակում համապատասխան սխալանքի սինդրոմի հետ նույն տողում գտնվող երկու կոմպոնենտներն էլ ունեն + նշանը: Ինչպես տեսնում ենք ֆունկցիայի առաջին քայլում այդ պայմանի բավարարվելու դեպքում կոդային վեկտորի համապատասխան կոմպոնենտներից հանում ենք 1, որպեսզի ուղղենք առաջացած $+1$ սխալանքը: Քանզի օրինակ 0 թվի դեպքում մենք նրանից հանելով 1 կստանանք -1 թիվը, այդ դեպքում գումարում ենք նրան մեր կոդի մոդուլը՝ տվյալ դեպքում 5, և ստանում ենք -1 – ին համապատասխան 4 թիվը: Նույն գործողությունները կկատարենք նաև այն դեպքում երբ 2 սխալներն էլ ունեն -1 մեծությունը, ուղակի 1 հանելու փոխարեն պետք է գումարենք 1 առաջացած սխալն ուղղելու համար, ինչպես կարող ենք տեսնել ֆունկցիայի երկրորդ քայլում: Երրորդ և չորրորդ քայլերը համապատասխանում են այն դեպքերին երբ սխալներից մեկը եղել է $+1$ մեծությամբ, իսկ մյուսը՝ -1: Այդ դեպքերում հանում ենք մեկ այն կոմպոնենտից որտեղ սխալը ունի $+1$ մեծություն և գումարում մեկ այն կոմպոնենտին, որում տեղի է ունեցել -1 մեծությամբ սխալ: Արդեն ծրագրի վերջին հատվածում կանչում ենք այս ֆունկցիան նրան տալով համապատասխան մուտքային տվյալները և դուրս ենք բերում արդեն իսկ ուղղված կոդային վեկտորը, որը ստացել էինք ծրագրի սկզբում՝ հաղորդագրությանն ավելացնելով 4 ստուգող սիմվոլներ:

Ներկայացնենք ծրագրի այն տողերը որոնք կատարում են համապատասխան գործողությունները՝

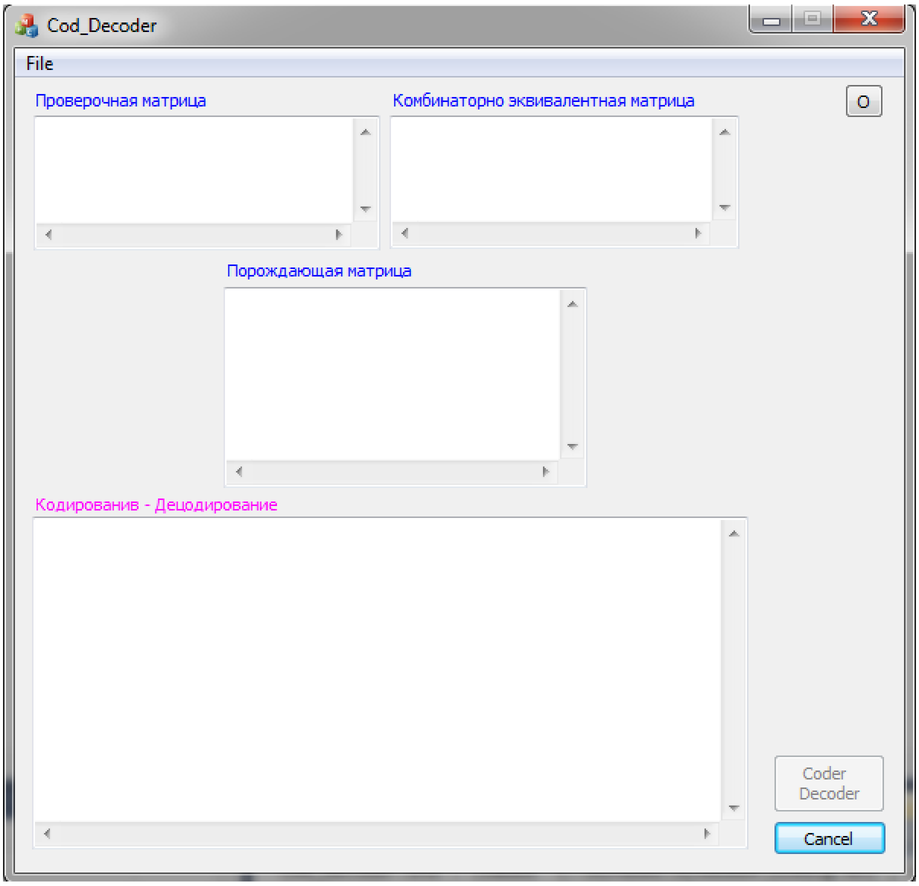
```
correction (codvect, ind_i, ind_j, i_current, mo);
cout << " correct_vector =    ";
for (i = 0; i < n; i++)
cout<<codvect[i];
```

