

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մարզարյան Նարեկ Դավիթի

ՄԱՔՍԻՄԱԼ ԷՆՏՐՈՊԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՌԻՍԿԵՐԻ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ԵՎ ԱԿՏԻՎՆԵՐԻ ԳՆԵՐԻ
ԳՆԱՀԱՏՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ը . 00 . 08 – «Մաթեմատիկական տնտեսագիտությունն մասնագիտությամբ
տնտեսագիտության թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման

Գիտական ղեկավար՝

Ֆ. մ. գ. թ., տ. գ. դ., պրոֆեսոր Ռուբեն Ալբերտի Գևորգյան

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ	3
Գլուխ 1	9
ՊՈՐՏՖԵԼԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՁԵՎԱԿԵՐՊՈՒՄԸ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԿԵՆՍԱԹՈՇԱԿԱՅԻՆ ՖՈՆԴԵՐԻ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՄԵՋ.....	9
1. 1 Կենսաթոշակային ֆոնդերի աշխարհագրական նշանակությունը, տրենդերը և կապը ներդրումային դաշտի հետ.....	9
1.2 Մարկովիցի դասական մոդելի նկարագրությունը, ռիսկ-եկամտաբերություն կորի հիմնական հատկությունները.....	19
1.3 Պորտֆելի օպտիմիզացիան գծային սահմանափակումների դեպքում, VaR, CVaR, CVaR + , CVaR – գնահատականներ:	49
1. 4 Մոդելային պորտֆելի կառուցումը և ռիսկայնության գնահատումը	66
Գլուխ 2.....	88
ՄԱՔՍԻՄԱԼ ԷՆՏՐՈՊԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԻ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ, ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴԱԲԱՆԱԿԱՆ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԸ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ՖԻՆԱՆՍԱԿԱՆԱՆ ԿԱՆԽԱՏԵՍՈՒՄՆԵՐՈՒՄ	88
2. 1 Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի ծագումը, պատմությունը և ձևակերպումը պարզագույն խնդիրների օրինակներով.....	88
2. 2 Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի կիրառությունը ֆինանսնական կանխատեսումներում	92
2. 3 Մաքսիմալ էնտրոպիայի խնդրի լուծման ալգորիթմը և հնարավոր կիրառական խնդիրները.....	108
Գլուխ 3.....	118
ԵՎՐՈՊԱԿԱՆ ՕՊՑԻՈՆՆԵՐԻ ՄԵՋ ՄԱՔՍԻՄԱԼ ԷՆՏՐՈՊԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՈՎ	118
3. 1 Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի լուծման գոյությունը մինչև երեք չափանի տարածությունների համար.....	118
3. 2 Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի լուծման գոյությունը կամայական չափանի տարածությունների համար.....	124
3. 3 Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի ծրագրային կիրառության և լուծման օրինակներ իրական արժեթղթերի վրա ստեղծված օպցիոնների համար.....	130
Եզրակացություն.....	150
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ.....	154

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ատենախոսության թեմայի արդիականությունը

Ատենախոսության արդիականությունը պայմանավորված է հետևյալ դրույթներով՝

1. 2014թ. -ից սկսած Հայաստանի Հանրապետությունում ներդրվել է կուտակային կենսաթոշակային համակարգ, որը ենթադրում է ՀՀ քաղաքացիների կենսաթոշակային խնայողությունների մասնակի ներդրումը օտարերկյա շուկաներում: Դա հաշվի առնելով բնական է դառնում ներդրումների այդպիսի գործընթացի արդյունավետ կարգավորման հարցի դիտարկումը: Չնայած նրան, որ ներկա պահի դրությամբ ՀՀ-ում կենսաթոշակային ֆոնդերի ներդրումային գործունեությամբ զբաղվում են բավականին մեծ փորձ ունեցող միջազգային կառույցներ, այդուհանդերձ իրենք նույնպես ունեն կանխատեսումների նոր մեթոդների կիրառման կարիք: Մյուս կողմից ատենախոսության արդյունքները կարելի է կիրառել ՀՀ ֆինանսական շուկայի կարգավորող մարմինների աշխատանքում որպես ներդրումային գործունեության արդյունավետության և համեմատության (benchmark-ային) գործիք:

2. Ատենախոսության մեջ նկարագրված և բարելավված մեթոդաբանական կառույցները ունեն կիրառական մեծ հնարավորություններ ոչ միայն ՀՀ-ում, այլև արտերկրում, հատկապես խոշոր ֆինանսական շուկաներում: Ֆինանսական շուկաները ունեն երկար տարիների պատմություն, սակայն մինչև այսօր գոյություն չունեն կարգավորման իդեալական կանոններ և ուղենիշներ շուկայի մասնակիցների համար: Այդ պատճառով անորոշության պայմաններում հիմնականում աշխատեցվում են պատմական տվյալների վրա հիմնված դասական մեթոդները, որոնք կարող են տրված խնդրի համար արդյունավետ չլինել: Այս առումով ատենախոսության արդյունքները օպտիմալ պորտֆելների կառուցման, ռիսկերի կառավարման, կանխատեսումների, շուկայական մոնիտորինգի և շուկայի մասնակիցների

սպասումների մաթեմատիկական ձևակերպում ստեղծելու հնարավորություններ են տալիս: Ատենախոսության մեջ ներկայացված մոդելային բոլոր դրույթները սահմանված են ամուր մաթեմատիկական հիմունքների վրա և ժամանակակից ծրագրային սպահովման միջոցով բերվել են արդյունավետ կիրառության համար պատրաստ վիճակի:

3. Բացի նրանից, որ ատենախոսության մեջ ներկայացվել է մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի կիրառական նշանակությունը և տարվել են զուգահեռներ նման խնդիրներում օգտագործվող դասական այլ մոտեցումների հետ, նաև կատարվել է մոդելի լավարկում, այն է՝ սահմանվել են որոշակի մաթեմատիկական պայմաններ և ապացուցվել է մաքսիմալ էնտրոպիայի խնդրի լուծման գոյությունը այդ պայմանների բավարարման դեպքում, ինչը մոդելի տեսական զարգացման և հետագա գործնական կիրառության սպեկտրի լայնացման մեծ հնարավորություններ է բացում ներդրումային տարբեր խմբերի համար:

4. Ատենախոսության մեջ օգտագործված գլխավոր մեթոդներից մեկը՝ մաքսիմալ էնտրոպիայի միջոցով բաշխման վերականգնումը իրենից ներկայացնում է խնդիրների որոշ դասի լուծման համար ունիվերսալ մոտեցում: Հաշվի առնելով, որ մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդաբանությունը ստեղծվել և առաջին անգամ սահմանվել է ֆիզիկայում, այնուհետև կիրառվել ինֆորմացիայի տեսության մեջ, հնարավոր է դառնում աշխատանքի ստացված հիմնական արդյունքները որոշ չափով կիրառել այդ ճյուղերում և դրական ազդեցություն ունենալ մեթոդաբանական զարգացման վրա:

Ատենախոսության թեմայի արդիականությունը կարելի է հիմնավորել վերը նշված դրույթներով, որոնց հիմքում ընկած է և՛ տեսական, և՛ կիրառական բնույթ կրող գիտահետազոտական աշխատանք, ինչը իսկզբանե կատարվել է մտքում ունենալով աշխատանքի թիրախային խմբերին: Ատենախոսության արդյունքները ճկուն են այնքանով, որ չունեն ոչ-մի աշխարհագրական յուրահատուկ սահմանափակումներ և աշխատում են կամայական շուկայական պայմաններում՝ այդպիսով օգտակար լինելով և Հայաստանյան և արտերկրյա ֆինանսական կառույցների համար:

Ատենախոսության նպատակը և խնդիրները

Ատենախոսության հիմնական նպատակն է վերամշակել մինչև այժմ հայտնի որոշ կանխատեսման մոտեցումները և առավելագույնս իրար մոտեցնել տեսական արդյունքները և իրենցից բխող գործնական կիրառությունը՝ մատուցելով ներդրումային խմբերի գործունեության համար օգտակար գործիքներ:

Ատենախոսության խնդիրներից կարևոր է առանձնացնել հետևյալները՝

1. Փորձարկել ֆինանսական շուկաներում կիրառվող դասական մեթոդաբանական մոտեցումները ՀՀ կենսաթոշակային ներդրումային գործունեության մեջ, այնուհետև լավարկել այդ մոտեցումները՝ դուրս չգալով դասական մոդելի շրջանակներից և որպես արդյունք կառուցել էֆեկտիվ դինամիկ ներդրումային պորտֆելներ:

2. Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդաբանության միջոցով ֆինանսական օպցիոնների ներկա գներից ստանալ շուկայական սպասումների տեսքով տեղեկատվություն: Ստացված մոդելը հասցնել կիրառության համար ամենապիտանի տեսքի և բերել առավելագույն ավտոմատացված վիճակի: Քանի որ այս մեթոդի շրջանակներում վերջնական արդյունքում շուկայական սպասումները տրվում են հավանականային բաշխման տեսքով, ապա այդ բաշխումը նկարագրող վիճակահիները նաև հնարավոր է դառնում կիրառել նախորդ կետում նշված դասական մոդելների մեջ:

3. Դուրս բերել Եվրոպական օպցիոնների մեջ կիրառված մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի լուծման գոյության պայմանները՝ այդպիսով հասնելով ոչ միայն տեսական հստակության, այլ նաև լուծելով մի շարք գործնական բարդություններ առաջացնող խնդիրներ: Վերջինս նաև ծրագրային կիրառության տեսանկյունից տալիս է ժամանակային և ռեսուրսային խնայողության հնարավորություն:

4. Ստուգել ատենախոսության մեջ առաջադրված մեթոդների գործնական կիրառության նշանակությունը (օրինակ backtesting-ի միջոցով) և կատարել համապատասխան հետևություններ դասական մոտեցումների նկատմամբ այդ մեթոդների նախընտրելիության մասին:

5. Կառուցել և գրել համակարգչային ծրագիր, որը հիմնվելով տեսական արդյունքների վրա ապահովում է նվազագույն հաշվարկային բարդություն և ծախսում է հնարավորինս քիչ ռեսուրսներ, ինչը էլ ավելի է մեծացնում աշխատանքի հիմնական արդյունքների գործնական նշանակությունը և կիրառական ընդարձակման տեղ է բացում հետագա հետազոտությունների համար:

6. Ներկայացնել աշխատանքի գործնական կիրառության օրինակներ, որոնք հաշվարկվել են վերը նշված համակարգչային ծրագրով իրական շուկայական տվյալների հիման վրա:

Ատենախոսության առարկան և օբյեկտը

Ատենախոսության հետազոտության օբյեկտն է ֆինանսական շուկան՝ դիտարկված որպես իր մասնակիցներից կազմված մի տեղեկատվական ամբողջություն: Տեղեկատվությունը այս պարագայում բնորոշվում է շուկայական ակտիվների վրա ստեղծված դերիվատիվների ներկա իրական գներով, տեսական արժեքներից այդ գների շեղումով և գործարքների կատարման ծավալներով: Ատենախոսության առարկան է նշված տեղեկատվության ձևափոխումը մաթեմատիկական վիճականիների և այդ վիճականիների կիրառությունը Հայաստանի Հանրապետության և միջազգային ներդրումային խմբերի օրինակներով:

Ատենախոսության տեսական, տեղեկատվական և մեթոդական հիմքերը

Աշխատանքի մեջ ներկայացված մեթոդների համար հիմք են հանդիսացել ֆինանսական դաշտի բազում մասնագիտական աշխատություններ, ներառյալ՝ գրքեր, հոդվածներ, նյութեր համացանից: Ատենախոսության համար տեղեկատվական հիմք է հանդիսացել նաև «ՀՀ ՕՐԵՆՔԸ ՊԵՏԱԿԱՆ ԿԵՆՍԱԹՈՇԱԿՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ» և մի շարք վիճակագրական ծառայություն մատուցող ընկերությունների զեկույցներ:

Ատենախոսության մեջ կիրառվել են մաթեմատիկական, տնտեսագիտական, վիճակագրական մեթոդներ, ինչպես նաև ստոխաստիկ ֆինանսներից եկող դասական մոդելներ: Աշխատանքի վերջում հատկապես շեշտադրված է գծային տարածություններից եկող հիմնական դրույթների օգտագործումը: Արդյունավետ

պորտֆելների և ռիսկերի գնահատման հետ կապված գործնական ծրագրային հաշվարկները կատարվել են MatLab ծրագրով, իսկ մաքսիմալ էնտրոպիայի ամբողջ մոդելային կառուցումը՝ Python լեզվով:

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները և գիտական նորույթը

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները կրում են և՛ տեսական, և՛ գործնական նշանակություն, որպես նորույթ կառանձնացնենք հետևյալը՝

1. Եվրոպական քոլ (call) օպցիոնների համար կիրառվող մաքսիմալ էնտրոպիայի խնդրի լուծման գոյության համար դուրս են բերվել մաթեմատիկական պայմաններ: Ապացուցվել է լուծման գոյությունը այդ պայմանների բավարարման դեպքում:

2. Կատարվել է վերը նշված խնդրում դասական Նյուտոն-Ռաֆսոնի մեթոդի կիրառության լավարկում՝ օգտագործելով դինամիկ քայլերով գրադիենտների մեթոդը:

3. Ստեղծվել է ծրագրային ապահովում, որը հիմնվելով ներկա պահին առկա շուկայական տեղեկատվության վրա (Եվրոպական քոլ օպցիոնների գների տեսքով) մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի միջոցով կառուցում է ապագա գների կանխատեսումներ :

4. Մշակված մեթոդը կիրառվել է իրական տվյալների վրա: Ցույց է տրվել, որ կանխատեսումները տալիս են բավարար արդյունքներ: Արդյունքում ստեղծվել է կանխատեսումների և ֆինանսական շուկաների կառավարչական որոշումներ կայացնելու համար նոր գործիք, որը կարող է օգտագործվել նաև <<-ում ներդրված կուտակային կենսաթոշակային համակարգում:

Ատենախոսության արդյունքների գործնական նշանակությունը

Ատենախոսությունում ստացված արդյունքները կարելի է կիրառել հետևյալ հիմնական ուղղություններով՝

1. Օգտագործել ատենախոսության արդյունքները երկարաժամկետ ներդրումային որոշումներ կայացնելու համար:

2. Կիրառել այդ մեթոդաբանությունը շուկայական կարգավորման և վերահսկողության համար:

3. Կառուցել արդյունավետ պորտֆելներ և մշակել ռիսկերի կառավարման այլընտրանքային համակարգեր:

4. Օգտագործել մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդը (մեր կողմից ներկայացված համապատասխան ծրագրային ապահովման միջոցով) ալգորիթմիկ առք-վաճառքի համար (algorithmic trading): Այդ միտքը նաև ներկայացվել է Երևանի պետական համալսարանի տնտեսագիտության և կառավարման ֆակուլտետում անցնող սեմինարի ընթացքում և հետաքրքրություն է առաջացրել ներկա գտնվող պրակտիկ աշխատող ընկերությունների ներկայացուցիչների մոտ:

Ատենախոսության արդյունքների փորձարկումը և հրապարակումները

Ատենախոսության արդյունքները ներկայացվել են “Multivariate statistical analysis and econometrics // Proceedings of the IXth International School-Seminar. Town of Tsakhkadzor, the Republic of Armenia, 2016”, “Emil Artin International Conference Dedicated to the 120th Anniversary of Emil Artin, Yerevan, the Republic of Armenia, 2018” միջազգային սեմինարներում, ինչպես նաև ներկայացվել են Երևանի պետական համալսարանի տնտեսագիտության և կառավարման ֆակուլտետի և մեխանիկա-մաթեմատիկական ֆակուլտետներում պարբերաբար իրականացվող սեմինարներում: Ընդհանուր թվով հրապարակվել է 6 գիտական հոդված և 2 թեզիս:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլխից, որոնց կառուցվածքը հետևում է մեթոդաբանական տրամաբանությանը, եզրակացությունից և օգտագործված 44 գրականության ցանկից: Յուրաքանչյուր գլխի վերջում տեսության ամփոփման տեսքով բերված են մեր կողմից հաշվարկված գործնական արդյունքները: Ատենախոսության ընդհանուր ծավալը կազմում է 124 տպագիր էջ:

Գլուխ 1

ՊՈՐՏՖԵԼԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԶԵՎԱԿԵՐՊՈՒՄԸ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԿԵՆՍԱԹՈՇԱԿԱՅԻՆ ՖՈՆԴԵՐԻ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՄԵՋ

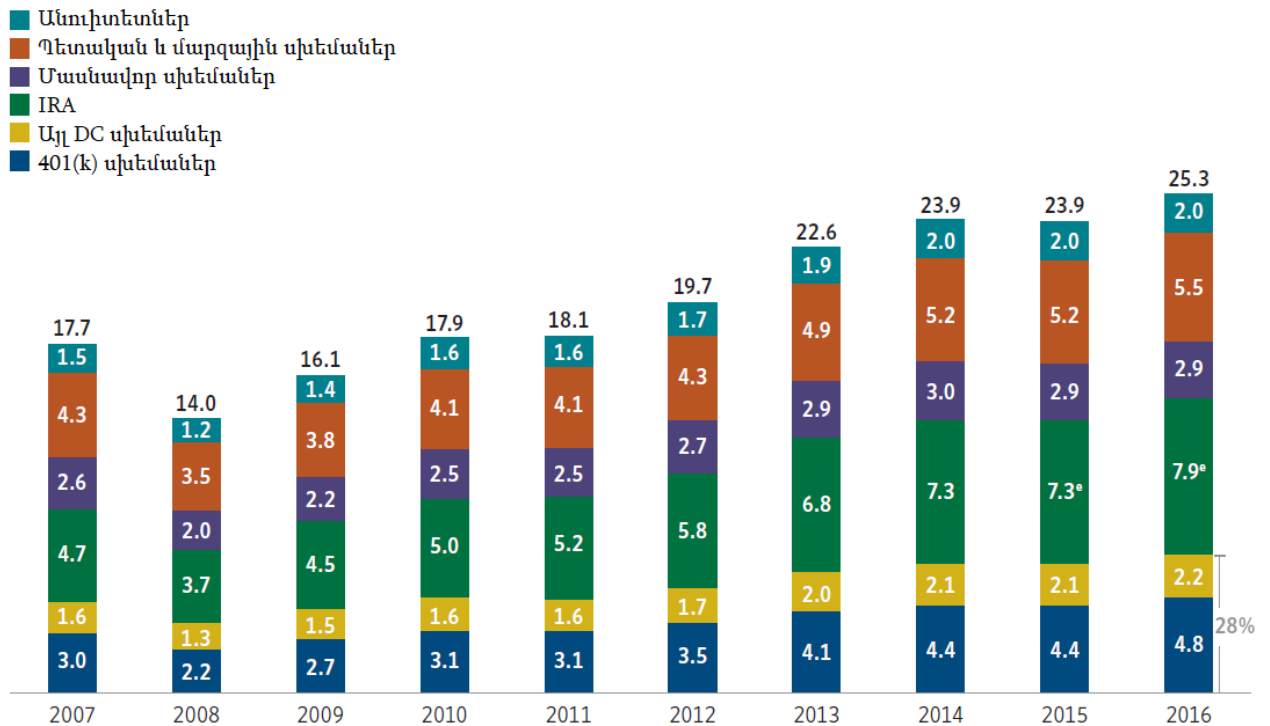
1. 1 Կենսաթոշակային ֆոնդերի աշխարհագրական նշանակությունը, տրենդերը և կապը ներդրումային դաշտի հետ

Ժամանակակից աշխարհում մարդկանց կողմից կատարվող կարևոր որոշումների ցանկում է գտնվում իրենց կուտակային տիպի ակտիվների ճիշտ կառավարումը: Առավել մեծ ուշադրության կենտրոնում են գտնվում, օրինակ՝ **կենսաթոշակային ֆոնդի** համար նախատեսված ակտիվների պորտֆելի ընտրությունը:

Այդ ակտիվները կարող են պահվել որպես հավելում ոչ-կուտակային կենսաթոշակին (**Defined Benefit, DB**), կամ ներդրվեն կուտակային կենսաթոշակային ֆոնդերի (**Defined Contribution, DC**) մեջ: Վերջին 10 տարիների ընթացքում աշխարհի 13 խոշոր երկրների կենսաթոշակային ֆոնդերում նկատվում է ակտիվների վերաբաշխում ի օգուտ DC ակտիվների, որոնք դեռ 2013-2014թ. -ի տվյալներով աճել էին 7.8%-ով, մինչդեռ DB ակտիվները՝ 6.6%, որի արդյունքում DC ակտիվները կազմել էին ընդհանուր կենսաթոշակային ֆոնդերի 45.4 %-ը՝ աճելով 42.6%-ից [1]: DC-ը հատկապես դոմինանտ է ԱՄՆ-ում, Ավստրալիայում, Ճապոնիայում և Կանադայում: Գծապատկեր 1. 1. 1-ում բերված է ԱՄՆ-ում DC կենսաթոշակային ակտիվների բաշխման վիճակագրությունը վերջին տարիների համար՝ 2007-2016 [2]:

Ներդրողները, բնականաբար, ունեն տարբեր նախապատվություններ: Ընդհանրապես ասած տարանջատում են հետևյալ հիմնական ներդրումային ուղղվածությունները, որոնք կազմում են՝ բաշխելով ներդրողներին ըստ իրենց

դիսկայնության նախապատվության՝ այդպիսով առանձնացնելով երեք հիմնական խումբ, որոնք ներկայացված են ստորև՝



Գծապատկեր 1.1.1. ԱՄՆ-ում DC կենսաթոշակային ակտիվների բաշխումը ըստ տարբեր կուտակային սխեմաների (աղբյուր - “Defined Contribution Plan Participants’ Activities, 2016” - Investment Company Institute):

1. Կոնսերվատիվ

2. Նեյտրալ

3. Ագրեսիվ

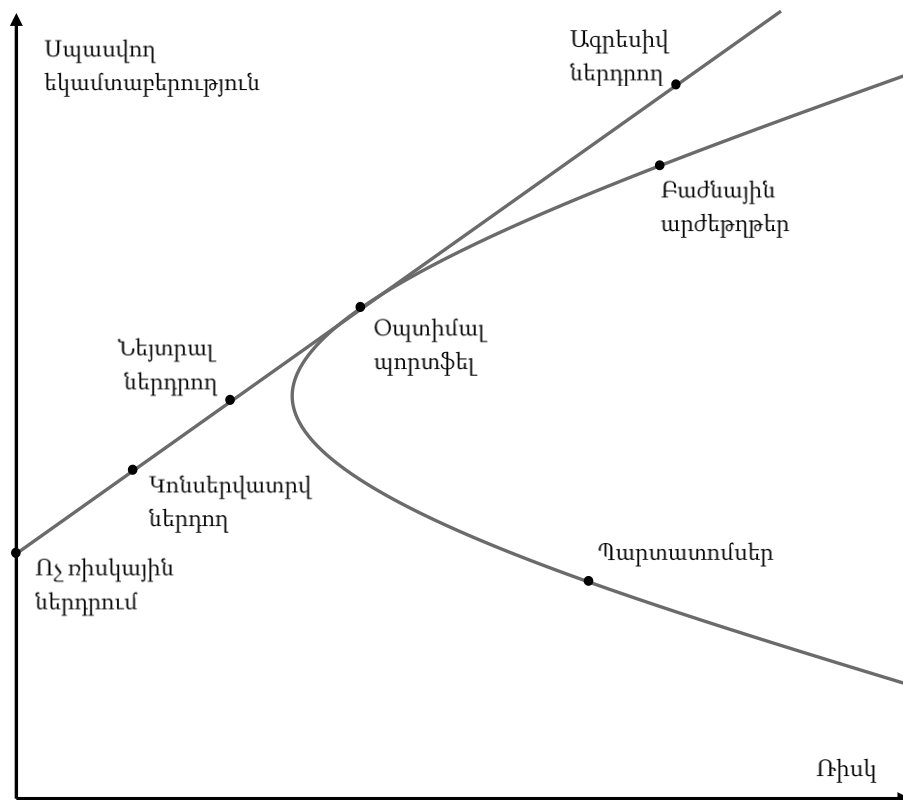
Կոնսերվատիվ ներդրողները նախապատվությունը տալիս են պարտատոմսերին (լինեն դրանք մոնիցիյալ, պետական երկարաժամկետ, կամ մասնավոր սեկտորի ընկերության կողմից թողարկված): Օրինակ՝ պետական պարտատոմսերը համարվում են ոչ-դիսկային, ի հավելումն դրանց տարբեր գրականություններում կարելի է հանդիպել նաև “cash” տերմինը, որը վերաբերում է ոչ-դիսկային ներդրումների այլ տեսակի, օրինակ՝ CD (Cash Deposit) ներդրումները: Կոնսերվատիվ ներդրողները որպես կանոն հակված են լինում ներդրումներ կատարել

ցածր ռիսկային և համապատասխանաբար ցածր եկամտաբերություն ունեցող ակտիվների մեջ:

Ազրեսիվ ներդրողները նախապատվությունը տալիս են բաժնային արժեթղթերին, որոնք բացի եկամտաբեր լինելուց նաև, բնականաբար, բարձր ռիսկային են: Կարծիք կա, որ թոշակային տարիքին մոտեցող անձինք պետք է ներդրումներ անեն ավելի ցածր ռիսկային ակտիվների մեջ, սակայն փորձը հակառակն է ցույց տալիս, որը կապված է նախ քիչ ժամանակում բարձր եկամուտ ստանալու ցանկության հետ, մյուս կողմից էլ կյանքի սպասվող միջին տևողության աճի և ինֆլյացիայի տեմպերի աճի հետ:

Նեյտրալ (Moderate) ներդրողները վերը նշված երկու ծայրահեղությունների «ոսկե միջինն» են:

Ստորև պատկերված են տարբեր տիպի ներդրողների դիրքերը «Ռիսկ-Եկամտաբերության» կորի վրա (շրջակայքում), որի կրճատ դուրս բերումը և ինտուիտիվ նկարագրությունը մանրամասնորեն ներկայացված է հաջորդ բաժիններում **Մարկովիցի** դասական մոդելի շրջանակներում:



Գծապատկեր 1.1.2. Եկամտաբերություն-ռիսկ հարաբերության պատկերավոր նկարագրությունը ռիսկի նկատմամբ տարբեր տոլերանտություն ունեցող խմբերի համար:

2012թ.-ի վերջում 13 խոշոր շուկաների ընդհանուր ակտիվները գնահատվել են 29.754 մլրդ ԱՄՆ դոլար, 8.9%-ով ավել, քան 2011թ.-ին [1]: Ըստ տիրապետության տակ ունեցած ակտիվների՝ այդ տարվա մեծագույն կենսաթոշակային շուկաներն էին՝ ԱՄՆ-ը, Ճապոնիան և Միացյալ Թագավորությունը՝ 56.6%, 12.5% և 9.2% մասնաբաժիններով: 2017թ. -ի դրությամբ տեղի են ունեցել որոշ փոփոխություններ, սակայն ակտիվների հարաբերական բաշխման տեսքը մեծ մասամբ պահպանվել է: Ստորև ներկայացված են 21 խոշոր կենսաթոշակային շուկաների ակտիվները 2017թ.-ի տվյալներով [3] (աղյուսակը շարունակվում է հաջորդ էջում)՝

Երկիր	Ակտիվներ 2017 (ԱՄՆ \$, մլրդ.)	% ՀՆԱ (Ազգ. արժույթ)
Ավստրալիա	1,924	138.4%
Բրազիլիա	269	12.9%
Կանադա	1,769	107.8%
Չինաստան	177	1.5%
Ֆինլանդիա	233	92.8%
Ֆրանսիա	167	6.5%
Գերմանիա	472	12.9%
Հոնգ Կոնգ	164	49.1%
Հնդկաստան	120	4.9%
Իռլանդիա	157	48.2%
Իտալիա	184	9.6%
Ճապոնիա	3,054	62.5%
Մալայզիա	227	73.4%
Մեքսիկա	177	15.5%
Հոլանդիա	1,598	193.8%

Հար. Աֆրիկա	258	75.1%
Հար. Կորեա	725	47.4%
Իսպանիա	44	3.3%
Շվեյցարիա	906	133.1%
ՄԹ	3,111	121.3%
ԱՄՆ	25,451	131.2%
Ընդհանուր	41,355	67%

Աղյուսակ 1. 1. 1. Կենսաթոշակային ակտիվների բաշխումը ըստ երկրների (աղբյուր – Global Pension Assets Study 2018 – Thinking Ahead Institute):

Նկատենք, որ Ավստրալիան, ԱՄՆ-ը և ՄԹ-ը ունեն բաժնային արժեթղթերի մեջ ներդրումների համեմատաբար շատ ավելի մեծ կշիռ, քան դիտարկված մնացած երկրները: Հարկ է նշել նաև, որ մեծ ծավալով ներդրումներ են կատարվում ինֆրաստրուկտուրայի մեջ, ինչը խրախուսվում է պետությունների կողմից (օրինակ՝ ներդրողները ազատվում են որոշ հարկերից), և դա հատկապես հաճախ էր արվում ճգնաժամի տարիներին: OECD-ի կողմից հրապարակված զեկույցի մեջ մինչև 2030թ.-ը գլոբալ ինֆրաստրուկտուրայի մեջ պահանջվող ներդրումները գնահատվել են մոտ 50 տրլն. ԱՄՆ դոլար: Էներգետիկայի միջազգային գործակալությունը նույնպես հաշվարկներ է կատարել և եկել այն եզրակացությանը, որ մինչև 2050թ.-ը կլիմայական փոփոխություններին ադապտացվելը կպահանջի 45 տրլն. ԱՄՆ դոլար, կամ մոտավորապես 1 տրլն. ԱՄՆ դոլար տարեկան [4,5]: Այս տիպի ներդրումներից սպասվում են հստակ կանխատեսվող և կայուն դրամական հոսքեր: Կենսաթոշակային ֆոնդերը հետաքրքրված են ինֆրաստրուկտուրայի մեջ ներդրումներ կատարելու մեջ, քանի որ դա ապահովում է դյուրացիայի էֆեկտիվ հեջավորում՝ լինելով երկարաժամկետ ներդրում: Այս տիպի ներդրումները գայթակղիչ են նաև շուկայի հետ ունեցած ցածր կոռելյացիայի գործակցի շնորհիվ: Պրակտիկայում այս մոտեցումը ակտիվորեն կիրառվում է Ճապոնիայում, հատկապես նրանից հետո, երբ իրենց պետական կենսաթոշակային ներդրումային ֆոնդը իր ակտիվներում կրճատեց պարտատոմսերի կշիռը 58%-ից մինչև 55%: Ինֆրաստրուկտուրայի մեջ ֆոնդը

ներդնելու է 2.7 մլրդ. ԱՄՆ դոլար: Այդ նպատակով ֆոնդը կրճատելու է իր արտասահմանյան պարտքը:

Վերջին 10 տարիների ընթացքում ամենաարագ աճող կենսաթոշակային շուկաները գտնվում են Հոնգ Կոնգում (8.1%), Չիլիում (6.3%) և Ավստրալիայում (5,9%)՝ գնահատված ԱՄՆ դոլարով: Մյուս կողմից Իսպանիան, Ֆրանսիան և Ճապոնիան ցուցաբերել են ամենափոքր աճի տեմպերը 2007թ.-ից սկսած՝ (-0.5%, -0.2% և 0.2% համապատասխանաբար):

Հաջորդ աղյուսակը ցույց է տալիս 2007թ.-ից սկսած տարբեր պետություններում կենսաթոշակային ֆոնդերի ակտիվների փոփոխության չափը:

Շուկա	Ակտիվներ (ԱՄՆ \$, մլրդ.)	Ակտիվներ (ԱՄՆ \$, մլրդ.)	Աճի տեմպ (ԱՄՆ \$)
	2007թ. վերջ	2017թ. վերջ	10 տարվա CAGR
ԱՄՆ	15330	25411	5.2%
ՄԹ	2686	3111	1.5%
Ճապոնիա	3002	3054	0.2%
Ավստրալիա	1086	1924	5.9%
Կանադա	1209	1769	3.9%
Հոլանդիա	1058	1598	4.2%
Շվեյցարիա	539	906	5.3%
Հար. Կորեա	—	725	—
Գերմանիա	391	472	1.9%
Բրազիլիա	259	269	0.4%
Հար. Աֆրիկա	195	258	2.8%
Ֆինլանդիա	183	233	2.4%
Մալայզիա	—	227	—
Չիլի	111	205	6.3%
Իտալիա	—	184	—
Մեքսիկա	108	177	5.1%
Չինաստան	—	177	—
Ֆրանսիա	170	167	-0.2%
Հոնգ Կոնգ	75	164	8.1%
Իռլանդիա	128	157	2.1%
Հնդկաստան	—	120	—
Իսպանիա	46	44	-0.5%
Ընդհանուր	26,577	41,355	4.2%

Աղյուսակ 1. 1. 2. Կենսաթոշակային ֆոնդերի աճի տեմպերը ըստ տարբեր երկրների 2007-2017թ. ժամանակահատվածում (աղբյուր – Global pension assets study 2018 – Thinking Ahead Institute):

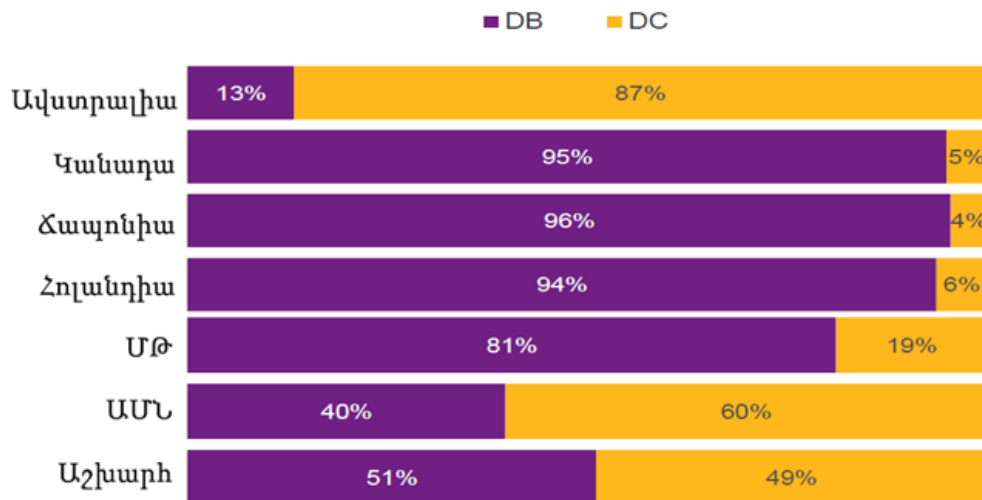
DC պայմանավորվածությունը համարվում է կենսաթոշակային ծրագրերի համեմատաբար պարզ տեսակը: Գործատուն, երբեմն նաև աշխատողը, կատարում են հաջորդական վճարումներ աշխատողի կենսաթոշակային հաշվին: Վճարները սովորաբար աշխատավարձի ինչ-որ տոկոսն են կազմում, և այդ տոկոսը պետք է անփոփոխ մնա աշխատանքային կարիերայի ընթացքում: Կատարվող վճարները հարկվում են, և ներդրման եկամուտը կուտակվում է հարկերից զերծ: Հաճախ աշխատողը կարող է ընտրություն կատարել իր միջոցների ներդրման բազմատեսակ եղանակների միջև:

Ընդհանրապես ասած դրամական հոսքերը կարող են ներդրվել կամայական արժեթղթի մեջ, սակայն պրակտիկայում կենսաթոշակային ծրագրերի մեծ մասը ունի սահմանափակումներ՝ կապված բաժնային արժեթղթերի, պարտատոմսերի, փողի շուկայի ընտրության հետ: Թոշակի անցնելուց անձը կարող է միանգամից ստանալ ողջ գումարը, կամ ստանալ այն պարբերաբար՝ անուիտետային վճարների տեսքով: Այսպիսով անձը ներդրման ռիսկը ամբողջությամբ վերցնում է իր վրա: Ըստ սահմանման՝ անհատական կենսաթոշակային հաշիվը ամբողջությամբ ֆինանսավորված է, և ֆոնդային ընկերությունը չունի պարբերական վճարումներ կատարելուց բացի այլ պարտականություն:

Մեկ այլ տարածված մոտեցում է կենսաթոշակային ֆոնդերից կուտակված գումարը փոխանցել կյանքի ապահովագրության ընկերության հաշիվներին, որից հետո անձը ստանում է իր կենսաթոշակը այդ ապահովագրական ընկերությունից:

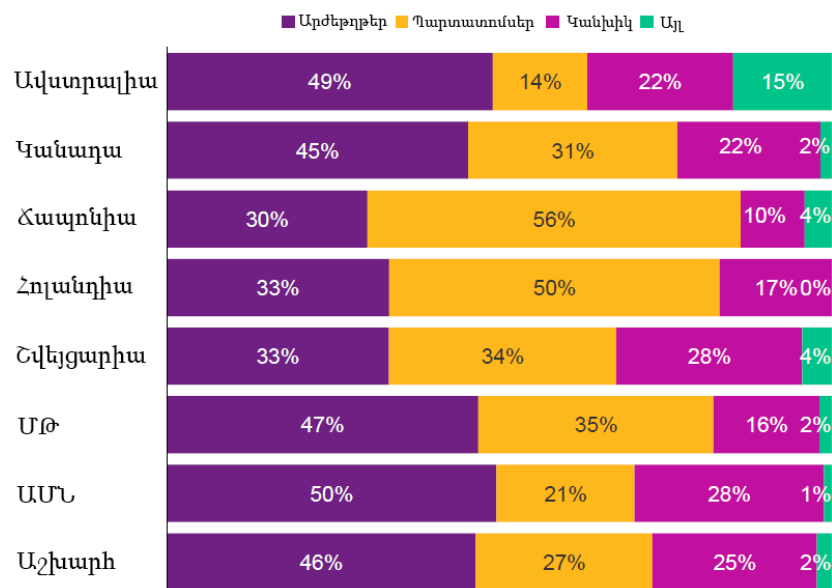
Մինչդեռ DC ծրագրերը կենտրոնանում են ակտիվների արժեքի վրա, DB ծրագրերի խնդիրներից է ճիշտ կառավարել դրամական միջոցների հոսքը: Տիպիկ DB ծրագիրը որոշում է աշխատողի կենսաթոշակը մի բանաձևով, որը հաշվի է առնում և՛ աշխատավարձի պատմությունը, և՛ աշխատանքային փորձը:

Հետևյալ դիագրամը ցույց է տալիս 2017թ.-ի դրությամբ DC / DB ֆոնդերի կշիռները տարբեր երկրներում՝



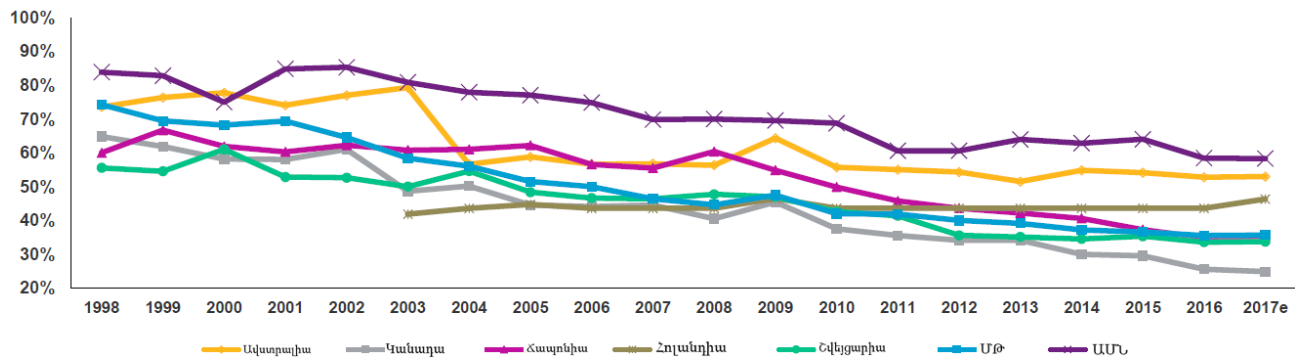
Գծապատկեր 1.1.3. DB և DC ակտիվների կշռային հարաբերությունը տարբեր երկրներում (աղբյուր – Global pension assets study 2018 – Thinking Ahead Institute):

2017թ.-ի վերջում կենսաթոշակային ֆոնդերի ակտիվները միջինում բաշխված են եղել հետևյալ կերպ՝ 46% բաժնային արժեթղթեր, 27% պարտատոմսեր, 2% կանխիկ և 25% այլ ակտիվներ (ներառյալ սեփականություն և այլ այլընտրանքային ներդրումներ): Ստորև ներկայացված են 2017թ.-ում ակտիվների բաշխումները մի շարք երկրներում՝

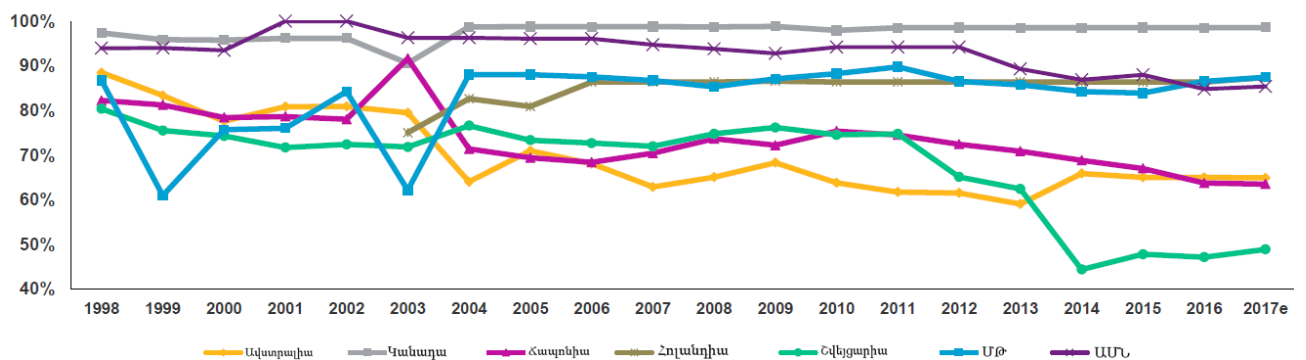


Գծապատկեր 1.1.4. Ներդրումների բաշխումը ըստ ակտիվների տիպերի տարբեր եկրներում (աղբյուր – Global pension assets study 2018 – Thinking Ahead Institute):

Հաջորդ երկու գծապատկերներում պատկերված են ներդրումների տոկոսային մասնաբաժինները տեղական և արտասահմանյան ակտիվների մեջ:



Գծապատկեր 1.1.5. Տեղական արժեթղթերի տոկոսային մասը տարբեր եկրների կենսաթոշակային պրոսֆեյններում (աղբյուր – Global pension assets study 2018 – Thinking Ahead Institute):

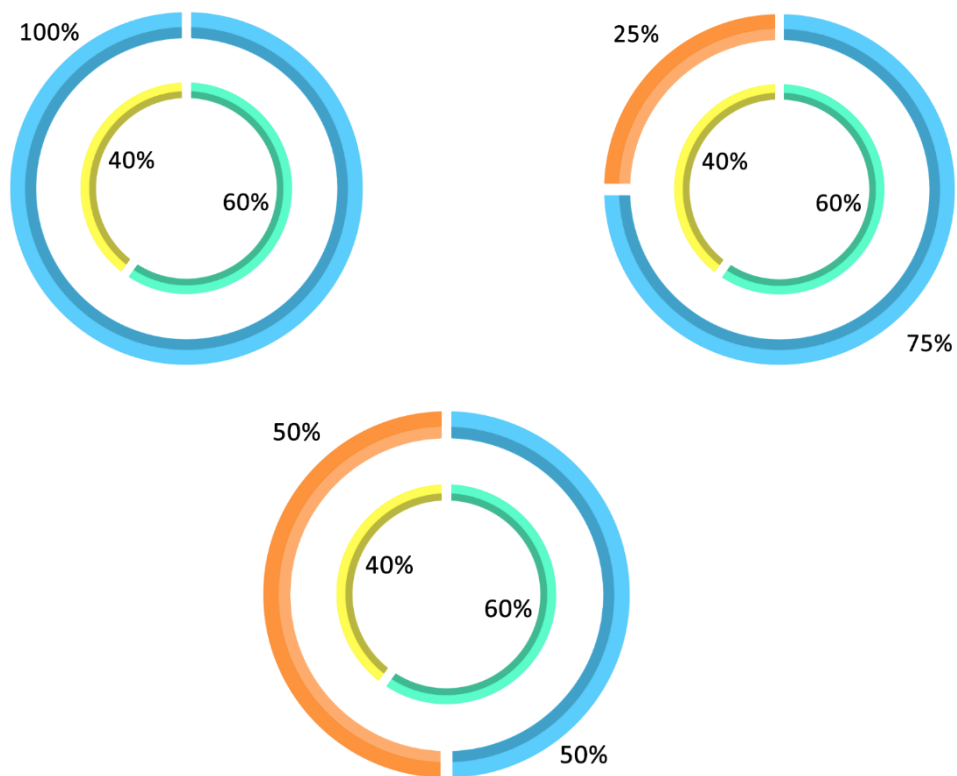


Գծապատկեր 1.1.6. Տեղական պարտատոմսերի տոկոսային մասը տարբեր եկրների կենսաթոշակային պրոսֆեյններում (աղբյուր – Global pension assets study 2018 – Thinking Ahead Institute):

Վերջին տասնամյակում մեծ տարածում են գտել **ETF (Exchange-Traded Fund)** ֆոնդերը, որոնք առաջին անգամ ի հայտ են եկել 1989-1990թ. -ին: ETF-ը պարունակում է այնպիսի ակտիվներ, ինչպիսիք են՝ բաժնետոմսեր, պարտատոմսեր և որոշ այլ տիպի արժեթղթեր: ETF-ների մեծ մասի հիմքում ընկած է լինում որևէ ինդեքս, որի հետ ժամանակի ընթացքում կատարվում են համեմատականներ և համապատասխան

փոփոխություններ: ETF-ները գայթակղիչ են իրենց ցածր գնով, հարկային էֆեկտիվությամբ և արժեթղթին բնորոշ հատկություններ ունենալու շնորհիվ: Այս ֆոնդերը իրենց կառուցվածքով նման են փակ ֆոնդերին, ETF-ների կողմից թողարկված արժեթղթերը ազատ շրջանառվում են շուկայում: Մյուս լավ կողմը այն է, որ իրենց պորտֆելները դիվերսիֆիկացված են, այսինքն՝ ETF-ի արժեթուղթ գնելիս, անհատը գնում է պատրաստի, դիվերսիֆիկացված պորտֆելի մի մասը: Մինչև 2008թ.-ը տարածված էին միայն ինդեքսավորված ETF-ները, սակայն նույն թվականին ԱՄՆ արժեթղթերի հանձնաժողովը հաստատեց ակտիվ կառավարվող ETF-ներ:

ՀՀ-ում նախագծվում է պարտադիր կուտակային կենսաթոշակային համակարգ, արդեն օրենքով հաստատվել են մի շարք սահմանափակումներ և տեսականորեն կազմվել են 3 տիպի ֆոնդեր՝ կայուն եկամտային, պահպանողական և հավասարակշռված: Սահմանափակումների օրինակներ են՝ արտասահմանյան արժույթով ներդրումների չափը չպետք է գերազանցի ֆոնդի ակտիվների 40%-ը, կամ մեկ արտասահմանյան պետության մեջ կատարվող ներդրումների չափը չպետք է գերազանցի ֆոնդի ակտիվների 15%-ը: 3 ֆոնդերի տարանջատումը կատարվել է ըստ բաժնային արժեթղթերի և ոչ-ոփսկային ակտիվների մեջ ներդրման չափաբաժինների՝





ՀՀ դրամ

Գծապատկեր 1.1.7 ՀՀ կենսաթոշակային ֆոնդերի երեք տարբերակները՝ ըստ ներդրումային գործիքների կշիռների:

Կայուն եկամտային ֆոնդ, որի ակտիվների 100%-ը, ըստ օրենսդրության, պետք է ներդրվի պարտքային գործիքների մեջ, որի նպատակն է՝ ապահովել ֆոնդի ակտիվների արժեքի երկարաժամկետ չափավոր աճը և կենսաթոշակային միջոցների պահպանումը: Նախատեսված է ռիսկից խուսափող անձանց համար:

Պահպանողական ֆոնդ՝ ակտիվների մինչև 25%-ը կարելի է ներդնել բաժնային արժեթղթերի մեջ, նպատակն է՝ ապահովել կենսաթոշակային միջոցների կայուն աճ: Նախատեսված է ռիսկի նկատմամբ միջին տոլերանտություն ունեցող անձանց համար:

Հավասարակշռված ֆոնդ՝ ակտիվների մինչև 50%-ը թույլատրվում է ներդնել բաժնային արժեթղթերի և նրանց հետ փոխկապակցված աճանցյալ գործիքների մեջ: Մնացած մասը ներդրվում է պարտատոմսերում, ավանդներում, դրամական շուկայում և նմանատիպ այլ գործիքներում: Նպատակն է՝ հասնել կենսաթոշակային միջոցների առավելագույն աճին, նախատեսված է ռիսկի գնացող մասնակիցների համար:

Մենք ուսումնասիրելու ենք վերջին մոդելային ֆոնդի պորտֆելների ռիսկերը:

1.2 Մարկովիցի դասական մոդելի նկարագրությունը, ռիսկ-եկամտաբերություն կորի հիմնական հատկությունները

Ներկայիս պորտֆելային տեսության խնդիրն է մաքսիմիզացնել պորտֆելի սպասվող եկամտաբերությունը ռիսկի տրված մակարդակի համար: Այս տեսության հիմնադիրներից է **Հարի Մարկովիցը**, ով առաջարկել է դիտարկել շուկան իր ռիսկի և եկամտաբերության տեսանկյունից և մաթեմատիկորեն ձևակերպել խնդիրը [6]: Որպես կանոն ֆինանսական շուկաներում շրջանառվում են բազմաթիվ արժեթղթեր՝

կորպորատիվ բաժնետոմսեր, պետական պարտատոմսեր, մունիցիպալ արժեթղթեր և այլն: Բոլոր այդ ակտիվները ունեն տարբեր պարամետրեր և առաջարկում են հսկայական տեսականի ռիսկի տարբեր ախորժակ ունեցող ներդրողների համար: Այսպիսով՝ միջինում ներդրողները շուկայում փնտրելու են իրենց ռիսկի և

եկամտաբերության հարաբերությանը համապատասխանող ակտիվներ, սակայն հնարավոր է նաև այդ ակտիվների խմբից կառուցել նոր ֆինանսական գործիք, որը հանդիսանում է մի քանի արժեթղթերի համախմբություն, այն է՝ **արժեթղթերի պորտֆել**: Եթե առանձին ակտիվները դիտարկվեն որպես տարածական դիսկրետ կետեր, կարելի է պնդել, որ պորտֆելի կառուցումը հնարավորություն է տալիս ներդրողին ընտրել այդ կետերի գծային թաղանթի մեջ գտնվող կամայական այլ կետ (եթե նաև հաշվի առնենք կարճ վաճառքների հնարավորությունը), որը կարելի է դիտարկել որպես անընդհատության հատկություն: Սակայն նույնիսկ այստեղ ճիշտ ակտիվների ընտրությունը հիմնված չէ մարդկային ինտուիցիայի հիմունքով գրավիչ արժեթղթեր գտնելու մեջ, այլ պահանջում է խորը մաթեմատիկական ձևակերպումով մոդել: Կամայական ներդրող կցանկանար իր կողմից ներդրված գումարի դիմաց ստանալ մաքսիմալ եկամտաբերություն, սակայն, ցավոք, որպես կանոն բարձր եկամտաբերությունը ուղեկցվում է բարձր ռիսկայնությամբ, ինչը շուկայական հավասարակշռման բնական միջոց է: Չնայած տերմինային ազատ շրջանառությանը և՛ «ռիսկ», և՛ «եկամտաբերություն» բառերը շատ ավելի հստակ սահմանման կարիք ունեն: Որպես կանոն ամենահաճախ օգտագործվող ռիսկայնության չափանիշը պատմական շարքի վարիացիան է, իսկ որպես եկամտաբերություն վերցվում է պատմական միջին եկամտաբերությունը: Այս պատճառով Մարկովիցի մոդելը երբեմն անվանում են նաև միջին-վարիացիայի օպտիմիզացիայի խնդիր (Mean-Variance Optimization): Հաջորդ գլխում մենք կներկայացնենք եկամտաբերության և ռիսկի ընտրման այլ չափանիշներ, մասնավորապես կկառուցվի բաշխում, որի վիճականիների հիման վրա կորոշվեն ռիսկը և եկամտաբերությունը: Սակայն մինչ այդ դիտարկենք Մարկովիցի տեսության հիմնական դրույթները և դրա հիմունքներով կառուցված պորտֆելը, որը մեր կողմից նախագծվել էր Հայաստանյան կենսաթոշակային ֆոնդերի համար: Այս գլխի տեսական մասը հիմնված է տարբեր

գրականություններում հստակ կառուցվածքով և ապացույցներով առաջադրված մոդելների հիման վրա [7, 8, 9], որոնցից ընտրվել են առավել էական և հետագա հաշվարկների համար ամենակարևոր մասերը՝ պետք եղած դեպքերում կատարելով անհրաժեշտ հավելումներ:

Ռիսկ-եկամտաբերություն կորի տեսքը պատկերացնելու համար նախ դիտարկենք 2 ռիսկային արժեթղթերից բաղկացած պորտֆել: Նշանակենք պորտֆելի սպասվող եկամտաբերությունը և ստանդարտ շեղումը համապատասխանաբար μ_p և σ_p -ով, արժեթղթերի կշիռները՝ w_1 և w_2 -ով, արժեթղթերի կորելյացիայի գործակիցը՝ ρ_{12} -ով: Այդ դեպքում կունենանք հետևյալ նույնությունները՝

$$\mu_p = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$$

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

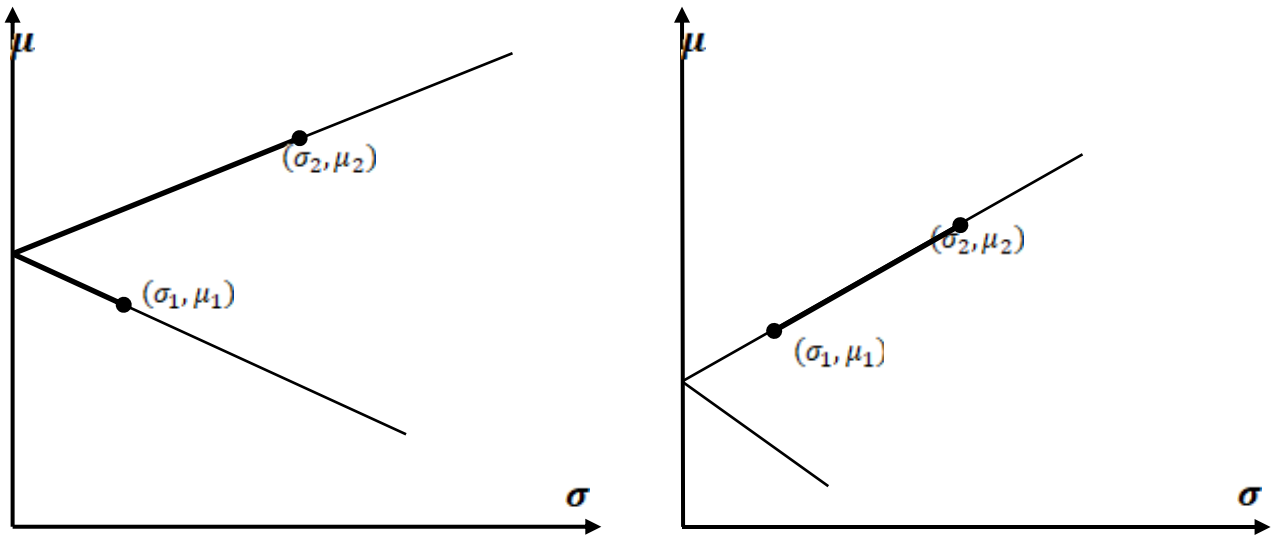
որտեղ μ_1 և μ_2 -ը համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ արժեթղթերի եկամտաբերություններն են, իսկ σ_1 և σ_2 -ը՝ ստանդարտ շեղումները:

Եթե $\rho_{12} = 1$ և $\sigma_1 \neq \sigma_2$, ապա $\sigma_p = 0$, երբ

$$w_1 = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Նկատենք, որ, քանի որ այդ պարագայում կան w_1 -ը, կան w_2 -ը բացասական են, ապա հետևաբար ակտիվներից մեկը կարճ վաճառքի է ենթարկվելու: Եթե $\rho_{12} = -1$, σ_1 և σ_2 միաժամանակ 0 չեն, ապա $\sigma_p = 0$, երբ

$$w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$



Գծապատկեր 1.2.1. Ռիսկ-եկամտաբերության կորի տեսքերը, երբ կորելյացիան -1 է (ձախից) և 1 է (աջից):

Գծապատկեր 1.2.1-ում բերված են ռիսկ-եկամտաբերություն կորի գծային տեսքերը, վերը նշված երկու դեպքերի համար:

Եթե նշանակենք $S = w_2$ և $1 - S = w_1$, ապա՝

$$\sigma_V = |(1 - S)\sigma_1 - S\sigma_2|$$

$$\mu_V = (1 - S)\mu_1 + S\mu_2$$

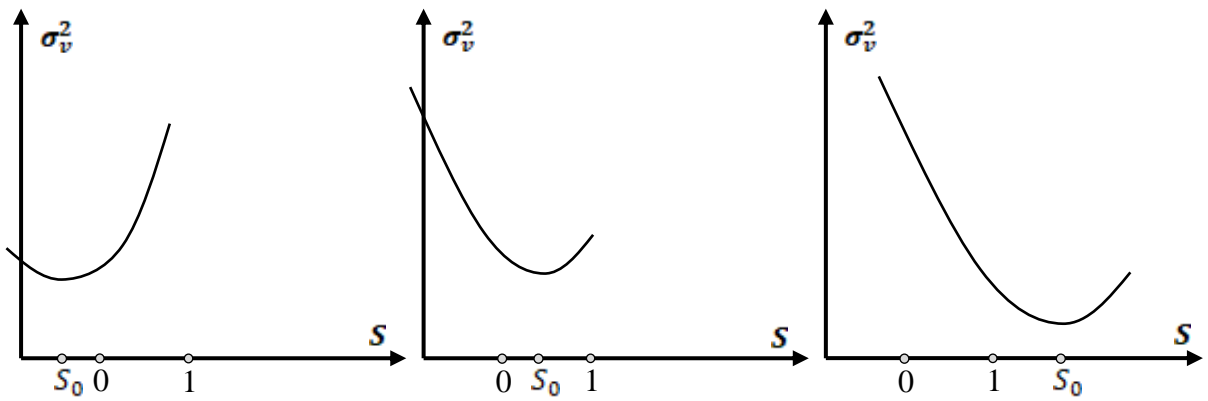
Եթե $-1 < \rho_{12} < 1$ ապա կարելի է համոզվել, որ պորտֆելի վարիացիան ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը

$$S_0 = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}$$

կետում, իսկ եթե կարճ վաճառքը չի թույլատրվում, ապա՝

$$S_{min} = \begin{cases} 0, & S_0 < 0 \\ S_0, & 0 \leq S_0 \leq 1 \\ 1, & S_0 > 1 \end{cases}$$

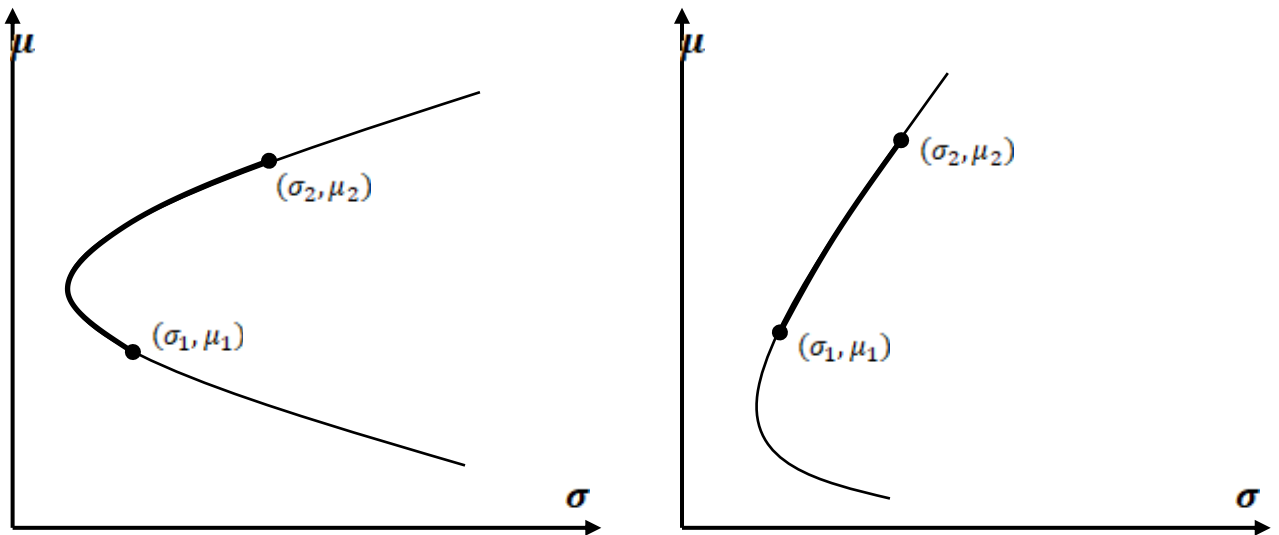
Այս արդյունքը կարելի է հեշտությամբ ցույց տալ, եթե պարզապես դիտարկենք պորտֆելի վարիացիան որպես ֆունկցիա S կշիռից և հաջորդիվ հավասարեցնենք առաջին կարգի ածանցյալը 0 -ի:



Գծապատկեր 1.2.2. Ռիսկ-եկամտաբերության կորի նկատմամբ մինիմումի կետի դիրքը երեք հնարավոր տարբեր դեպքերում:

Եթե որևէ սահմանափակումներ կապված կարճ վաճառքի հետ տրված չեն, ապա ակնհայտորեն S կշիռը իրական թվերի առանցքից վերցված կամայական կետ կարող է

լինել: Հակառակ դեպքում, օրինակ՝ եթե կարճ վաճառքը չի թույլատրվում, ապա $0 \leq S \leq 1$, և մենք ստանում ենք գծապատկեր 1.2.3-ում պատկերված կորերի ընդգծված հատվածները: (σ_p, μ_p) կետը կորի հետագծով շարժվում է (σ_1, μ_1) -ից դեպի (σ_2, μ_2) ՝ S -ի աճին զուգահեռ՝ 0-ից 1: Գծապատկեր 1.2.3-ի ձախ և աջ կողմերը համապատասխանաբար ցույց են տալիս այնպիսի հատվածների օրինակներ, երբ ρ_{12} -ը վերևից ձգտում է -1-ի, և ներքևից ձգտում 1-ի:



Գծապատկեր 1.2.3. Ռիսկ-եկամտաբերության կորի տեսքը, երբ կորեյացիան վերևից ձգտում է -1-ի (ձախից) և ներքևից 1-ի (աջից):

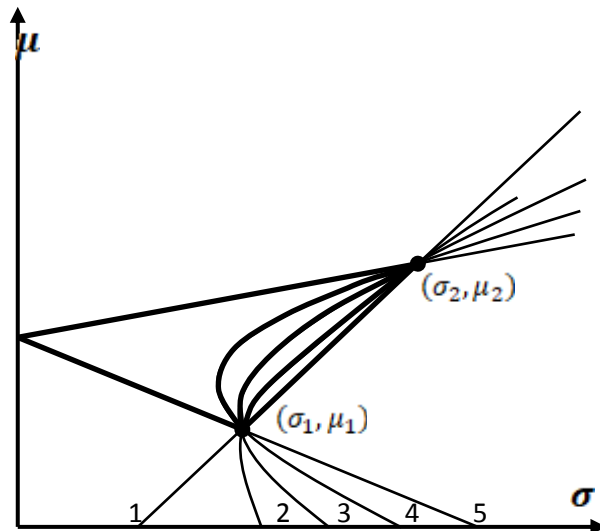
Դիտարկենք մի մասնավոր դեպք, երբ $\sigma_1 \leq \sigma_2$: Այս պարագայում հավանական են հետևյալ երեք արդյունքները:

1) Դիցուք $-1 \leq \rho_{12} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$: Այդ դեպքում գոյություն ունի առանց կարճ վաճառքի պորտֆել, այնպիսին, որ $\sigma_p < \sigma_1$ (4 և 5 կորերը գծապատկեր 1.2.4-ում): Ապացույցը ակնհայտ է, քանի որ եթե $-1 \leq \rho_{12} < \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, ապա $\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \geq S_0 > 0$ և հաշվի առնելով, որ $\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} < 1$, ապա ստանում ենք՝ $0 < S_0 < 1$: Հետևաբար գոյություն ունի առանց կարճ վաճառքի պորտֆել, ինչի ստանդարտ շեղումը բավարարում է $\sigma_p < \sigma_1$:

2) Եթե $\rho_{12} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, ապա կամայական պորտֆելի համար $\sigma_p \geq \sigma_1$ (3 կորը գծապատկեր 1.2.4-ում), քանի որ $\rho_{12} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ -ից հետևում է, որ $S_0 = 0$ և որպես արդյունք

ստանում ենք, որ կամայական պորտֆելի համար ճիշտ է $\sigma_p \geq \sigma_1$, քանի որ σ_1^2 -ն պորտֆելի փոքրագույն վարիացիան է:

3) Վերջապես ենթադրենք $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho_{12} \leq 1$, այդ դեպքում գոյություն ունի կարճ վաճառքով պորտֆել, այնպիսին, որ $\sigma_p < \sigma_1$, սակայն յուրաքանչյուր պորտֆելի համար առանց կարճ վաճառքի $\sigma_p \geq \sigma_1$ (1 և 2 կորերը գծապատկեր 1.2.4-ում): Ապացույցը կրկին բավականին հեշտ է, քանի որ եթե $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho_{12} \leq 1$, ապա $S_0 < 0$: Այսինքն՝ փոքրագույն վարիացիան ստանում ենք 2-րդ բաժնետոմսի կարճ վաճառքի դեպքում միայն, ինչպես նաև նկատենք, որ $S \geq S_0$ դեպքում σ_p ստանդարտ շեղումը աճող ֆունկցիա է S -ից, հետևաբար $\sigma_p \geq \sigma_1$ կամայական պորտֆելի համար, որը չունի կարճ վաճառք:

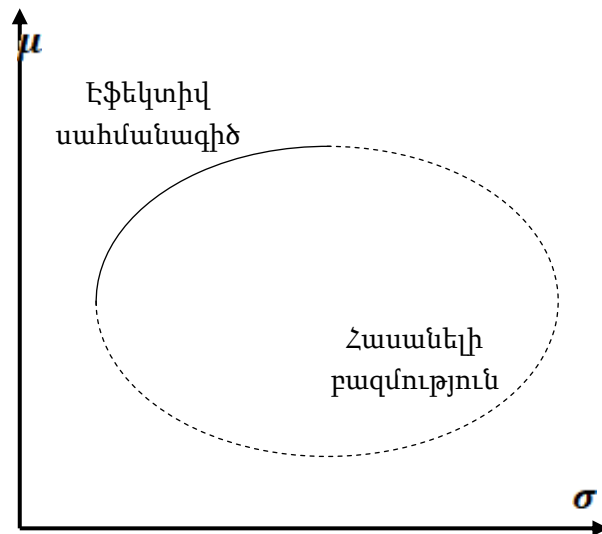


Գծապատկեր 1.2.4. Ռիսկ-եկամտաբերության կորի փոփոխությունը կորելյացիայի արժեքի փոփոխության հետևանքով:

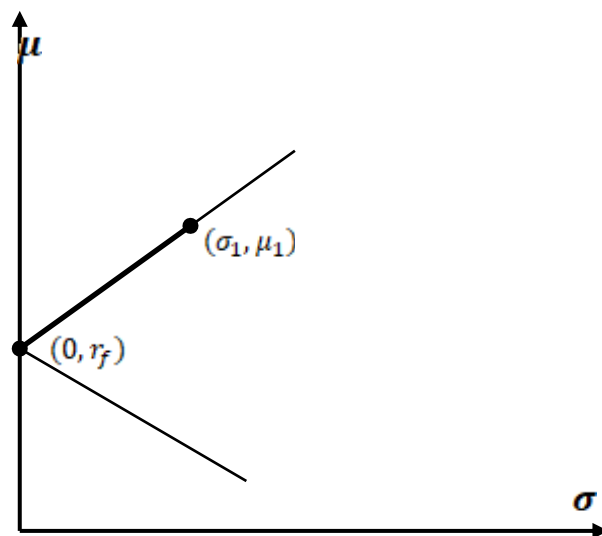
Դիտարկենք ևս մեկ մասնավոր դեպք: Դիցուք պորտֆելը կազմված է ընդամենը երեք արժեթղթերից: Հաշվի առնելով հետևյալ սահմանափակումները՝ $w_i \geq 0, i = 1, 2, 3$ և $\sum_{i=1}^3 w_i = 1$, սպասվող եկամտաբերությունը կլինի $\mu_p = \sum_{i=1}^3 \mu_i w_i$ իսկ վարիացիան $\sigma_p = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j \sigma_{ij}$: Ակնհայտորեն կարելի է w_3 -ը դիտարկել որպես անկախ փոփոխական, որի դեպքում ունենում ենք $w_3 = 1 - w_1 - w_2$: Այս պայմանի շնորհիվ կարող ենք պորտֆելի երկրաչափական ներկայացումը դիտարկել որպես երկու

չափանի խնդիր, այն է՝ եկամտաբերության իզոկլինները (isocline) կդառնան w_1 և w_2 -ից կախված իրար

նկատմամբ զուգահեռ ուղիղ գծեր, իսկ վարիացիայինը՝ էլիպսոիդներ: Հաջորդ գծապատկերում ներկայացված են հասանելի և օպտիմալ բազմությունները այս մասնավոր դեպքի համար [10]:



Գծապատկեր 1.2.5. Էֆեկտիվ սահմանագծի դիրքը հասանելի պորտֆելների բազմության նկատմամբ:



Գծապատկեր 1.2.6. Ռիսկից զերծ ակտիվի և շուկայական ոչ-գրոյական ռիսկով պորտֆելի գծային կապը:

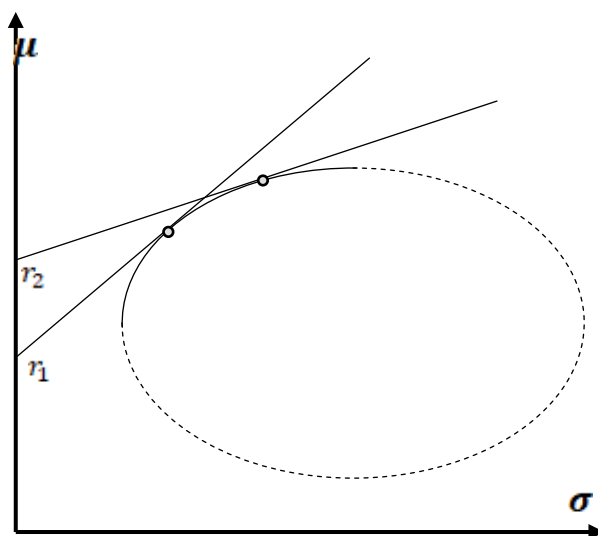
Եթե պորտֆելը կառուցված լինի երկու ակտիվներից՝ ռիսկից զերծ գործիքից (0 ռիսկով / վարիացիայով և r_f եկամտաբերությամբ) և w_1 կշիռով ռիսկային արժեթղթից, ապա բնականաբար $\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2$ և հետևաբար պորտֆելի ստանդարտ շեղումը կլինի՝

$$\sigma_v = |W_1| \sigma_1$$

իսկ ռիսկ-եկամտաբերություն կորը համապատասխանաբար կունենա գծապատկեր 1.2.6-ում բերված տեսքը:

Այս դեպքում ևս կարելի է կատարել կարճ վաճառք ռիսկից զերծ գործիքի միջոցով, այսինքն՝ վերցնել պարտք փողի շուկայից և ներդնել ռիսկային ակտիվների մեջ, որի դեպքում կստանանք գծապատկերի վերին ուղիղը, որն ընկած է (σ_1, μ_1) -ին հաջորդող մասի վրա: Սակայն հակառակ գործողությունը, այսինքն՝ ռիսկային ակտիվի կարճ վաճառքը, որից առաջացած հավելյալ գումարը ներդրվում է ռիսկից զերծ ակտիվի մեջ անհմաստ է, քանի որ ներդրողը կունենա ավելի ռիսկային և ավելի քիչ եկամտաբեր պորտֆել, քան, եթե, օրինակ՝ ամբողջ գումարը ուղղակի ներդրվեր փողի շուկա՝ առանց կարճ վաճառքի (գծապատկերի ստորին հատվածը): Այս դիտարկումներում ենթադրվում էր, որ փողի շուկայի մեջ ներդրումը և պարտքը կատարվում են նույն գնով:

Դիտարկենք ևս մեկ դեպք՝ պորտֆել, որը բաղկացած է ռիսկից զերծ ակտիվից և էֆեկտիվ սահմանագծի որևէ կետից: Այս պարագայում սահմանագծից կընտրվի այն կետը, որով անցնող ուղիղը (ուղիղը միացնում է ռիսկից զերծ ակտիվի կետը և ռիսկային ակտիվի համապատասխան կետը) շոշափում է էֆեկտիվ սահմանագիծը: Ստորև բերված է այդ փաստի երկրաչափական պատկերումը:



Գծապատկեր 1.2.7. Տարբեր ոչ-ռիսկային ակտիվների դեպքում էֆեկտիվ սահմանագծի գծային մասի փոփոխությունը:

Հետագայում ավելի մանրամասն կդիտարկենք պորտֆելի մեջ ռիսկից զերծ արժեթղթերի ներառման տարբեր մեթոդները, իսկ մինչ այդ հաջորդ կարևոր քայլով կուսումնասիրենք կամայական թվով արժեթղթերից բաղկացած պորտֆելները: Դիցուք ունենք n հատ ռիսկային արժեթուղթ, նշանակենք I -ով n չափանի միավոր վեկտորը, W -ով կշիռների վեկտորը՝

$$I = [1, 1 \dots 1]$$

$$W = [w_1, w_2 \dots w_n]$$

Բնականաբար տեղի ունի՝

$$1 = IW^T$$

Նշանակենք նաև m -ով սպասվող եկամտաբերությունների վեկտորը և C -ով կովարիացիաների մատրիցը՝

$$m = [\mu_1, \mu_2 \dots \mu_n]$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

որտեղ c_{ij} -ն i -րդ և j -րդ ակտիվների կովարիացիան է: Նկատենք, որ այս մատրիցը սիմետրիկ է և դրական որոշված: Վերջինս հետևում է այս անհավասարությունից՝

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij} t_i t_j = E \left(\sum_{i=1}^n (K_i - E(K_i)) t_i \right)^2 \geq 0$$

որտեղ $t = (t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n)$ -ը կամայական ոչ-գրոյական վեկտոր է: Հետագայում շարադրվող տեսության մեջ ենթադրվելու է C -ի ոչ-սինգուլյար լինելը (այսինքն՝ ենթադրելու ենք, որ այն հակադարձելի է, այս փաստը դեռ քննարկելու ենք գործնական կիրառություն ունեցող խնդիրների ներքո):

Պորտֆելի սպասվող եկամտաբերությունը և վարիացիան մեր նշանակումների դեպքում կունենան հետևյալ տեսքերը՝

$$\mu_p = mW^T$$

$$\sigma_p^2 = WCW^T$$

Այս պահին մենք դիտարկելու ենք երկու խնդիր՝

1. Հասանելի պորտֆելների բազմության մեջ գտնել այն պորտֆելը, որն ունի փոքրագույն վարիացիան: Մենք կանվանենք այն **փոքրագույն վարիացիայով պորտֆել**:
2. Գտնել փոքրագույն վարիացիայով պորտֆելը այն բոլոր հասանելի պորտֆելների բազմության մեջ, որոնց սպասվող եկամտաբերությունը ինչ-որ նախապես որոշված μ_p է: Այսինքն տրված կամայական եկամտաբերության համար համապատասխանաբար կունենանք միակ փոքրագույն վարիացիան ապահովող պորտֆել, այդպիսով ստանալով ֆունկցիոնալ կապ: Կանվանենք այդպիսի պորտֆելների ընտանիքը **փոքրագույն վարիացիայի կոր**:

Նախ լուծենք առաջին խնդիրը: Այսինքն՝ պետք է մինիմիզացնել պորտֆելի ռիսկը (հիշեցնենք, որ պորտֆելային վարիացիան դիտարկվում է որպես ֆունկցիա՝ կախված կշիռների վեկտորից), այն պայմանով, որ կշիռների գումարը հավասար է 1-ի: Դա անելու համար կազմենք հետևյալ Լագրանժյան ֆունկցիան՝

$$L(W, \lambda) = WCW^T - \lambda(IW^T - \mathbf{1})$$

Ածանցելով այն ըստ կշիռների W վեկտորի կստանանք՝

$$W = \frac{\lambda}{2} IC^{-1}$$

որից հետևում է՝

$$\lambda = 2(IC^{-1}I^T)^{-1}$$

Հետևաբար՝

$$W = \frac{IC^{-1}}{IC^{-1}I^T}$$

կշիռներով պորտֆելը ունի փոքրագույն վարիացիան բոլոր հնարավոր հասանելի պորտֆելների բազմության մեջ: Երկրորդ խնդրում արդեն պետք է մինիմիզացնենք պորտֆելի վարիացիան երկու պայմանով՝

$$IW^T = 1$$

$$mW^T = \mu_p$$

Լագրանժյան ֆունկցիան ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$L(W, \lambda, \mu) = WCW^T - \lambda(IW^T - 1) - \mu(mW^T - \mu_p)$$

Ածանցելով ըստ W կշիռների և լուծելով W -ի նկատմամբ՝ ստանում ենք՝

$$W = \frac{\lambda}{2}IC^{-1} + \frac{\mu}{2}mC^{-1}$$

որտեղից էլ՝

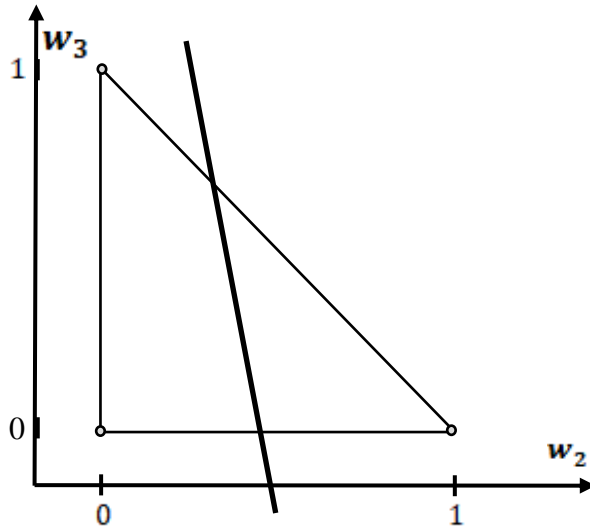
$$1 = \frac{\lambda}{2}IC^{-1}I^T + \frac{\mu}{2}IC^{-1}m^T$$

$$\mu_p = \frac{\lambda}{2}mC^{-1}I^T + \frac{\mu}{2}mC^{-1}m^T$$

Լուծելով այս հավասարումների համակարգը և տեղադրելով λ -ի և μ -ի արժեքները W -ի հավասարման մեջ ստանում ենք՝

$$W = \frac{\begin{vmatrix} 1 & IC^{-1}m^T \\ \mu_p & mC^{-1}m^T \end{vmatrix} IC^{-1} + \begin{vmatrix} IC^{-1}I^T & 1 \\ mC^{-1}I^T & \mu_p \end{vmatrix} mC^{-1}}{\begin{vmatrix} IC^{-1}I^T & IC^{-1}m^T \\ mC^{-1}I^T & mC^{-1}m^T \end{vmatrix}}$$

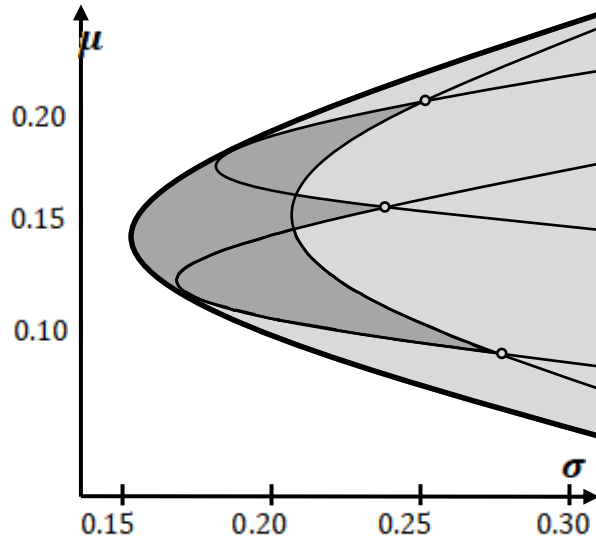
Ընդհանուր դեպքում դիսկ-եկամտաբերություն կորի տեսքը պատկերացնելու համար նախ կրկին դիտարկենք երեք արժեթղթերի դեպքը՝ w_1 , w_2 և w_3 կշիռներով: Ինչպես և առաջ, ենթադրենք, որ որպես փոփոխական վերցրել ենք միայն w_2 և w_3 կշիռները, իսկ w_1 -ը անկախ փոփոխական է, որը որոշվում է այս երկուսի միջոցով:



Գծապատկեր 1.2.8. Փոքրագույն վարիացիայի կորի (ստվար հոծ գիծ) դիրքը երեք արժեթղթերի դեպքում:

Ընդգծված ուղիղը փոքրագույն վարիացիայի կորն է և այն ուղիղ գիծ է, որը բխում է կշիռների՝ սպասվող եկամտաբերության նկատմամբ գծային կախվածությունից:

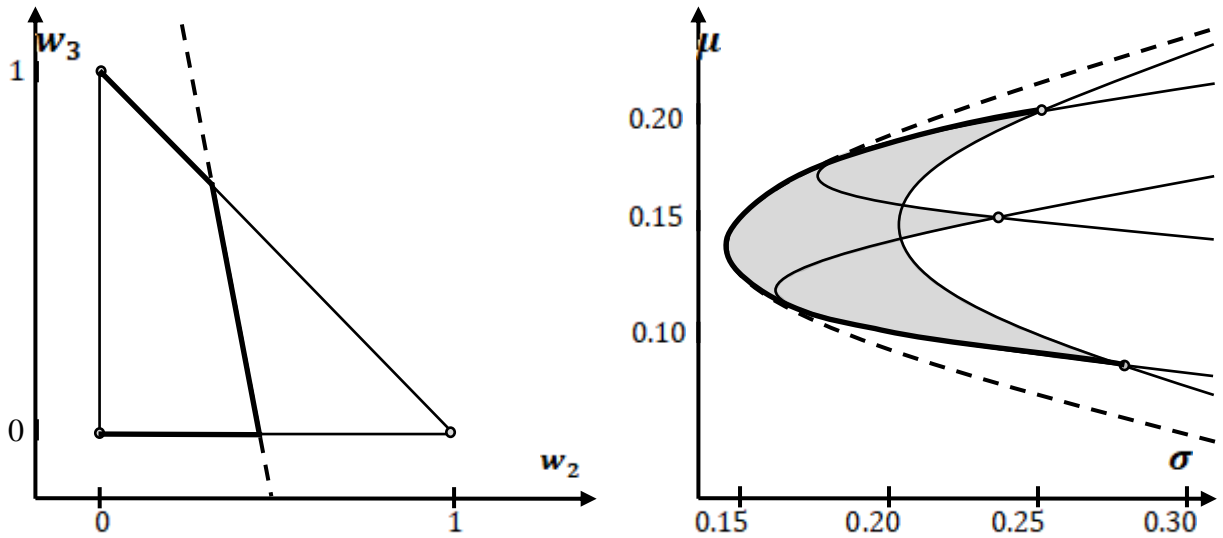
Գծապատկեր 1.2.9-ը ցույց է տալիս հասանելի պորտֆելների բազմության վիզուալիզացիայի մեկ այլ տարբերակ: Պատկերված երեք կետերը համապատասխանում են մեկական կշիռներից կազմված պորտֆելների դեպքերին, այսինքն՝ ներկայացնում են եռանկյան գագաթները: Օրինակ՝ գծապատկեր 1.2.9-ի կետ $(0.24, 0.15)$ -ը պորտֆել է՝ կազմված միայն երկրորդ արժեթղթից: Կետերը իրար միացնող կորերից յուրաքանչյուրը երկու կշիռներից կազմված պորտֆելների բազմությունն է, որոնց մասին արդեն խոսել ենք: Նրանք ներկայացնում են եռանկյան երեք կողմերը: Օրինակ՝ $(0.24, 0.15)$ և $(0.26, 0.20)$ կետերը միացնող կորը համապատասխանում է միայն երկրորդ և երրորդ արժեթղթերից կազմված պորտֆելներին: Գծապատկեր 1.2.9-ի ողջ ներկված հատվածը, ներառյալ սահմանային կորը, բոլոր հասանելի պորտֆելների բազմությունն է: Սահմանային կորը համապատասխանում է եռանկյան միջով անցնող ուղղին, այսինքն՝ փոքրագույն վարիացիայի կորն է: Հասանելի պորտֆելների բազմությունը ունի փամփուշտի տեսք, և այն հաճախ անվանում են **Մարկովիցյան փամփուշտ**:



Գծապատկեր 1.2.9. Փոքրագույն վարիացիայի կորը և Մարկովիցյան փամփուշտը երեք արժեթղթերի դեպքում:

Գծապատկեր 1.2.9-ի մուգ ներկված հատվածը ներկայացնում է գծապատկեր 1.2.8-ի եռանկյան ներքին մասը, այսինքն՝ այդ հատվածում ընկած կետերում գոյություն չունի կարճ վաճառք: Ուսուցողական է պատկերացնել, թե ինչպես է W_2, W_3 կորը “տպվում” գծապատկեր 1.2.9-ի ներկված հատվածի մեջ: Այն “ծալվում է” փոքրագույն վարիացիայի կորի շուրջ, և ստացվում է այնպես, որ այն կետերը, որոնք ընկած են փոքրագույն վարիացիայի կորի հակադիր մասերում, “տպվում են” մեկ կետի մեջ՝ Մարկովիցյան փամփուշտում: Այսինքն գծապատկեր 1.2.9-ի ներկված մասի յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում են երկու տարբեր պորտֆելներ, սակայն փոքրագույն վարիացիայի կորի յուրաքանչյուր կետին՝ մեկ պորտֆել:

Նույն երեք արժեթղթերի համար գծապատկեր 1.2.10-ի աջ և ձախ պատկերները ցույց են տալիս, թե ինչ տեղի կունենար, եթե կարճ վաճառքը արգելվեր: Առանց կարճ վաճառքի բոլոր պորտֆելները ներկայացված են եռանկյան կողմերով, ներքին մասով և σ, μ կորի մուգ ներկված հատվածով: Փոքրագույն վարիացիայի կորը ընդգծված է երկու գծագրերում (որպես համեմատություն կարճ վաճառքի դեպքը պատկերված է ընդհատվող կորերով):



Գծապատկեր 1.2.10. Կարճ վաճառքի արգելման պայմանի դեպքում պորտֆելների գծային կոմբինացիաների կորերի (ծախից) և էֆեկտիվ սահմանագծի (աջից) տեսքերի համեմատությունը:

Այս պահին առաջանում է երկու տարբեր պորտֆելների համեմատության սահմանման անհրաժեշտությունը: Կասենք, որ μ_1 սպասվող եկամտաբերությամբ, σ_1 ստանդարտ շեղումով արժեթուղթը դոմինանտ է այլ արժեթղթի նկատմամբ՝ μ_2 սպասվող եկամտաբերությամբ և σ_2 ստանդարտ շեղումով, եթե

$$\mu_1 \geq \mu_2 \text{ և } \sigma_1 \leq \sigma_2$$

Մինչև այժմ մենք արդեն մի քանի անգամ օգտագործել ենք «էֆեկտիվ պորտֆել» և «էֆեկտիվ սահմանագիծ» արտահայտությունները, տալով իրենց քիչ թե շատ ինտուիտիվ բացատրություն: Հաշվի առնելով մեզ արդեն հայտնի դոմինանտության իմաստը այս պահին ավելի ճշգրիտ սահմանման ձևը հետևյալն է՝ պորտֆելը կոչվում է էֆեկտիվ, եթե գոյություն չունի ուրիշ պորտֆել, բացի իրենից, որ դոմինանտ լինի իր նկատմամբ: Այդպիսի պորտֆելների բազմությունը բոլոր հասանելի պորտֆելների բազմության մեջ կոչվում է էֆեկտիվ սահմանագիծ:

Բնականաբար տարբեր ներդրողները կընտրեն տարբեր կետեր էֆեկտիվ սահմանագծի վրա՝ կախված իրենց անձնական նախապատվություններից: Կանգնելով

երկու էֆեկտիվ պորտֆելների՝ $\mu_1 \leq \mu_2$ և $\sigma_1 \leq \sigma_2$ ընտրության առջև՝ ռիսկից խուսափող անձնավորությունը կնախընտրի առաջինը, որը ավելի ցածր ռիսկայնություն ունի, և,

որպես հետևանք, ցածր եկամտաբերություն: Մինչդեռ ռիսկի գնացող ներդրողը կընտրեր երկրորդ պորտֆելը: Որպես հետևանք պարզ է դառնում, որ էֆեկտիվ սահմանագիծը փոքրագույն վարիացիայի կորի մի մասն է կազմելու:

Այստեղ հատկանշանակական է առանձնացնել Մարկովիցի մոդելում օպտիմիզացիայի տարբեր խնդիրները: Մինչև այժմ մենք դիտարկել էինք ֆիքսված եկամտաբերության դեպքում վարիացիայի մինիմիզացիայի խնդիրը, որը նաև հայտնի է «Մարկովիցի մինիմալ ռիսկով պորտֆել» անվանմամբ: Այդ դեպքում $\sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \mu_P$ պայմանով մինիմիզացվում է

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j c_{ij}$$

Գոյություն ունի նաև այս խնդրի մյուս տարբերակը, որը հաշվի է առնում ռիսկից զերծ ակտիվների ներառումը պորտֆելի մեջ և ավելի հայտնի է «**Տոբինի** մինիմալ ռիսկով պորտֆել» անվանմամբ [8] (այս խնդրի միաշափ դեպքը արդեն դիտարկել ենք): Ինչպես և նախորդ խնդրում, այստեղ նույնպես մինիմիզացվում է պորտֆելի $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j c_{ij}$ վարիացիան, սակայն արդեն $w_0 r_f + \sum_{i=1}^n w_i \mu_i = \mu_P$ պայմանով, որտեղ (w_0 -ն ոչ-ռիսկային ակտիվի կշիռն է): Հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ օպտիմալ պորտֆելի կշիռային վեկտորը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$W = \frac{\mu_P - r_f}{(m - r_f I) C^{-1} (m - r_f I)} C^{-1} (m - r_f I)$$