Աշխատանքի հաջորդ հատվածում կներկայացնենք վերը նկարագրված ծրագրի միջոցով ստացված արդյունքները:

Ստացված արդյունքներն ավելի պատկերավոր ներկայացնելու համար $C++$ ծրագրավորման փաթեթի միջոցով կառուցվել է MFC դիալոգային պատուհան, որի վրա տարբեր դաշտերում դուրս են բերվում մեր կոդի ստուգող, ծնող և կոմբինատոր-էքվիվալենտ մատրիցաները, հաղորդագրության վեկտորը, սխալներ տեղի ունեցած կոմպոնենտների համարները և համապատասխան սինդրոմը (նկար 3.4):

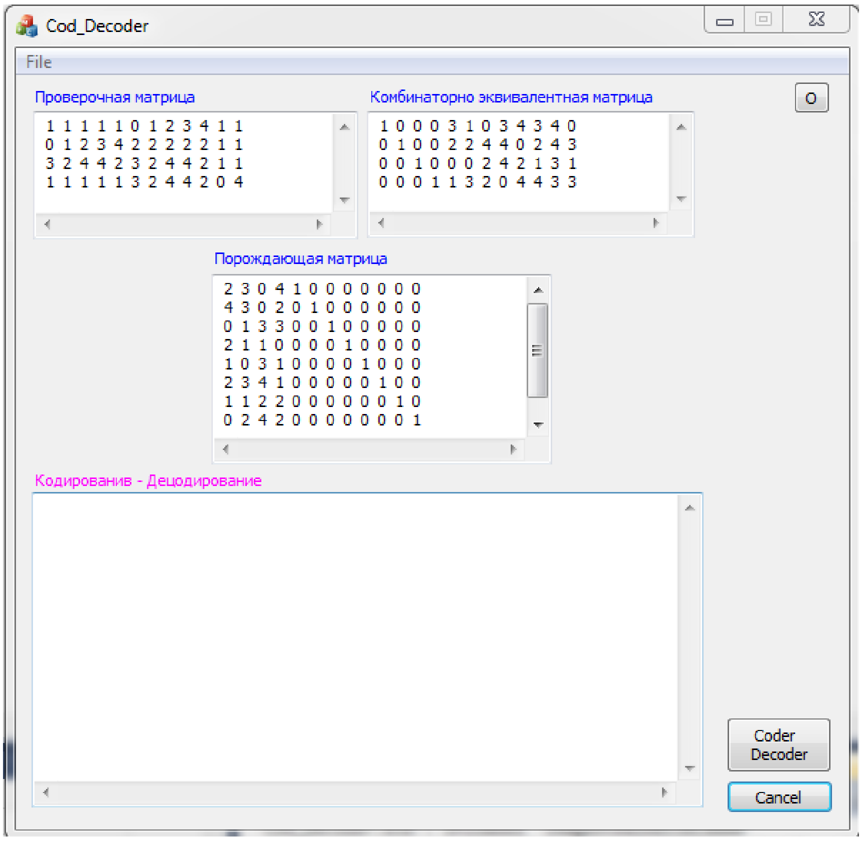
Օրինակը կներկայացնենք Z_5 օղակում կառուցված կրկնակի ± 1 սխալ ուղղող օպտիմալ $C(12,8)$ կոդի համար: Մեզ անհրաժեշտ է ծրագրին որպես մուտքային տվյալներ հանձնել կոդի ստուգող, ծնող և ստուգող մատրիցին կոմբինատոր-էկվիվալենտ մատրիցաները, նաև այն օղակի մեծությունը որում կառուցվել է այս կոդը՝ այսպես ասված կոդի մոդուլը:

Ծրագիրն աշխատում է նաև այս աշխատանքում կառուցված մնացած բոլոր կոդերի համար, ուղակի անհրաժեշտ է ծրագրում փոփոխել այն ֆայլի հասցեները որոնցից այն կարդում է մատրիցաները և օղակի մեծությունը՝ մոդուլը:



Նկար 3.4 MFC դիալոգային պատուհան

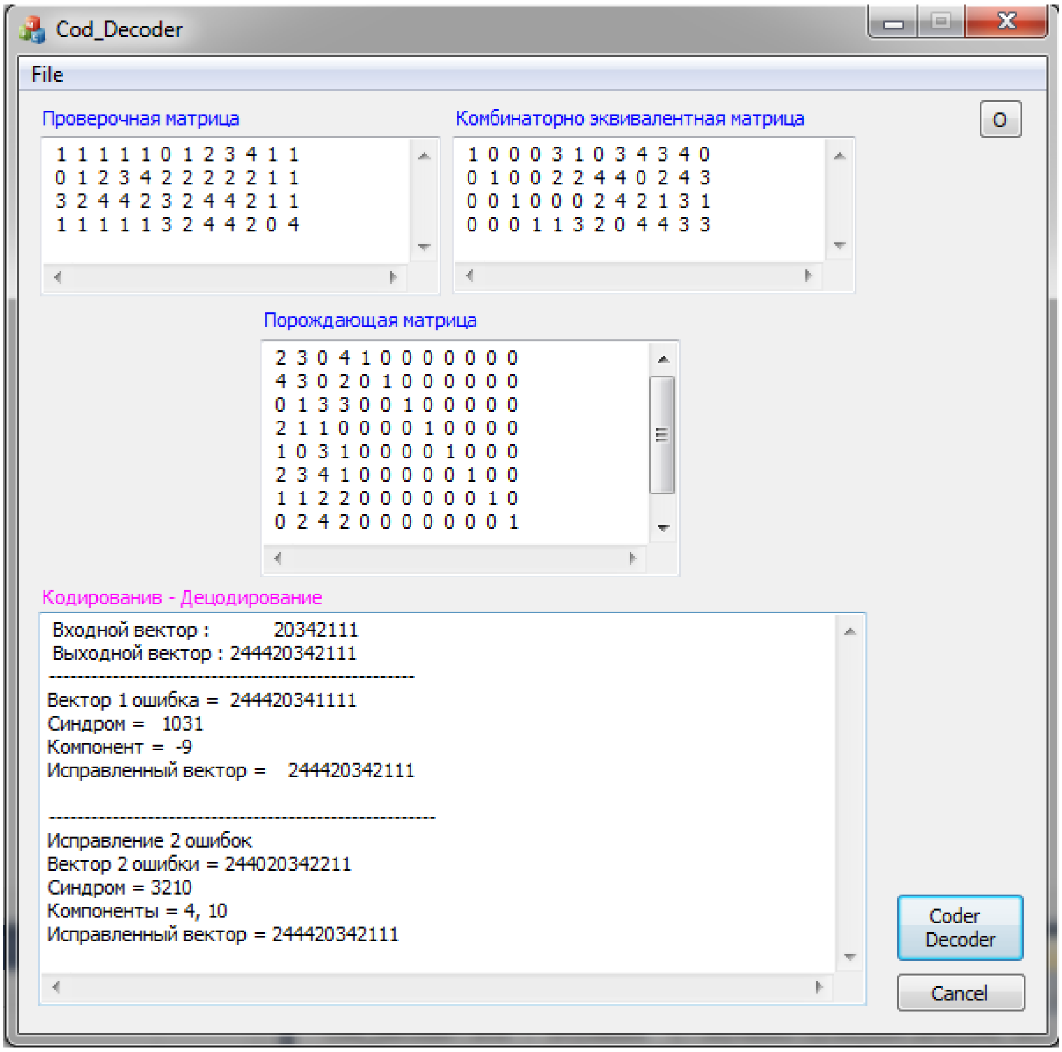
Առաջին պատուհանում տեսնում ենք կոդի ստուգող մատրիցը, երկրորդում այդ նույն մատրիցը բերված կոմբինատոր-էկվիվալենտ տեսքի, իսկ վերջին պատուհանում այդ կոդի ծնող մատրիցան: Մուտքային տվյալները ստանալուց հետո ակտիվանում է ***Coder Decoder*** կոճակը, որը սեղմելուց հետո սկսում են իրականացվել վերը նկարագրված ֆունկցիաներից բաղկացած ծրագիրը, որնել հենց իրականացնում է այս կոդով կոդավորման և ապակոդավորման ալգորիթմները (նկար 3.5):



Նկար 3.5 MFC դիալոգային պատուհան

Ծրագիրն աշխատեցնելուց հետո ներքևի պատուհանում հայտնվում են արդեն իսկ ստացված արդյունքները:

Առաջին տողում կարող ենք տեսնել մուտքային հաղորդագրությունը, որն ինչպես գիտենք ներկայացվում է Z_5 օղակում 8 երկարությամբ վեկտորի միջոցով: Դրանից հետո աշխատում է վերը նկարագրված *coding* ֆունկցիան և արդեն երկրորդ տողում մենք կարող ենք տեսնել արդեն իսկ կոդավորված վեկտորը (քանի որ կատարվում է սիստեմատիկ կոդավորում, ապա վեկտորի 8 կոմպոնենտները կմնան նույնը, իսկ սկզբից կավելանան 4 ստուգման բիթեր): Հաջորդ քայլում աշխատում է *adding_errors* ֆունկցիան և կոդային բառում առաջանում են մեկական կամ երկուական սխալներ, որից հետո գտնվում են համապատասխան սխալանքի սինդրոմները: Այնուհետև մեր ստացված աղյուսակից ծրագիրը գտնում է համապատասխան կոմպոնենտները, որոնցում սխալներ են տեղի ունեցել: Վերջին քայլում արդեն աշխատում է *correction* ֆունկցիան, որն ուղղում է առաջացած սխալները, և դուրս է բերվում պատուհան սկզբնական կոդավորված վեկտորը, որից արտաքսելով առաջին 4 ստուգման բիթերը ստանում ենք սկզբնական հաղորդագրությունը (Նկար 3.6) :



Նկար 3.6 (MFC դիալոգային պատուհան վերջնական տեսք)

Վերը նկարագրված ծրագիրն աշխատում է ցանկացած այբուբենում կառուցված կամայական մեծությամբ կոդերի համար: Այս ծրագրի հիմքում եղած ալգորիթմը կարող է կիրառվել նաև այն սարքերում, որոնցում անհրաժեշտ կլինի ունենալ ասիմետրիկ փոքր մեծությամբ սխալներ ուղղող կոդերը՝ հնարավոր առաջացած սխալները ուղղելու համար:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Սույն ատենախոսության շրջանակներում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

- Կառուցվել են նոր օպտիմալ և քվազի-օպտիմալ կոդեր, որոնք կարողանում են հայտնաբերել և ուղղել կրկնակի փոքր ամպլիտուդաներով սխալներ տարբեր մեծությամբ օղակներում [11,12,15]:
- Ապացուցվել է թեորեմ կոդի երկարության կրկնապատկման մասին, ըստ որի մշակվել է ալգորիթմ, որի միջոցով արդեն իսկ հայտնի կրկնակի ±1 սխալ ուղղող գծային օպտիմալ $C(N, N-4)$ կոդերին ավելացնելով երկու ստուգող սիմվոլ, կարող ենք ստանալ $C\,(2N, 2N-6)$ կոդեր, որոնք կունենան երկու անգամ ավելի մեծ երկարություն, և հետևաբար ավելի մեծ հաղորդման արագություն[12,14]:
- Մշակվել և իրականցվել են կրկնակի փոքր ամլիտուդայով սխալներ ուղղող կոդերի համար կոդավորման և ապակոդավորման (սխալների ուղղման) ալգորիթմները[10,13]:
- C++ ծրագրավորման լեզվով գրվել է ծրագիր, որի միջոցով իրականացվել են նախորդ կետում նշված ալգորիթմները, որի արդյունքները ներկայացված են MFC դիալոգային պատուհանի միջոցով:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

[1] Golay M.J.E., “Notes on Digital Coding”, Proc. IRE 37, p. 657, 1949

[2] Hamming R. W., “Error Detecting and Error Correcting Codes. Bell System Technical
Journal“147-160, April, 1950.

[3] Shannon. Claude E., A mathematical theory of communication. Bell System Technical Journal, 27(2):379.423 and 623.656, July and October, 1948.

[4] I. Blake, “Codes over certain rings”, Inform. Contr. 20, 1972, 396-404.

[5] I. Blake, “Codes over integer residue rings”, Inform. Contr. 29, 1975, 295-300.

[6] A. R. Calderbank, N. J. A. Sloane, “Modular and p–adic Cyclic Codes,” Designs, Codes and Cryptography, vol 6, No 1, pp. 21-36, 1995.

[7] E. Spiegel, “Codes over Zm” Information and Control, vol. 35, pp. 48-51, 1977

[8] V. I. Levenstein and A. J. Han Vink, “Perfect (d, k) - codes capable of correcting single peak-shifts” IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 39, No. 2, pp. 656-662, 1993.

[9] M. Nilsson, “Linear block codes over rings for phase shift keying,” Thesis no. 331, Linkoping University, 1993.

[10] H.Khachatryan, “Encoding and Decoding procedures for double ±1 error correcting codes over ring Z_5” Mathematical Problems of Computer Science 43, 57--61, 2015.

[11] Gurgen Khachatrian and Hamlet Khachatrian, “Construction of Double ±1 Error Correcting Linear Optimal Codes over Rings Z_7 and Z_9” Mathematical Problems of Computer Science 45, 106-110, 2016.