Եթե տեղադրենք ստացված կշիռների վեկտորը պորտֆելի ընդհանուր վարիացիայի բանաձևի մեջ, ապա, բնականաբար կստանանք օպտիմալ վարիացիայի արժեքը՝

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= W^T C W = \frac{(\mu_P - r_f)^2}{\left((m - r_f I) C^{-1} (m - r_f I) \right)^2} \left(C^{-1} (m - r_f I) \right)^T C \left(C^{-1} (m - r_f I) \right) = \\ &= \frac{(\mu_P - r_f)^2}{(m - r_f I) C^{-1} (m - r_f I)} \end{aligned}$$

Համապատասխանաբար ստանդարտ շեղումը կդառնա

$$\sigma_p = \frac{\mu_p - r_f}{\sqrt{(m - r_f I)C^{-1}(m - r_f I)}}$$

Այստեղից կարելի է նաև նկատել, որ տեղի ունի հետևյալ գծային կապը՝

$$\mu_p = r_f + \sigma_p \sqrt{(m - r_f I)C^{-1}(m - r_f I)}$$

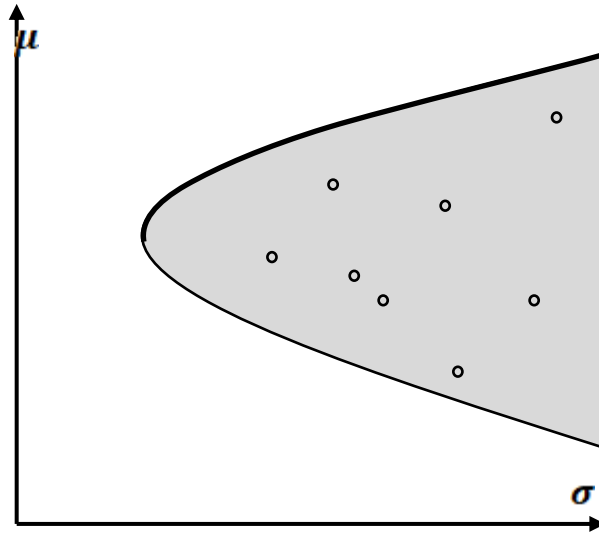
Օպտիմալ խնդիրների հաջորդ տարածված տեսքը կրում է «Մարկովիցի և Տոբինի մաքսիմալ էֆեկտիվության պորտֆել» անվանումը: Այս դեպքում ի հակառակ նախորդ երկու խնդիրների արդեն նախապես ընտրված ֆիքսված վարիացիայի $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j c_{ij} = \sigma_p$ պայմանով մաքսիմիզացվում է $\mu_p = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i$ եկամտաբերությունը: Եթե շուկայում կրկին առկա են ոչ-ռիսկային ակտիվներ, ապա օպտիմալ կշիռները ունենում են Տոբինի լուծմանը նման տեսք՝

$$W = \frac{\mu_p}{\sqrt{(m - r_f I)C^{-1}(m - r_f I)}} C^{-1}(m - r_f I)$$

որը, կրկին, ինչպես և վարիացիայի մինիմիզացիայի խնդրում, կարելի է հեշտությամբ դուրս բերել Լագրանժյան ֆունկցիայի օգնությամբ:

Ինչպես արդեն նշվեց, փոքրագույն վարիացիայի կշիռները օժտված են գծային հատկություններով: Փոքրագույն վարիացիայի կորը բաղկացած է պորտֆելներից, որոնց կշիռները տրված են գծային ֆունկցիայով՝ կախված μ_p սպասվող եկամտաբերությունից՝ $W = a\mu_p + b$: Եթե W' և W'' -ը փոքրագույն վարիացիայի կորի երկու տարբեր պորտֆելների կշիռ-վեկտորներն են, ապա $W' = a\mu_{p'} + b$ և $W'' = a\mu_{p''} + b$, ինչ-որ $\mu_{p'} \neq \mu_{p''}$ -ի համար: Քանի որ $c\mu_{p'} + (1 - c)\mu_{p''}$, $\forall c \in R$ -ով տրվող թվերը բնութագրում են ողջ իրական առանցքը, հետևաբար $cW' + (1 - c)W''$, $\forall c \in R$ -ը բնութագրում է ողջ փոքրագույն վարիացիայի կորը: Սա նշանակում է, որ բազմաչափ փոքրագույն վարիացիայի կորը ունի նույն տեսքը, ինչ 2 արժեթղթերի դեպքում: Այսինքն՝ Մարկովիցի փամփուշտի տեսքը կմնա նույնը կամայական թվով պորտֆելների համար: Հետևաբար էֆեկտիվ սահմանագիծ գտնելը հեշտ խնդիր է դառնում, որը ներկայացված է գծապատկեր 1.2.11-ում: Փաստորեն այն կազմված է փոքրագույն վարիացիայի կորի

այն պորտֆելներից, որոնց սպասվող եկամտաբերությունը ավելի մեծ է, քան փոքրագույն վարիացիայով պորտֆելինը:



Գծապատկեր 1.2.11. Էֆեկտիվ սահմանագծի տեսքը և դիրքը ռիսկ-եկամտաբերության կորի նկատմամբ:

Մինչև այժմ դիտարկված մոդելային սցենարներում կատարվել էին այն ենթադրությունները, որ, օրինակ՝ կշիռները կարող են կամայական իրական թիվ լինել, փողի շուկայում պարտք վերցնելը և պարտք տալը նույն տոկոսադրույքով է տեղի ունենում, կամայական փոխանցումների և առք-վաճառքի ժամանակ ներդրողը կրում է զրոյական ծախսեր: Առաջին խնդիրը իրականում պարզ լուծում ունի, կարելի է պորտֆելի ընդհանուր արժեթղթերի քանակը մեծացնել այնքան, որ հարաբերական կշիռները դառնան ամբողջ թվեր կամ մեծ ճշտությամբ մոտ լինեն ամբողջ թվին: Փոխանցման ծախսերի խնդրի համար դիտարկենք հեկյալ մոդելավորումը [11]՝

$$p_i = \begin{cases} (w_i - \bar{w}_i)b_i & \text{էթե } w_i > \bar{w}_i \\ 0 & \text{էթե } w_i \leq \bar{w}_i \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} (\bar{w}_i - w_i)a_i & \text{էթե } w_i < \bar{w}_i \\ 0 & \text{էթե } w_i \geq \bar{w}_i \end{cases}$$

Այստեղ w_i -ն պորտֆելում i -րդ ակտիվի սկզբնական կշիռն է, իսկ \bar{w}_i -ն՝ վերջնական, b_i -ն և a_i -ն համապատասխանաբար գնելու և վաճառելու հետ կապված փոխանցման ծախսերն են (այսպես կոչված շուկայական «շփումը», market friction), p_i և

q_i -ն էլ բնականաբար կրնութագրեն պորտֆելային շարժի (համապատասխանաբար՝ առքի և վաճառքի) ընդհանուր ծախսերը: Հասկանալի է, որ p_i և q_i -ն միաժամանակ չեն կարող ոչ-0-ական լինել: Ենթադրենք՝ այս նոր մոդելավորման ներքո փորձում ենք օպտիմալ կետի հասնել, այդ նպատակով կկառուցենք նոր նպատակային ֆունկցիա՝

$$\phi(x) + \sum_{i=1}^n (p_i + q_i) = \phi(x) + \sum_{i=1}^n \max(p_i, q_i)$$

Նոր նպատակային ֆունկցիայի տեսքից երևում է, որ այն դիֆերենցելի չէ, հետևաբար անհրաժեշտ է կատարել ձևափոխություն, եթե ուզում ենք օպտիմիզացիայի համար պիտանի տեսք ստանալ: Դիտարկենք

$$\phi(x) + \sum_{i=1}^n y_i$$

որտեղ՝

$$y_i \geq p_i$$

$$y_i \geq q_i$$

y_i -ով նշանակված են փոխանցման ծախսերը: Այս երկու անհավասարությունները ձևափոխելուց հետո կարելի է հեշտությամբ ստանալ հետևյալ անհավասարությունները՝

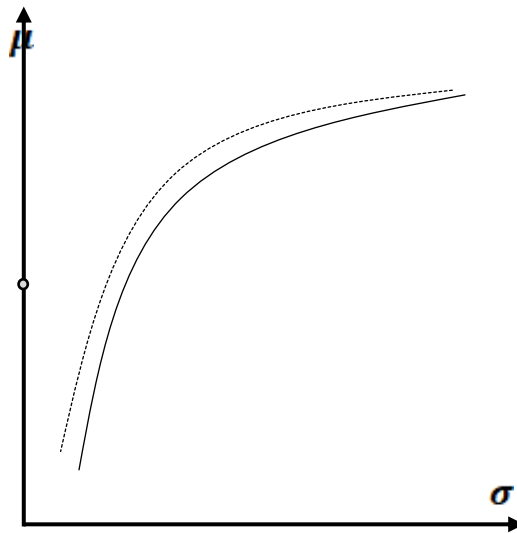
$$y_i \geq (w_i - \bar{w}_i)b_i$$

$$y_i \geq (\bar{w}_i - w_i)a_i$$

Չնայած նրան, որ այս ձևափոխությունը լուծում է դիֆերենցելիության խնդիրը, այն կրկնապատկում է անհայտների քանակը և սկզբնական խնդիրը դարձնում հաշվարկայնորեն ավելի բարդ և ժամանակատար:

Ընդհանուր դեպքում, եթե մոդելում հաշվի են առնվում փոխանցման ծախսերը ապա բնականաբար նույն դիսկայնության դիմաց ներդրողը ստանալու է ավելի քիչ եկամտաբերություն և հետևաբար էֆեկտիվ սահմանագիծը (հոծ գիծ) առանց

փոխանցման ծախսերի դեպքի նկատմամբ (կետագիծ կոր) կունենա գծապատկեր
1. 2. 12-ում բերված տեսքը՝



Գծապատկեր 1.2.12. Մոդելում փոխանցման ծախսերի ներառման դեպքում էֆեկտիվ սահմանազաժի տեղաշարժը:

Պորտֆելային տեսության մեջ շատ կարևոր դեր է խաղում կովարիացիոն մատրիցը, որի ճշգրիտ հաշվարկումը կարող է բարդ խնդրի վերածվել: Խոսքը իհարկե գնում է համակարգչային ճշգրտության մասին, ինչը կախված է ոչ միայն սարքի ճարտարապետության, այլ նաև օգտագործվող ծրագրի հետ: Գոյություն ունեն կոտորակային թվի ճշգրտության տարբեր ստանդարտներ, սակայն իրենցից ոչ-մեկը չի կարող ամբողջովին կրկնօրինակել իրական թիվը, այդ իսկ պատճառով միշտ գոյություն ունի հավանականություն, որ կովարիացիոն մատրիցի անդամներից որոշների սխալանքը կբերի մատրիցի սինգուլյարությանը [11]: Դիտարկենք մեկ ակտիվի նմուշային միջինը (sample mean)՝

$$\mu_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

որտեղ a_{ij} -ն i -րդ ակտիվի գրանցված պատմական եկամտաբերությունն է j պահին: Այդ դեպքում կովարիացիոն մատրիցը կլինի՝

$$C = \frac{1}{n} \tilde{A}' \tilde{A}$$

որտեղ

$$\tilde{A} = A - I\mu$$

Ինչպես երևում է՝ \hat{A} -ն իրենից ներկայացնում է եկամտաբերությունների վեկտորի շեղումը միջինից: Չնայած կովարիացիոն մատրիցի հաշվարկման հետևյալ մոտեցման բավականին լայն տարածմանը, հայտնի է, որ այն բերում է մի շարք խնդիրների, որոնց ցանկում է նաև տեղեկատվական կորուստը (information loss): Հետևյալ վառ և հայտնի օրինակը ցուցադրում է այդ փաստը, դիցուք՝

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta & \theta & \theta \end{pmatrix}$$

Այսպիսի շեղման մատրիցի դեպքում կովարիացիոն մատրիցը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$C = \frac{1}{3} \hat{A}' \hat{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \theta^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \theta^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \theta^2 \end{pmatrix}$$

Եթե θ -ն հավասար չէ 0-ի, ապա այս մատրիցը մաքսիմալ ռանկի է և տեսականորեն խնդիրներ չպետք է առաջանան: Սակայն եթե θ^2 -ն բավականաչափ փոքր է, ապա հաշվիչ մեքենան կմոտարկի $1 + \theta^2$ -ն 1-ով, և կստացվի՝

$$C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Այս դեպքում խնդիրն կարելի է մոտենալ մեկ այլ անկյունից, այն է՝ սկզբից մատրիցի նկատմամբ կատարել Գրամ-Շմիդտի օրթոգոնալացումը և նոր դրանից հետո հաշվարկել կովարիացիոն մատրիցը՝

$$\hat{A} = QR$$

$$C = \frac{1}{n} R' Q' QR = \frac{1}{n} R' IR = \frac{1}{n} R' R$$

Q և R մատրիցների միջոցով ներկայացումը հայտնի է նաև **QR factorization** անվանմամբ, որի արդյունքում մատրիցը բաժանվում է օրթոգոնալ տողեր ունեցող (Q) և եռանկյունային մատրիցի (R) արտադրյալի: Խնդրի լուծման այլ եղանակ է Խոլեսկու դեկոմպոզիցիայի օգտագործումը: Այս երկու մեթոդներն էլ, ինչպես նաև իրենց

կիրառական նշանակությունը ավելի մանրամասն կքննարկվեն հաջորդ գլխում մաքսիմալ էնտրոպիայի խնդրի շրջանակներում:

Կովարիացիոն մատրիցի ճշգրիտ հաշվարկը շատ կարևոր է, քանի որ այն օգտագործվում է պորտֆելի ընդհանուր վարիացիայի մեջ, որը իր հերթին պորտֆելային գնահատման հիմնական ցուցանիշներից է (ռիսկի տեսանկյունից)՝ եկամտաբերության հետ մեկտեղ: Սակայն էֆեկտիվ սահմանագծի վրա գտնվող երկու պորտֆելների համեմատության ժամանակ առաջանում է նախընտրության խնդիր, քանի որ մի պորտֆելը ավելի մեծ եկամտաբերություն ունի քան մյուսը, սակայն միևնույն ժամանակ ռիսկը նույնպես ավելի բարձր է: Հարց է առաջանում, թե այս դեպքում ինչպես պետք է այդ պորտֆելները համեմատվեն իրար միջև:

Այդ խնդրի համար **Վիլիամ Շարպը** մշակել է իր ցուցանիշը, որը անվանվում է Շարպի գործակից (**Sharpe ratio**) և ունի հետևյալ տեսքը՝

$$S = \frac{E(r_a - r_b)}{\sqrt{\text{Var}(r_a - r_b)}} = \frac{\mu_a - \mu_b}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\text{cov}(r_a, r_b)}}$$

որտեղ r_a -ն գնահատվող ակտիվի եկամտաբերությունն է (որպես պատահական մեծություն), r_b -ն հարաբերական ակտիվի եկամտաբերությունը (benchmark asset): Այս գործակցի տեսքից երևում է, որ ինչքան այն բարձրանում է, այնքան ավելի գրավիչ է դառնում դիտարկվող ակտիվը հարաբերական ակտիվի նկատմամբ, քանի որ բարձր ցուցանիշը նշանակում է համեմատաբար ավելի բարձր եկամտաբերության աճ քան ռիսկի աճն է:

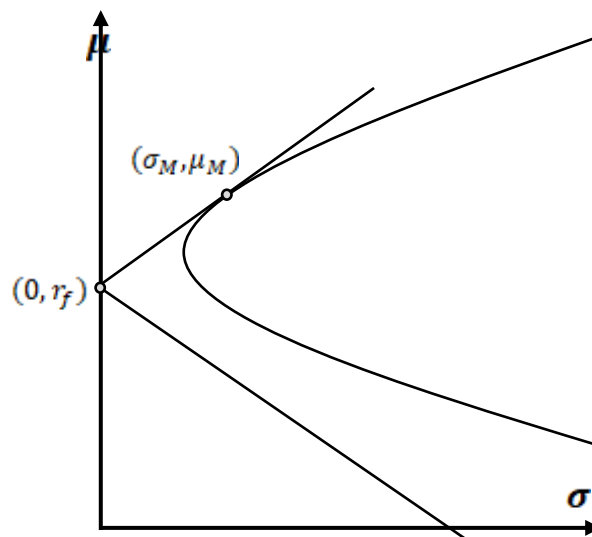
Շարպի գործակցի առավել տարածված տեսքում որպես հարաբերական ակտիվ վերցվում է ռիսկից զերծ ակտիվը (օրինակ՝ պետական պարտատոմս) և նախորդ ներկայացումը ձևափոխվում է հետևյալի՝

$$S = \frac{\mu_a - r_f}{\sigma_a}$$

Նկատենք, որ այստեղ մենք ենթադրել ենք, որ ոչ-ռիսկային ակտիվը հաստատուն է և հետևաբար իր մաթսպասումը հավասար է հենց իրեն, իսկ վարիացիան էլ նույնաբար հավասար կլինի 0-ի:

Ընդհանրապես ասած ոչ-ռիսկային ակտիվները էական դեր ունեն պորտֆելային տեսության մեջ, քանի որ իրենց միջոցով կարելի է ռիսկային ակտիվների հետ բազում նոր կոմբինացիաներ ստեղծել: Մինչև այժմ մենք հիմնականում ուսումնասիրել էինք միայն ռիսկային արժեթղթերից բաղկացած պորտֆելները և շատ փոքր առնչություն էինք ունեցել ոչ-ռիսկային ակտիվների հետ: Այստեղ ավելի մանրամասն կդիտարկենք ռիսկից զերծ գործիքի օգտագործումը շուկայական պորտֆելների կառուցման մեջ:

Ոչ-ռիսկային եկամտաբերությունը կրկին նշանակենք r_f -ով: Այդ դեպքում, ինչպես և առաջ, ստանդարտ շեղումը հավասար է 0-ի: Շուկայական պորտֆելից և ոչ-ռիսկային գործիքից բաղկացած պորտֆելների բազմությունը կոչվում է շուկայական գիծ (և նաև հայտնի է CAPM model անվանմամբ), այն ունի հետևյալ տեսքը՝



Գծապատկեր 1.2.13. Ռիսկից զերծ ակտիվի և էֆեկտիվ սահմանագծի պորտֆելների օպտիմալ կոմբինացիաները CAPM մոդելում:

Փաստորեն ներդրողը կարող է կամայական ռիսկայնության պորտֆել կազմել՝ ըստ իր ցանկության: Շուկայական գծին պատկանող պորտֆելների սպասվող եկամտաբերությունը ամփոփվում է հետևյալ պարզ բանաձևով՝

$$\mu = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} \sigma$$

Այս բանաձևի շնորհիվ կարելի է նաև եզրակացություն կատարել՝ արդյոք արժեթուղթը թերագնահատված է, թե գերագնահատված:

1.3 Պորտֆելի օպտիմիզացիան գծային սահմանափակումների դեպքում, VaR, CVaR, $CVaR^+$, $CVaR^-$ գնահատականներ:

Նախորդ բաժնում դիտարկել էինք օպտիմիզացիայի ստանդարտ խնդիր, որտեղ կար միայն մեկ սահմանափակում՝ կշիռների գումարը պետք է հավասար լինի 1-ի (դրական լինելու պայման չի դրվում, քանի որ նաև հաշվի ենք առնում կարճ վաճառքի հնարավորությունը): Սակայն գոյություն ունեն մի շարք կանոնակարգեր (օրինակ՝ պետության կողմից ներդրվող պահանջներ, որոնք ուղղված են կենսաթոշակային ֆոնդերի օրինական կարգավորմանը*), որոնք ներմուծում են նոր սահմանափակումներ: Բարեբախտաբար, այդ սահմանափակումները կարելի է ներկայացնել գծային հավասարումների և անհավասարությունների տեսքով և ներմուծել գծային ծրագրավորման խնդրի մեջ [12]: Որպես վառ օրինակ կարելի է դիտարկել պորտֆելի կշիռների վրա դրվող հավելյալ սահմանափակումները՝

$$L_i \leq w_i \leq H_i \quad i = 1 \dots n$$

H_i -ն վերին սահմանն է (Higher bound), L_i -ն՝ ստորինը (Lower bound): Ներմուծենք հետևյալ օգտավետության ֆունկցիան՝

* Աղբյուր - «ՀՀ ՕՐԵՆՔԸ ԿՈՒՏԱԿԱՅԻՆ ԿԵՆՍԱԹՈՇԱԿՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ»

$$f(w) = \mu w^T - \frac{1}{2} w C w^T$$

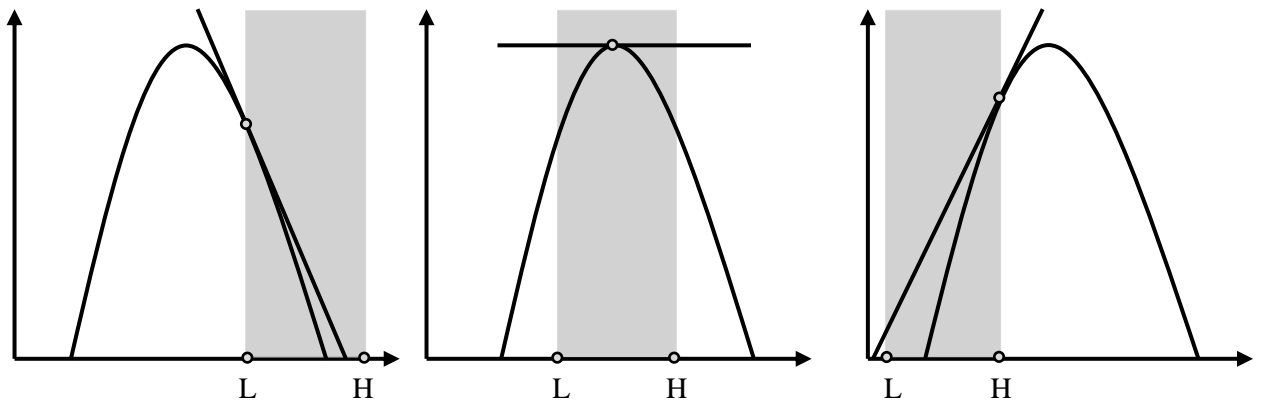
որտեղ $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ սպասվող եկամտաբերությունների վեկտորն է, w -ն կշիռների վեկտորը, իսկ C -ն՝ կովարիացիոն մատրիցը: Փաստորեն այն նվազող ֆունկցիա է ռիսկից և աճող՝ եկամտաբերությունից: Նշանակենք F -ով այն բոլոր կշիռների բազմությունը, որոնք բավարարում են մեր գծային սահմանափակումներին, այսինքն՝

$$F = \left\{ w \mid \sum_{i=1}^n w_i = 1 \text{ և } L_i \leq w_i \leq H_i \right\}$$

և մեր խնդիրն է դառնում մաքսիմալացնել $f(w)$ -ն F տիրույթի վրա:

Նախ ենթադրենք, որ լուծել ենք խնդիրը առանց կշիռների վրա վերին և ստորին սահմաններ դնելու: Այդ դեպքում հնարավոր է երեք դեպք՝

$$f'(w) \begin{cases} \leq 0, & \text{էթե ստորին վիճակում ենք} \\ = 0, & \text{էթե ներքին վիճակում ենք} \\ \geq 0, & \text{էթե վերին վիճակում ենք} \end{cases}$$



Գծապատկեր 1.3.1. Օգտավետության ֆունկցիայի օպտիմալ կետերի դիրքերը տարբեր սահմանափակումների դեպքում: Ստորին, ներքին և վերին վիճակները (ձախից աջ):

Այստեղ վիճակների տակ նկատի ունենք երկրաչափական դիրքը: Ինտուիտիվ մակարդակի վրա կարելի է ենթադրել, որ եթե ստացված լուծումը գտնվում է վերին սահմանից վերև, ապա սահմանափակումների դեպքում հաջորդ օպտիմալ կետը հենց

վերին սահմանն է լինելու: Նույնը ստորին սահմանի դեպքում՝ եթե լուծումը իրենից ներքև է, ապա հաջորդ օպտիմալ կետը հենց ստորին սահմանն է: Այս ամենը կարելի է

հեշտությամբ պատկերացնել, օրինակ՝ երկու արժեթղթերի դեպքում, սակայն բազմաչափ մոդելում հստակ ապացույցի անհրաժեշտություն է առաջանում: Նշանակենք s -ով վիճակի վեկտորը, որը n չափանի վեկտոր է և ընդունում է 3 հնարավոր արժեք՝ $s_i =$ վերին, ստորին կամ ներքին վիճակներ: Սահմանենք՝

$$D_s = \{i \mid s_i = \text{ստորին վիճակ}\}$$

$$I_s = \{i \mid s_i = \text{ներքին վիճակ}\}$$

$$U_s = \{i \mid s_i = \text{վերին վիճակ}\}$$

Դիցուք տրված է s վիճակի վեկտորը, w կշիռների վեկտորը և λ Լագրանժյան բազմապատկիչը: Սահմանենք Կուն-Թակերի պայմանները (s, w, λ) -ի համար որպես՝

$$w \in F$$

$$w_i = \begin{cases} L_i, & i \in D \\ H_i, & i \in U \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial w_i}(w) = \begin{cases} \leq \lambda, & i \in D \\ = \lambda, & i \in I \\ \geq \lambda, & i \in U \end{cases}$$

Քիչ անց կապացուցվի այն, որ մեր մաքսիմիզացիայի խնդրի լուծումը բավարարում է Կուն-Թակերի պայմաններին և հակառակը:

Թեորեմ (Կուն-Թակերի) Դիցուք f -ը ուռուցիկ, անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա է, $h = (h_1 \dots h_m)$ և $g = (g_1 \dots g_r)$ գծային ֆունկցիաների վեկտորներ են: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

Մինիմիզացնել $f(w)$ -ն հետևյալ պայմանների դեպքում՝

$$h(w) = 0$$

$$g(w) \leq 0$$

Այդ դեպքում w -ն խնդրի լուծում է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունեն $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_m)$ և $\mu = (\mu_1 \dots \mu_r)$ Լագրանժյան բազմապատկիչներ այնպիսիք, որոնց համար տեղի ունի

$$\nabla f(w) + \lambda \nabla h(w) + \mu \nabla g(w) = 0$$

$$\begin{aligned}\mu_k &\geq 0 & k = 1 \dots r \\ \mu_k g_k(w) &= 0 & k = 1 \dots r\end{aligned}$$

Այստեղ $\nabla f(w)$ -ով նշանակել ենք $f(w)$ ֆունկցիայի՝ ըստ w_i կշիռների մասնակի ածանցյալների վեկտորը, այսինքն վեկտորի յուրաքանչյուր անդամ $f(w)$ -ի մասնակի ածանցյալն է ըստ այդ անդամի համարին համապատասխանող w_i -ի: Կուն-Թակերի թեորեմը իրականում ունի այլ ներկայացում, պարզապես այս տեսքը ադապտացված է մեր խնդրի համար:

Տվյալ խնդրում անհրաժեշտ է մաքսիմիզացնել $f(w)$ ֆունկցիան, որը համարժեք է $-f(w)$ ֆունկցիայի մինիմիզացիային, այսինքն՝ առաջին քայլով պետք է ցույց տալ, որ $g(w) = -f(w)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է: Դիցուք վերցրել ենք կամայական $0 \leq \alpha \leq 1$, պետք է ցույց տալ, որ $g(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha g(u) + (1 - \alpha)g(v)$ կամայական u և v վեկտորների համար:

$$\begin{aligned}\alpha g(u) + (1 - \alpha)g(v) - g(\alpha u + (1 - \alpha)v) &= -\alpha f(u) - (1 - \alpha)f(v) \\ + f(\alpha u + (1 - \alpha)v) &= -\alpha \left(mu^T - \frac{1}{2} uCu^T \right) - (1 - \alpha) \left(mv^T - \frac{1}{2} vCv^T \right) \\ + m(\alpha u + (1 - \alpha)v)^T - \frac{1}{2} (\alpha u + (1 - \alpha)v)C(\alpha u + (1 - \alpha)v)^T &= \alpha \frac{1}{2} uCu^T \\ + (1 - \alpha) \frac{1}{2} vCv^T - \frac{1}{2} (\alpha u + (1 - \alpha)v)C(\alpha u + (1 - \alpha)v)^T &= \frac{1}{2} (\alpha uCu^T + (1 - \alpha)vCv^T \\ - \alpha^2 uCu^T - (1 - \alpha)^2 vCv^T - 2\alpha(1 - \alpha)uCv^T) &= \frac{1}{2} \alpha (uCu^T + vCv^T - \alpha uCu^T - \alpha vCv^T \\ - 2(1 - \alpha)uCv^T) &= \frac{1}{2} \alpha (1 - \alpha) (uCu^T - vCv^T - 2uCv^T) \\ &= \frac{1}{2} \alpha (1 - \alpha) (u - v)C(u - v)^T \geq 0\end{aligned}$$

Վերջին անհավասարությունը հետևում է այն բանից, որ C -ն դրական որոշված է: Հիմա անցնենք բուն թեորեմի ձևակերպմանը:

Թեորեմ: w -ն մաքսիմիզացնում է f -ը F բազմության վրա, եթե գոյություն ունեն s վիճակի վեկտոր և λ Լագրանժյան բազմապատկիչ այնպիսիք, որ (s, w, λ) -ն բավարարում է Կուն-Թակերի պայմաններին:

Ապացույց:

Նախ նկատենք, որ w -ն մաքսիմիզացնում է f -ը F բազմության վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ w -ն մինիմիզացնում է $-f$ -ը հետևյալ պայմանների ներքո (H և L նշանակումները higher և lower-ին են համապատասխանում)

$$h(w) = \sum_{i=1}^n w_i - 1 = 0$$

$$g_k^L(w) = L_k - w_k \leq 0 \quad k = 1 \dots n$$

$$g_k^H(w) = w_k - H_k \leq 0 \quad k = 1 \dots n$$

Ըստ Կուն-Թակերի թեորեմի w -ն մաքսիմիզացնում է f -ը F բազմության վրա այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունեն λ , $\mu_k^L \geq 0$ և $\mu_k^H \geq 0$ Լագրանժյան բազմապատկիչներ, որոնք բավարարում են՝

$$-\frac{\partial f}{\partial w_i}(w) + \lambda \frac{\partial h}{\partial w_i}(w) + \sum_{k=1}^n \mu_k^L \frac{\partial g_k^L}{\partial w_i}(w) + \sum_{k=1}^n \mu_k^H \frac{\partial g_k^H}{\partial w_i}(w) = 0 \quad i = 1 \dots n$$

$$g_k^L(w) < 0 \Rightarrow \mu_k^L = 0 \quad k = 1 \dots n$$

$$g_k^H(w) < 0 \Rightarrow \mu_k^H = 0 \quad k = 1 \dots n$$

Հաշվելով մասնակի ածանցյալները՝ ստանում ենք՝

$$\frac{\partial f}{\partial w_i}(w) - \lambda = \mu_i^H - \mu_i^L \quad i = 1 \dots n (*)$$

$$L_i < w_i \Rightarrow \mu_i^L = 0 \quad i = 1 \dots n (*)$$

$$w_i < H_i \Rightarrow \mu_i^H = 0 \quad i = 1 \dots n (*)$$

Ենթադրենք w -ն մաքսիմիզացնում է f -ը F բազմության վրա: Հետևաբար ըստ նախորդ հավասարման ունենում ենք՝

$$\frac{\partial f}{\partial w_i}(w) - \lambda = \begin{cases} -\mu_i^L \leq 0, & L_i = w_i < H_i \\ 0, & L_i < w_i < H_i \\ \mu_i^H \geq 0, & L_i < w_i = H_i \\ \mu_i^H - \mu_i^L \leq 0, & L_i = w_i = H_i \end{cases}$$

Սահմաններ s վիճակի վեկտորը հետևյալ կերպ՝

$$s_i = \begin{cases} \text{ստորին վիճակ,} & L_i = w_i < H_i \\ \text{ստորին վիճակ,} & L_i = w_i = H_i \text{ և } \mu_i^H \leq \mu_i^L \\ \text{ներքին վիճակ,} & L_i < w_i < H_i \\ \text{վերին վիճակ,} & L_i < w_i = H_i \\ \text{վերին վիճակ,} & L_i = w_i = H_i \text{ և } \mu_i^H > \mu_i^L \end{cases}$$

Այդ դեպքում (s, w, λ) -ն բավարարում է Կուն-Թակերի պայմաններին:

Թեորեմի մյուս կողմը ապացուցելու համար ենթադրենք, որ (s, w, λ) -ն բավարարում է Կուն-Թակերի պայմաններին: Այդ դեպքում սահմաններ՝

$$\mu_i^L = \begin{cases} \lambda - \frac{\partial f}{\partial w_i}(w), & i \in D \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

$$\mu_i^H = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w) - \lambda, & i \in U \\ 0, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

հետևաբար $\mu_i^L \geq 0$, $\mu_i^H \geq 0$ և (*) հավասարումները բավարարվում են, այսինքն՝ w -ն մաքսիմիզացնում է f -ը F բազմության վրա: Հաջորդ քայլով գտնենք լուծումը սահմանափակումների դեպքում:

Ըստ Կուն-Թակերի պայմանների՝ եթե $i \in I$, ապա՝

$$\frac{\partial f}{\partial w_i} = \lambda$$

այսինքն՝

$$m_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} w_j = \lambda \quad (**)$$

Կուն-Թակերի պայմանները պնդում են, որ w -ն պետք է լինի հետևյալ գծային հավասարումների համակարգի լուծումը՝

$$i \in D \Rightarrow w_i = L_i$$

$$i \in I \Rightarrow \sum_{j=1}^n c_{ij} w_j + \lambda = m_i$$

$$i \in U \Rightarrow w_i = H_i$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Պարզ ասած՝ եթե գլոբալ մաքսիմումը ընկած է վերին և ստորին սահմանների միջև, ապա լուծում ենք (**) հավասարումը: Եթե գլոբալ մաքսիմումը ստորին սահմանից ներքև է, ապա լուծումը հենց ստորին սահմանն է: Եթե գլոբալ մաքսիմումը վերին սահմանից վերև է, ապա լուծումը վերին սահմանն է: Կազմենք հետևյալ մատրիցը՝

$$V = \begin{bmatrix} v_{1,1} & \dots & v_{1,n} & v_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n,1} & \dots & v_{n,n} & v_{n,n+1} \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{i,j} = \begin{cases} c_{i,j}, & i \in I, j \leq n \\ 1, & i \in I, j = n+1 \\ 0, & i \in D \cup U, i \neq j \\ 1, & i \in D \cup U, i = j \end{cases}$$

Հիմա սահմանենք \tilde{w} , \tilde{m} և \tilde{y} վեկտորները՝

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{pmatrix}^T$$

$$\tilde{m}_i = \begin{cases} m_i, & i \in I, i \leq n \\ 0, & i \in D \cup U, i \leq n \\ 0, & i = n+1 \end{cases}$$

$$\tilde{y}_i = \begin{cases} 0, & i \in I, i \leq n \\ L_i, & i \in D, i \leq n \\ H_i, & i \in U, i \leq n \\ 1, & i = n + 1 \end{cases}$$

Գծային հավասարումները դարձան՝

$$V\tilde{w} = \tilde{m} + \tilde{y}$$

հետևյալ լուծումով՝

$$w_i = c_i + d_i$$

$$\lambda = c_{n+1} + d_{n+1}$$

որտեղ

$$c = V^{-1}\tilde{m}$$

$$d = V^{-1}\tilde{y}$$

Հաջորդ բաժնում ներկայացված են հետևյալ լուծման կիրառությունը պրակտիկ հաշվարկներում, լուծման որոշ կիրառական թերությունները և իրենց շտկման տարբերակները:

Մենք արդեն գիտենք, որ մաթեմատիկական տեսանկյունից ռիսկերի կառավարմանը կարելի է նայել որպես մի պրոցեսի, որտեղ փորձ է արվում առավելագույն ճշգրտությամբ կառուցել վնասների բաշխումը: Այդ առումով **CVaR**-ը ռիսկի կառավարման հանրահայտ գործիք է: Այն նման է **VaR**-ին, իրականում վստահության նույն մակարդակի դեպքում **VaR**-ը **CVaR**-ի ստորին սահմանն է: Սակայն գոյություն ունեն մի շարք հատկություններ, որոնց շնորհիվ **CVaR** գնահատականը համարվում է **VaR** գնահատականի «վերադասը»:

1. **CVaR**-ը ունի ավելի լավ մաթեմատիկական հատկություններ, քան **VaR**-ը, օրինակ՝ պորտֆելի **CVaR**-ը անընդհատ և ուռուցիկ ֆունկցիա է ըստ կշիռների, այնինչ **VaR**-ը կարող է նույնիսկ անընդհատ չլինել:
2. **CVaR** շեղումը ստանդարտ շեղման հզոր մրցակից է: Տեսականորեն ամենուր ստանդարտ շեղումը կարող է փոխարինվել **CVaR** շեղումով, օրինակ՝ Շարպի գործակիցը կամ պորտֆելի բետա գործակիցը հաշվելուց:
3. **CVaR** ֆունկցիայի միջոցով ռիսկի կառավարումը կարող է շատ էֆեկտիվ լինել, քանի որ այն կարող է օպտիմիզացվել ուռուցիկ և գծային ծրագրավորման միջոցով:

4. VaR գնահատականը չի կառավարում այնպիսի սցենարներ, երբ վնասը գերազանցում է VaR -ը՝ ի տարբերություն $CVaR$ -ի:

Հիմա անցնենք $CVaR$ -ի մաթեմատիկական ձևակերպումներին [13, 14]: Նախ վերհիշենք, թե ինչպես էր սահմանվում VaR -ը տրված α վստահության մակարդակի համար՝

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \min\{z \mid F_X(z) \geq \alpha\}$$

այսինքն՝ ըստ սահմանման $VaR_\alpha(X)$ -ը X պատահական մեծության ստորին α տոկոսային կետն է: Ընդհանրապես ասած $CVaR$ -ը սահմանվում է որպես X պատահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասումը՝ պայմանով, որ $X \geq VaR_\alpha$: Այսինքն՝ $CVaR$ -ը VaR -ը գերազանցող կորուստների միջինն է: Հետևաբար՝ մաթեմատիկորեն կարելի է այն սահմանել որպես՝

$$CVaR_\alpha(X) = \int_{-\infty}^{\infty} z dF_X(\alpha, z)$$

որտեղ

$$F_X(\alpha, z) = \begin{cases} 0, & z < VaR_\alpha(X) \\ \frac{F_X(z) - \alpha}{1 - \alpha}, & z \geq VaR_\alpha(X) \end{cases}$$

$CVaR$ -ը կարելի է սահմանել նաև այլ կերպ: Դիցուք ունենք x և y պատահական վեկտորներ՝ $x \in R^n$, $y \in R^m$: x -ին կարելի է նայել, օրինակ՝ որպես պորտֆելի կշիռների վեկտորի, իսկ y -ը իրենից ներկայացնում է անորոշությունները: Յուրաքանչյուր x -ի համար նշանակենք $f(x, y)$ -ով պատահական կորուստը, որի պատահական մասը գալիս է y -ից, ենթադրենք նաև, որ y -ի բաշխման խտության ֆունկցիան $p(y)$ -ն է: Հետևաբար՝ հավանականությունը, որ $f(x, y)$ պատահական կորուստը չի գերազանցի z արժեքը հետևյալն է՝

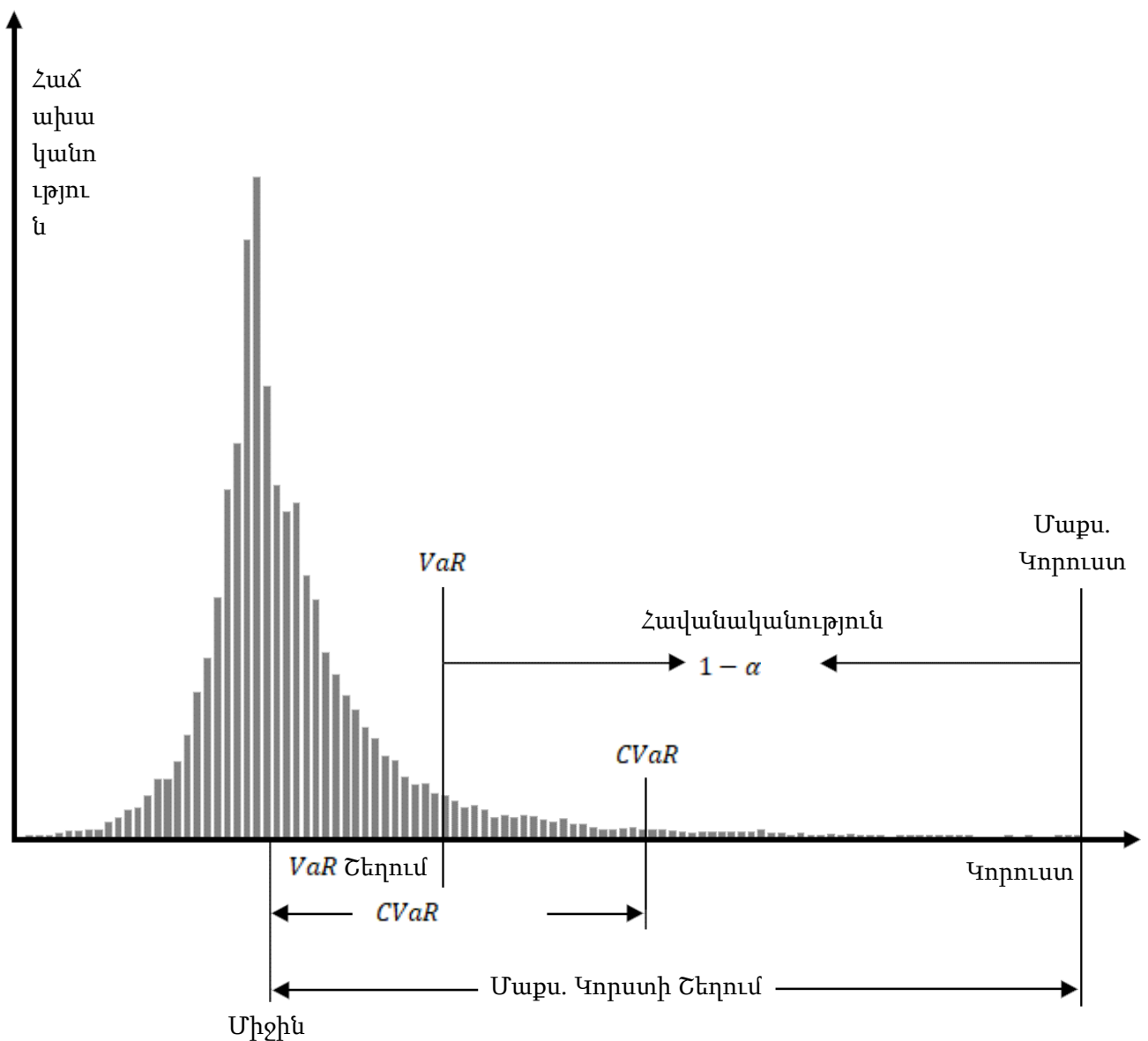
$$F_y(x, z) = \int_{f(x, y) \leq z} p(y) dy$$

Հետևաբար՝ α վստահության մակարդակի VaR -ը և $CVaR$ -ը կլինեն համապատասխանաբար՝

$$VaR_{\alpha}(x, y) = F_y^{-1}(x, \alpha) = \min\{z \mid F_y(x, z) \geq \alpha\}$$

$$CVaR_{\alpha}(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{f(x, y) \geq VaR_{\alpha}(x, y)} f(x, y) p(y) dy$$

Հաջորդ գծապատկերում պատկերված է կորուստների բաշխման խտության ֆունկցիայի մի օրինակ՝



Գծապատկեր 1.3.2. VaR -ի, $CVaR$ -ի և այլ վիճականիների դիրքերը մոդելային բաշխման խտության ֆունկցիայի դեպքում:

Ներկայումս տարածված է ընկալել $CVaR$ -ը որպես VaR -ը գերազանցող կորուստների միջինը, սակայն այս մոտեցում սխալ է, երբ հավանականային ատոմը (դրական չափ ունեցող չափելի բազմություն, որը չի պարունակում ավելի փոքր դրական չափ ունեցող ենթաբազմություն) կիսվում է: Այս դեպքերի համար սահմանվում են $CVaR^+$ և $CVaR^-$ գնահատականներ: Նշանակենք՝

$$CVaR_\alpha^+(X) = E(X | X > VaR_\alpha(X))$$

$$CVaR_\alpha^-(X) = E(X | X \geq VaR_\alpha(X))$$

Պարզ ասած՝ $CVaR^+$ -ը “վերին $CVaR$ -ն է”, իսկ $CVaR^-$ -ը՝ “ստորին $CVaR$ -ը”: Այս նոր նշանակումների ներքո սահմանենք՝

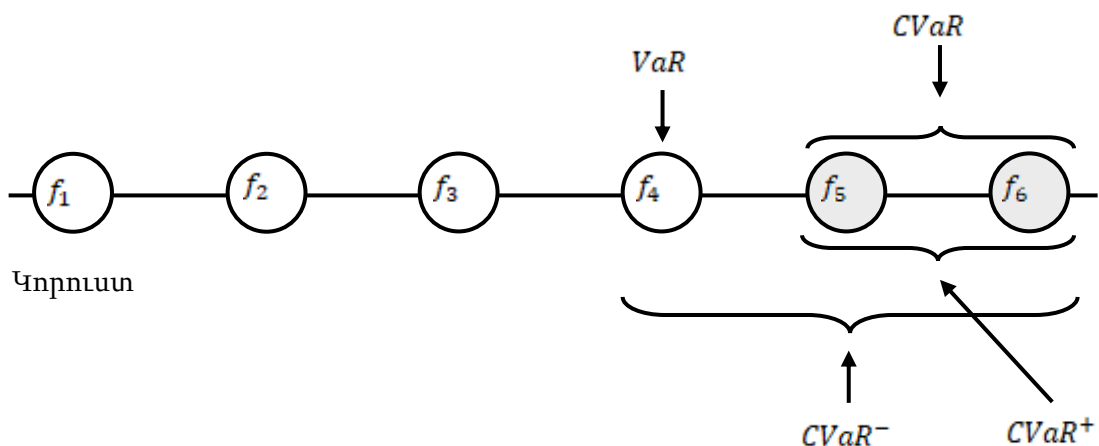
$$CVaR_\alpha(X) = \lambda(\alpha, X)VaR_\alpha(X) + (1 - \lambda(\alpha, X))CVaR_\alpha^+(X)$$

երթե $F_X(VaR_\alpha(X)) < 1$, որտեղ

$$\lambda(\alpha, X) = \frac{F_X(VaR_\alpha(X)) - \alpha}{1 - \alpha}$$

Այնինչ, եթե $F_X(VaR_\alpha(X)) = 1$, այսինքն՝ $VaR_\alpha(X)$ -ը մեծագույն հնարավոր կորուստն է, ապա՝

$$CVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X)$$

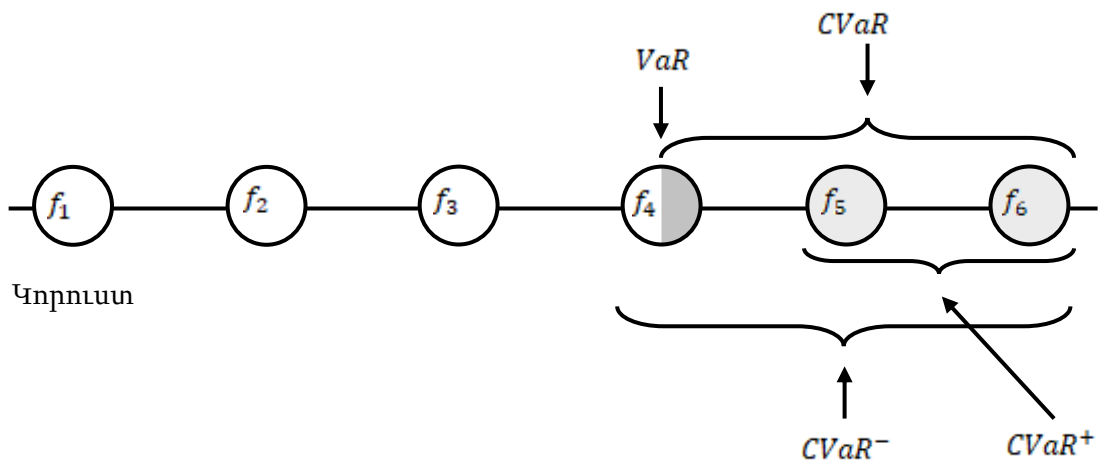


Գծապատկեր 1.3.3. VaR -ի, $CVaR$ -ի, $CVaR^-$ -ի և $CVaR^+$ -ի դիրքերի համեմատությունը միմյանց նկատմամբ $\alpha = \frac{2}{3}$ դեպքում:

Ենթադրենք՝ ունենք 6 հավասար հավանականային սցենարներ՝ f_1, \dots, f_6 կորուստներով: Ենթադրենք, որ $\alpha = \frac{2}{3}$, այդ դեպքում այն ոչ մի կերպ չի կհսում

հավանականային ատոմներից կամայական մեկը, որի հետևանքով ունենում ենք գծապատկեր 1.3.3.-ում բերված տեսքը: Համապատասխանաբար ակնհայտորեն ստացվում է, որ $VaR_\alpha(X) < CVaR_\alpha^-(X) < CVaR_\alpha(X) = CVaR_\alpha^+(X)$:

Հիմա ենդթադրենք, որ $\alpha = \frac{7}{12}$, այս դեպքում այն բնականաբար կհսում է չորրորդ հավանականային ատոմը՝



Գծապատկեր 1.3.4. VaR -ի, $CVaR$ -ի, $CVaR^-$ -ի և $CVaR^+$ -ի դիրքերի համեմատությունը միմյանց նկատմամբ $\alpha = \frac{7}{12}$ դեպքում:

և ունենում ենք՝ $\lambda(\alpha, X) > 0$: Իսկ $CVaR$ -ը ստացվում է՝

$$CVaR_\alpha(X) = \frac{1}{5}VaR_\alpha(X) + \frac{4}{5}CVaR_\alpha^+(X) = \frac{1}{5}f_4 + \frac{2}{5}f_5 + \frac{2}{5}f_6$$

$CVaR$, $CVaR^+$ և $CVaR^-$ գնահատականները բավականին լայն գործնական կիրառություն ունեն կորուստների գնահատման հետ կապված խնդիրների մեծ դասում, այդ իսկ պատճառով մենք կարծում ենք, որ իրենց ներառումը պորտֆելային կառուցման մեջ դրական ազդեցություն կարող է ունենալ: Հաջորդ բաժնում դասական պորտֆելային օպտիմիզացիայի խնդրից բացի նաև կդիտարկենք $CVaR$, $CVaR^+$ և $CVaR^-$ -ի կիրառությունը, թվային և պատկերավոր համեմատականներ կկառուցենք այդ երկու մեթոդաբանությունների միջև:

1. 4 Մոդելային պորտֆելի կառուցումը և ռիսկայնության գնահատումը

Հետևյալ բաժնում՝ հիմնվելով նախորդ բաժինների տեսական դրույթների վրա կառուցելու ենք իրական պորտֆել՝ կազմված ETF-ներից և ազգային արժույթով գանձապետական պարտատոմսերից: Բոլոր հաշվարկները կատարվել են 2014թ. -ի դրվածքով՝ հաշվի առնելով այն փաստը, որ հենց այդ տարի էին տեղի ունենում կենսաթոշակային ֆոնդերի մասին օրենքի ընդունման ամենաբուռն զարգացումները: Սույն հաշվարկներում հաշվի չի առնվելու արժույթային ռիսկը: Փողի շուկայի ոչ-ռիսկային տոկոսադրույքը վերցվում է ՀՀ կողմից 2014թ. -ին թողարկված կարճաժամկետ գանձապետական պարտատոմսի եկամտաբերությունը՝ **7.9898%**: Հիշենք, որ մեր նպատակն էր գնահատել **Հավասարակշռված ֆոնդ**-ի ռիսկայնությունը: Հարկ է նշել նաև, որ, քանի որ ըստ օրենսդրության չի թույլատրվում արտասահմանյան արժույթով ներդրում կատարել ֆոնդի ակտիվների 40%-ից ավել չափով, ապա մեր դիտարկված օրինակում ակտիվների 60%-ը ներդրվելու են ՀՀ պարտատոմսերի մեջ, իսկ մնացած 40%-ը (ենթադրելով, որ այլ գործիքների, օրինակ՝ հեջավորման նպատակով ձեռք բերվող ածանցյալ գործիքների մեջ ներդրում չենք անում)՝ արտասահմանյան ETF-ների մեջ: Միջնորդավճարները և այդ տիպի այլ ծախսերը (Transaction Costs) նույնպես հաշվի չեն առնվում: Վերջում նաև կտրամադրենք կառուցված պորտֆելի հետագիծը 2014թ. -ից սկսած մինչև 2018թ. -ի մարտ ամիսը և կկատարենք համապատասխան եզրակացություններ պորտֆելի էֆեկտիվության, ռիսկայնության ինչպես նաև տատանումների նկատմամբ կայունության մասին:

Առաջին քայլով կներբեռնենք շուկայում շրջանառվող բոլոր ETF-ների ցանկը և այնուհետև MatLab ծրագրի միջոցով կֆիլտրենք այն հետևյալ հերթականությամբ: 1200-ից ավել ETF-ներից կընտրվեն 400-ը ըստ ֆոնդի ակտիվների մեծության, այդ 400-ից կընտրվեն 300-ը ըստ ռիսկայնության և վերջում կընտրվեն 100 ETF ըստ եկամտաբերության: Մեր դեպքում 100 ETF-ներից 2-ի ժամկետը արդեն լրացել էր, այդ

պատճառով պորտֆելի կառուցման համար դիտարկելու ենք մնացած 98 ETF-ները:
Նախ կներբեռնենք այդ ETF-ների ամսական եկամտաբերությունները վերջին 3
տարվա

համար: Որոշ ETF-ներ թողարկվել են 2011թ.-ից ուշ, այսինքն՝ իրենց ամսական եկամտաբերությունների տվյալները ավելի քիչ են: Այս խնդիրը շտկելու համար ենթադրում ենք, որ այն ամիսներում, որոնց համար տվյալներ չունենք, ETF-ի գինը չի փոխվել և հետևաբար եկամտաբերությունը հավասար էր 0-ի:

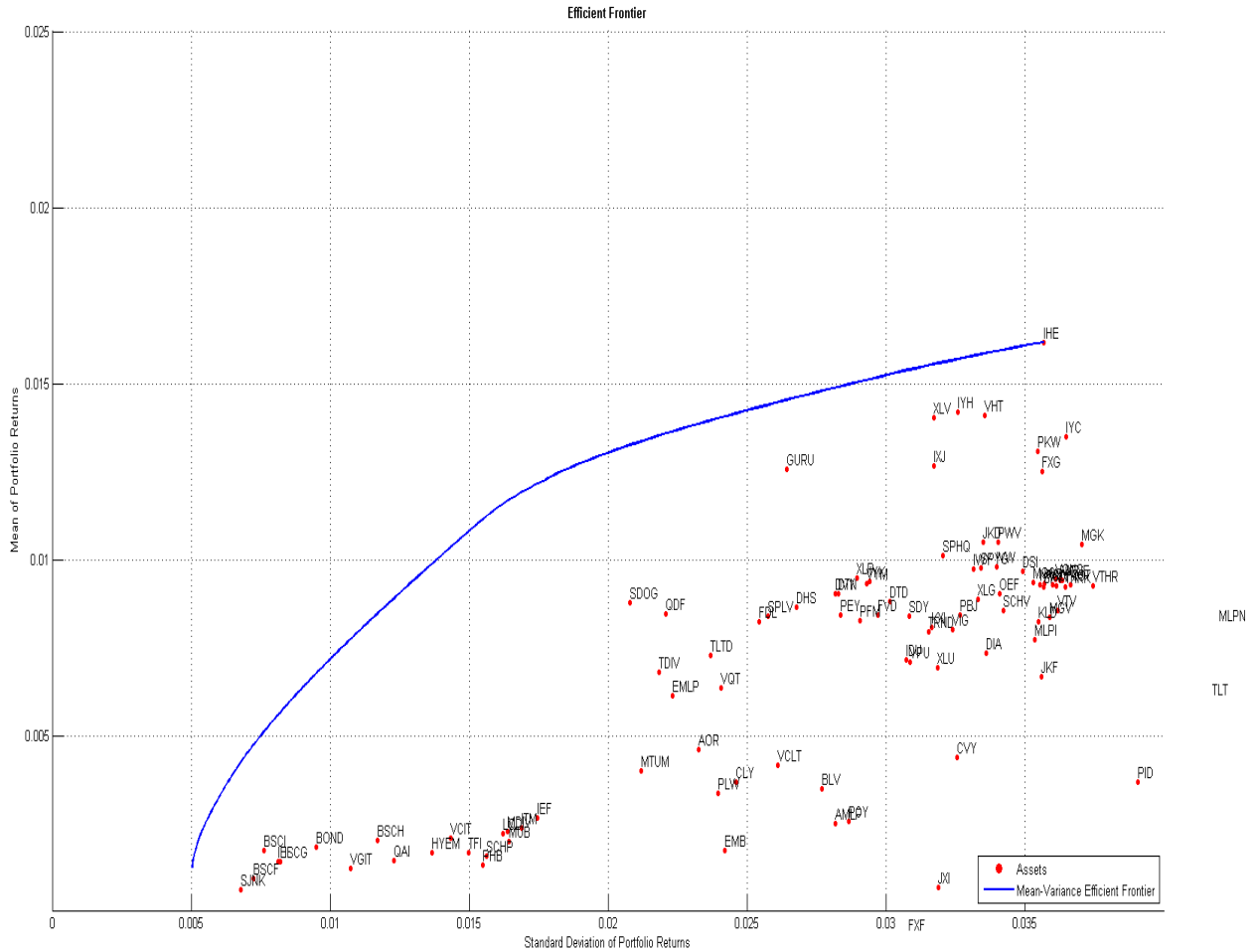
Հիմա դիցուք ունենք 98 ETF-ի եկամտաբերությունների մատրիցը: Հաջորդ քայլով կբաժանենք ETF-ները ըստ ռեգիոնային և ֆոնդային ընտանիքի պատկանելիության, քանի որ օրենքով նախատեսված են սահմանափակումներ այս 2 պառամետրերի համար: Մեկ թողարկողի արժեթղթերում ներդրումների առավելագույն չափը չի կարող գերազանցել ֆոնդի ակտիվների 10%-ը, իսկ մեկ արտասահմանյան պետությունում՝ 15%-ը: Քանի որ ենթադրել ենք, որ վերջնական պորտֆելում միայն 40%-ն է ներդրվելու ETF-ների մեջ, հետևաբար մեր սահմանափակումները կդարձնենք համապատասխանաբար 25% և 37.5%: Մեր դեպքում ունենք 18 ֆոնդային ընտանիք և 3 երկիր (աղյուսակը շարունակվում է հաջորդ էջում)

Ֆոնդային Ընտանիք	ETF-ների քանակը
ALPS	2
Barclays Fund	1
Credit Suisse AG	1
First Trust	6
Flexshares Trust	2
Global X Funds	1
Guggenheim Investments	7
IndexIQ	1
Market Vectors	2
PIMCO	1

PowerShares	11
Royal Bank of Scotland NV	1
SPDR State Street Global Advisors	10
Schwab ETFs	3
UBS AG	1
Vanguard	16
WisdomTree	3
iShares	29
Ռեզիդն	—
CH	1
Global	36
USA	61

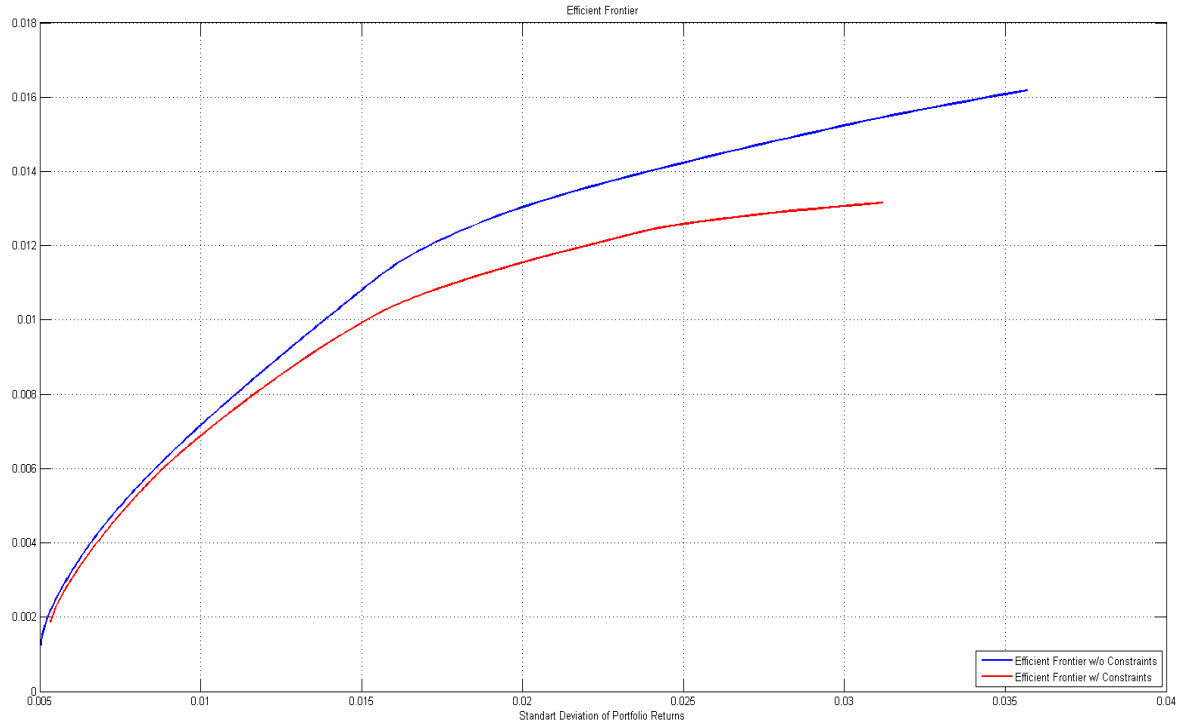
Աղյուսակ 1.4.1. 98 ETF արժեթղթերի բաժանումը ըստ ռեզիդնների և ֆոնդային պատկանելիության:

Համապատասխանաբար մեր սահմանափակումների մատրիցը կլինի 21x98 չափանի՝ կազմված մեկերից և զրոներից: Փաստորեն ամեն ինչ պատրաստ է պորտֆելների բազմությունը կառուցելու և էֆեկտիվ պորտֆելը գտնելու համար և կարելի է անցնել հաշվարկային խնդիրներին: Հետևյալ գծապատկերում ներկայացված է էֆեկտիվ սահմանագիծը առանց սահմանափակումների դեպքի համար և ETF արժեթղթերի համապատասխան կետային դիրքերը սահմանագծի նկատմամբ՝



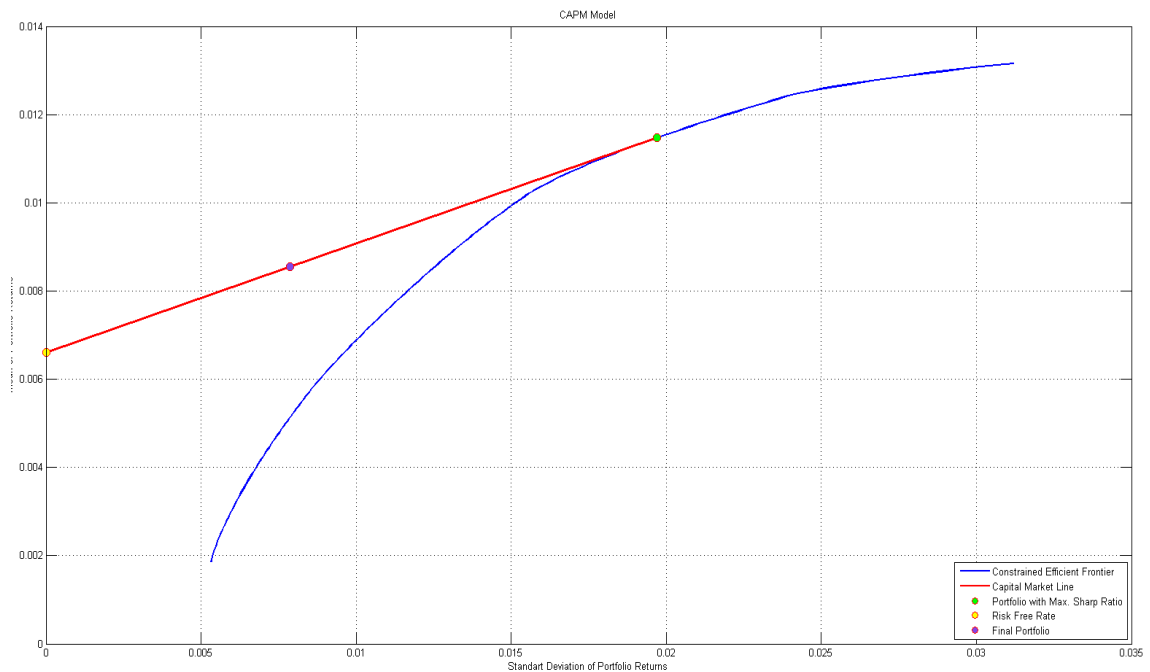
Գծապատկեր 1.4.1. Մոդելային պորտֆելների կետային դիրքերը էֆեկտիվ սահմանագծի նկատմամբ:

Հաջորդ պատկերում համեմատվում են էֆեկտիվ սահմանագծերը երբ գոյություն ունեն սահմանափակումներ (կարմիր կորը) և երբ սահմանափակումներ գոյություն չունեն (կապույտ կորը): Զարմանալի չէ, որ առանց սահմանափակումների կորը ըստ եկամտաբերության ավելի բարձր դիրքում է գտնվում, քան եթե սահմանափակումներ գոյություն ունենային, քանի որ, ինչպես տեսանք, սահմանափակումների դեպքում հնարավոր է, որ գլոբալ էքստրեմումի կետը ընկած չլինի սահմանափակումներով տրվող բազմության մեջ, ինչի հետևանքով հաջորդ էֆեկտիվ կետը գտնվելու է այդ բազմության սահմանագծի վրա:



Գծապատկեր 1.4.2. Էֆեկտիվ սահմանագծերի դիրքերը միմյանց նկատմամբ առանց սահմանափակումների և սահմանափակումների դեպքում:

Հիմա գտնենք Շարպի գործակիցը մաքսիմիզացնող կետը: Հենց այդ կետով է անցնելու էֆեկտիվ սահմանագծին տարված շոշափողը: Ստացվում են հետևյալ արդյունքները՝



Գծապատկեր 1.4.3. Ոչ-ռիսկային ակտիվի ներառման դեպքում էֆեկտիվ սահմանագծի փոփոխությունը:

Վերջնական պորտֆելի 60%-ը ներդրվում է ՀՀ կարճաժամկետ պետական պարտատոմսերի մեջ, իսկ 40%-ը Շարաի գործակիցը մաքսիմալացնող պարտֆելի մեջ: Ստացվող նոր պորտֆելի եկամտաբերությունը և ստանդարտ շեղումն են՝

Եկամտաբերություն (ամսական)	Ստանդարտ շեղում (ամսական)
0.85%	0.79%

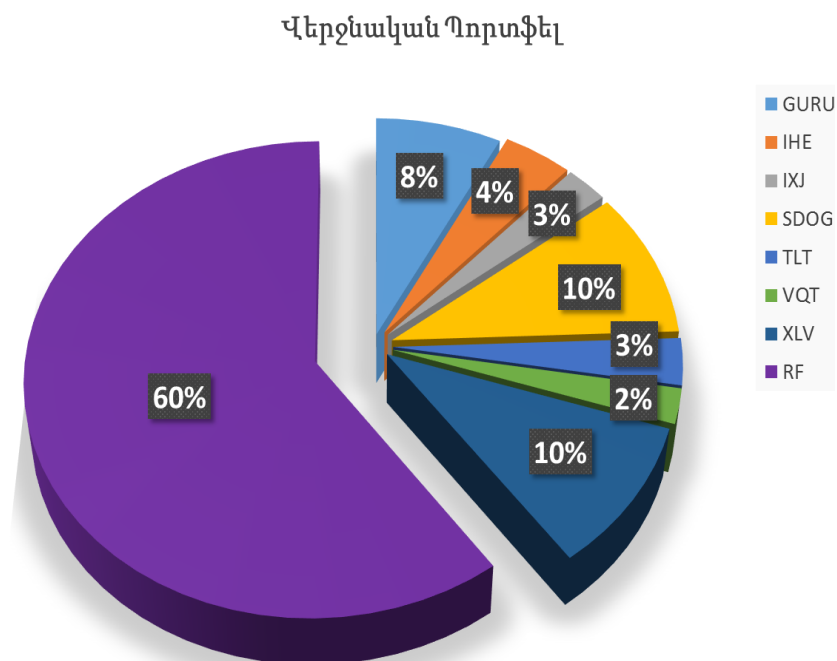
Աղյուսակ 1.4.2. Ստացված պորտֆելի ամսական եկամտաբերությունն ու ստանդարտ շեղումը:

Եթե ձևափոխենք տարեկանի՝

Եկամտաբերություն (տարեկան)	Ստանդարտ շեղում (տարեկան)
10.7%	2.73%

Աղյուսակ 1.4.3. Ստացված պորտֆելի տարեկան եկամտաբերությունն ու ստանդարտ շեղումը:

Վերջնական պորտֆելի մասնակիցներն են՝



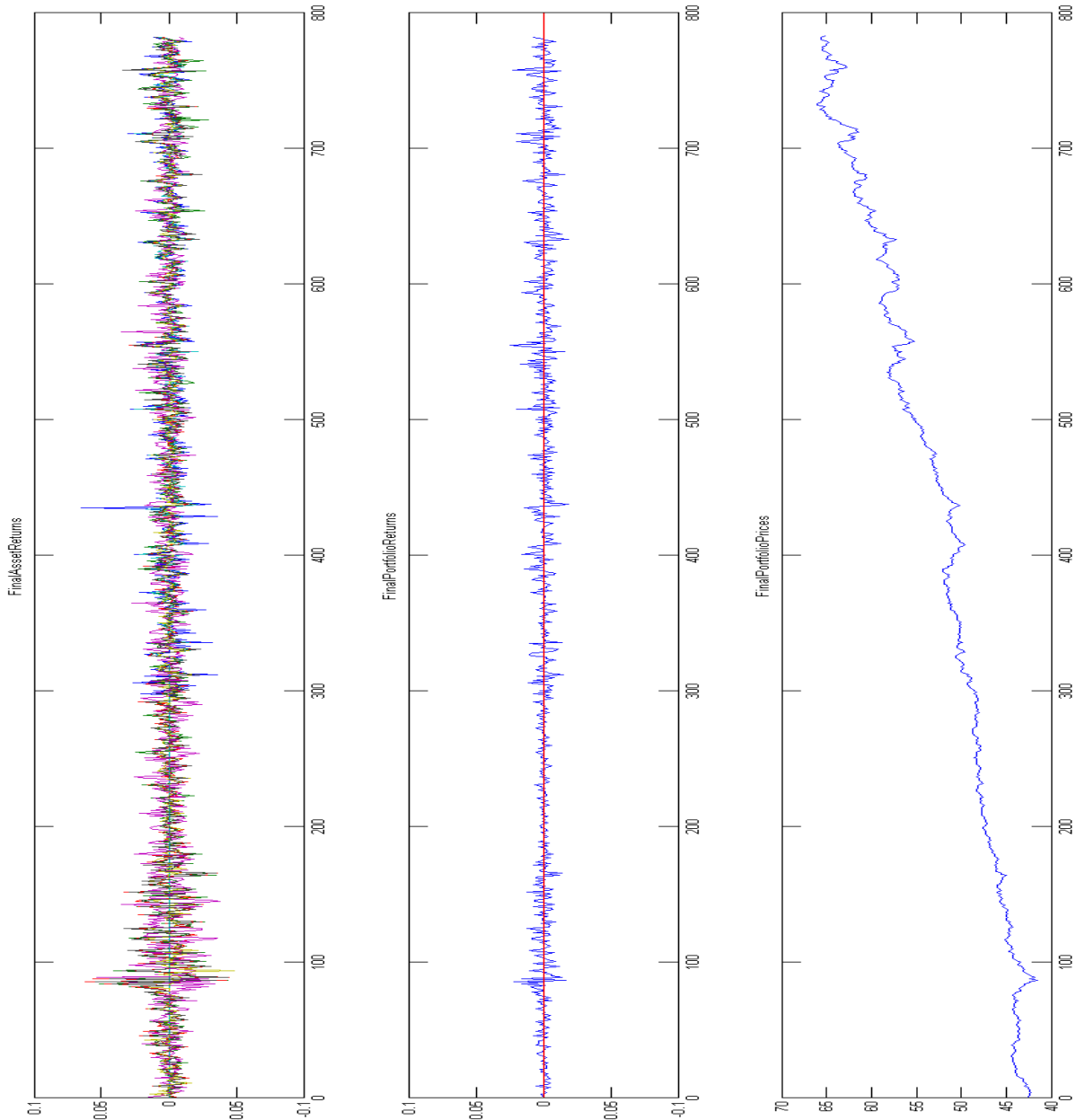
Գծապատկեր 1.4.4. Վերջնական պորտֆելի մասնակիցները պորտֆելում ունեցած համապատասխան կշիռներով:

Արժեթուղթ	Ռեգիոն	Արժեթղթի տիպ	Ֆոնդային ընտանիք
GURU	USA	Large Blend	Global X Funds
IHE	USA	Health	iShares
IXJ	Global	Health	iShares
SDOG	Global	Large Value	ALPS
TLT	USA	Long Government	iShares
VQT	Global	Multialternative	Barclays Fund
XLV	Global	Health	SPDR
RF (Risk Free)	ՀՀ	Կարճ. Գանձ.	—

Աղյուսակ 1.4.4. Վերջնական պորտֆելի մասնակիցները և իրենց համապատասխանող ռեգիոնները, արժեթղթային տիպերը և ֆոնդային ընտանիքները:

Հաջորդ գծապատկերը ցույց է տալիս հետևյալ 7 արժեթղթերի և պորտֆելի եկամտաբերությունները, ինչպես նաև պորտֆելի արժեքի փոփոխությունը: Նկատենք, որ այստեղ դիտարկվել են միայն ռիսկային արժեթղթերը: Պորտֆելի ընդհանուր վարիացիան շատ ավելի փոքր է, քան արժեթղթերինը: Անցած 3 տարվա կտրվածքով պորտֆելի եկամտաբերությունը 53.6% է: Եթե հաշվի առնենք, որ իր մեջ ներդրվելու էր միայն 40%-ը, իսկ 60%-ը ներդրվելու էր ռիսկից զերծ պետական պարտատոմսերի մեջ, ապա մեր վերջնական մոդելային պորտֆելի եկամտաբերությունը կլիներ մոտ 35%, որը մոտ է տարեկան 10-11% եկամտաբերությանը:

Հաջորդ քայլով հաշվենք պորտֆելի CVaR-ը 95% հավանականության համար: Կհաշվենք երկու մեթոդով՝ առաջինում կկատարենք բազմաչափ նորմալ բաշխում ունեցող սիմուլյացիաներ, իսկ երկրորդում կհիմնվենք պատմական տվյալների վրա: Համապատասխան արդյունքները բերված են աղյուսակներ 1.4.5 և 1.4.6-ում:



Գծապատկեր 1.4.5. Վերջնական պորտֆելի 7 արժեթղթերի (ձախ) և պորտֆելի եկամտաբերությունները (մեջտեղ), պորտֆելի արժեքը (աջ):

Multivariate Normal Simulation Based CVar (ամսական)	Historical Returns Based CVaR (ամսական)
0.77%	0.37%

Աղյուսակ 1.4.5. CVaR-ի ամսական արժեքը սիմուլյացիաների և պատմական տվյալների դեպքում:

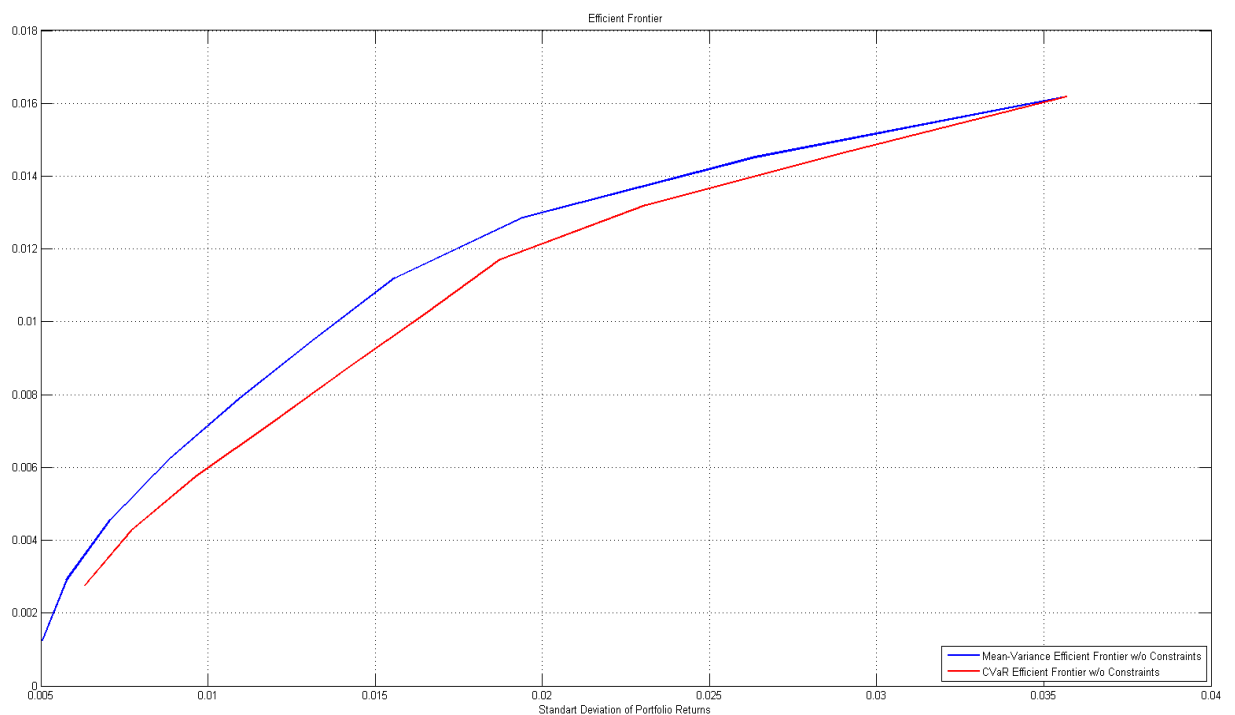
Համապատասխանաբար տարեկան CVaR-ը կլինի՝

Multivariate Normal Simulation Based CVaR (տարեկան)	Historical Returns Based CVaR (տարեկան)
2.66%	1.28%

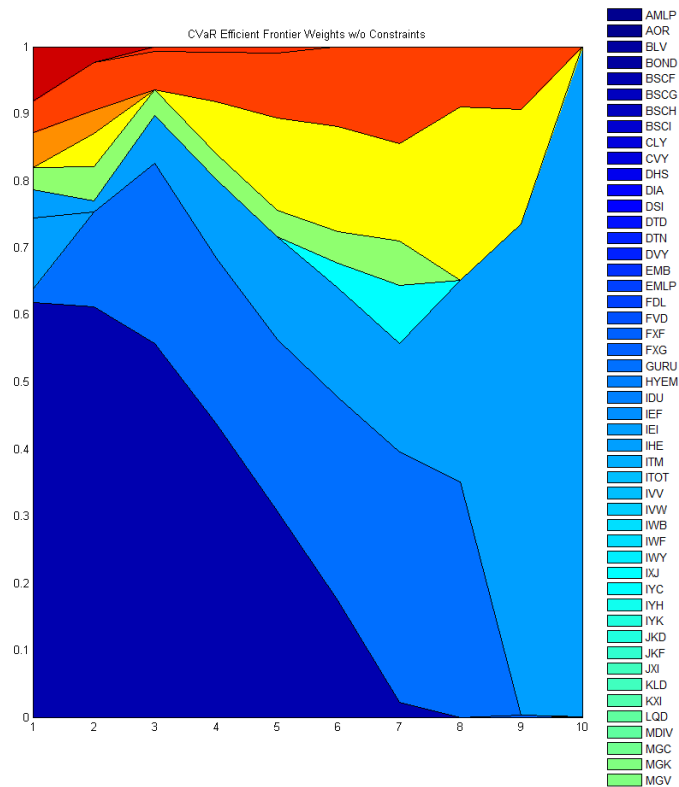
Աղյուսակ 1.4.6. CVaR-ի տարեկան արժեքը սիմուլյացիաների և պատմական տվյալների դեպքում:

Կարելի է համեմատականներ կատարել եկամտաբերություն-ստանդարտ շեղում և եկամտաբերություն-CVaR կորերի միջև: Դա անելու համար հաշվենք եկամտաբերություն-CVaR էֆեկտիվ կորի կշիռները, իսկ այդ կշիռներով էլ կհաշվենք ստանդարտ շեղումները և հետևաբար 2 կորերը կբերենք նույն չափողականության:

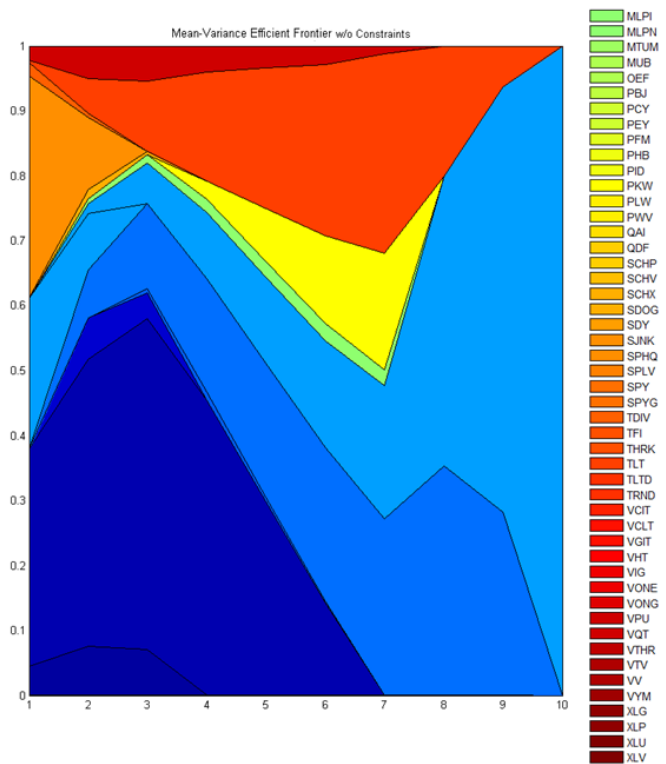
Հետևյալ գծապատկերում տրված են այդ 2 կորերի տեսքերը առանց սահմանափակումների դեպքի համար:



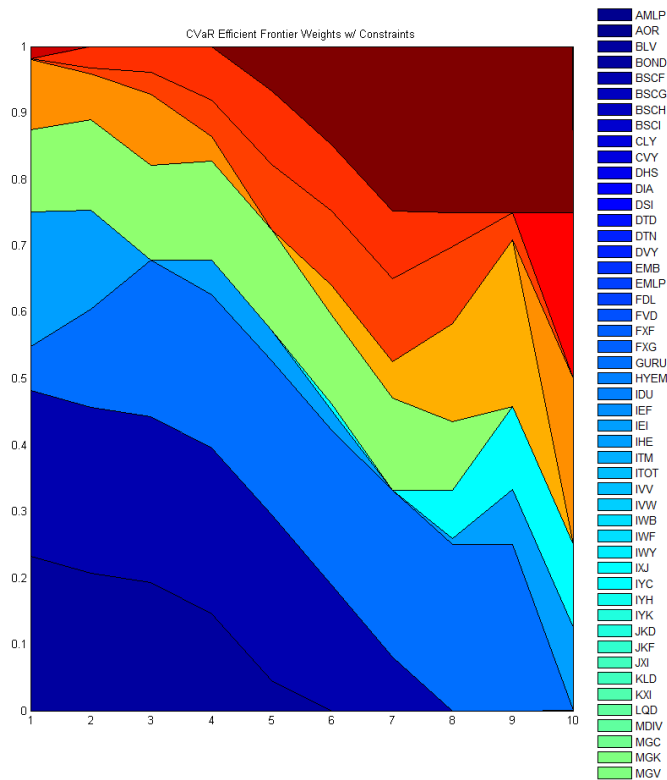
Գծապատկեր 1.4.6. Էֆեկտիվ սահմանագաժի տեսքերը դասական (ստանդարտ շեղումով) և CVaR օպտիմիզացիայի դեպքերում (առանց սահմանափակումների):



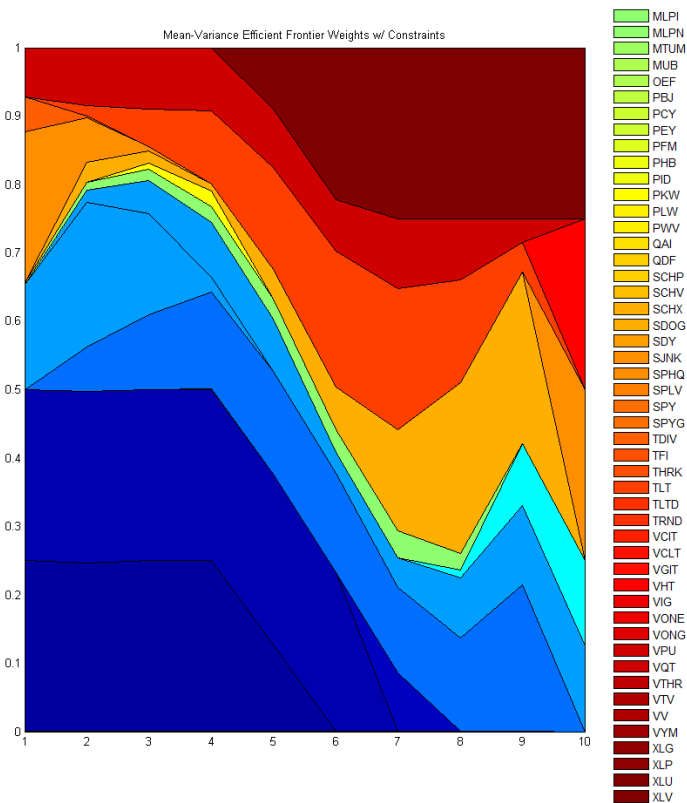
Գծապատկեր 1.4.7. Էֆեկտիվ սահմանագծի կետերի կշռային կառուցվածքը CVaR օպտիմիզացիայի դեպքում առանց սահմանափակումների:



Գծապատկեր 1.4.8. Էֆեկտիվ սահմանագծի կետերի կշռային կառուցվածքը վարիացիայի օպտիմիզացիայի դեպքում առանց սահմանափակումների:

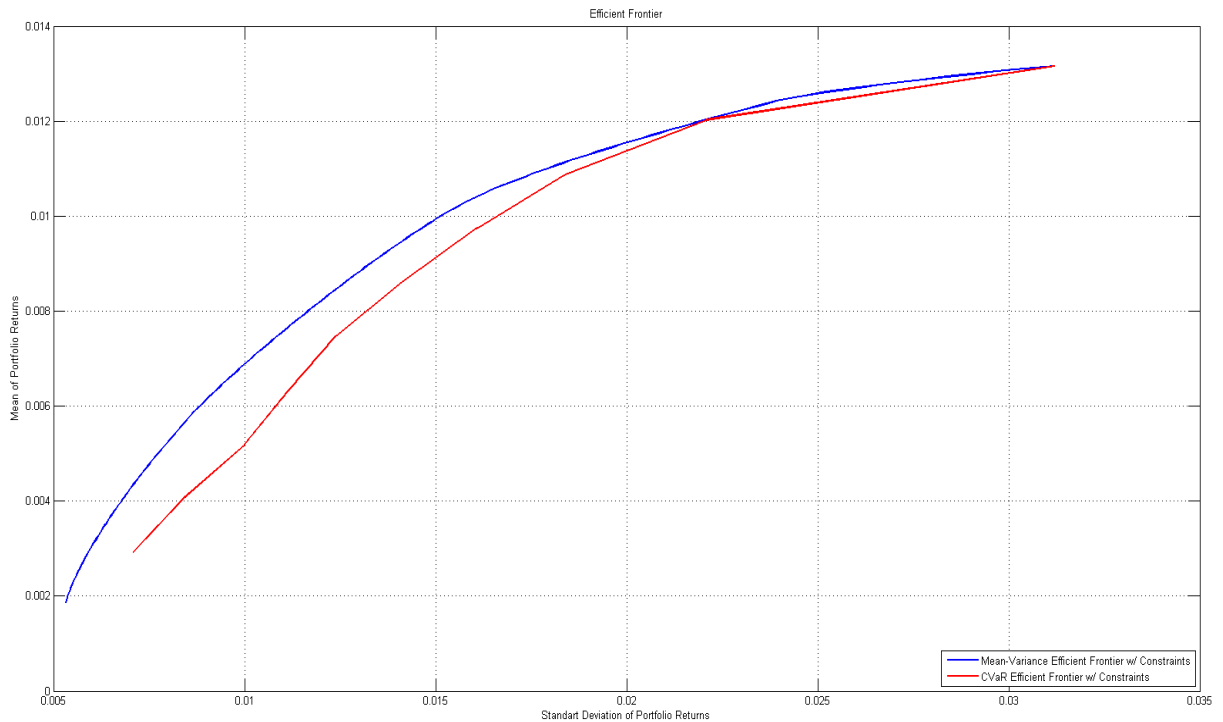


Գծապատկեր 1.4.9. Էֆեկտիվ սահմանագծի կետերի կշռային կառուցվածքը CVaR օպտիմիզացիայի դեպքում սահմանափակումներով:



Գծապատկեր 1.4.10. Էֆեկտիվ սահմանագծի կետերի կշռային կառուցվածքը վարիացիայի օպտիմիզացիայի դեպքում սահմանափակումներով:

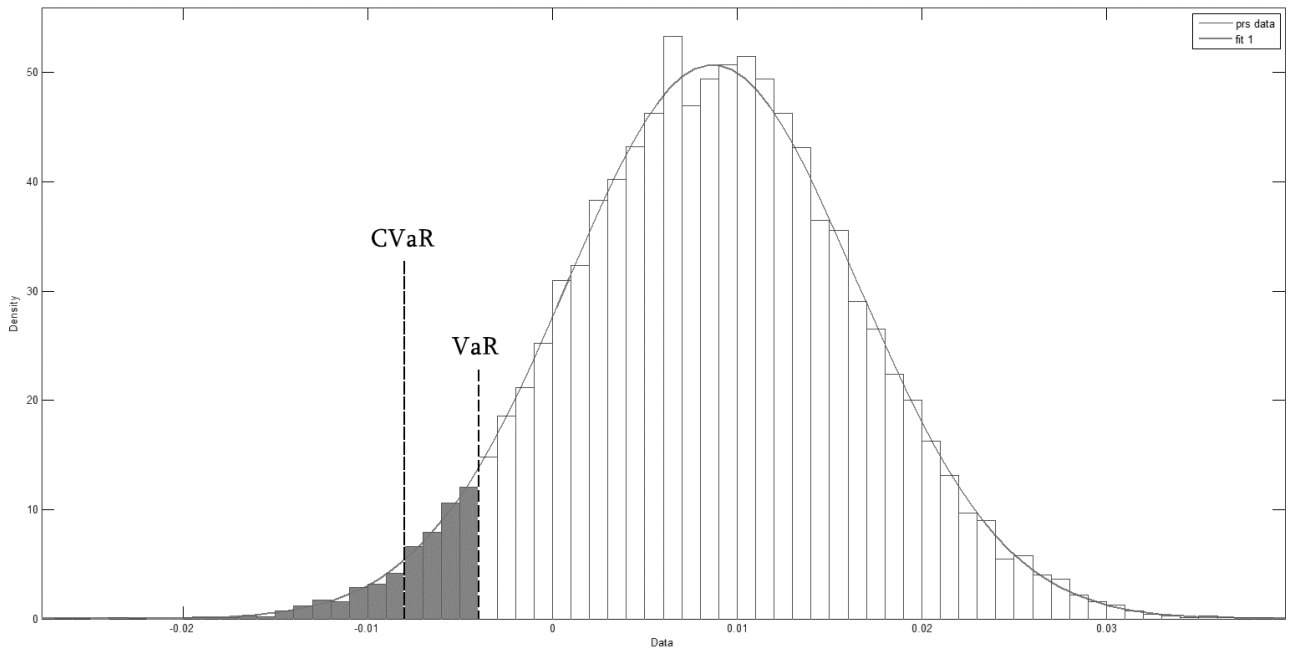
Համեմատելով կշիռները տեսնում ենք, որ իրենց հարաբերական կառուցվածքը նման է, սակայն տեղ-տեղ գոյություն ունեն էական տարբերություններ: Սահմանափակումների դեպքում պատկերը մի փոքր այլ է՝



Գծապատկեր 1.4.11. Էֆեկտիվ սահմանագածի տեսքերը դասական (ստանդարտ շեղումով) և CVaR օպտիմիզացիայի դեպքերում (սահմանափակումներով):

Ընդհանուր դեպքում VaR և CVaR վիճականիների տեսքերը և հարաբերական դիրքերը պատկերացնելու համար կարելի է նաև օգտագործել սիմուլյացիաներ, օրինակ՝ նորմալ բաշխման ենթադրություններով: Հարկ է նշել, որ քանի որ այս մեթոդը հիմնվում է հաշվիչ սարքերի վրա, ապա ստացվելու է պսևվոր-պատահական մեծություն: Հաջորդ գծապատկերում պատկերված է եկամտաբերությունների բաշխումը, և իր մոտարկված

նորմալ բաշխումը, ինչպես նաև համապատասխան VaR-ը և CVaR-ը՝

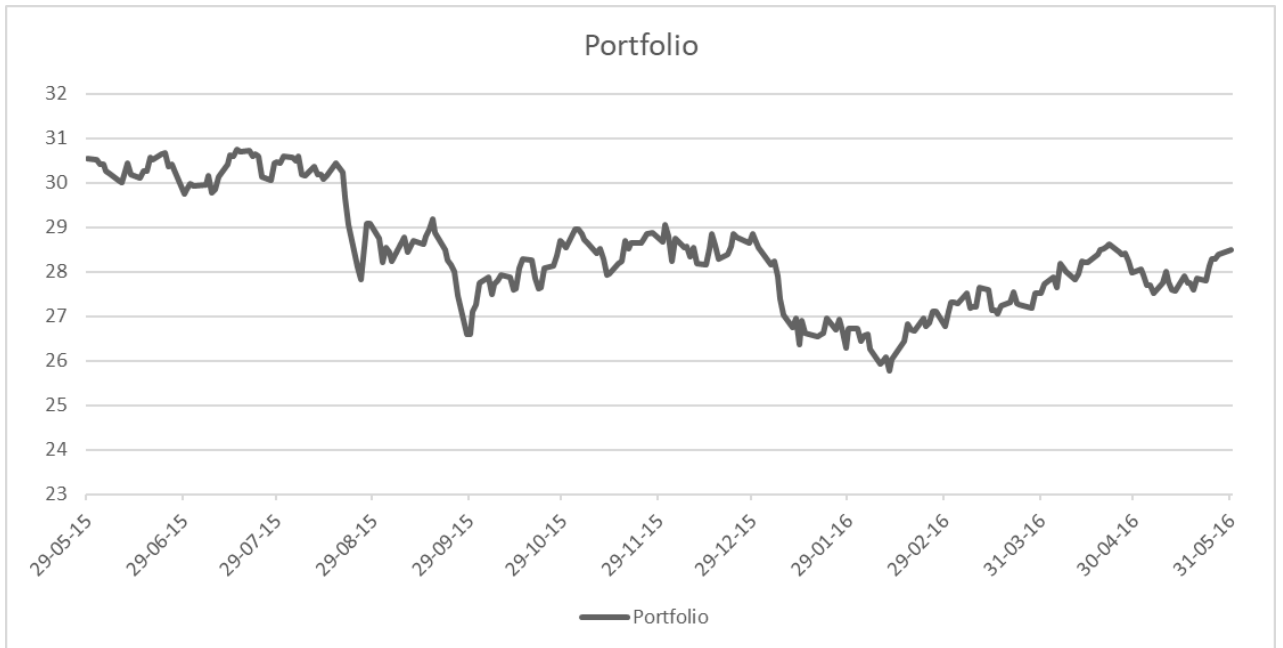


Գծապատկեր 1.4.12. Եկամտաբերությունների մոդելային բաշխումը, իր մոտարկումը, VaR-ը և CVaR-ը:

Դիտարկենք կառուցված պորտֆելի հետագիծը 2014թ.-ից սկսած մինչև 2018թ.-ը՝ տարեկան արդյունքներով:



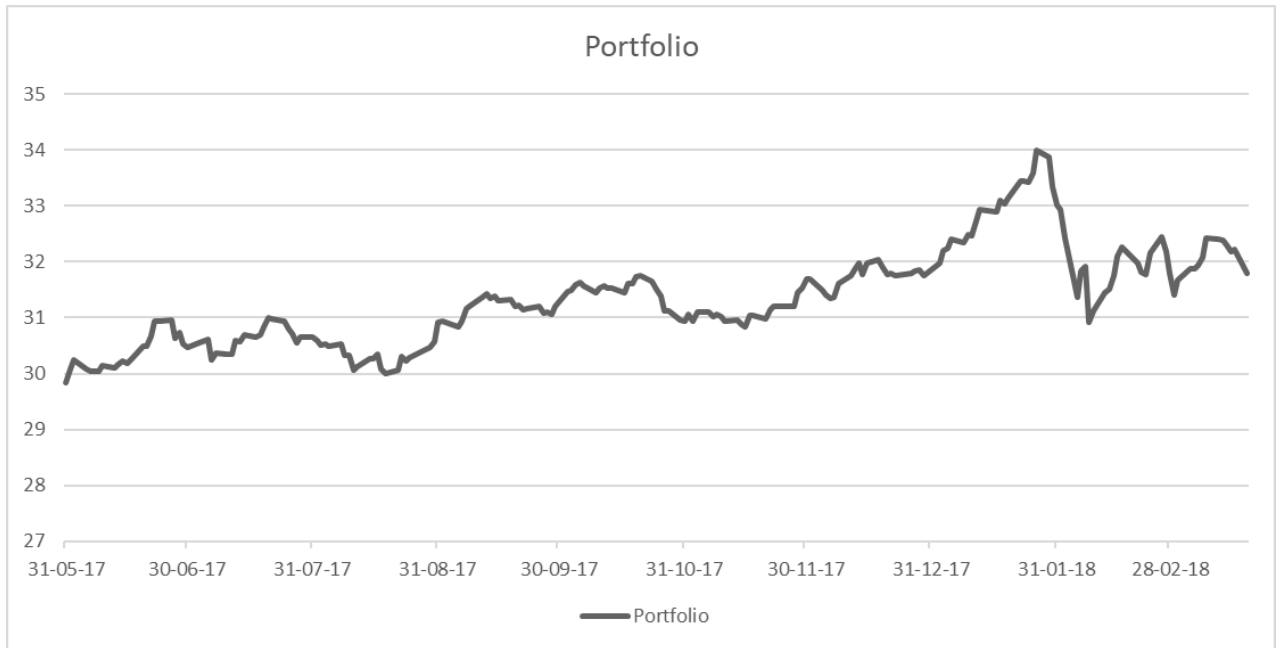
Գծապատկեր 1.4.13. Արժեթղթերից բաղկացած պորտֆելի հետագիծը 2014-2015թ. -ի ընթացքում:



Գծապատկեր 1.4.14. Արժեթղթերից բաղկացած պորտֆելի հետագիծը 2015-2016թ. -ի ընթացքում:



Գծապատկեր 1.4.15. Արժեթղթերից բաղկացած պորտֆելի հետագիծը 2016-2017թ. -ի ընթացքում:



Գծապատկեր 1.4.16. Արժեթղթերից բաղկացած պորտֆելի հետագիծը 2017-2018թ. -ի ընթացքում:

Արժեթղթերից բաղկացած պորտֆելի եկամտաբերությունը	Դիտարկվող տարին
17.7%	2014-2015
-6%	2015-2016
4.6%	2016-2017
6.7%	2017-2018
Արժեթղթերի միջին տարեկան եկամտաբերությունը (բարդ %)	Արժեթղթերի միջին տարեկան եկամտաբերությունը (պարզ %)
4.3%	4.6%
Ողջ պորտֆելի տարեկան եկամտաբերությունը (բարդ %)	Ողջ պորտֆելի տարեկան եկամտաբերությունը (պարզ %)
6.5%	7.2%

Աղյուսակ 1.4.6. Արժեթղթերից բաղկացած պորտֆելի և ընդհանուր պորտֆելի (ներառյալ պետական պարտատոմսերը) եկամտաբերությունը:

Պորտֆելի եկամտաբերությունը յուրաքանչյուր տարվա համար համառոտ ներկայացված է աղյուսակում 1.4.6-ում:

Մաթեմատիկական գործիքներով պորտֆելների օպտիմալ կառավարումը չափազանց կարևոր և բարդ խնդիր է այնպիսի կառույցների համար, որոնք կրում են մեծ պատասխանատվություն իրենց ներդրողների նկատմամբ: Պրակտիկ հաշվարկով գտանք մեր մոդելային պորտֆելի սպասվող ռիսկը և եկամտաբերությունը, որոնց վրա հիմնվելով և մոտարկելով եկամտաբերությունների բաշխումը կարելի է կանխատեսումներ կատարել: Նկատենք, որ պատմական եկամտաբերությունների տատանողականությունը էապես փոքրացել էր օպտիմալ պորտֆելում: Մեր դեպքում մոդելային պորտֆելի սպասվող տարեկան եկամտաբերությունն էր 10.2%, տարեկան ստանդարտ շեղումը՝ 2.73%, տարեկան $CVaR_{0.95}$ -ը՝ 2.66%: Այսինքն՝ պորտֆելի հնարավոր տարեկան կորուստների միջինը, որոնց տեղի ունենալու հավանականությունը փոքր է 5%-ից հավասար է 2.66%-ի, որը քիչ չէ այս տիպի ֆոնդի համար: Եվ սա այն դեպքում, երբ պորտֆելի 60%-ը ներդրված էր ոչ-ռիսկային համարվող գանձապետական պարտատոմսերի մեջ: Նկատի ունենանք նաև, որ ՀՀ-ը ունի BB- վարկային ռեյտինգ: Հաշվի առնելով պորտֆելի ցածր տատանողականությունը՝ (ստանդարտ շեղման տեսքով) և այն, որ պորտֆելի կառավարումը դինամիկ չէր, այսինքն՝ ենթադրվում էր հաշվարկված կշիռների անփոփոխ լինելը, ստացված արդյունքները գնահատվում են բավարար: Չնայած նրան, որ դասական այս մոտեցումները մեծ ճանաչում և կիրառություն ունեն, իրենց օգտագործումը կարող է արդյունավետ չլինել: Հաջորդ գլխում կդիտարկենք այս տիպի խնդիրների այլընտրանքային մոտեցում՝ հիմնված մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի վրա:

Գլուխ 2

ՄԱՔՍԻՄԱԼ ԷՆՏՐՈՊԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԻ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ, ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴԱԲԱՆԱԿԱՆ ԿԱՌՈՒՅՎԱԾՔԸ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ՖԻՆԱՆՍԱԿԱՆ ԿԱՆԽԱՏԵՍՈՒՄՆԵՐՈՒՄ

2.1 Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի ծագումը, պատմությունը և ձևակերպումը պարզագույն խնդիրների օրինակներով

Հետևյալ գլուխը նվիրված է մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի կիրառմանը ակտիվի գնի բաշխման գնահատման մեջ: Էնտրոպիան ինքն իրեն բավականին հայտնի մեծություն է և ունի համապատասխան պատմություն, սակայն ֆինանսական տիպի խնդիրներում որպես գործիք կիրառվել է շատ հազվադեպ: Էնտրոպիան առաջին անգամ սահմանվել և ձևավորվել է դեռ անցած դարում ջերմադինամիկայի տեսության սահմաններում, որպես ջերմադինամիկական համակարգի վիճակը նկարագրող մեծություն, ֆունկցիա: Այս գաղափարի ներքո Ջոզայա Գիբսը պնդում էր, որ փակ համակարգերում ջերմադինամիկական էնտրոպիան ժամանակի ընթացքում հասնում է իր մեծագույն արժեքին՝ տրված սահմանափակումների ներքո: Ստացված արդյունքը կարելի է նաև մեկնաբանել այնպես, որ էնտրոպիայի՝ մաքսիմալ արժեքի հասնելը համապատասխանում է բնության օրենքներին և իրենից ներկայացնում է բնականոն գործընթաց: Այդ գաղափարը այնուհետև ամբողջությամբ բացատրվեց և ձևակերպվեց Բոլցմանի կողմից: Հաջորդիվ Ջեյնսը ստացավ մի արդյունք, ըստ որի տրված մասնակի ինֆորմացիայի պարագայում մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդով հնարավոր է կառուցել մի բաշխում, որն ամենաքիչն է կապված բացակայող ինֆորմացիայի հետ և հետևաբար ամենաանկողմնակալն է (1957), (1982):

Վերը նշվածից կարելի է հետևություն անել, որ, ըդնհանրապես ասած, նույնիսկ ունենալով սահմանափակ ինֆորմացիա, հնարավոր է օգտագործել մաքսիմալ

Էնտրոպիայի մեթոդը ֆինանսական խնդիրներում և ինչ-որ ճշտությամբ գնահատել նպատակային ակտիվի բաշխումը: Որպես ինֆորմացիայի աղբյուր կարելի է դիտարկել ակտիվի վրա գրված օպցիոնային գները: Սույն մեթոդի համար անհրաժեշտ չեն ո՛չ ինտերպոլյացիաներ, ո՛չ էքստրապոլյացիաներ, և այն աշխատում է նույնիսկ, եթե տրված է միայն մեկ օպցիոնային գին: Որպես արդյունք՝ իրական օպցիոնների ներկա գների հիման վրա կառուցվելու է այնպիսի դիսկրետ բաշխում, որը բավարարում է հավանականային չափի բոլոր հատկություններին: Ցանկալի է նաև նշել, որ մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդը բավականին տարբերվում է մնացած ֆինանսական կանխատեսման մոտեցումներից ոչ միայն իր մաթեմատիկական կառուցվածքով, այլև տրամաբանությամբ: Կարելի է համեմատության համար դիտարկել մաքսիմալ ճշմարտանմանության մեթոդը, որտեղ սկզբից ենթադրվում է բաշխման տիպը, այնուհետև գնահատվում են բաշխման պարամետրերը: Այստեղ, սակայն, տրված ինֆորմացիայից ելնելով գնահատվում է հենց ինքը բաշխումը, որը ոչ-պարամետրական է: Այս ողջ տեսությունը կուսումնասիրենք որպես հավելում և միևնույն ժամանակ հակադրություն նախորդ գլխին, որտեղ անհրաժեշտ վիճականիները հաշվարկելու համար ընդամենը դիտարկվել էին պատմական տվյալները և որոշ ենթադրությունների ներքո գնահատվել բաշխման պարամետրեր: Հետևյալ մոտեցումը տարբերվում է նրանով, որ վիճականիները կվերցվեն մի բաշխումից, որը մաքսիմալ էնտրոպիայի իմաստով համապատասխանում է շուկայական սպասումներին:

Այս գլխի սկզբում ավելի խորը իմաստային պատկերացում ստանալու նպատակով սկզբից կքննարկվեն էնտրոպիայի հետ կապված մինչ այժմ հայտնի որոշ դրույթներ, հաջորդիվ կձևակերպվեն մաթեմատիկական մոդելը և այն սպասարկող այլ կառույցներ: Նաև հաջորդ գլխում ծրագրավորման միջոցով մոդելը կկիրառվի գործնականորեն և կկայացվեն համապատասխան հետևություններ մոդելի պիտանելիության, նախորդ մեթոդների նկատմամբ համեմատական օգտակարության և կիրառական նշանակության մասին:

Չնայած նրան, որ էնտրոպիան իսկզբանե ծագել և սահմանվել է ֆիզիկայի շրջանակներում, այն նաև սահմանված է մաթեմատիկայում՝ ինֆորմացիայի

տեսության շրջանակներում [25-27]: Հասկանալու և պատկերացնելու նպատակով պարզության համար հաջորդ աղյուսակում դիտարկենք մի պատահական մեծություն, որն ընդունում է վերջավոր թվով արժեքներ.

X	X_1	...	X_n
P	p_1	...	p_n

Աղյուսակ 2. 1. 1 n հատ վերջավոր արժեք ընդունող X պատահական մեծության արժեքները (վերևից) և համապատասխան հավանականությունները (ներքևից):

Այստեղ p_i -ն X պատահական մեծության x_i արժեք ընդունելու հավանականությունն է՝ $p_i = P(X = x_i)$: Դիտարկված այս պարագայում, համակարգի էնտրոպիան սահմանվում է որպես՝

$$S = - \sum_{i=1}^n p_i * \log(p_i)$$

Բացասական նշանը դրվում է դրական թիվ ստանալու նպատակով: Ֆիզիկայում հայտնի ջերմադինամիկական էնտրոպիան տարբերվում է վերը նշվածինից Բոլցմանի հաստատունով: Նշենք, որ ընդհանրապես ասած կարելի է վերցնել կամայական հիմքով լոգարիթմ, այնուհետև ցանկության դեպքում փոխել հիմքը: Ներկայումս ինֆորմացիայի տեսության շրջանակներում օգտագործվում է 2 հիմքով լոգարիթմը, որը հիմնավորված է հաշվիչ սարքերի կառուցման սպեցիֆիկայով, այն է՝ փոքրագույն ինֆորմացիոն տարրի, բիտի՝ 2 հնարավոր արժեք ընդունելու հատկությամբ (0-1, կամ էլեկտրական կոմպոնենտներում լարման բացակայություն – ներկայություն):

Սահմանումից երևում է, որ էնտրոպիան կարելի է նաև հասկանալ որպես հավանականությունների լոգարիթմի մաթեմատիկական սպասում: Ինֆորմացիան և էնտրոպիան իրար հետ սերտ կապակցված մեծություններ են: Էնտրոպիան անորոշության քանակական բնութագիր է, ի հակադրում ինֆորմացիայի: Որոշ գրականություններում կարելի է հանդիպել ինֆորմացիայի սահմանմանը հետևյալ տեսքով՝

$$I = -S = \sum_{i=1}^n p_i * \log(p_i)$$

Այսինքն՝ ինֆորմացիան նույն անորոշության բացակայությունն է: Սա ամրապնդելու համար բերենք պարզ օրինակ:

Դիցուք ունենք խաղաքար (игровая кость), որը նետվելու է մեկ անգամ: Խաղի սկզբում անհայտ է, թե վեց թվերից որ մեկն ենք ստանալու և համապատասխան էնտրոպիան հավասար կլինի՝

$$S = - \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} * \log\left(\frac{1}{6}\right) = -\log\left(\frac{1}{6}\right) = \log(6)$$

Հիմա ենթադրենք մեզ տրվել է տեղեկատվություն, որ խաղաքարը ընդունում է միայն զույգ արժեքներ: Այս դեպքում էնտրոպիան կլինի $S = \log(3)$: Փաստորեն մեզ տրվեց $\log(6) - \log(3) = \log(2)$ չափին համարժեք ինֆորմացիա, կամ որ նույնն է, մենք ստացանք մեկ բիտ չափի ինֆորմացիա (ենթադրելով, որը իսկզբանե ընդունվել է 2 հիմքով լոգարիթմի անցնելու համաձայնություն): Այսուհետ \log նշանի տակ կհասկանանք 2 հիմքով լոգարիթմը:

Նկատենք, որ եթե պատահույթներից մեկի հանդես գալու հավանականությունը 1 է, էնտրոպիան հավասարվում է 0-ի, այսինքն առկա է զրոյական անորոշություն, այսինքն՝ ամբողջական տեղեկատվություն: Ցույց տանք, որ այլ հավասար պայմաններում, կամ որ նույնն է, արտաքին ինֆորմացիայի բացակայության դեպքում էնտրոպիան մաքսիմիզացնող բաշխումը հավասարաչափն է: Պետք է մաքսիմիզացնել S -ը ըստ այն պայմանի, որ $\sum_{i=1}^n p_i = 1$: Նշանակելով Լագրանժյան բազմապատիկը λ -ով, ակնհայտորեն ստացվում է հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\log(p_i) = -\lambda - 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Այսինքն՝ այն դեպքում, երբ բոլոր պատահույթների հավանականային չափերը նույնն են՝

$$p_i = \frac{1}{n}$$

Հարց է առաջանում, թե ինչու է մեզ հետաքրքրում էնտրոպիայի մաքսիմալ լինելը: Ինչպես արդեն նշվել էր, պատճառն այն է, որ ըստ ջերմադինամիկայի երկրորդ օրենքի փակ համակարգերում էնտրոպիան ձգտում է իր մեծագույն հնարավոր արժեքին, որի դեպքում հաստատվում է ջերմադինամիկական հավասարակշռություն: Այսինքն՝ փակ համակարգի նորմալ կամ հավասարակշռային վիճակը ամենաքառասայինն է: Քառասայնությունը բացատրվում է նրանով, որ էնտրոպիան ինֆորմացիայի հակառակ մեծությունն է: Այստեղից բխում են բազմաթիվ տեսություններ և հիփոթեզներ, դրանցից մեկի հեղինակը՝ Ռուդոլֆ Կլաուզիուսը, պնդում է, որ տիեզերքը կհասնի իր հավասարակշռված վիճակին այն պահին, երբ բոլոր տիպի էներգիաները վերածվեն ջերմային էներգիայի և հաստատվի մեկ ջերմաստիճան: Այս հիփոթեզը հայտնի է նաև «Տիեզերքի ջերմային մահ» անվանումով և պատկանում է տիեզերքը բնութագրող էկզոտիկ տեսությունների դասին: Հաջորդ բաժնում կսկսենք քննարկել, թե ինչպես կարելի է այդ մեթոդաբանությունը կիրառել ֆինանսական տիպի խնդիրներում՝ հիմնվելով օպցիոնների տեսքով առկա ինֆորմացիայի վրա:

2.2 Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի կիրառությունը ֆինանսական կանխատեսումներում

Այն միտքը, որ ֆինանսական դերիվատիվների գները իրենց մեջ պարունակում են հիմքում ընկած ակտիվի ապագա գների բաշխման գնահատման համար օգտակար ինֆորմացիա առաջացել է բավականին վաղուց: Սակայն միայն Ս. Ռոսի աշխատանքի [15] մեջ է այդ փաստը արձանագրվել ամբողջական և ճիշտ մաթեմատիկական ձևակերպմամբ, ինչը արտացոլվել է իր իսկ թեորեմի մեջ, որը հայտնի է Ռոսի վերականգման թեորեմ (Ross recovery theorem) անվանմամբ: Այդ թեորեմը պնդում է, որ այն դեպքում երբ շուկայում առկա են ներկայացուցչական (կամ որ նույնն է՝ շուկան

բնութագրող) մասնակիցներ և եթե նաև տեղի ունեն որոշ մաթեմատիկական պայմաններ (ակտիվների գների մատրիցի դրական որոշված և ոչ-սինգուլյար լինելը)

ապա գոյություն ունի ակտիվի ապագա գների բաշխումը, որը հիմնված է ներկա օպցիոնների գների հիման վրա: Գործնական կիրառությունում Ռոսի թեորեմի պայմանները տեղի ունեն բավականին լայն սպեկտրի խնդիրների համար: Ընդհանրապես ասած գոյություն ունեն ածանցյալ գործիքների հիման վրա ակտիվի գնի հավանականային բաշխումը գտնելու մի քանի տարբեր մոտեցումներ: Այս գլխում մեր կողմից կդիտարկվի մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի կիրառությունը վերը նշված խնդրի մեջ:

Ակնհայտ է, որ ակտիվի ապագա գների բաշխման հայտնաբերումը չափազանց կարևոր է պորտֆելային տեսության մեջ կիրառվող օպտիմիզացիոն և ռիսկերի կառավարման գործնական խնդիրների լուծման համար: Նախորդ գլխում արդեն նշել էինք, որ այդ խնդիրների դասական մոտեցումներում շեշտը դրվում է պատմական տվյալների կամ սիմուլյացիոն մոդելների կիրառության վրա: Ակտիվների ապագա գների որոշումը ածանցյալ գործիքների միջոցով բացում է նոր հնարավորություններ, քանի որ այդ դեպքում կիրառվում է մի տեղեկատվություն, որը նշանակալիորեն տարբերվում է և՛ պատմական, և՛ սիմուլյացիոն մեթոդներում օգտագործվող տվյալներից: Ակտիվի հնարավոր գների արժեքների կանխատեսումը այս դեպքում դառնում է մի տեղեկատվական գործիք, որը բնութագրում է շուկայի բոլոր մասնակիցների սպասելիքները: Եվ կարևոր է նաև նշել, որ այս պարագայում շուկայի մասնակիցները նաև վճարում են իրենց կանխատեսման համար և այդպիսով պատրաստ են կրել փոխկապակցված բոլոր ռիսկերը, ինչը ավելի է բարձրացնում վստահելիությունը այս մոտեցման նկատմամբ: Հենց այս փաստն է հանդիսանում հետևյալ մեթոդի հիմնական տարբերությունը բոլոր մնացած բավականին հայտնի կանխատեսման մոտեցումներից, որոնք լայնորեն կիրառվում են մասնագետների և մասնագիտական խմբերի կողմից տարբեր տիպի ֆինանսական օպտիմիզացիայի և ռիսկերի կառավարման խնդիրների լուծման համար: Սակայն այս դեպքում մասնագետները չեն կրում իրենց կանխատեսումների հետ կապված ռիսկերը: Բացի դրանից, այդպիսի կանխատեսումային հարցումները սահմանափակված են մասնագետների նեղ

շրջապատով, մինչդեռ ածանցյալ գործիքի հիման վրա ակտիվի գնի բաշխում որոշելիս հաշվի է առնվում ողջ շուկայի կարծիքը:

Հայտնի է, որ մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի միջոցով կարելի է ստանալ մի բաշխում, որը ամենաքիչն է հակասում տվյալ պահին հասանելի ինֆորմացիային և հետևաբար հանդիսանում է ամենաանկողմնակալը և համասեռը այդ ինֆորմացիայի նկատմամբ բոլոր բաշխումների դասի մեջ [16-20]: Ֆինանսական շուկաների պարագայում այս մոտեցումը կիրառվել է որպես հասանելի օպցիոնների գներից օգտակար ինֆորմացիայի դուրս բերման մեթոդ [21-24]: Գործնական կիառության մեջ ինֆորմացիայի արժեքավոր կամ օգտակար լինելը կարելի է հիմնավորել օպցիոնների համար վճարված իրական գումարով, որով իսկ ենթադրվում է, որ օպցիոնի գնի մեջ արտացոլվում են շուկայի իրական սպասումները: Օպցիոնի գնի հիման վրա ակտիվի գնի բաշխման կառուցման ժամանակ ի հայտ եկող և գործնական մեծ նշանակություն ունեցող հարցերից է մոդելի մեջ ներառվող օպցիոնների ընտրությունը: Ամենատարածված մոտեցումը հանդիսանում է օպցիոնների ընտրությունը ըստ շուկայական գործարքների ծավալի, ինչի հիմքում ընկած է բավականին արդարացված տրամաբանություն [36]: Այս մեթոդի օգտագործման ընթացքում առաջացող խնդիրների և իրենց լուծման մոտեցումների մասին մեր կողմից հրատարակվել են աշխատություններ, որտեղ մենք նաև գտել ենք օպցիոնների միջոցով մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի հաջող կիրառության համար անհրաժեշտ ասիմպտոտիկ սահմանները: Ստացված արդյունքները թույլ են տալիս կամայական սկզբնական պարամետրերի դեպքում նախ պարզել՝ արդյոք գոյություն ունի լուծում և գոյություն ունենալու դեպքում էլ գտնել այն փոքրագույն սահմանային արժեքը, որի դեպքում լուծումը հասանելի է լինում (հաջորդ գլխում այս մասը ավելի մանրամասն կներկայացվի): Հիմա անցնենք մոդելի բուն մաթեմատիկական նկարագրությանը:

Օպցիոնների գնահատման դասական մոդելի հիմքում ընկած է Բլեք-Շոուլզի գնագոյացման տեսությունը [37-39], որի ներքո Եվրոպական օպցիոնի գինը ապագա բոլոր հնարավոր վճարների մաթեմատիկական սպասման դիսկոնտավորված արժեքն է:

$$d = E^{\sim}[c(X(T)) * D(T)]$$

որտեղ d -ն օպցիոնի ներկա գինն է, $c(X(T))$ -ն T պահին տեղի ունեցող հավանական ելքերից (որով բնութագրվում է շուկայական վիճակը) որևէ մեկի դեպքում օպցիոնի վճարի չափն է, իսկ $D(T)$ -ն՝ դիսկոնտավորման դրույքը: Սակայն իրական շուկայական գները սահմանափակ ինֆորմացիայի պայմաններում տարբերվում են տեսական արբիտրաժից զերծ գներից [28], որով իսկ ենթադրվում է, որ այդ գնային տարբերության մեջ թաքնված է ամենաօգտակար տեղեկատվությունը, որը փորձում են գտնել պոստենցյալ ներդրողները և ներդրումային խմբերը:

Նշանակենք A -ով օպցիոնի մարման պահին կատարվող վճարը (**payout**, կամ որ նույնն է՝ օպցիոնի արժեքը ժամանակահատվածի վերջում)

$$A = \begin{pmatrix} (X_1 - K_1)^+ & \dots & (X_n - K_1)^+ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_1 - K_n)^+ & \dots & (X_n - K_n)^+ \end{pmatrix}$$

որտեղ K_1, K_2, \dots, K_n համապատասխանում են n -րդ օպցիոնի իրացման գնին (**strike price**), X_1, X_2, \dots, X_n -ը դիտարկվող ակտիվի ապագա հավանական գներն են, որոնց համար էլ փորձում ենք գտնել համապատասխան հավանականությունները (այդպիսով ստանալով դիսկրետ հավանականային բաշխում): $(X_n - K_n)^+$ -ով նշանակված է $(X_n - K_n)$ և 0 թվերից մեծագույնը՝ $(X_n - K_n)^+ = \max((X_n - K_n)^+, 0)$: Նշանակենք այդ բաշխումը p վեկտորով, այդ դեպքում համաձայն օպցիոնների գնահատման դասական տեսության պետք է տեղի ունենան հետևյալ պայմանները՝

$$Ap = b$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad p_i \geq 0$$

Այստեղ n -ը հավանականային վեկտորի չափողականությունն է: Նկատենք, որ այս ներկայացման դեպքում բացակայում է դիսկոնտավորման գործակիցը, որը արվել է պարզության համար: Դրա փոխարեն b -ով նշանակել ենք օպցիոնի ներկա գնի ապագա արժեքը: Հաջորդ բաժիններում ներկայացված գործնական օրինակներում վերցվելու են մոտ մեկ շաբաթվա մարման ժամկետ ունեցող օպցիոններ, այդ իսկ

պատճառով դիսկոնտավորման դրույքը ընդհանրապես անտեսվելու է, քանի որ այն բավականին

մոտիկ է լինելու 1-ի: Նկատենք, որ այդ տիպի կիրառության ժամանակ միշտ X վեկտորի, այսինքն՝ գնային միջակայքի ընտրության հարց է առաջանալու և հետագայում մենք կտեսնենք, թե ինչպես կարող է փոխվել բաշխումը տարբեր ապագա վիճակային կետերի ընտրության դեպքում:

Վերը նշված պայմանների բավարարման դեպքում անհրաժեշտ է մաքսիմիզացնել էնտրոպիան՝ սահմանված Շենոնի կողմից [29]՝

$$S(p) = - \sum_{i=1}^n p_i * \ln(p_i)$$

Սա պայմանական մաքսիմիզացիայի խնդիր է, որը լուծվում է Լագրանժյան բազմապատկիչների միջոցով [16-17]: Նշանակենք լուծումը (այսինքն՝ հավանականային բաշխումը, դիսկրետ կետային հավանականությունների վեկտորը) P -ով: Այդ դեպքում կիրառելով Լագրանժի մեթոդը կարելի է հեշտությամբ ցույց տալ, որ այն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$p_i = \exp\left(-\lambda_0 - \sum_{k=1}^m \lambda_k * A_{ki}\right)$$

Լագրանժյան $m + 1$ պարամետրերը որոշվում են սկզբնական m սահմանափակումների, ինչպես նաև նորմալացման սահմանափակման միջոցով՝

$$\exp(\lambda_0) = \sum_{i=1}^n \exp\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k * A_{ki}\right)$$

Նորմալացման պայմանը դրվում է հավանականային չափի սահմանմանը բավարարելու նպատակով: Բնականաբար լուծում գոյություն ունենալու համար անհրաժեշտ է որոշակի պայմանների տեղի ունենալը: Այդ պայմաններից մեկը կլինի A մատրիցի մաքսիմալ ռանկի լինելը, այսինքն՝ տողերի (սյունների) գծային անկախությունը: Եթե, սակայն, այս պայմանը տեղի չունի, կարելի է որոշ տողեր (սյուններ) հանել, մինչև չստանանք գծայնորեն անկախ վեկտորների համակարգ: Սակայն, եթե նույնիսկ տեղի ունի տողերի (սյունների) գծայնորեն անկախության

պայմանը, ապա միևնույն է հնարավոր են գործնական դեպքեր, երբ մատրիցը լինի սինգուլյարին մոտ: Սրա մասին

նաև խոսել ենք նախորդ գլխում՝ կովարիացիոն մատրիցի մեքենայական հաշվարկների կլորացումներից բխող հետևանքների շրջանակներում: Այս դեպքերի համար օգտակար է կիրառել Գրամ-Շմիդտի օրթոնորմալացման ալգորիթմը, որի արդյունքում կստանանք (նշանակենք A մատրիցի տողերը փոքրատառ a -ով)

$$\langle a_i, a_j \rangle = 0, \quad i \neq j$$

$$\langle a_i, a_i \rangle = 1$$

Արդյունքում սկզբնական մատրիցը կներկայացվի երկու մատրիցների արտադրյալի միջոցով, դրանցից մեկը կլինի մեր նպատակային մատրիցը (այսինքն հետագա օպտիմիզացիայի մեջ մասնակցող), իսկ մյուսը անկյունագծային՝

$$A' = Q * A$$

Նոր մատրիցի համար ստանալով Լագրանժյան պարամետրերը, կկատարենք հակադարձ գործողություն նույն անկյունագծային մատրիցի միջոցով՝ սկզբնական պարամետրերին ետ գալու համար՝

$$\lambda = \mu * Q$$

Ինտուիտիվ հասկանալի է, որ լուծման գոյության համար նախ անհրաժեշտ է, որ $\forall i, \min(A_i) < b_i < \max(A_i)$, քանի որ հակառակ դեպքում պետք է ատոմներից մեկի հավանականային չափը լիներ կա՛մ բացասական, կա՛մ 1-ից մեծ: Համենայն դեպս այս փաստին պետք է մաթեմատիկական ձևակերպում և ապացույց տալ: Լագրանժյան պարամետրերը գտնելը ուղղակիորեն լուծելով ստացված ոչ-գծային հավասարումների համակարգը բավականին բարդ տեսք ունի, դրա համար կարելի է ներկա խնդիրը վերածնակերպել և բերել մեկ այլ խնդրի լուծման: Ենթադրենք դեռ չգիտենք մաքսիմալ էնտրոպիան ապահովող բաշխման տեսքը, և P վեկտորին վերաբերվենք որպես փորձնական բաշխում: Նշանակաենք Q -ով կամայական այլ բաշխում, որը բավարարում է սահմանափակումներին: Տույց տանք, որ

$$\sum_{i=1}^n q_i * \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \geq 0$$

Ապացույցը կատարենք ինդուկցիայի մեթոդով: $n = 1$ -ի համար ակնհայտորեն տեղի ունի հավասարությունը ($q_i = p_i = 1$): Դիցուք անհավասարությունը տեղի ունի ինչ-որ n -ի համար, այդ դեպքում $n + 1$ -ի համար այն կարելի է բերել հետևյալ տեսքի՝

$$s * \ln\left(\frac{s}{k}\right) + (1 - s) * \ln\left(\frac{1 - s}{1 - k}\right) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq 1, 0 \leq k \leq 1$$

Սա կարելի է ապացուցել ածանցելով և ստանալով, որ ֆունկցիան իր միակ էքստրեմումի կետում, որը մինիմումի կետ է, ընդունում է 0 արժեքը:

Այսպիսով եզրակացնում ենք, որ

$$\begin{aligned} S(q) &= - \sum_{i=1}^n q_i * \ln(q_i) \leq - \sum_{i=1}^n q_i * \ln(p_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n q_i * \left(\lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k * A_{ki} \right) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k * b_k \end{aligned}$$

և մասնավորապես, մաքսիմալ էնտրոպիայի բաշխման՝ P^m -ի համար՝

$$S(q) \leq S(p^m) \leq \lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k * b_k$$

Այսինքն՝ կամայական սկզբնական պարամետրերի համար ստանում ենք վերին սահման: Սա կարելի է ներկայացնել նաև այսպես՝

$$W = - \sum_{i=1}^n p_i^m * \ln\left(\frac{p_i}{p_i^m}\right) = -S(p^m) + \lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k * b_k \geq 0$$

Հավասարությունը տեղի կունենա միայն, եթե փորձնական բաշխումը համընկնի մաքսիմալ էնտրոպիան ապահովող բաշխման հետ: Փաստորեն Լագրանժյան պարամետրերը գտնելու համար անհրաժեշտ է ընդամենը գտնել W -ի մինիմում ապահովող կետերը, այսինքն՝

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m$$

Որն էլ իր հերթին համարժեք է՝

$$-\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_k} = b_k$$

W -ի մինիմումի կետում փորձնական բաշխումը համընկնում է մաքսիմալ էնտրոպիայի բաշխման հետ, և, հետևաբար, վերջինս ընդունում է $p_i = \exp(-\lambda_0 - \sum_{k=1}^m \lambda_k * A_{ki})$ տեսքը: Ստացված նոր արդյունքի պարագայում մեզ ընդամենը մնում է գտնել այն Լագրանժյան պարամետրերը, որոնք ապահովում են W -ի մինիմումը: Մինչև դա անելը, նախ ցույց տանք, որ նպատակային ֆունկցիան ուռուցիկ է, որից էլ բնականաբար կհետևի (այս խնդրի շրջանակներում), որ մինիմումի կետը գոյություն ունի, ինչպես նաև, որ այն միակն է: Նշանակենք b' -ով փորձնական բաշխման դեպքում միջինների վեկտորը: Այդ դեպքում՝

$$b'_k = \sum_{i=1}^n p_i * A_{ki} = \sum_{i=1}^n A_{ki} * \exp\left(-\sum_{k=1}^n \lambda_k * A_{ki}\right) / \exp(\lambda_0) = -\frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_k}$$

Հետևաբար՝

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_k} = b_k - b'_k$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_k \partial \lambda_s} = -\frac{\partial b'_k}{\partial \lambda_s} = -\frac{\partial b'_s}{\partial \lambda_k} = \sum_{i=1}^n p_i * (A_{ki} - b'_k) * (A_{si} - b'_s) =$$

$$= \langle (b_k - b'_k)(b_s - b'_s) \rangle$$

Հեշտ է ստուգել, որ այս նշանակումը բավարարում է սկալյար արտադրյալի 3 արքսիոմներին և հետևաբար այն օգտագործելն օրինական է: Նշանակենք H -ով երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալների Հեսսի մատրիցը՝

$$H_{ks} = \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_k \partial \lambda_s} = \langle (b_k - b'_k), (b_s - b'_s) \rangle$$

Անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ կամայական ոչ-զրոյական X վեկտորի համար տեղի ունի հետևյալը՝

$$X * H * X^T > 0$$

Այդպիսով H -ը կլինի դրական որոշված, իսկ նպատակային ֆունկցիան կդառնա խիստ ուռուցիկ:

$$X * H * X^T = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n x_k * \langle (b_k - b'_k), (b_s - b'_s) \rangle * x_s =$$

$$= \langle \sum_{k=1}^n x_k * (b_k - b'_k), \sum_{s=1}^n x_s * (b_s - b'_s) \rangle = \langle C, C \rangle \geq 0$$

Այստեղ հավասարություն տեղի կունենա միայն այն դեպքում, երբ $C = 0$: Քանի որ հավանականությունները մեծ կամ հավասար են զրոյի, ապա այդ պայմանը կբավարարվի միայն, եթե՝

$$\sum_{k=1}^m x_k * A_{ki} - \sum_{s=1}^m x_s * b'_s = 0$$

Եթե որպես A_0 վերցնենք միավոր վեկտորը, իսկ x_0 -ով նշանակենք վերևի արտահայտության ձախ մասը, ապա կարելի է կատարել հետևյալ ակնհայտ վերաձևակերպումը՝

$$\sum_{k=0}^n x_k * A_{ki} = 0$$

Սա համարժեք է A մատրիցի տողերի գծայնորեն կախված լինելուն: Այդ դեպքում նույնպես գոյություն ունի լուծում, այսինքն՝ կարելի է գտնել Լագրանժյան պարամետրեր, որոնց դեպքում նպատակային ֆունկցիան հասնում է իր մինիմումին: Սակայն խնդիրը կայանում է նրանում, որ այդ պարամետրերը միարժեքորեն չեն որոշվում: Առանց բաշխումը փոփոխելու կարելի է $\ln(p_i)$ -ին ավելացնել կամայական γC , և այդ ձևափոխումից հետո λ_k -ն կդառնա $\lambda_k + \gamma * x_k$: Հարմարության համար կարելի է նպատակային ֆունկցիային ավելացնել $S(p^m)$ արժեքը, որից լուծումը իհարկե

չի փոխվի, քանի որ հաստատուն մեծություն ենք ավելացրել, սակայան տեսքը արդեն կփոխվի՝

$$\lambda_0 + \sum_{k=1}^m \lambda_k * b_k$$

Լագրանժյան փոփոխականները կարելի է ներկայացնել՝

$$\lambda_k = \lambda'_k + \mu * d_k$$

որտեղ μ -ն կլինի քայլի չափը, իսկ d -ն ուղղությունը: Երբ μ -ն ձգտում է անվերջության, λ_0 -ի ներկայացման մեջ գումարելիներից մեկը դառնում է մյուսների նկատմամբ դոմինանտ, և, քանի որ, գործում ենք ասիմպտոտիկ դաշտում, դրանից ելնելով կարելի է միարժեքորեն պնդել, որ՝

$$W(\lambda) \rightarrow \mu * \left(\sum_{k=1}^m d_k * b_k - \min \left(\sum_{k=1}^m d_k A_{ki} \right) \right), \quad \mu \rightarrow +\infty$$

$$\rightarrow \mu * \left(\sum_{k=1}^m d_k * b_k - \max \left(\sum_{k=1}^m d_k A_{ki} \right) \right), \quad \mu \rightarrow -\infty$$

Հետևաբար՝ էքստրեմումի գոյության համար անհրաժեշտ և բավարար է, որ ասիմպտոտիկ տարածքում գրադիենտի նշանը լինի տարբեր, այսինքն՝ կամայական d -ի համար տեղի ունենա՝

$$\min \left(\sum_{k=1}^m d_k A_{ki} \right) < \sum_{k=1}^m d_k * b_k < \max \left(\sum_{k=1}^m d_k A_{ki} \right)$$

Այսպիսով լուծումը կարելի է բաժանել մի քանի փուլերի: Նախ գծային ծրագրավորման մեթոդներով հնարավոր է ստուգել, թե արդյոք նախնական պայմանների դեպքում լուծում, այսինքն՝ դիսկրետ հավանականային վեկտոր ընդհանրապես գոյություն ունի, թե ոչ: Չնայած նրան, որ այդ մեթոդները կարելի է տեսականորեն հաջողությամբ կիրառել, դա բավականին կդանդաղացնի գործնական կիրառությունը, իսկ որոշ դեպքերում էլ կառաջանան անորոշ արդյունքներ: Այս խնդրին կանդիդատնանք հաջորդ գլխում և կներկայացնենք մեր կողմից մշակված

լուծումը: Հաջորդիվ՝ լուծման գոյությունը պարզելուց հետո՝ կարելի է սկզբնական մատրիցը փոխարինել իր օրթոնորմալ ձևափոխությամբ, թե ինչպես անել դա, կքննարկվի հետո: Այնուհետև նոր մատրիցի համար կկիրառվի էքստրեմում գտնելու Նյուտոնի մեթոդը, որը

նույնպես կներկայացվի հետո: Բացի Նյուտոնի մեթոդից կարելի է օգտագործել ավելի պարզ, սակայն միևնույն ժամանակ ավելի դանդաղ աշխատող գրադիենտի մեթոդը: Ստանալով վերջնական պարամետրերը կկատարենք հակադարձ ձևափոխություն նախնական պարամետրերին գալու համար:

Այստեղ արժի խոսել նաև բաշխման ավելի ընդհանուր տեսքերի փնտրման մասին: Մինչև հիմա դիտարկվել էր միայն դիսկրետ բաշխման դեպքը: Մոդելի նույն տրամաբանությամբ կարելի է անցնել անընդհատ բաշխման, պարզապես փոխարինելով էնտրոպիան հետևյալ մեծությամբ՝

$$S(p) = - \int_0^{\infty} p(x) * \log(p(x)) dx$$

Բաշխման վրա նաև կդրվի ոչ-բացասական լինելու հետևյալ պայմանը՝

$$\int_0^{\infty} p(x) dx = 1$$

միավորած հետևյալի հետ՝

$$E(c_i(x)) = \int_0^{\infty} p(x) * c_i(x) dx = d_i$$

Այստեղ $c_i(x)$ -ով կրկին նշանակել ենք օպցիոնի գինը ժամանակահատվածի վերջում, կամ նույն “payout”-ը: Պետք է չմոռանալ ճշգրտել այս արտահայտությունը դիսկոնտավորման գործակցով: Համապատասխան բաշխումը արդեն կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$p(x) = \frac{1}{\lambda_0} * e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i * c_i(x)}$$

$$\lambda_0 = \int_0^{\infty} e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i * c_i(x)} dx$$

Նկատենք, որ այս դեպքում Հեսսի մատրիցի անդամները դառնում են տարբեր կատարման գներով օպցիոնների գների կովարիացիան: Սա կարելի է օգտագործել որպես մատրիցի դրական որոշվածության մեկ այլ հիմնավորում: Հաջորդ բաժնում

կղիտարկենք մաքսիմալ էնտրոպիայի լուծման ալգորիթմի կառուցվածքը, կիրառության ժամանակա առաջացող խնդիրները և իրենց լուծման օրինակները:

2. 3 Մաքսիմալ էնտրոպիայի խնդրի լուծման ալգորիթմը և հնարավոր կիրառական խնդիրները

Տարրական գծային հանրահաշվից հայտնի է, որ կամայական n չափանի էվկլիդյան տարածությունում գոյություն ունի օրթոնորմալ բազիս [30]: Իրոք, դիցուք ունենք n անկախ վեկտորների համակարգ՝ f_1, \dots, f_n : Ապացույցը հեշտությամբ կատարվում է ինդուկցիայի միջոցով՝ 1 վեկտորի դեպքում ակնհայտորեն կարելի է այն բազմապատկել իր նորմի արմատի հակադարձով և ստանալ օրթոնորմալ համակարգ: Ենթադրենք $m < n$ չափանի ենթատարածության համար սկզբնական համակարգի վեկտորների գծային կոմբինացիաների միջոցով կառուցել ենք e_1, \dots, e_m օրթոնորմալ համակարգ: Դիտարկենք հետևյալ վեկտորը՝

$$e_{m+1} = \alpha_{m+1} * (f_{m+1} - \langle f_{m+1}, e_m \rangle * e_m - \dots - \langle f_{m+1}, e_1 \rangle * e_1)$$

Ակնհայտ է, որ $\langle e_{m+1}, e_k \rangle = 0, k = 1 \dots m$, և, հետևաբար, վերցնելով որպես α_{m+1} դիտարկվող վեկտորի նորմի արմատի հակադարձը, կստանանք $m + 1$ զույգ առ զույգ օրթոգոնալ վեկտորներ, որոնց նորմը հավասար է 1-ի: Ապացուցելով գոյությունը դիտարկենք հետևյալ ալգորիթմը՝

$$e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle}}$$

$$e_2 = \frac{g_2}{\sqrt{\langle g_2, g_2 \rangle}}, \quad g_2 = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle * e_1$$

...