[12] Gurgen Khacahtrian and Hamlet Khachatryan, “Further results on double ±1 error correcting codes over rings Z_m” International Journal “Information Control and Processing”,Volume 4, Number 1, pp.3-11, 2017.

[13] Hamlet K. Khachatrian, “Further Results for Encoding and Decoding Procedures of Asymmetric Low Magnitude Error Correcting Codes” Mathematical Problems of Computer Science 48, 105--111, 2017

[14] Gurgen Khacahtrian and Hamlet Khachatryan, “Construction method of $(2N, 2N-6)$ linear codes over ring Z_m, based on $(N, N-4)$ linear codes correcting double ±1 types of errors” CSIT Conference 2017, Yerevan, Armenia, September 25-29, pp.233-236.

[15] Gurgen Khachatrian and Hamlet Khachatrian.”Construction of Linear Codes over Rings Z_m Correcting Double ±1 or ±2 Errors” Mathematical Problems of Computer Science 49, pp.66-73, 2018.

[16] H. Kostadinov, N. Manev, H. Morita, “Double ± 1-error correctable codes and their applications to modulation schemes”, Proc. Elev. Intern. Workshop ACCT, pp 155-160, June 16-22, 2008, Pamporovo.

[17] W. W. Peterson and E.J. Weldon, “Error-Correcting Codes”, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1972.

[18] H. Kostadinov, N. Manev, H. Morita, “On ±1-error correctable integer residue codes” Sixth International Workshop on Optimal Codes and Related Topics June 16-22, 2009, Varna, Bulgaria pp. 117–124

[19] H. Kostadinov, H., Morita, H., Iijima, N., Han Vinck, A.J., Manev, N.: “Soft decoding of integer codes and their application to coded modulation”. IEICE Trans Fundam., E93-A, pp.1363-1370, 2010

[20] S.Martirossian. “Single error correcting close packed and perfect codes” Proc.1st INTAS Int. Seminar Coding Theory and combinatorics, Armenia, pp.90-115, 1996.

[21] H. Kostadinov, H. Morita, N. Manev and N.Iijima,”Double error correctable integer code and its application to QAM”, Proc.of International Symposium on Information Theory and its Applications(ISITA), Auckland, New zealand, pp.566-571 , Dec 2008.

[22] Gurgen Khachatrian (AUA) and Hiroshi Morita (UEC),”Construction of optimal ± 1 double error correcting linear codes over ring Z_5".

[23] A.J. Han Vinck, H. Morita, “Codes over the ring of integer modulo m,” IEICE Trans. Fundam. E81-A, 1998, 2013-2018.

[24] H. Kostadinov, H. Morita, N. Manev, “Integer codes correcting single errors of specific types (±e_1, ±e_2, · · ·, ±e_s)”, IEICE Trans. Fundam. E86-A, 2003, 1843-1849.

[25] H. Kostadinov, H. Morita, N. Manev, "Derivation on bit error probability of coded QAM using integer codes", IEICE Trans. Fundam. E87-A, 2004, 3397-3403.

[26] H. Kostadinov, N. Manev, H. Morita, ''On ±1-error correctable codes" IEICE Trans. Fundam., Vol. E93-A, pp.2758-2761,2010.

[27] S. B. Wicker and V. K. Bhargava, editors. "Reed-Solomon Codes and Their Applications." IEEE Press, Piscataway, NJ, 1994.

[28] R. W. Hamming. "Error detecting and error correcting codes." Bell System technical journal, vol. 29, no. 2, pp. 147–160, 1950.

[29] T. Kasami, S. Lin and W. Peterson, "Some Results on the Weight Distributions of BCH codes," IEEE Trans. Information Theory, vol 12, no. 2, 274 p. 1966

[30] Gorenstein, Peterson, Zierler, "Two Error-Correcting Bose-Chaudhuri Codes are Quasi Perfect," Information and Control, no. 3, 291-294 pp, 1960

[31] P. Charpin "Weight Distributions of Cosets of Two-Error-Correcting BCH Codes, Extended or Not", IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 40, no. 5, pp. 1425–1442, Jan. 1991.

[32] F. J. Mac Williams, N. J. A. Sloane, "The Theory of Error Correcting Codes," North-Holland Publishing Company, 1977

[33] J. L. Massey. "Shift register synthesis and BCH decoding." IEEE Transactions on Information Theory, pages 122–127, January 1969.

[34] W. Huffman, V. Pless,"Fundamentals of Error Correcting Codes," Cambridge University Press, 2003

[35] B.Bose and S.Al-Bassam, "On systematic single asymmetric error-correcting codes," IEEE Trans. Inform. Theory, vol.46, no.2, pp.669-772, March 2000.