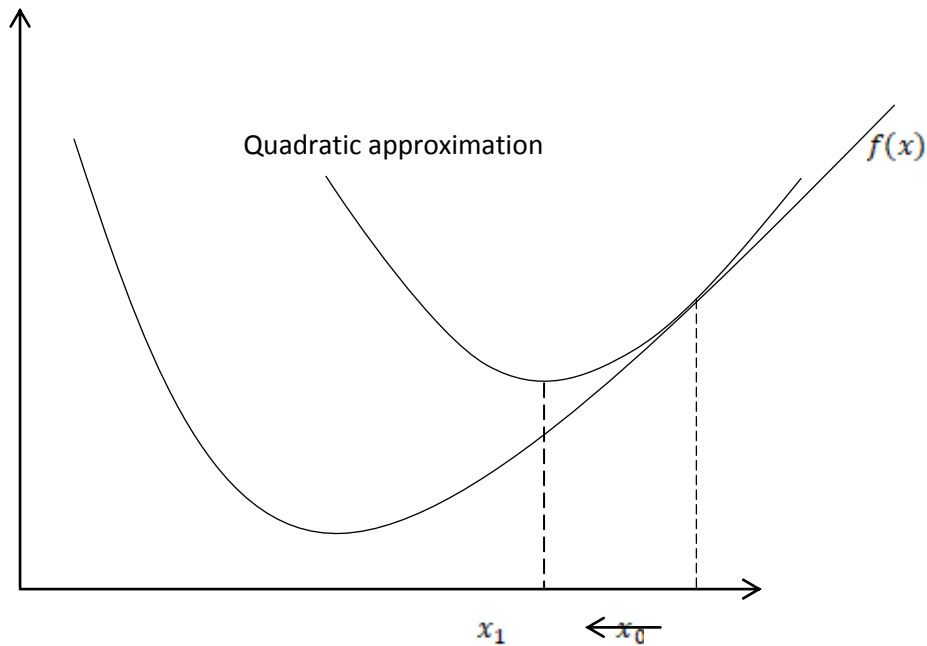
$$e_n = \frac{g_n}{\sqrt{\langle g_n, g_n \rangle}}, \quad g_n = f_n - \langle f_n, e_{n-1} \rangle * e_{n-1} - \dots - \langle f_n, e_1 \rangle * e_1$$

Եթե օրթոնորմալացման այս գործողությունը ցանկանանք իրականացնել մատրիցի նկատմամբ (ինչպես մեր առջև դրված խնդրում), ապա պետք է վերաբերվել իր տողերին (կամ սյուններին) որպես սկզբնական վեկտորների դասի և բազմապատկելով այդ մատրիցը համապատասխան գործակիցների մատրիցով՝ կստանանք օրթոնորմալ տողերով (սյուններով) նոր մատրից: Գործակիցների մատրիցը բաղկացած կլինի այն թվային տարրերից, որոնց միջոցով օրթոնորմալ վեկտորները ներկայացվում են սկզբնական վեկտորների գծային կոմբինացիայով: Վերը նշված գործողությունների համակարգից կարելի է եզրակացնել, որ երկրորդ մատրիցի անկյունագծից ներքև բոլոր տարրերը զրո են, իսկ անկյունագծի վրայի տարրերը՝ ոչ-զրոյական, այսինքն՝ մատրիցի դետերմինանտը ոչ-զրոյական է (մատրիցը ոչ-սինգուլյար է) և, հետևաբար, գոյություն ունի այդ մատրիցի հակադարձը, որի միջոցով հնարավոր է հետ գալ սկզբնական Լագրանժյան պարամետրերին:

Հիմա քննարկենք, թե ինչպես կարելի է գտնել էքստրեմումի կետը: Ընդհանրապես ասած նման խնդիրներում հնարավոր է հեշտությամբ կիրառել գրադիենտների մեթոդը, և հաշվի առնելով մեր խնդրի սկզբնական պայմանները և իրենցից հետևող նպատակային ֆունկցիայի ուռուցիկությունը, ապա լոկալ մինիմումի «թակարդի» մեջ ընկնելու խնդիր չի լինի: Չնայած իր դրական կողմերին, գրադիենտի մեթոդը շատ ավելի դանդաղ է աշխատում քան, օրինակ՝ Նյուտոնի էքստրեմումի կետի որոնման մեթոդից [44]: Նշանակենք նպատակային ֆունկցիան $f(x)$ -ով: Վերլուծենք այն ըստ Թեյլորի (բերելով մինչև երկրորդ կարգի ճշտության)՝

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^T * f'(x_0) + (x - x_0)^T * H(x_0) * (x - x_0)$$

որտեղ H -ը երկրորդ կարգի ածանցյալների մատրիցն է (Հեսսի մատրիցը): Այսպիսով մենք $f(x)$ -ին տվել ենք երկրորդ կարգի մոտարկում: Ըստ Նյուտոնի մեթոդի՝ իտերացիայի ամեն կետում որպես հաջորդ կետ վերցվում է ֆունկցիայի քառակուսային մոտարկման մինիմումի կետը (կարելի է հեշտությամբ ցույց տալ, որ այս քայլերի դեպքում իտերացիաները կամայական ճշտությամբ զուգամիտելու են էքստրեմումի նպատակային կետին [31])՝



Գծապատկեր 2.3.1 Մոդելային ֆունկցիայի օրինակով կառուցված երկրորդ կարգի մոտարկող ֆունկցիոնալը և իտերացիայի շարժը:

Հավասարեցնելով քառակուսային մոտարկման առաջին կարգի ածանցյալը 0-ի կարելի է եզրակացնել, որ իտերացիոն քայլ-ուղղությունը (որը կնշանականենք d -ով) բավարարելու է հետևյալ հավասարությանը՝

$$f'(x_0) + H(x_0) * d = 0$$

որտեղից էլ հետևում է՝

$$d = -H'(x_0) * f'(x_0)$$

Գործնական կիրառության մեջ հակադարձ մատրիցը հաշվարկելու փոխարեն կարելի այն, օրինակ՝ ենթարկել տարրալուծման և լուծել հավասարումների համակարգը d -ի նկատմամբ: Այս պարագայում հարմար է օգտագործել էսլեցկու մեթոդը, որը պարզ ձևափոխությունների միջոցով կամայական դրական որոշված A մատրից ներկայացնում է հետևյալ կերպ՝

$$A = L * L^T$$

որտեղ L -ը ստորին անկյունագծային մատրից է: Հետևաբար՝ կամայական $A * x = b$ տիպի հավասարումը կարելի է լուծել երկու փուլով՝

$$L * y = b$$

$$L^T * x = y$$

Խնդրի այսպիսի շրջանցումը հատկապես կարևոր է, եթե ակնկալվում են հաշվիչ սարքի կողմից կլորացումներ, որոնք կարող են բերել անցանկալի հետևանքների:

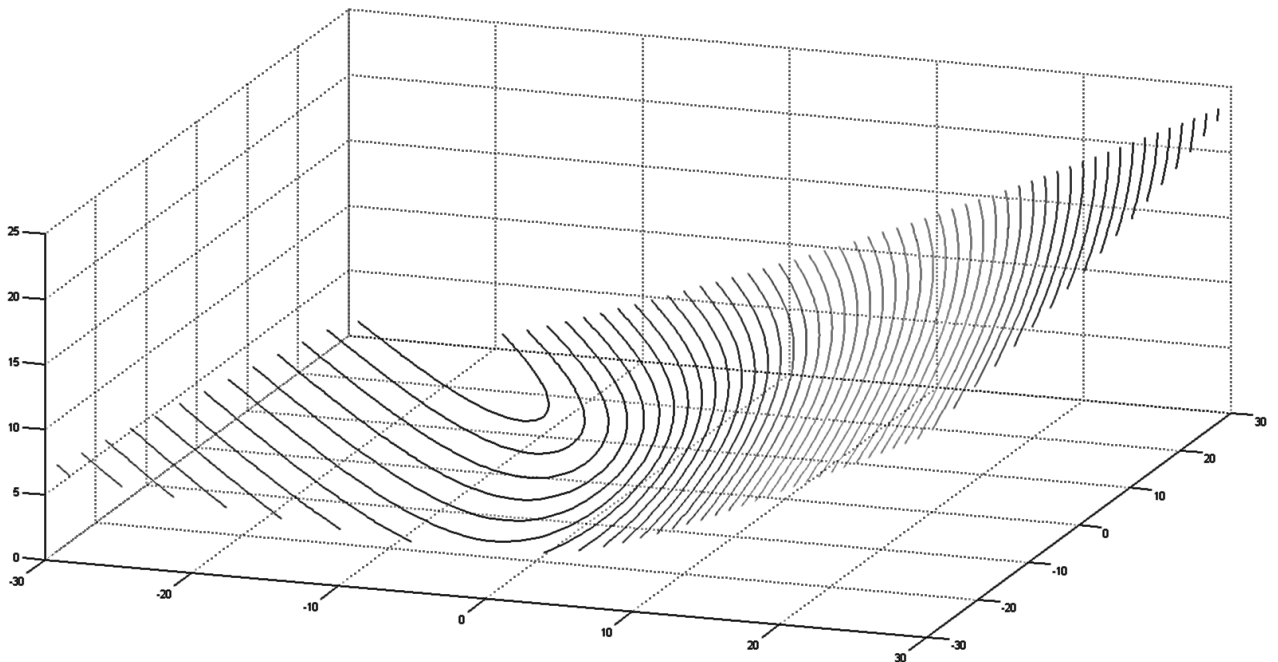
Վերջավոր իտերացիաներից հետո կարելի է որոշակի ճշտությամբ հասնել ցանկալի կետին: Եթե ստացվի այնպես, որ ինչ-որ պահին Հեսսի մատրիցը մոտ կլինի սինգուլյարին, կարելի է անցնել գրադիենտների մեթոդին և որոշակի քայլերով իջնել ածանցյալի ուղղությամբ (կամ հակառակ ուղղությամբ՝ կախված դիրքից) մինչև մինիմումի կետը: Հաջորդիվ կդիտարկենք պարզ մոդելային օրինակ:

Վերցնենք հետևյալ 2×20 չափանի փորձնական մատրիցը և 2×1 սյուն վեկտորը՝

$$A(i,j) = j^i$$

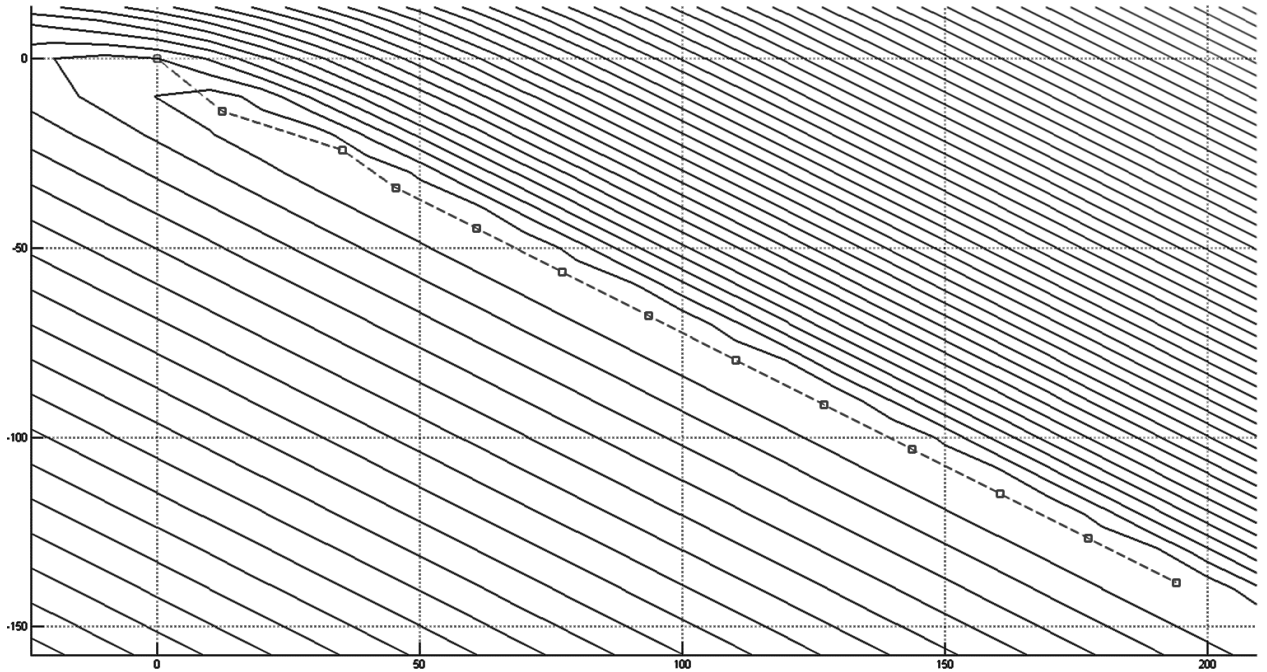
$$b = [15, 250]^T$$

Ակնահյտորեն մատրիցի տողերը գծայնորեն անկախ են: Ստորև պատկերված է նպատակային ֆունկցիան մինիմումի կետի շրջակայքում՝



Գծապատկեր 2.3.2 Մոդելային ֆունկցիայի ուռուցիկությունը և ընդհանուր տեսքը էքստրեմումի շրջակայքում:

Պատկերից ակնհայտորեն երևում է նպատակային ֆունկցիայի ուռուցիկ լինելը: Հաջորդ գծապատկերում կառուցվել են նպատակային ֆունկցիայի մակարդակի կորերը և լուծման պրոցեսում յուրաքանչյուր իտերացիայից հետո լուծման շարժը (որի ուղղությունը հաշվարկվել էր $-H'(x_0) * f'(x_0)$ բանաձևով)



Գծապատկեր 2.3.3 Իտերացիաների կետային շարժը և էքստրեմումի կետի մոտարկումը վերջավոր քայլերով:

Ինչպես արդեն նշվել էր, եթե Հեսսի մատրիցը լինի սինգուլյարին մոտիկ, ապա կառաջանան խնդիրներ: Այս պարագայում կարելի է Նյուտոնի մեթոդի փոխարեն պարզապես իջնել գրադիենտի ուղղությամբ: Գրադիենտով իջնելը նաև հատկապես հարմար է, երբ հաշվարկված քայլը «թռչում է» մինիմումի կետի վրայով: Բացի նշված խնդիրներից Նյուտոնի մեթոդում կան նաև այլ հաշվարկային նրբություններ: Նախ ամեն քայլում պետք է համոզվել, որ իրականում իջնում ենք, այլ ոչ՝ բարձրանում: Դա կարելի է անել հաշվարկված ուղղությամբ արգումենտներին չնչին աճ տալով և տեսնելով՝ արդյոք ֆունկցիայի արժեքը նվազում է, թե ոչ: Եթե Նյուտոնի մեթոդով ստացված նոր իտերացիայի կետը չի նվազեցնում նպատակային ֆունկցիայի արժեքը, ապա կարելի է ընտրել նոր, ավելի «լավ» նախնական կետ, որում հաշվարկված նոր

իտերացիան «ցույց է տալիս» մինիմումի ուղղությամբ: Դա անելու համար n չափանի տարածությունում 2^n

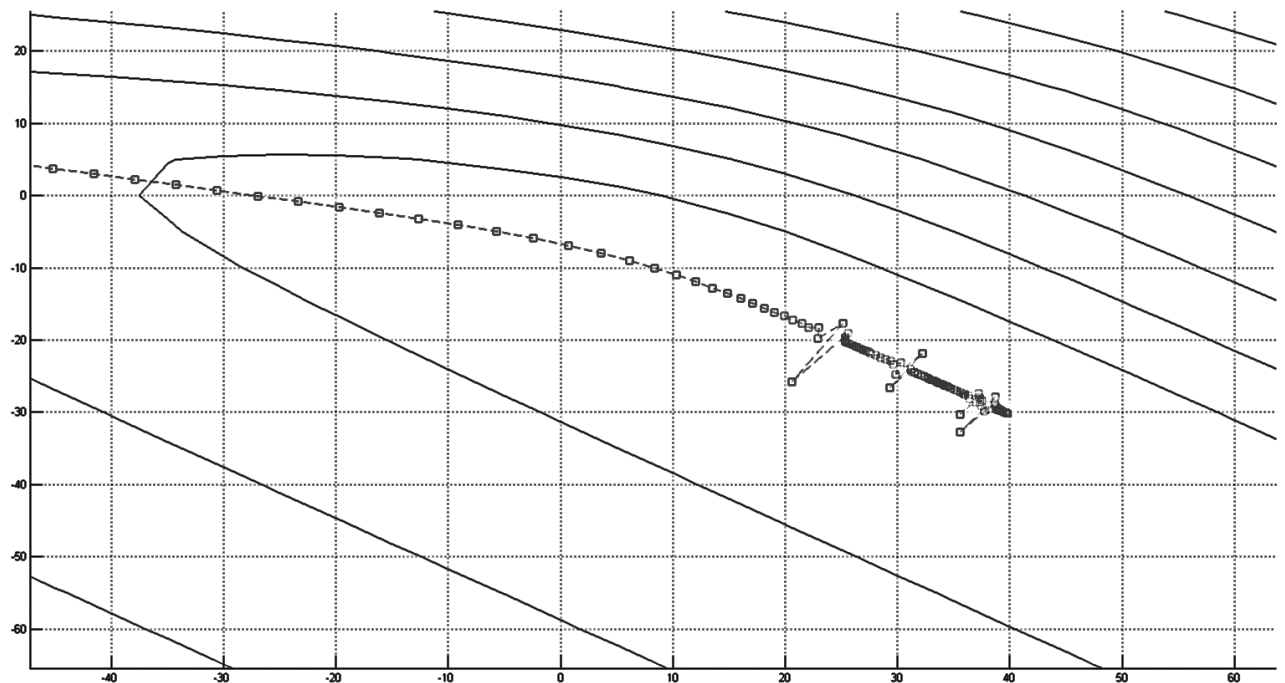
ուղղություններով կարելի է կրկին չնչին աճեր տալ և որպես նոր կետ վերցնելով այն մեկը, որով ֆունկցիան նվազում է՝ կրկին կիրառելով ալգորիթմը այդ վեկտորի նկատմամբ: Պարզության համար դիտարկենք, օրինակ՝ 2 չափանի տարածության դեպքը, որտեղ հարմար է վերցնել հետևյալ 2^2 ուղղություն-վեկտորները՝

$$[1,1], [1, -1], [-1,1], [-1, -1]$$

Ընհանուր դեպքում յուրաքանչյուր քայլում կետի ընտրությունը կատարվում է հետևյալ պարզ բանաձևով՝

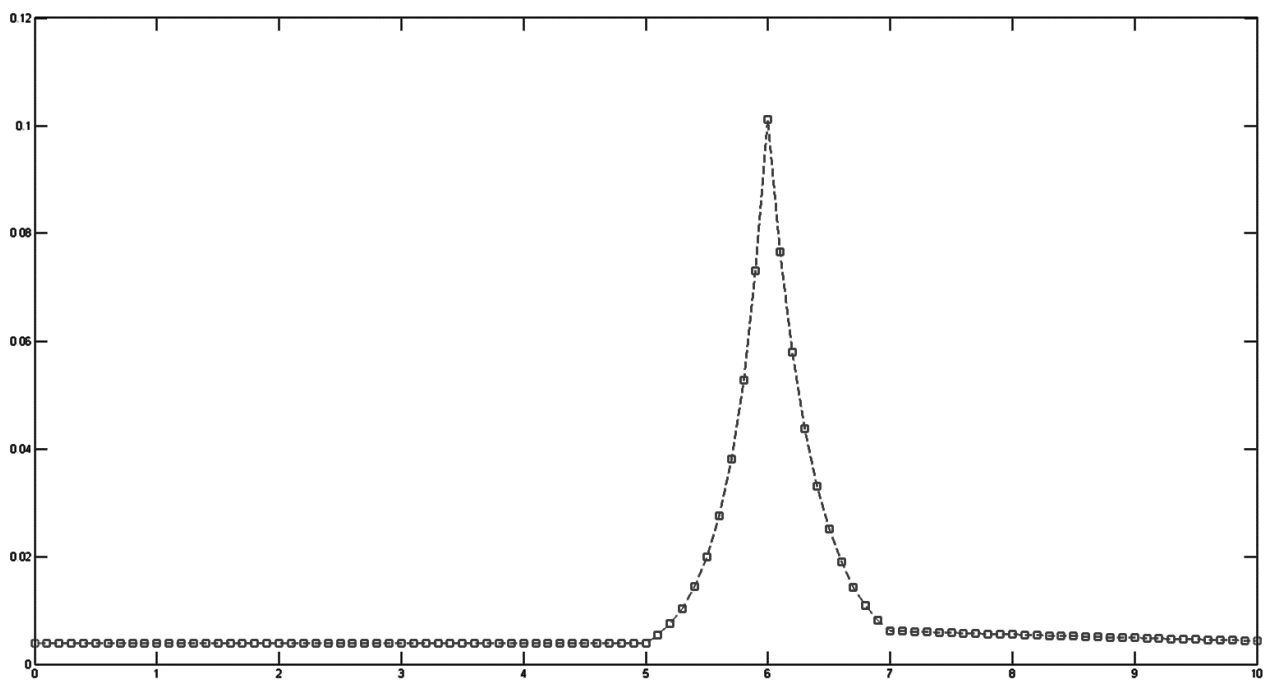
$$x_{k+1} = x_k - \gamma * f'(x_k)$$

որտեղ γ -ն քայլի չափն է: Չնայած նրան, որ մեթոդը աշխատում է, իտերացիաների տեսանկյունից այն ամենաէֆեկտիվը չէ, քանի որ կարող են հանդես գալ բազմաթիվ տատանումներ օպտիմալ ուղղության շրջանակում: Դա կարող է նաև առաջանալ քայլի չափի շատ մեծ լինելուց, որը կարելի է լուծել այն փոքրացնելով, սակայն այդ դեպքում էլ իտերացիաները շատ ավելի երկար կտևեն: Տատանումների օրինակ կարելի է տեսնել հետևյալ պատկերում՝



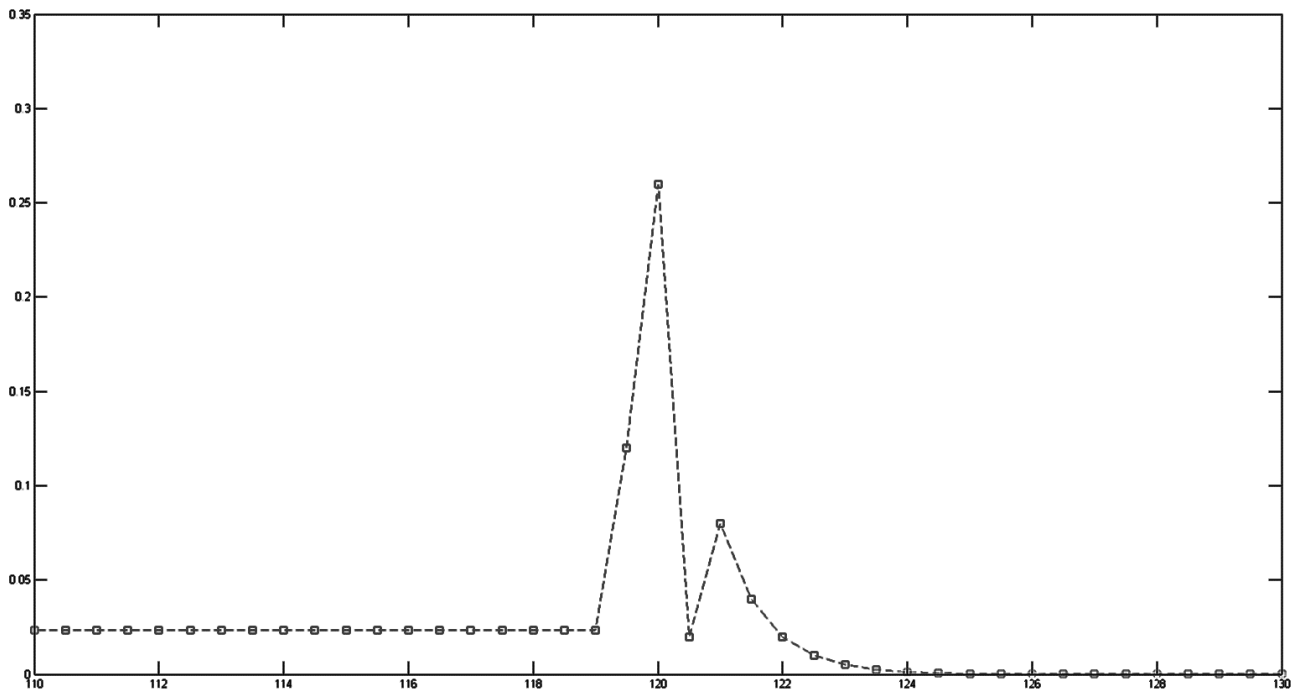
Գծապատկեր 2.3.4 Գրադիենտի ուղղությամբ շարժվելուց առաջացող հնարավոր տատանումները:

Հաջորդ նկարում պատկերված է 2016թ.-ի մայիսի 20-ին իրացվող «iPath S&P GSCI Crude Oil TR ETN» օպցիոնի տվյալներից այս մեթոդով մեր կողմից հաշվարկված բաշխումը՝ նույն տարվա մայիսի 3-ի դրությամբ: Դիտարկվել են 3 տարբեր իրացումներով օպցիոնների գներ, համապատասխան բաշխումը կառուցվել է 101 կետի համար: Այդ բաշխմանը համապատասխանող էնտրոպիան հնարավոր մաքսիմալ 4.6151-ից, որը կստացվեր հավասարաչափ բաշխման դեպքում, 3.9358 է, ինչն ապահովում է բավականին մեծ անորոշություն (ինչը լավ է մոդելի տեսանկյունից): Համապատասխան միջինն ու վարիացիան 5.711 և 3.9358 են:



Գծապատկեր 2.3.5 iPath S&P GSCI Crude Oil TR ETN արժեթղթի օպցիոնի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը:

Իսկ այստեղ բավականին հետաքրքիր դեպք է ստացվել SPDR Gold Shares (GLD) օպցիոնի համար: Բաշխումը երկու բարձր հաճախականության կետ ունի, ի հակադրություն նախորդ յունիմոդալ դեպքի՝



Գծապատկեր 2.3.6 SPDR Gold Shares (GLD) արժեթղթի օպցիոնի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը:

Հաջորդ գլխում կքննարկենք լուծման գոյության խնդիրը, կհասկանանք թե ինչ տրամաբանությամբ է հնարավոր այն լուծել և կներկայացնենք դրա համապատասխան մաթեմատիկական ձևակերպում-թեորեմը: Նաև կցուցադրենք մինչև այժմ ձևավորված տեսական դրույթների գործնական կիրառության բազում օրինակներ:

Գլուխ 3

ԵՎՐՈՊԱԿԱՆ ՕՊՑԻՈՆՆԵՐԻ ՄԵՋ ՄԱՔՍԻՄԱԼ ԷՆՏՐՈՊԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ՕՐԻՆԱԿՈՎ

3.1 Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի լուծման գոյությունը մինչև երեք չափանի տարածությունների համար

Այս գլխում կխոսենք Եվրոպական օպցիոնների մեջ մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի կիրառության ընթացքում առաջացող խնդիրների և իրենց լուծման մասին: Սկզբիվ տեսնենք, թե տարիների ընթացքում նախորդ գլխում նշված զարգացումներից բացի ինչ փոփոխություններ և հավելումներ են արվել այս մեթոդի մեջ: Նախ օգտագործելով Լեժանդրի ձևափոխությունները ցույց է տրվել, որ մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդով կառուցված բաշխումը միակն է ռիսկ նեյտրալ չափերի դասին պատկանող բաշխումների մեջ, որոնք մաքսիմիզացնում են էնտրոպիան [32]: Խնդրին նաև մոտեցել են առանց Լագրանժյան բազմապատկիչների կիրառության, որի փոխարեն այն դիտարկվել է վերջավոր ուռուցիկ ծրագրավորման շրջանակներում՝ հանգեցնելով կայուն արդյունքների [33]: Մեկ այլ մոտեցման մեջ ռիսկ նեյտրալ մոմենտները օգտագործվել են որպես օպցիոնի գնի այլընտրանքային սահմանափակումներ [34]: Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդը նաև օգտագործվել է որպես ամերիկյան օպցիոնների գնահատման ոչ-պառամետրական մոտեցում [35]: Մենք կդիտարկենք Եվրոպական օպցիոնների դեպքը և կփորձենք գտնել իրացման գների համար այնպիսի սահմանային արժեքներ, որոնց դեպքում մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի լուծումը հասանելի կլինի: Ինչպես արդեն նշել էինք, ըստ դասական տեսության Եվրոպական քոլ օպցիոնի գինը պետք է հավասար լինի ապագա բոլոր հնարավոր վիճակների մաթեմատիկական սպասմանը (ըստ ինչ-որ ռիսկ-նեյտրալ հավանականային չափի), որի դեպքում օպցիոնների ներկա գնային վեկտորը պետք է

որ ընկած լինելը ապագա վիճակները բնութագրող վեկտորների ուռուցիկ գծային թաղանթում: Սակայն իրական շուկայական գները տարբերվում են տեսականներից և շատ հաճախ լինում են դեպքեր, երբ գնային վեկտորը գտնվում է վերը նշված ուռուցիկ թաղանթից դուրս: Մենք կգրադվենք հենց այդ խնդրով և կգտնենք ապագա դիտարկվող գնային վիճակներից այն նվազագույն արժեքը, որի դեպքում էնտրոպիայի մաքսիմիզացիան կկատարվի ոչ-դատարկ բազմության վրա: Այսինքն՝ հնարավոր կլինի աշխատեցնել մաքսիմալ էնտրոպիային համապատասխանող բաշխման փնտրման ալգորիթմը և այդ մեթոդը կիրառողը կարիք չի ունենա մտածելու այն մասին, որ միգուցե մաքսիմիզացիան կատարվելու է դատարկ բազմության վրայով, որի դեպքում խնդրի լուծումը ընդհանրապես գոյություն չի ունենա: Սկզբից պարզության համար և տեսական տրամաբանությունը հասկանալու նպատակով խնդիրը կլուծենք 3 չափանի տարածության համար (ինչը, իմիջիայլոց, բավականին տարածված կիրառություն կունենա, քանի որ շուկայի առևտրային ծավալը հիմնականում կենտրոնացած է լինում մինչև 3 կատարման գների վրա): 3 չափանի դեպքում լուծումը հասկանալուց հետո կընդհանրացնենք այն կամայական n չափի տարածության համար:

Եվս մեկ անգամ վերհիշենք խնդրի սկզբնական պայմանները: Տրված է եվրոպական օպցիոնի ապագայում կատարվող վճարների հետևյալ մատրիցը՝

$$A = \begin{pmatrix} (X_1 - K_1)^+ & \cdots & (X_n - K_1)^+ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_1 - K_n)^+ & \cdots & (X_n - K_n)^+ \end{pmatrix}$$

որի յուրաքանչյուր տող համապատասխանում է ինչ-որ կատարման գնի: Հարմարության համար կենթադրենք, որ տողերը դասավորված են կատարման գների աճման կարգով: Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի շրջանակներում պահանջվում էր գտնել այնպիսի դիսկրետ հավանականային p բաշխում, որը բավարարում է

$$Ap = b$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad p_i \geq 0$$

և որի դեպքում մաքսիմիզացվում է էնտրոպիան, որը տրված էր հետևյալ հայտնի ներկայացմամբ՝

$$S(p) = - \sum_{i=1}^n p_i * \ln(p_i)$$

Ըստ մեր ենթադրությունների $K_1 < K_2 < K_3$: Որպես ապագա գների X վեկտոր կվերցնենք հենց կատարման գները՝ $X_i = K_i, i = 1,2,3$: Կարևոր է հասկանալ, որ մոդելի միակ դինամիկ մասը հենց ապագա գների ընտրությունն է և լուծման գոյություն ունենալը ուղղակիորեն կախված է X վեկտորից: $X_i = K_i$ վերցնելը կապված է այն փաստի հետ, որ այդ դեպքում A մատրիցի սյուները իրենցից ներկայացնելու են բազիսային վեկտորներ, իսկ ինչպես հայտնի է, բազիսային վեկտորները ունեն «ամենամեծ» հնարավոր գծային ուռուցիկ թաղանթները [40-43], ինչն էլ անհրաժեշտ է լուծման գոյություն ունենալու հնարավորությունը բարձրացնելու համար (քանի որ ինչքան մեծացնում ենք գծային ուռուցիկ թաղանթը, այնքան ավելի շատ վեկտորներ են ընկնում իր մեջ, որոնց ցանկում նաև կարող է գտնվել օպցիոնների սկզբնական գների b վեկտորը):

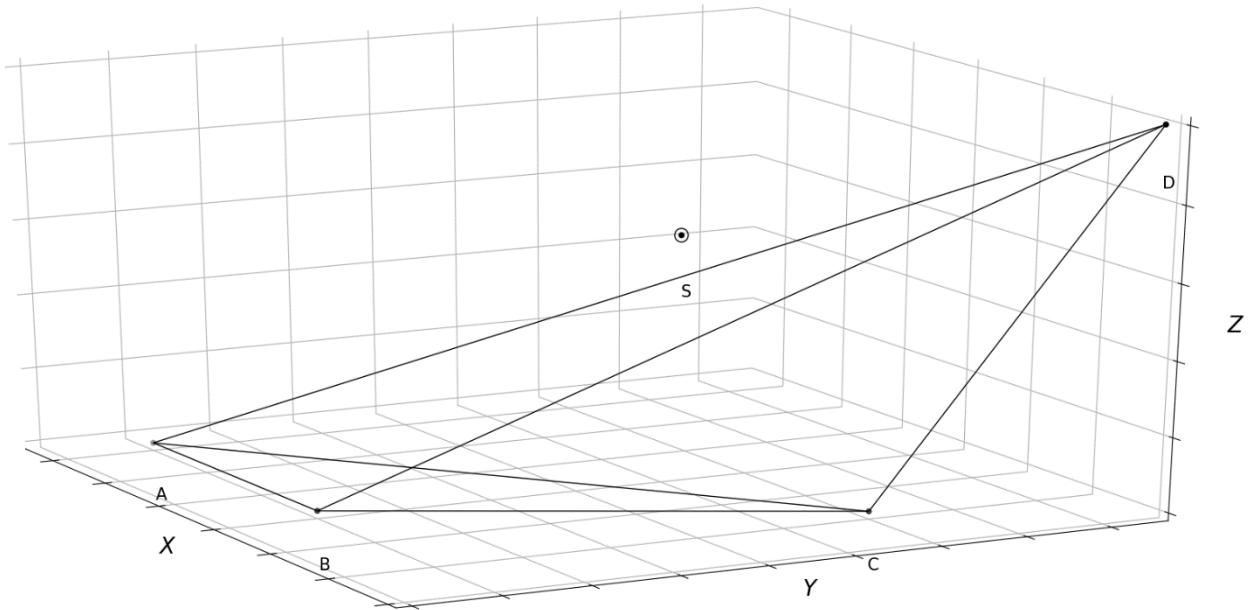
Վերը նշված պայմանների դեպքում A մատրիցը կստանա հետևյալ տեսքը՝

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & \dots \\ 0 & 0 & c & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

որտեղ a, b, c, \dots դրական սկալյարներ են և համապատասխանում են X վեկտորի անդամների (մեր դեպքում արդեն K կատարման գների) տարբերություններին ($a = K_2 - K_1, b = K_3 - K_1, c = K_3 - K_2 \dots$): Նկատենք, որ A -ի բոլոր այն սյուները, որոնց համապատասխանող X_i գինը ավելի փոքր է քան փոքրագույն կատարման գին K_1 -ը նույնաբար լինելու են 0: Ամեն անգամ, երբ X_i գներից մեկը «անցնում է» հաջորդ K_j -ի վրայով, A մատրիցի համապատասխան սյունը ձեռք է բերում նոր չափ: Դիտարկենք բազիսային վեկտորների հետևյալ համակարգը՝

$$\left\{ \begin{bmatrix} K_2 - K_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K_3 - K_1 \\ K_3 - K_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K_3 - K_1 + t \\ K_3 - K_2 + t \\ t \end{bmatrix} \right\}$$

ինչ-որ պատահական $t > 0$ -ի համար: Այս վեկտորների ուռուցիկ գծային թաղանթը պատկերված է հաջորդ գծապատկերում:



Գծապատկեր 3.1.1 Օպցիոնի իրացման գների հիման վրա կառուցված բազիսային կետերի (A, B, C, D) և օպցիոնի ներկա գինը նկարագրող S վեկտորի (այս օրինակում S-ը գտնվում է ABD հարթությունից վերև) դիրքերը:

Ակնհայտորեն հասկանալի է, որ այստեղ մենք կատարել ենք հետևյալ նշանակումները՝

$$A = (0, 0, 0)$$

$$B = (K_2 - K_1, 0, 0)$$

$$C = (K_3 - K_1, K_3 - K_2, 0)$$

$$D = (K_3 - K_1 + t, K_3 - K_2 + t, t)$$

$$S = (b_1, b_2, b_3)$$

Ինչպես երևում է գծապատկեր 3.1.1-ից, S կետը (որը բնութագրում է օպցիոնների ներկա գները) կարող է գտնվել բազիսային կետերի գծային ուռուցիկ թաղանթից դուրս, և փաստորեն դա շտկելու միակ հնարավորությունը տալիս է D կետի տեղաշարժը, որը կախված է t փոփոխականից: Ինտուիտիվ պարզ է, որ եթե ինչ-որ t_0 արժեքի համար S կետը ընկած լինի ուռուցիկ գծային թաղանթի մեջ, ապա այն

նույնպես ընկած կլինի կամայական ուռուցիկ գծային թաղանթի մեջ, որի $t > t_0$: Այս մասը մենք ավելի լավ կվերաձևակերպենք մաթեմատիկական տեսանկյունից և նաև կներկայացնենք սպառիչ ապացույց: Փաստորեն խնդիրը գալիս է այն փոքրագույն t -ի արժեքը գտնելուն, որի չափով եթե ABD հարթությունը «բարձրացվի վերև», ապա S կետը կընկնի գծային ուռուցիկ թաղանթի մեջ: Նկատենք հետևյալ սահմանային հատկությունը՝

Պնդում 1. AD և AI վեկտորների կազմած α անկյունը, որտեղ I -ն միավոր վեկտորն է ($I = (1, 1, 1)$) ձգտում է 0 -ի, երբ $t \rightarrow \infty$:

Ապացույց. Դիցուք α -ն AD և AI վեկտորների կազմած անկյունն է: Այդ դեպքում ակնհայտորեն տեղի ունի հետևյալը՝

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \cos(\alpha(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle AI, AD \rangle}{\|AI\| \|AD\|} = 1$$

ինչն էլ համարժեք է α -ի՝ 0 -ի ձգտելուն:

Այսպիսով, որպեսզի խնդրի լուծումը գոյություն ունենա, S կետը պետք է գտնվի ABI հարթությունից ներքև: Մյուս կողմից S կետը պետք է նաև գտնվի BCD և ACD հարթություններից վերև: Այս պայմանները կարող են հեշտությամբ ստուգվել ընդամենը հաշվարկելով նշված բազմությունների նորմալները և ստուգելով S վեկտորի և այդ նորմալների սկայար արտադրյալների նշանները, որից էլ բխում է հաջորդ պնդումը՝

Պնդում 2. S կետը կլինի $\{A, B, C, D\}$ կետերի ուռուցիկ գծային թաղանթում այն և միայն այն դեպքում, եթե տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\langle CS, [-1, -1, 0] \rangle \geq 0$$

$$\langle CS, [K_3 - K_2, K_1 - K_3, K_2 - K_1] \rangle \geq 0$$

$$\langle AS, [0, -1, 1] \rangle \geq 0$$

Հաջորդիվ մեր խնդիրն է գտնել այնպիսի t , որի համար S կետը ոչ միայն ընկած լինի վերը նշված գծային ուռուցիկ թաղանթի մեջ, այլ նաև տեղի ունենա $S \in ABD$,

այսինքն՝ այս պայմանով մենք կգտնենք փոքրագույն հնարավոր t -ն, որի դեպքում գոյություն ունի մաքսիմալ էնտրոպիայի խնդրի լուծումը: Այս պայմանը ստուգելու համար նախ նկատենք, որ ABD հարթության նորմալը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$[0, -t, K_3 - K_2 + t]$$

Հետևաբար t -ն պետք է լինի այնպիսին, որ AS վեկտորը լինի օրթոգոնալ ABD հարթության նորմալին, ինչից էլ հետևում է հաջորդ պնդումը՝

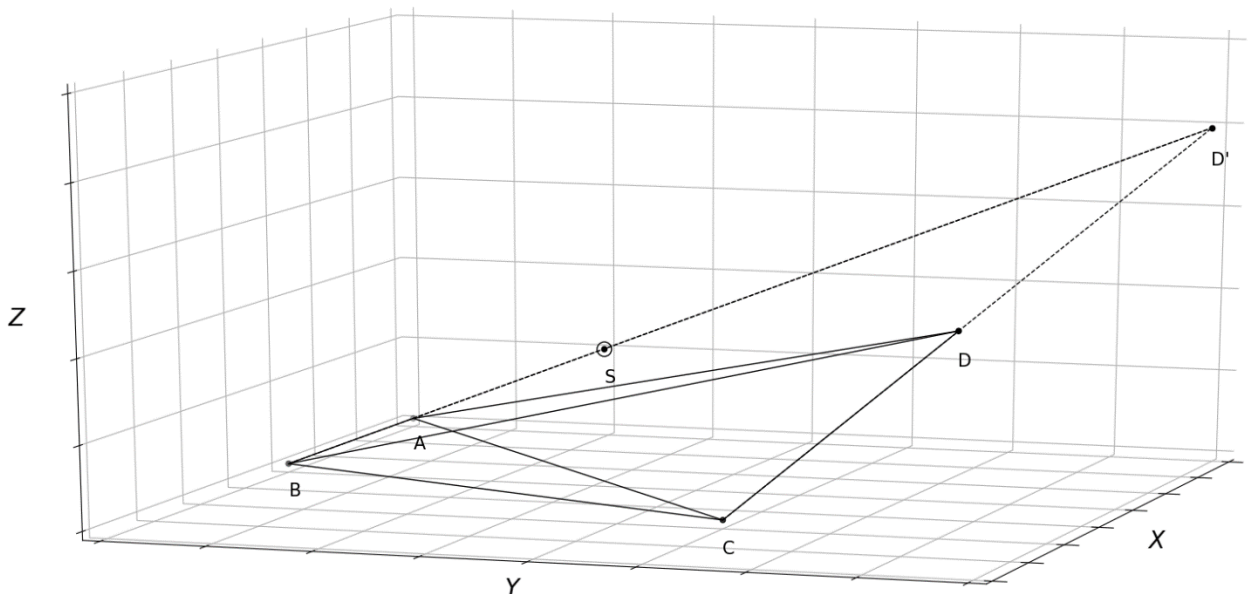
Պնդում 3. t -ի փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում Եվրոպական օպցիոններում կիրառվող մաքսիմալ էնտրոպիայի խնդիրը լուծելի է (3 չափանի տարածության համար) որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$t = \frac{b_3(K_3 - K_2)}{b_2 - b_3}$$

Քանի որ ավելի բարձր կատարման գներով օպցիոնների ներկա գները ավելի ցածր են, տեղի ունի հետևյալը՝

$$b_1 > b_2 > b_3$$

և հետևաբար t -ն կլինի դրական: Հաջորդ գծապատկերում տեսնում ենք D վեկտորին t աճ տալուց ABD հարթության շարժը՝



Գծապատկեր 3.1.1 ABD հարթության տեղաշարժը (նոր դիրքը նշանակված է ABD' -ով) D կետի կորորդինատներին փոքրագույն հնարավոր t աճ տալուց հետո:

Նկատենք, որ այս դեպքում S կետը պատկանում է նոր ABD' հարթությանը, ինչն էլ հանդիսանում էր մեր սկզբնական նպատակը: Հաջորդ բաժնում կքննարկենք նույն մեթոդբանությունը ավելի բարձր չափողականության տարածությունների համար՝ արդեն ավելի խորը մաթեմատիկական ձևակերպումներով և համապատասխան ապացույցներով:

3. 2 Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի լուծման գոյությունը կամայական չափանի տարածությունների համար

Դիտարկենք նախորդ բաժնում նկարագրված խնդիրը կամայական n -ի համար: Նշանակենք կատարման գները K_1, K_2, \dots, K_n , և որպես ապագա վիճակների վեկտոր կրկին դիտարկենք հենց կատարման գները: Այդ պարագայում (ինչպես և նախորդ բաժնում նկարագրված ավելի պարզունակ դեպքում) A մատրիցը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{bmatrix} 0 & K_2 - K_1 & \dots & K_n - K_1 & K_n - K_1 + t \\ 0 & 0 & \dots & K_n - K_2 & K_n - K_2 + t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_n - K_{n-1} & K_n - K_{n-1} + t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t \end{bmatrix}$$

Նշանակենք A-ի սյունները a_0, a_1, \dots, a_n : Դիցուք $\alpha(t)$ -ով նշանակված է a_n և I վեկտորների կազմած անկյունը (այստեղ կրկին I-ով նշանակել ենք n չափանի տարածության մեջ միավոր $(1, 1, \dots, 1)$ վեկտորը): Նկատենք, որ այս դեպքում էլ հեշտ է ցույց տալ, որ $\lim_{t \rightarrow \infty} \cos(\alpha(t)) = 1$ և օգտվելով դրանից, որպեսզի առաջին քայլով պարզենք, թե արդյոք ընդհանրապես գոյություն ունի այնպիսի t , որ մաքսիմալ էնտրոպիայի խնդիրը ունի լուծում, կարող ենք a_n -ի փոխարեն դիտարկել I վեկտորը: Բնականաբար ենթադրում ենք, որ b և I վեկտորների կազմած անկյունը նույնաբար հավասար չէ 0-ի (և այս ենթադրությունը ուժի մեջ է մնալու հետագա բոլոր

դուրսբերումներում): Դիտարկենք հետևյալ $n+1$ հիպերհարթություն – վեկտոր զույգերը (այստեղ հիպերհարթությունները հարմարության համար նշանակել ենք $hp(\cdot)$ -ով)

$$\begin{cases} hp(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, I), a_0 \\ hp(a_0, a_2, \dots, a_{n-1}, I), a_1 \\ \vdots \\ hp(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, I), a_{n-1} \\ hp(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}), I \end{cases}$$

Վերը նշված յուրաքանչյուր հիպերհարթության համար նշանակենք N_i -ով իր այն նորմալը, որը «ցույց է տալիս» համապատասխան a_i վեկտորի ուղղությամբ: Նորմալի այդպիսի սահմանման դեպքում պետք է տեղի ունենան հետևյալ անհավասարությունները (նկատենք նաև, որ $a_0 = (0, \dots, 0)$)

$$\begin{cases} \langle N_0 - a_1, a_0 - a_1 \rangle \geq 0 \\ \langle N_1, a_1 \rangle \geq 0 \\ \vdots \\ \langle N_n, a_n \rangle \geq 0 \end{cases}$$

Նկատենք, որ այս նշանակումների և պայմանների ներքո ակնհայտորեն տեղի ունի հետևյալ պնդումը՝

Պնդում 4. Գոյություն ունի մաքսիմալ էնտրոպիայի խնդրի լուծումն ապահովող վերջավոր t այն և միայն այն դեպքում, եթե բավարարվում է հետևյալ անհավասարությունների համակարգը՝

$$\begin{cases} \langle N_0 - a_1, b - a_1 \rangle \geq 0 \\ \langle N_1, b \rangle \geq 0 \\ \vdots \\ \langle N_n, b \rangle \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Հիմա ընդհանուր լուծման գոյությունը պարզելուց հետո և ենթադրելով, որ վերը նշված համակարգը բավարարված է, կարող ենք անցնել t -ի փոքրագույն արժեքի փնտրմանը: b վեկտորով նշանակել էինք օպցիոնների ներկա գների վեկտորը, և հետևաբար իր բոլոր կոորդինատները ոչ-բացասական են: Եթե b -ի վերջին կոմպոնենտ b_n -ը 0 է, ապա t -ի փոքրագույն արժեքը, որի դեպքում $b \in \text{conv}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ ակնհայտորեն հավասար է 0 (այստեղ $\text{conv}(\cdot)$ -ով նշանակել ենք ուռուցիկ գծային

թաղանթը): Եթե b_n -ը մեծ է 0-ից, ապա մեզ պետք են գալու հետևյալ լեմմաները (նկատենք նաև, որ $a_n = a_{n-1} + tI$)`

Լեմմա 1. $\exists \mu > 0$, այնպիսին, որ $\forall t$, որի համար $b \in \text{conv}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$, $t \geq \mu > 0$:

Ապացույց. Ենթադրենք տեղի ունի հակառակը, այդ դեպքում $\forall \epsilon > 0 \exists t_0 < \epsilon$, այնպիսին, որ $\exists \gamma_0, \dots, \gamma_n, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \gamma_i = 1$, որի համար $\gamma_0 a_0 + \dots + \gamma_n a_n = b$: Դիցուք

$$r = \inf_{q \in \text{conv}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})} \rho(b, q)$$

$$\epsilon = \frac{r}{\rho(b, I)}$$

որտեղ ρ -ով նշանակել ենք Էվկլիդեսյան հեռավորությունը: Վերը նշված ϵ -ի համար գոյություն ունի $0 < t_0 < \epsilon$, այնպիսին, որ

$$\gamma_0 a_0 + \dots + \gamma_n a_n = b \Leftrightarrow \gamma_0 a_0 + \dots + (\gamma_{n-1} + \gamma_n) a_{n-1} + t_0 \gamma_n I = b \rightarrow \rho(\gamma_0 a_0 + \dots + (\gamma_{n-1} + \gamma_n) a_{n-1}, b) = \rho(b - t_0 \gamma_n I, b) \leq t_0 \rho(I, b) < r$$

, ինչը հակասություն է:

Լեմմա 2. Եթե որևէ t_0 -ի համար $b \in \text{conv}(a_0, a_1, \dots, a_n)$, ապա դա տեղի ունի նաև կամայական $t > t_0$ -ի համար:

Ապացույց. Դիցուք $t > t_0$, $\gamma'_{n-1} = \gamma_{n-1} + \gamma_n \frac{t-t_0}{t}$, $\gamma'_n = \gamma_n \frac{t_0}{t}$, այդ դեպքում $\gamma'_{n-1} + \gamma'_n = \gamma_{n-1} + \gamma_n$ և $\gamma_0 a_0 + \dots + \gamma'_{n-1} a_{n-1} + \gamma'_n a_n = \gamma_0 a_0 + \dots + \gamma_n a_n = b$

Այս երկու լեմմաների միջոցով մենք արդեն հասկանում ենք, որ բոլոր հնարավոր t -երի բազմությունը (նշանակենք այն T -ով), որոնց համար տեղի ունի $b \in \text{conv}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ սահմանափակ է ներքևից **դրական** սկայարով և անսահմանափակ է վերևից: Հաջորդ լեմմայով կապացուցենք, որ այդ T բազմության ճշգրիտ ստորին եզրի (որը կնշանակենք \underline{t} -ով) համար նույնպես տեղի ունի $b \in \text{conv}(a_0, a_1, \dots, a_n)$:

Լեմմա 3. Դիցուք T -ն բոլոր այն t -երի բազմությունն է, որոնց համար $b \in \text{conv}(a_0, a_1, \dots, a_n)$, այդ դեպքում $\underline{t} = \inf T \in T$:

Ապացույց. Ենթադրենք հակառակը: Քանի որ \underline{t} -ն T -ի ճշգրիտ ստորին եզրն է, ապա $\forall \epsilon > 0 \exists t_0 \in T$, այնպիսին, որ $0 < t_0 - \underline{t} < \epsilon$: Դիցուք

$$r = \inf_{q \in \text{conv}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_{n-1} + \underline{t}I)} \rho(b, q)$$

$$\epsilon = \frac{r}{\rho(b, I)}$$

Ըստ մեր ենթադրության գոյություն ունի $t_0 < \underline{t} + \epsilon$, այնպիսին, որ $b = \gamma_0 a_0 + \dots + \gamma_n a_n$:

Նշանակենք $a'_n = a_{n-1} + \underline{t}I$, այդ դեպքում $\rho(\gamma_0 a_0 + \dots + \gamma_{n-1} a_{n-1} + \gamma_n a'_n, b) = \rho(b + (\underline{t} - t_0)I, b) \leq (t_0 - \underline{t})\rho(I, b) < r$, և մենք կրկին գալիս ենք հակասության:

Այս աջակցող լեմմաները մեզ թույլ են տալիս ձևակերպել հետևյալ թեորեմը, որը հանդիսանում է այս աշխատանքում մեր կողմից ստացված հիմնական արդյունքներից մեկը:

Թեորեմ. Եթե (*) համակարգը բավարարված է, b և I վեկտորների կազմած անկյունը հավասար չէ 0 -ի, ապա $b \in \text{conv}(a_0, a_1, \dots, a_n)$, որտեղ $a_n = a_{n-1} + \underline{t}I$ և b վեկտորի՝ a_0, \dots, a_n վեկտորների միջոցով գծային նկարագրության մեջ $\gamma_{n-1} = 0$: t -ի փոքրագույն արժեք \underline{t} -ը տրված է՝

$$\underline{t} = \frac{b_n(K_n - K_{n-1})}{b_{n-1} - b_n}$$

Ապացույց. Մեզ ընդամենը պետք է ցույց տալ, որ $\gamma_{n-1} = 0$: Ենթադրենք դա այդպես չէ, այդ դեպքում՝

$$b = \gamma_0 a_0 + \dots + \gamma_n a_n = \gamma_0 a_0 + \dots + \gamma_{n-1} a_{n-1} + \gamma_n (a_{n-1} + \underline{t}I) =$$

$$\gamma_0 a_0 + \dots + (\gamma_n + \gamma_{n-1}) a_{n-1} + \frac{\underline{t} \gamma_n}{\gamma_n + \gamma_{n-1}} (\gamma_n + \gamma_{n-1}) I =$$

$$\gamma_0 a_0 + \dots + (\gamma_n + \gamma_{n-1}) \left(a_{n-1} + \frac{\underline{t} \gamma_n}{\gamma_n + \gamma_{n-1}} I \right)$$

Քանի որ $\gamma_n > 0$, ապա

$$\frac{\underline{t}y_n}{Y_n + Y_{n-1}} < \underline{t}$$

ինչն էլ իր հերթին հակասություն է: Իմանալով, որ a_{n-1} -ը չի «մասնակցում» b -ի գծային ներկայացման մեջ, մեզ միայն մնում է գտնել այն \underline{t} արժեքը, որի դեպքում $b \in hp(a_0, \dots, a_{n-2}, a_n)$: Դա իրագործելու նպատակով մենք կգտնենք այդ հիպերհարթության նորմալը և կլուծենք $\langle N, b \rangle = 0$ -ն t -ի նկատմամբ: Նախ նորմալը գտնելու համար

անհրաժեշտ է դիտարկել հետևյալ մատրիցի (որը հիմնված է հիպերհարթության վեկտորների վրա) դետերմինանտը՝

$$\begin{bmatrix} K_2 - K_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ K_3 - K_1 & K_3 - K_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n-1} - K_1 & K_{n-1} - K_2 & \dots & 0 & 0 \\ K_n - K_1 + t & K_n - K_2 + t & \dots & K_n - K_{n-1} + t & t \\ e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} & e_n \end{bmatrix}$$

որի դետերմինանտը հավասար է՝

$$(-1)^{2n-1} t(K_2 - K_1) \dots (K_{n-1} - K_{n-2}) e_{n-1} +$$

$$(-1)^{2n} (K_n - K_{n-1} + t)(K_2 - K_1) \dots (K_{n-1} - K_{n-2}) e_n$$

Այսպիսով ստանում ենք, որ $N = (0, \dots, 0, -t, K_n - K_{n-1} + t)$ և հետևաբար տեղի ունի հետևյալը՝

$$\langle N, b \rangle = 0 \Leftrightarrow t = \frac{b_n(K_n - K_{n-1})}{b_{n-1} - b_n}$$

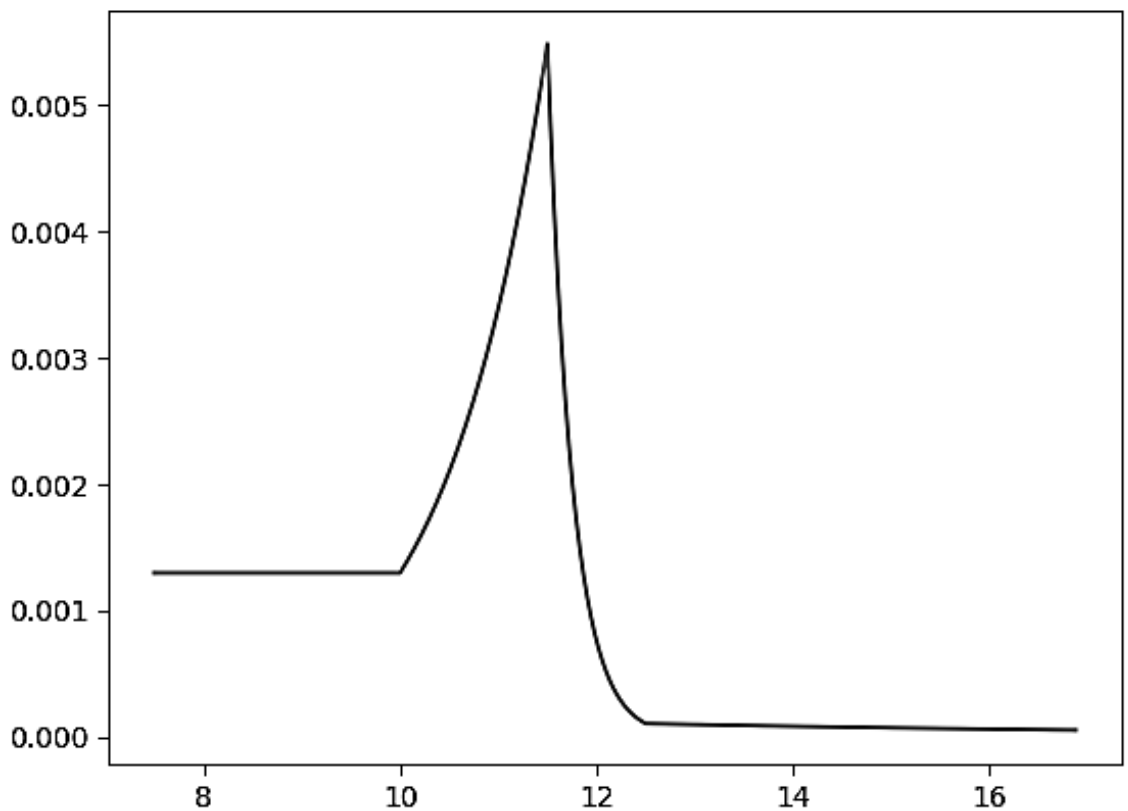
Նկատենք, որ այս արդյունքը լիովին համապատասխանում է նախորդ բաժնում 3 չափանի մոդելի շրջանակներում ստացված արդյունքին, եթե ընդամենը տեղադրենք $n = 3$:

3.3 Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի ծրագրային կիրառության և լուծման օրինակներ իրական արժեթղթերի վրա ստեղծված օպցիոնների համար

Դիտարկենք ներկայացված մոդելի մի քանի գործնական կիրառությունների օրինակներ: Նախորդ բաժիններում ներկայացված տեսության կիրառության համար մենք պատրաստել ենք հատուկ համակարգչային ծրագիր՝ Python լեզվի հիման վրա: Ծրագրի աշխատանքը իրականացվում է երկու հիմնական փուլով: Առաջին փուլում նախորդ բաժնում ներկայացված մաթեմատիկական մեխանիզմի միջոցով ծրագիրը պարզում է արդյոք մուտքագրված տվյալների դեպքում գոյություն ունի տեսական

լուծում, թե ոչ, իսկ երկրորդ փուլում արդեն աշխատեցվում է մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի միջոցով լուծման փնտրման ալգորիթմը:

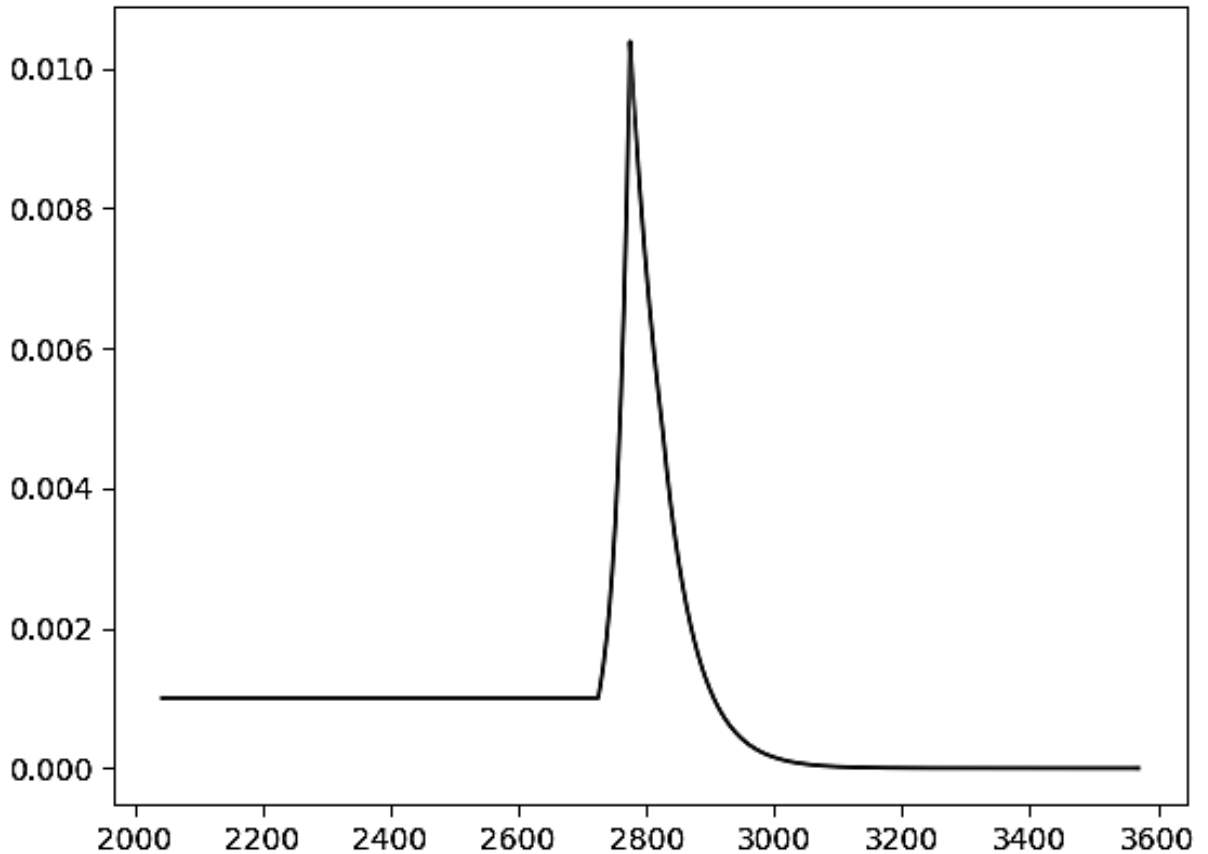
Այս բաժնի բոլոր օրինակներում օգտագործվող իրական տվյալները վերցված են եղել finance.yahoo.com կայքից: Ըստ նախորդ բաժիններում նշված տրամաբանության մոդելում ներառվել են միայն այն իրացման գները, որոնց համապատասխանող օպցիոնները ունեցել են ամենաբարձր առևտրային ծավալները (trading volume): Միջինում յուրաքանչյուր դեպքի հաշվարկը տևում է մի քանի վայրկյան: Եթե իտերացիայի ընթացքում այնպիսի կետ ենք ընկնում, որտեղ Նյուտոնի մեթոդով հաշվարկված ուղղությունը չի տանում դեպի նպատակային ֆունկցիայի մինիմումը, օգտագործվում է մոդիֆիկացված մեթոդը, այն է՝ գրադիենտի ուղղությամբ դինամիկ քայլերով իջնում ենք այնքան, մինչև Նյուտոնի մեթոդը կրկին սկսի աշխատել:



Գծապատկեր 3.3.1 SNAP արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 08/06/2018-ի համար 3 օպցիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
10	0.85	215
11.5	0.14	58
12.5	0.07	361

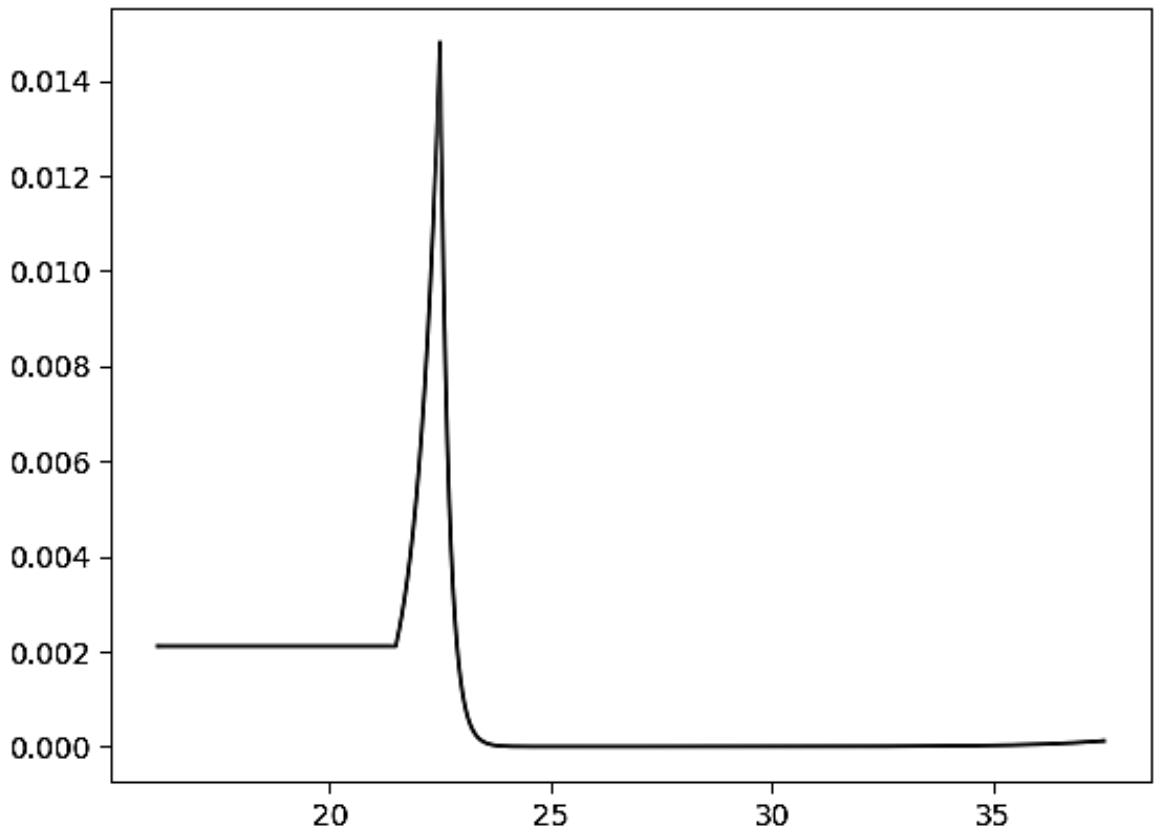
Աղյուսակ 3. 3. 1 SNAP արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.2 S&P500 ինդեքսի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 20/07/2018-ի համար 3 օպցիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
2725.00	47.35	2347
2775.00	21.97	2918
2825.00	8.30	3154

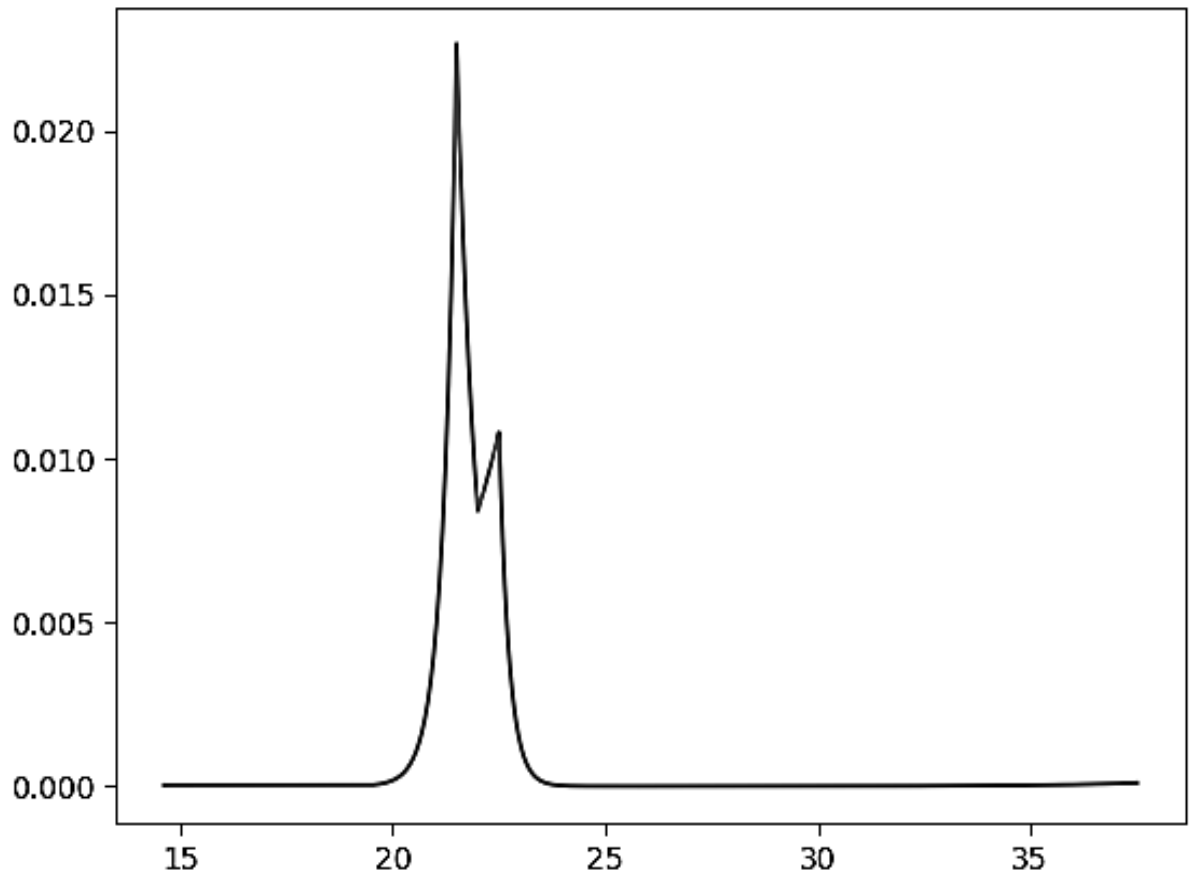
Աղյուսակ 3. 3. 2 S&P500 ինդեքսի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.3 MRO արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 01/06/2018-ի համար 3 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
21.50	0.51	117
22.50	0.15	133
25.00	0.10	100

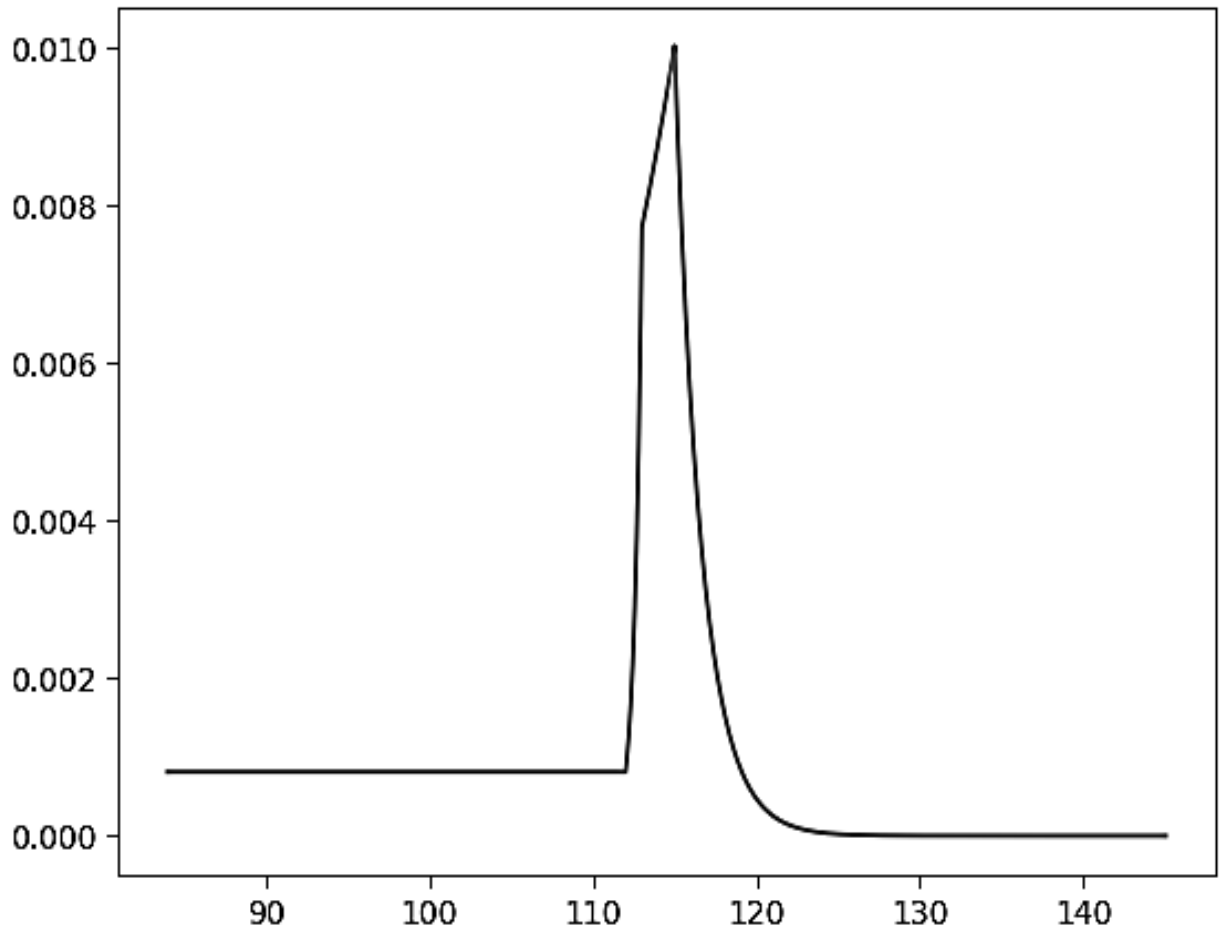
Աղյուսակ 3. 3. 3 MRO արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.4 MRO արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 01/06/2018-ի համար 5 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
19.50	2.40	78
21.50	0.51	117
22.00	0.27	62
22.50	0.15	133
25.00	0.10	100

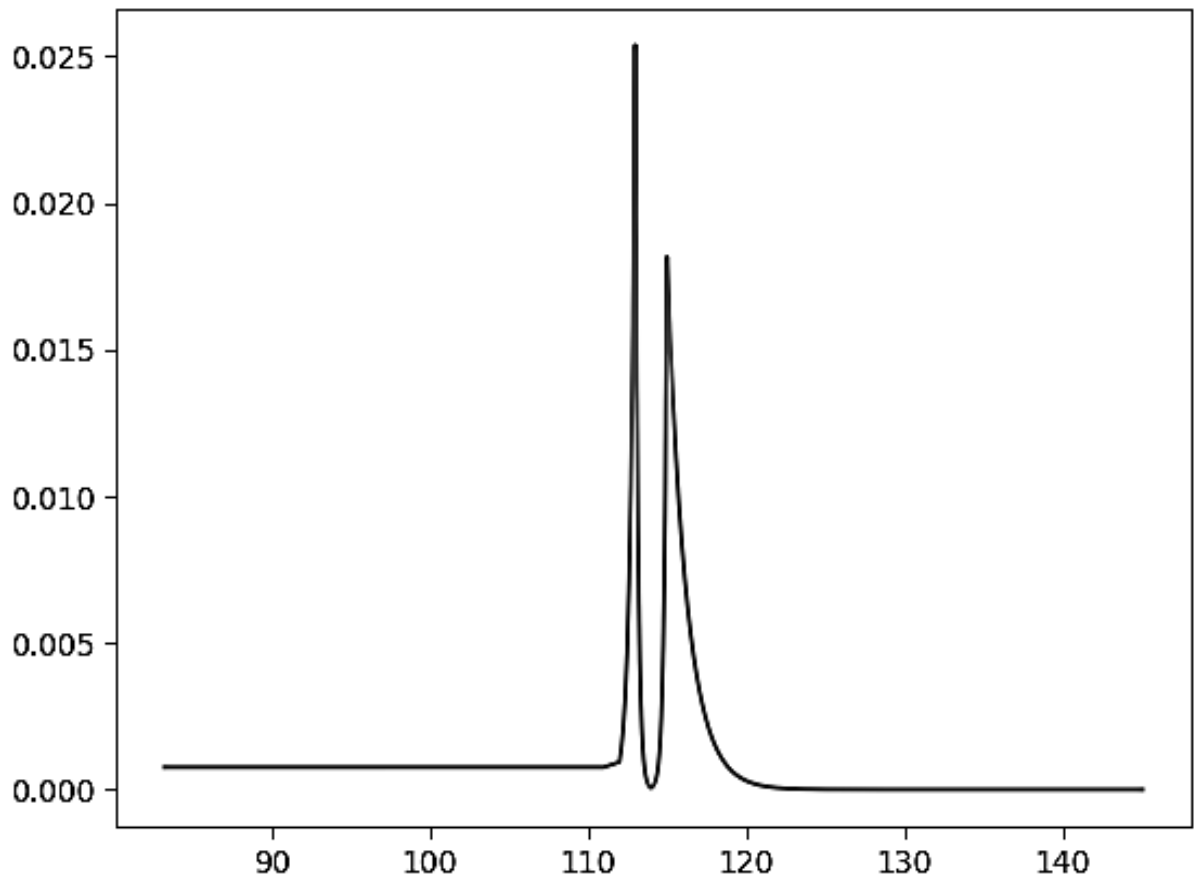
Աղյուսակ 3. 3. 4 MRO արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.5 JPM արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 01/06/2018-ի համար 3 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
112.00	1.91	1096
113.00	1.30	594
115.00	0.44	876

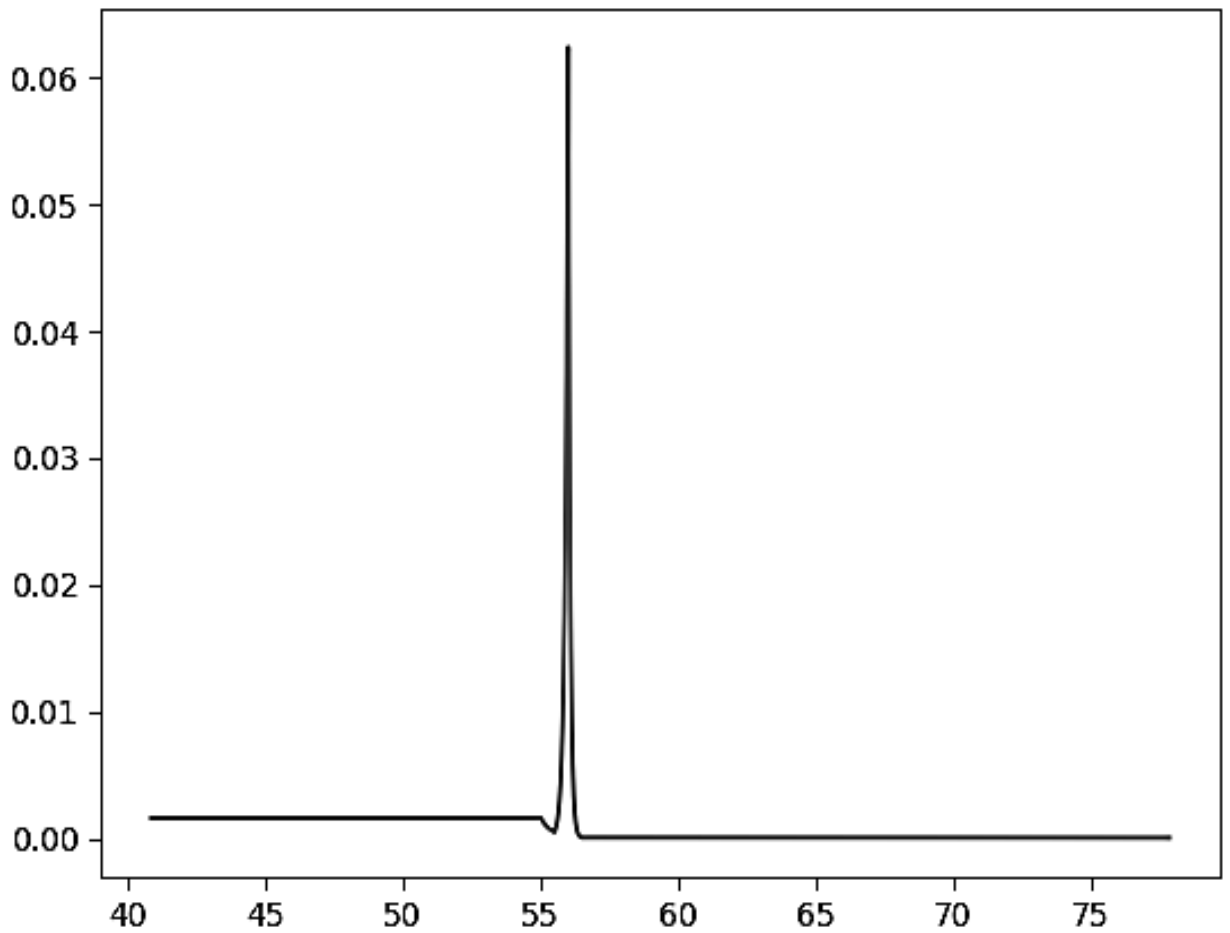
Աղյուսակ 3. 3. 5 JPM արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.6 JPM արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 01/06/2018-ի համար 5 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
111.00	2.56	424
112.00	1.91	1096
113.00	1.30	594
114.00	0.86	589
115.00	0.44	876

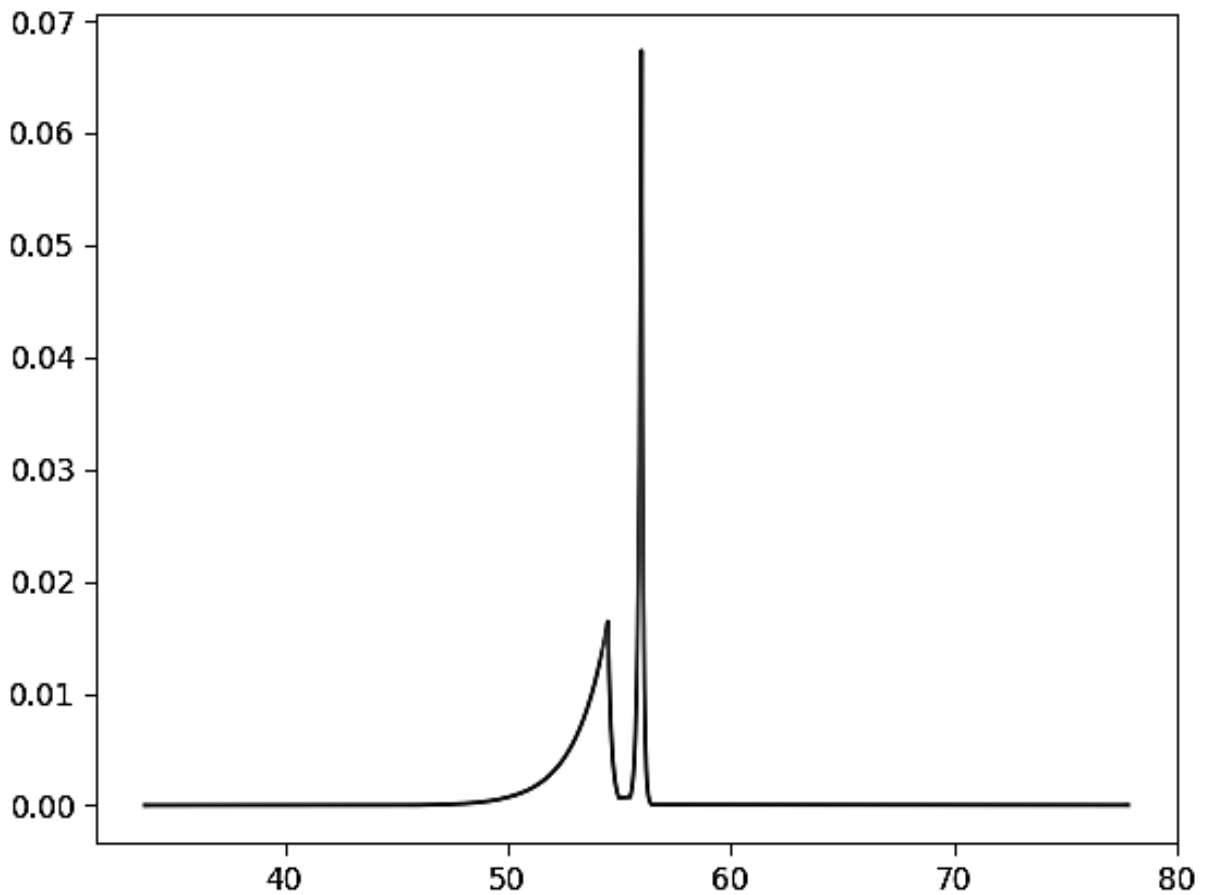
Աղյուսակ 3. 3. 6 JPM արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.7 INTC արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 01/06/2018-ի համար 5 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
54.50	0.81	322
55.00	0.61	1111
55.50	0.42	387
56.00	0.25	677
56.50	0.23	258

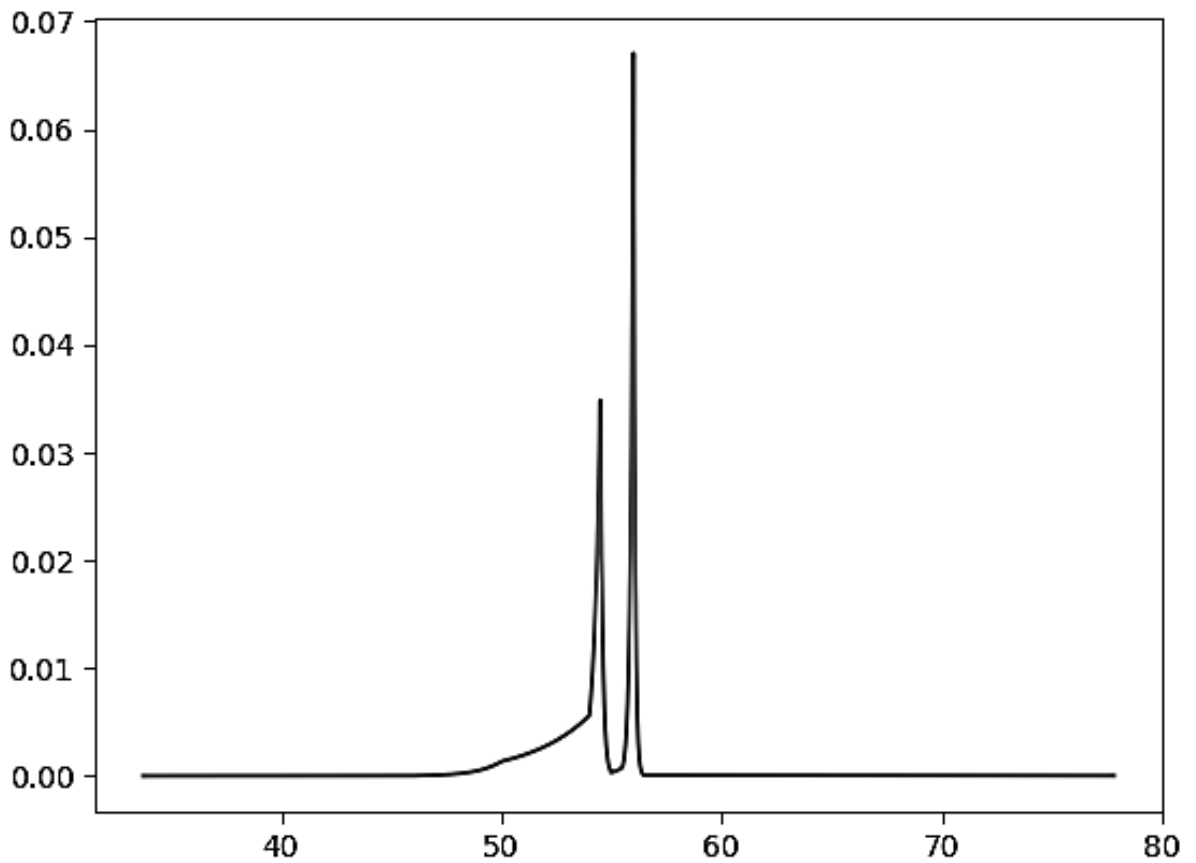
Աղյուսակ 3. 3. 7 INTC արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.8 INTC արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 01/06/2018-ի համար 7 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
45.00	9.50	200
50.00	4.55	192
54.50	0.81	322
55.00	0.61	1111
55.50	0.42	387
56.00	0.25	677
56.50	0.23	258

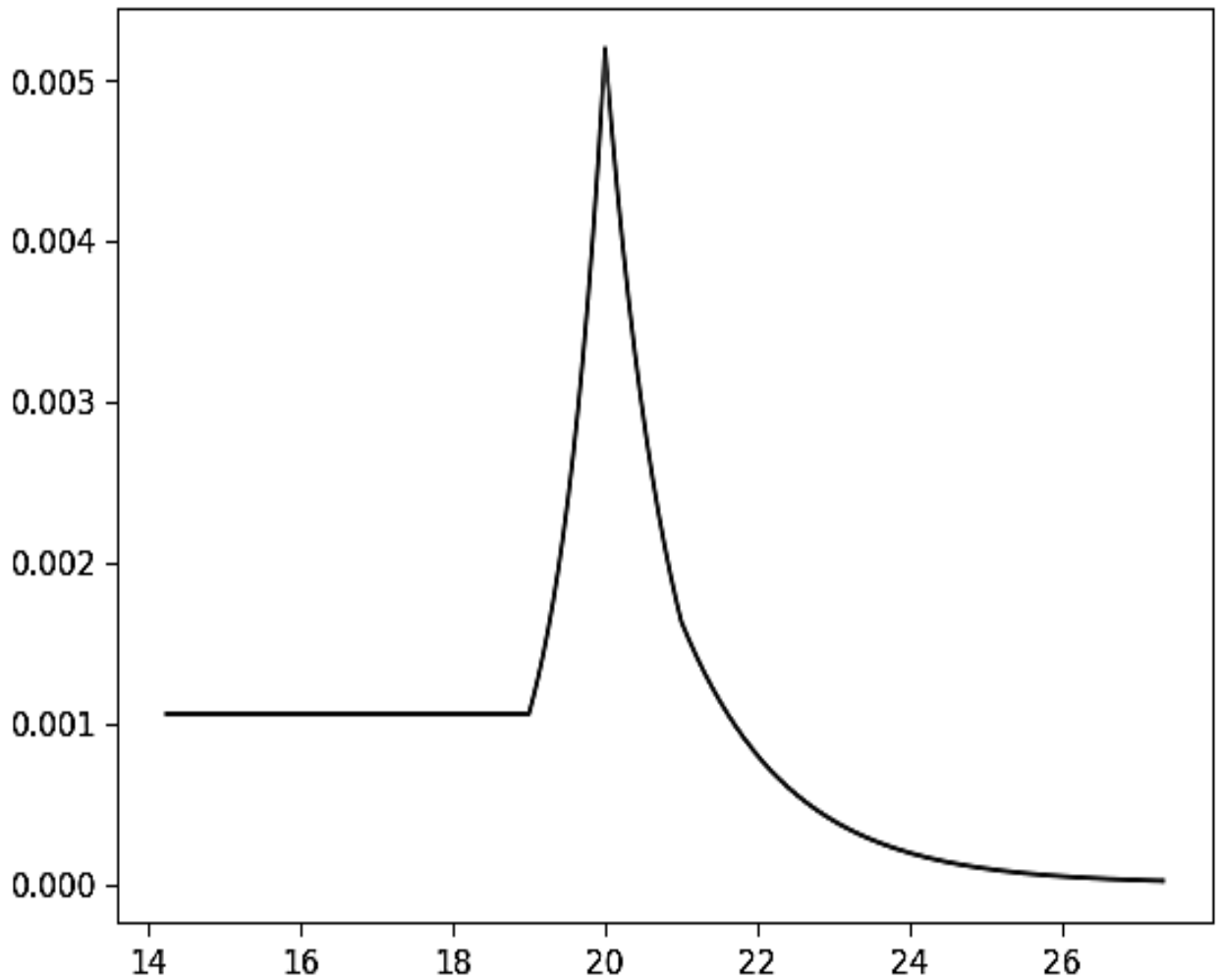
Աղյուսակ 3. 3. 8 INTC արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.9 INTC արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 01/06/2018-ի համար 8 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
45.00	9.50	200
50.00	4.55	192
54.00	1.12	175
54.50	0.81	322
55.00	0.61	1111
55.50	0.42	387
56.00	0.25	677
56.50	0.23	258

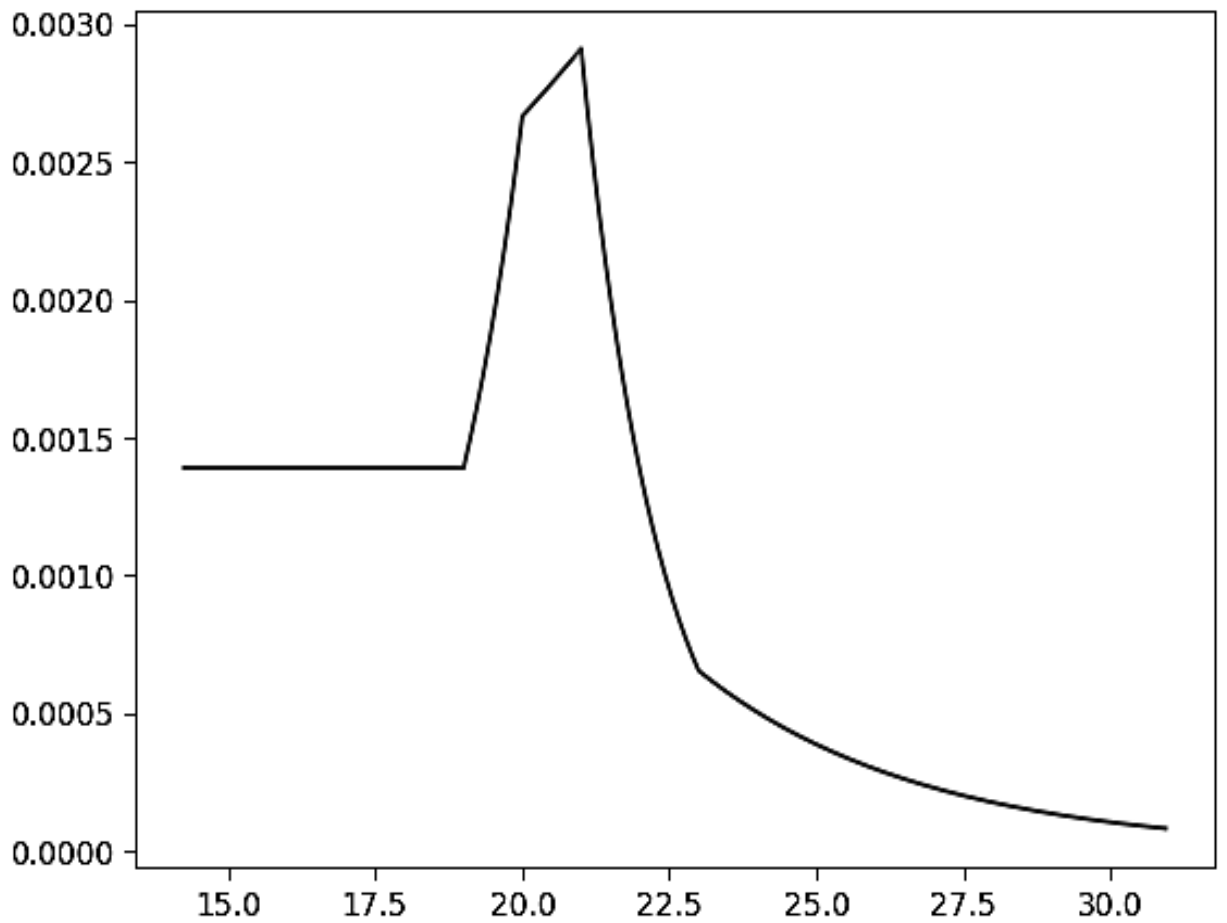
Աղյուսակ 3. 3. 9 INTC արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.10 FDC արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 20/07/2018-ի համար 3 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
19.00	1.04	28
20.00	0.50	66
21.00	0.23	55

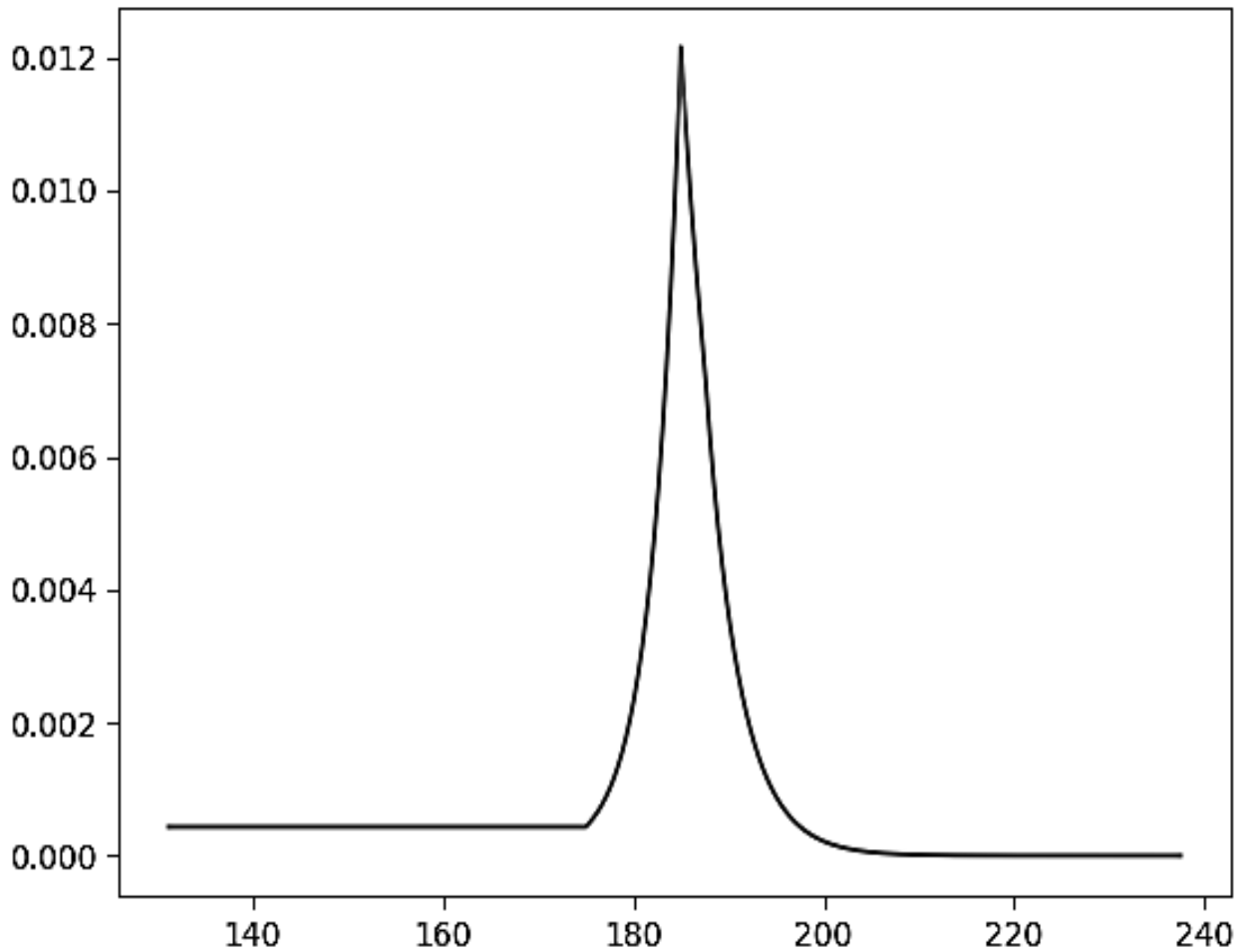
Աղյուսակ 3. 3. 10 FDC արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.11 FDC արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 19/10/2018-ի համար 4 օգտիրոսի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
19.00	1.70	7
20.00	1.15	10
21.00	0.75	15
23.00	0.35	1500

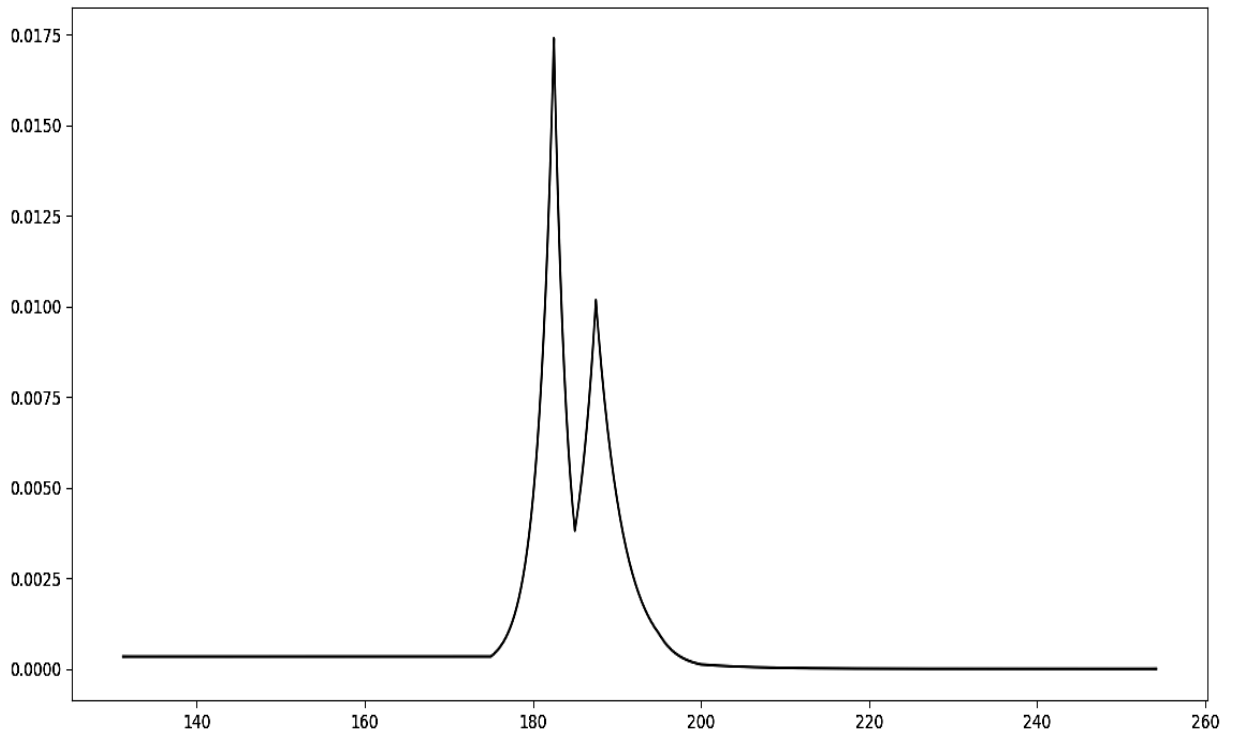
Աղյուսակ 3. 3. 11 FDC արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.12 FB արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 01/06/2018-ի համար 3 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
175.00	9.10	3482
185.00	1.76	3128
187.50	0.87	2119

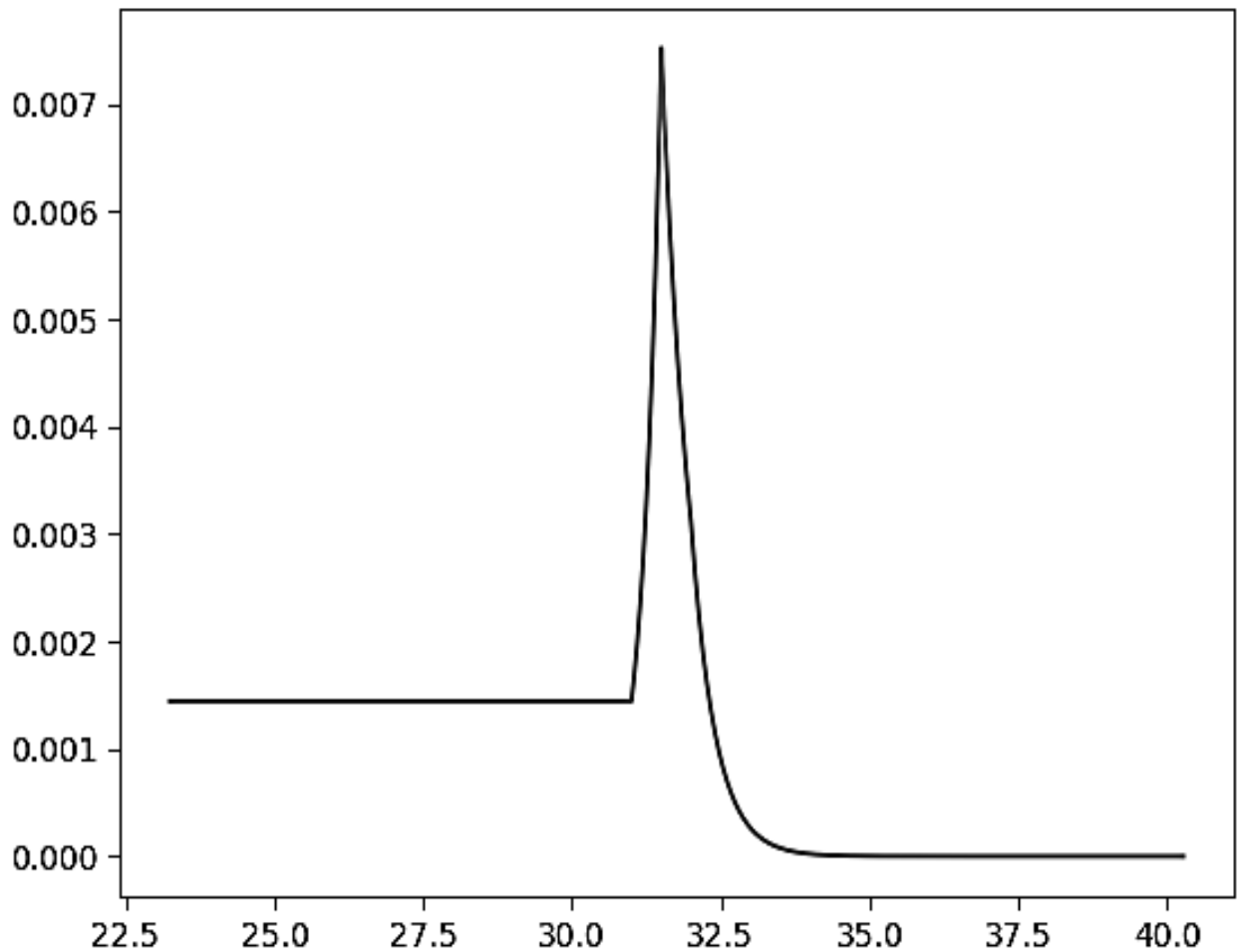
Աղյուսակ 3. 3. 12 FB արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.13 FB արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 01/06/2018-ի համար 7 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
175.00	9.10	3482
182.50	2.97	311
185.00	1.76	3128
187.50	0.87	2119
190.00	0.40	1241
195.00	0.10	531
200.00	0.04	257

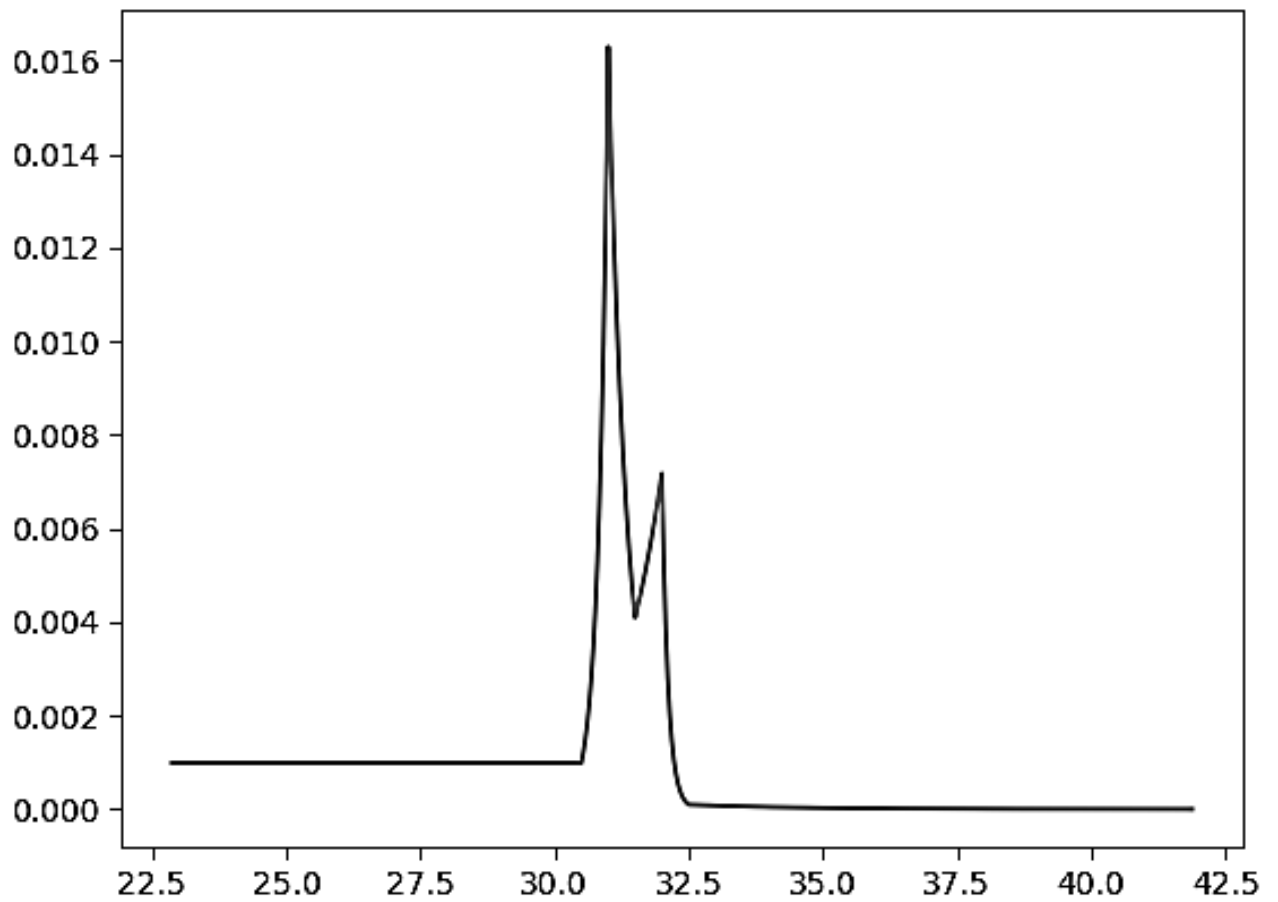
Աղյուսակ 3. 3. 13 FB արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.14 BAC արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 01/06/2018-ի համար 3 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
31.00	0.25	3627
31.50	0.10	2743
32.00	0.03	2431

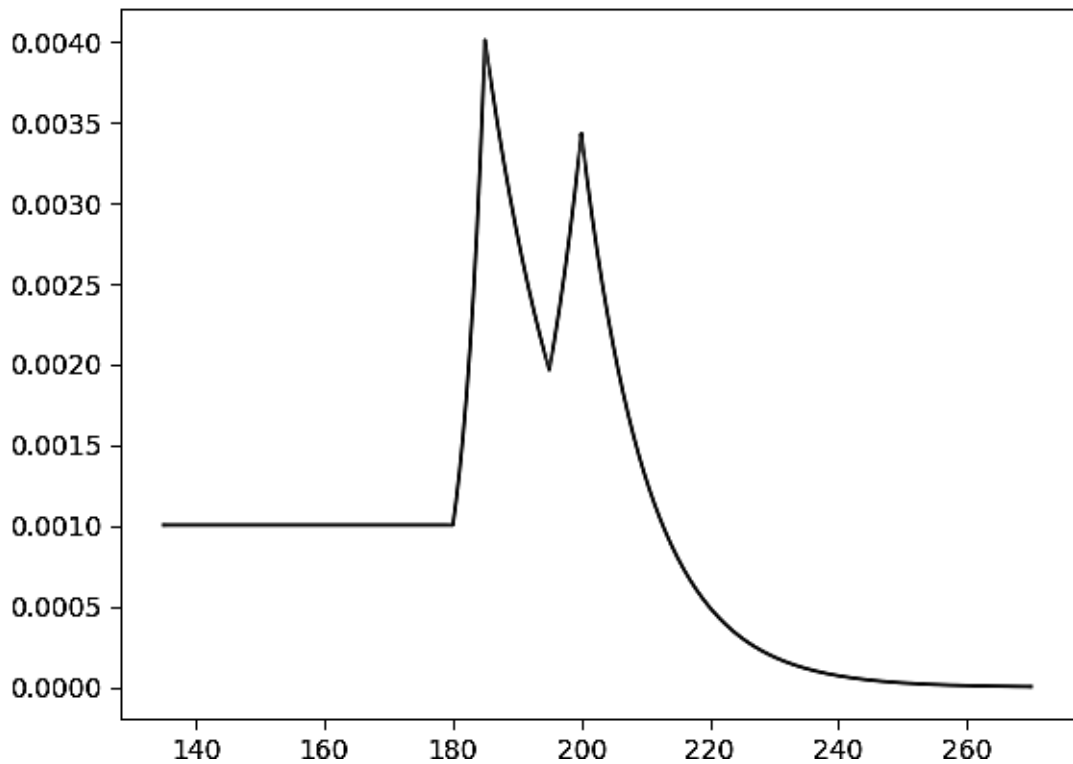
Աղյուսակ 3. 3. 14 BAC արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.15 BAC արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 01/06/2018-ի համար 5 օգտիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
30.50	0.53	869
31.00	0.25	3627
31.50	0.10	2743
32.00	0.03	2431
32.50	0.02	1741

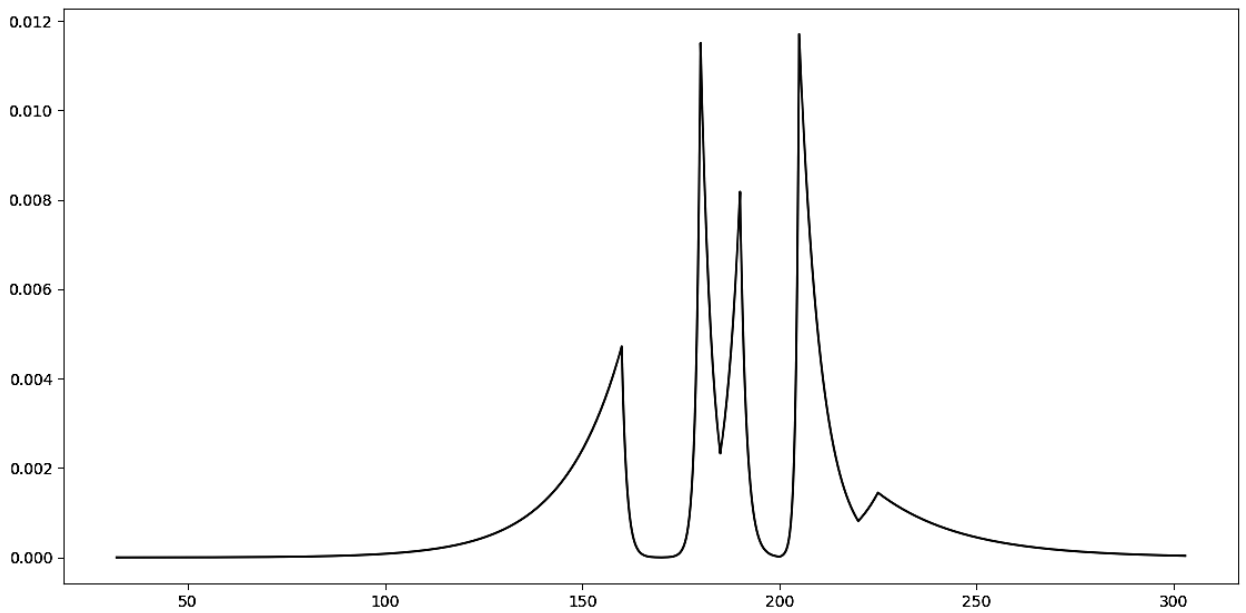
Աղյուսակ 3. 3. 15 BAC արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.16 AAPL արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 17/08/2019-ի համար 10 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
180.00	12.06	684
185.00	8.90	1099
195.00	4.30	542
200.00	2.70	472
210.00	1.01	955

Աղյուսակ 3. 3. 16 AAPL արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:



Գծապատկեր 3.3.17 AAPL արժեթղթի համար հաշվարկված դիսկրետ բաշխումը 18/01/2019-ի համար 10 օգպիոնի հիման վրա:

Strike Price	Price	Volume
42.50	145.40	55
160.00	31.73	88
170.00	24.55	55
180.00	17.45	93
185.00	14.50	834
190.00	11.93	678
200.00	7.80	184
205.00	5.80	187
220.00	2.77	88
225.00	2.15	154

Աղյուսակ 3. 3. 17 AAPL արժեթղթի վրա գրված Եվրոպական օպցիոնների կատարման գները (strike price), գները և գործարքների ծավալները:

Ընդհանուր դեպքում մեր հաշվարկված օրինակներում օգտագործվել են 100, 1000 և 10000 ապագա գնային կետեր: Փորձը ցույց է տվել, որ ինչքան ավելանում են ապագա վիճակների կետերը (այսինքն՝ դիսկրետ բաշխման չափողականությունը),

այնքան մեծանում է էնտրոպիան: Սակայն բաշխման մնացած վիճականիները, օրինակ՝ մոդը, միջինը, վարիացիան և սկյունեզը համարյա չեն փոփոխվում և ցուցաբերում են համեմատաբար կայունություն:

Այս պահի դրությամբ հասկանալի է, որ մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի միջոցով ստացված ապագա գների բաշխումը կախված է ոչ միայն մոդելի մեջ ներառված օպցիոններից, այլև գնային ինտերվալից: Ակնհայտ է, որ այդ տիպի բաշխումը իր տեսքով չի կարող կայուն լինել գնային այն տեղաշարժերի նկատմամբ, որոնք մոտեցնում են աջակողմյան սահմանը փոքրագույն հնարավորինին: Համենայն դեպս բաշխման տեսքի փոխարեն կարելի է խոսել տարբեր վիճակագրական պառամետրերի, օրինակ՝ միջինի, վարիացիայի, սկյունեզի և այլ գործակիցների մասին, որոնք բնութագրում են բաշխումը:

Տարբեր միջակայքերի փորձարկման ընթացքում պարզեցինք, որ ձախ սահմանի տեղաշարժերի դեպքում բաշխման տեսքը ենթարկվում էր չնչին փոփոխության, սակայն այդ հատկությունը տեղի չէր ունենում աջ սահմանի տեղաշարժման ժամանակ: Դա կարելի է կապել այն փաստի հետ, որ բաշխման ձախ մասում գտնվում են բազում գնային կետեր, որոնք ավելի փոքր են քան դիտարկված իրացման գներից փոքրագույնը, որի արդյունքում էլ սահմանափակումների մատրիցում համապատասխան տողերը 0 են դառնում: Նաև կարելի է նկատել, որ ինչ-որ պահից սկսած բաշխման տեսքը գնային միջակայքի մեծացման նկատմամբ դառնում է համեմատաբար կայուն և հետագայում համարյա չի փոփոխվում: Ստացված բաշխումների այդ հատկությունը թույլ է տալիս կիրառել մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդաբանությունը կիրառական նշանակություն ունեցող խնդիրների լուծման մեջ: Ներկա օպցիոնների գների հիման վրա կառուցված ապագա վիճակային գների բաշխումները կարելի է հաջողությամբ կիրառել հետևյալ խնդիրներում՝

1. Ակտիվների շուկայական ռիսկի գնահատում, մասնավորապես կարելի է այս մեթոդով ստացված ոչ-պառամետրական բաշխումը կիրառել համապատասխան գործիքների VaR-ի հաշվարկի մեջ:

2. Օպտիմալ պորտֆելների կառուցում, ինչը մասնավորապես օգտակար է նախորդ բաժնում դիտարկված կենսաթոշակային ֆոնդերի պորտֆելների կառուցման և գնահատման մեջ:

3. Առևտրային ազլորիթմների ստեղծում:

Մեր կողմից մշակված համակարգչային ապահովումը (Python լեզվով) հնարավորություն է տալիս բավականին ճկուն կերպով լուծել վերը նշված բոլոր խնդիրները: Իրական տվյալների հիման վրա կառուցված բոլոր օրինակները լուծվել են 10^{-14} -ից 10^{-17} ճշտությամբ, ինչը մեր տեսանկյունից գնահատվում է բավարար:

Եզրակացություն

Ատենախոսությունում կատարված մաթեմատիկական մոդելավորման և գործնական կիրառության արդյունքում հանգում ենք հետևյալ եզրակացություններին՝

- ՀՀ կուտակային կենսաթոշակային հավասարակշռված տիպի ֆոնդերի համար Մարկովիցի դասական մեթոդաբանությամբ կառուցված էֆեկտիվ պորտֆելը կարող է հանգեցնել անկայուն արդյունքների:

- Ոչ-դինամիկ դասական մեթոդների կիրառությունը դիսկերի կառավարման, օպտիմալ պորտֆելների կառուցման և ներդրումային որոշումների կայացման մեջ կարող է լինել ոչ արդյունավետ: Դրա հիմնական պատճառն այն է, որ այդ մեթոդները հիմնվում են պատմական տվյալների վրա: Ի հակադրություն՝ մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդով կարճաժամկետ կանխատեսումները (հիմնված Եվրոպական քոլ օպցիոնների ներկա գների վրա) հնարավորություն են տալիս մոդելավորել ներկա շուկայական սպասումները և հասնել ավելի էֆեկտիվ արդյունքների:

- Եվրոպական քոլ օպցիոններում մաքսիմալ էնտրոպիայի օգտագործումը կիրառական տեսանկյունից հնարավոր եղավ ավելի պարզեցված և հասանելի դարձնել թիրախային խմբերի համար: Դա կատարվել է լուծման գոյության հստակ մաթեմատիկական ձևակերպման և իր ծրագրային իրականացման միջոցով:

- Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի միջոցով հնարավոր է կառուցել դիսկրետ բաշխումներ, որոնց վիճականիները հետագայում կարող են օգտագործվել ներդրումային, դիսկերի կառավարման, վերահսկողության և մի շարք այլ ֆինանսական տիպի խնդիրների մեջ: Այդ վիճականիները նաև կարելի է օգտագործել դասական մոդելների մեջ՝ փոխարինելով պատմական տվյալների հիման վրա հաշվված վիճականիները:

- Կատարելով կանխատեսված արդյունքների հետադարձ ստուգում (backtesting), եկանք այն եզրակացության, որ մաքսիմալ էնտրոպիայի միջոցով հնարավոր է ստանալ

շուկայի մասնակիցների սպասումներին ամենաքիչը հակասող տեղեկատվություն՝ հավանականային բաշխման տեսքով: Այս հատկությունը բնութագրվում է ստացված բաշխման առավելագույնս համասեռ լինելով:

- Մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդով ստացված բաշխումները որպես կանոն ունենում են ոչ-ստանդարտ տեսք: Դիտարկված օրինակների ճնշող մեծամասնությունում մոդի արժեքը բավականին մոտ է եղել մաքսիմալ առք-վաճառքի ծավալ ունեցող օպցիոնների կատարման գների, ինչը տրամաբանությանը մոտ է:

- Ստացված բաշխումների տեսքերը փոփոխվում են գնային նվազագույն աջակողմյան սահմանի իջեցման դեպքում և ցուցաբերում են անկայունություն, երբ այդ սահմանը մոտենում է մեր կողմից ստացված տեսական փոքրագույն արժեքին: Այդ նվազագույն արժեքը ստացվում է մեր կողմից դուրս բերված լուծման գոյության պայմանից:

- Վերը նշված հատկությունը չի ցուցաբերվում գնային ձախակողմյան միջակայքի փոփոխման դեպքում: Մեր դիտարկված օրինակներում բաշխման ձախակողմյան մասը հիմնականում ավելի «գծային» է եղել, մինչդեռ աջակողմյանը տեսքով մոտ է էքսպոնենցյալ անկմանը:

- Մոդելում ապագա կանխատեսվող գնային կետերը շատացնելուց մեծանում է նաև վերջնական բաշխման ընդհանուր էնտրոպիան, ինչը մոդելի տրամաբանությունից ելնելով որպես դրական հատկություն է դիտարկվում:

- Հիմնվելով մաքսիմալ էնտրոպիայի մեթոդի և մեր ստացված տեսական արդյունքների վրա, հնարավորություն ենք ունեցել որոշ արժեթղթերի համար կառուցել բաշխումներ՝ հիմնվելով իրական օպցիոնների գների վրա:

- Նաև կառուցվել են բաշխումներ՝ հիմնված սիմուլյացիոն տվյալների վրա, որպեսզի ստուգենք որքանով են օպցիոնների գների տատանումները ազդում մոդելի կանխատեսումների վրա:

Ստացված արդյունքները հնարավոր է կիրառել կենսաթոշակային հիմնադրամներում ինչպես ներդրումային որոշումների, այնպես էլ ռիսկերի

կառավարման և օպտիմալ պորտֆելների կառուցման խնդիրներում: Գրված ծրագրի մեջ և՛ տեսական, և՛ գործնական մեթոդների միջոցով ապահովվել է ցածր հաշվարկային բարդություն: Դրա շնորհիվ հնարավորություն է տրվում օգտագործել ծրագիրը ալգորիթմիկ առք-վաճառքի մեջ:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

- [1] “Global Pension Assets Study 2013.”, Thinking Ahead Institute, Towers Watson, January 2013.
- [2] “Defined Contribution Plan Participants’ Activities, 2016.”, Investment Company Institute, June 2017.
- [3] “Global Pension Assets Study 2018.”, Thinking Ahead Institute, Towers Watson, February 2018.
- [4] “Pension Funds Investment in Infrastructure A Survey.”, International Futures Programme, OECD, September 2011.
- [5] “Pensions at a Glance 2013 OECD and G20 Indicators.”, OECD, 2013.
- [6] Markowitz, H., “Portfolio Selection.”, The Journal of Finance, vol. 7, no. 1, pp. 77-91, March 1952.
- [7] Marek Capinski, Tomasz Zastawniak, “Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering.”, Springer, 2003.
- [8] В.И. Мальхин, “Финансовая Математика.”, Юнити, Москва, 2003.
- [9] David Lovelock, Marilou Mendel, A. Larry Wright, “An Introduction to the Mathematics of Money.”, Springer, 2007.
- [10] Hannes Marling, Sara Emanuelsson, “The Markowitz Portfolio Theory.”, math.chalmers.se, November 25, 2012.
- [11] K.V. Fernando, “Practical Portfolio Optimization.”, NAG Ltd, Oxford, United Kingdom.
- [12] John Norstad, “Portfolio Optimization Part 2 – Constrained Portfolios.”, March 28, 2005.

- [13] R.Tyrrell Rockafellar, Stanislav Uryasev, "Optimization of conditional value-at-risk.", *Journal of Risk*, vol. 2, no. 3, pp. 21-40, Spring 2000.
- [14] Sergey Sarykalin, Gaia Serraino, Stan Uryasev, "Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization.", *Tutorials in Operations Research*, INFORMS, pp. 270-294, 2008.
- [15] Ross S. "The Recovery Theorem." // *The Journal of Finance*, V.79, issue 2, 2015, pp. 615-648.
- [16] Alhassid Y., Agmon N., Levine R.D. "An Upper Bound for the Entropy and Its Applications to the Maximal Entropy Problem." // *Chem. Phys. Lett.*, 1978, v53, p22.
- [17] Alhassid Y., Agmon N., Levine R.D. "An Algorithm for Finding the Distribution of Maximal Entropy." // *Journal of Computational Physics*, 1979, v30, p250-258.
- [18] Levine R.D., Tribus M. "The Maximum Entropy Formalism." // Cambridge MA: MIT Press, 1978, p207-209.
- [19] Alhassid Y., Levine R.D. "Experimental and Inherent Uncertainties in the Information Theoretic Approach." // *Chem. Phys. Lett.*, 1980, v. 73, p. 16-20.
- [20] E. T. JAYNES, in "Statistical Physics" (K. W. Ford, Ed.), Vol. 3, p. 181, Benjamin, New York, 1963.
- [21] Buchen P.W., Kelly M. "The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices." // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1996, v31, p143-159.
- [22] Breeden, D.T., R.H. Litzenberger. "Price of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices." *Journal of Business*, 51 (1978), 621-651.
- [23] Brennan, M. "The Pricing of Contingent Claims in Discrete-Time Models." *Journal of Finance*, 34 (1979), 53-68.
- [24] Longstaff, F.A. "Option Pricing and the Martingale Restriction." Finance Working Paper No. 8-94, Univ. of California (May 1994).

- [25] Cover, T.M. and T.A. Joy. "Elements of Information Theory." New York, NY: John Wiley and Sons (1991).
- [26] R. ASH, "Information Theory," Interscience, New York, 1965.
- [27] Shimko, D. "Bounds of Probability." Risk, 6 (1990), 33-37.
- [28] Rubinstein M. "Implied Binomial Trees." // Finance Working Paper, 1994, v. 49-3, p. 771–818.
- [29] Shannon C.E. "A Mathematical Theory of Communication." // Bell Systems Technical Journal, 1948, v. 27, p. 379–423.
- [30] Ильин В. А., Позняк Э. Г., "Линейная алгебра", 1999.
- [31] Ильин В.А., Позняк Э.Г., "Основы математического анализа. В 2-х ч.", 1971.
- [32] Neri C., Schneider L. "A Family of Maximum Entropy Densities Matching Call Options" Prices. 2011. article Xiv:1102.0224v1 [q-fin.PR].
- [33] Borwein J. et al. "Probability Distributions of Assets Inferred from Option Prices via the Principle of Maximum Entropy." // SIAM J. OPTIM., 2003, v. 14, № 2, p. 464–478.
- [34] Rompolis L.S. "A New Method of Employing the Principle of Maximum Entropy to Retrieve the Risk Neutral Density." 2008.
- [35] Xishen Yu, Li Yang "Pricing American Options Using a Nonparametric Entropy Approach." // Hindawi Publishing Corporation, 2014, 16 p., article ID 369795.
- [36] Dominique Y.Dupont "Extracting Risk-Neutral Probability Distributions from Option Prices Using Trading Volume as a Filter." // Reihe Ökonomie / Economics Series 104.
- [37] Steven Shreve, "Stochastic Calculus for Finance, Springer Finance", 2004.
- [38] John C. Hull, "Options, Futures, and Other Derivatives (9th Edition)", 2014.
- [39] William F. Sharpe, "Investments (6th Edition)", 1998.
- [40] Н.В.Ефимов, Э.Р.Розендорн, "Линейная алгебра и многомерная геометрия", 1970.

[41] В.А.Емеличев, И.М.Ковалев, М.К.Кравцов, “Многогранники, Графы, Оптимизация (комбинаторная теория многогранников)”

[42] Ашманов С.А., “Линейное программирование.”

[43] S. GASS, “Linear Programming: Methods and Applications,” 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1975.

[44] Shmuel Kaniel, Achiya Dax, “A Modified Newton’s Method for Unconstrained Minimization”, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 16-2, Apr. 1979, pp. 324-331