УДАРНАЯ ВОЛНА В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Сусанна Мнацакановна Испирян
Доцент кафедры «Информационные технологии» ЕФ РЭУ
им. Г.В. Плеханова, кандидат технических наук

При изучении экономических задач часто сталкиваемся с проблемой, когда нарушается «равновесие» или «стабильность» экономических процессов, связанных с разными причинами. Поэтому становится актуальным выяснение возможной причины такого поведения экономического процесса, влияние ее на конкретный экономический объект.

Из-за того, что многие явления экономической жизни происходят в волновом режиме, периодически возрастая или убывая[1], в последнее время имеет место интенсивное применение методов, развитых в механике и прикладной математике, к экономическим задачам.

На основе аналогии с газовой динамикой и теорией упругости в работах[2, 3] изучались нелинейные слабые волны, описывающие динамику экономических процессов[4]. Полученные результаты можно применять, например, к известной экономической задаче[5], касающейся динамики движения ценных бумаг.

Рассмотрим некоторый детерминированный экономический процесс-поток «движения частиц» (ценных бумаг, количества товаров и т.д.) в дискретных объектах, расположенных на некоторой кривой линии, отождествляемой с осью **x ,** где x_i, i=1, 2, . . .N координаты на оси **x,** в которых расположены эти объекты.. Предположим, что под потоком «движения частиц» рассматривается детерминированный поток, представляющий собой количество частиц **J** - "проходящих» через точку **x** в единицу времени **t.** Введем еще и понятие плотности потока ρ**=** ρ(x, t), измеряемой как сглаженное значение количества частиц в данном объекте x_i, i=1, 2, . . .N (на единицу длины дороги) в момент времени t. Тогда J = ρ V, где V – скорость частиц (скорость распространения изменений, т.е. скорость волны). Будем считать, что функция J =

---

1 **Бурда М., Виплош Ч.** Макроэкономика, СПб.: Судостроение,1998.

2 **Lighthill M.J., Whitham G.B.** On Kinematik Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads //Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1955, Vol.229, № 1178.

3 **Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.** Определение ударной волны в нелинейных задачах теории упругости //Известия АН АрмССР, Механика, 1968, Т. 21, № 3.

4 **Багдоев А.Г., Варданян С.В., Карапетян Д., Мартиросян А.** Аналитические и численные исследования динамических процессов в экономике методами волновой динамики // Прикладная эконометрика, М., 2009, № 1 (13), сс. 50-69.

5 **Fisher B., Myron S.** The Pricing of Options and Corporative Liabilities // J. of Polit. Econ., 1973, Vol. 81, № 3.

J(ρ) определяется экспериментально и плотность ρ влияет на скорость движения потока, причем, чем больше плотность ρ, тем меньше должна быть скорость *V*, но при этом ρ*V* может и быть больше. Зависимость J = J(ρ), например, у Лайтхилл и Уайтхам[1] имеет следующий вид (Рис.1).

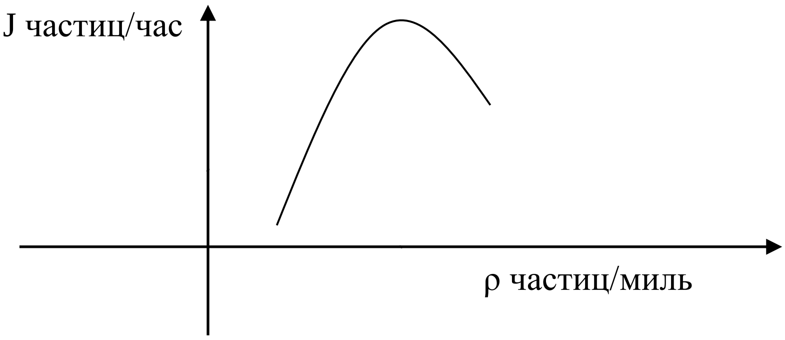

Рис.1.

Как видно из Рис.1 функция J(ρ) на некотором интервале ρ возрастает, на другом – убывает. Это говорит о том, что знак $J'(\rho)$ непостоянный на области изменения ρ. А

что касается знака $J''(\rho)$, то $J''(\rho) < 0$, так как график на рис.1 выпуклый. Таким образом, зависимость J от его плотности ρ в конкретном случае нужно выяснить из опыта, который можно провести для одного базового объекта(например, при x = 0, наблюдая, как от ρ зависит поток J).

Из-за того, что предлагаемая математическая модель аналогична модели для решения волновых задач нелинейной газовой динамики и задач теории упругости, необходимо экспериментально полученную дискретную функцию J от плотности ρ , интерполируя, получить дифференцируемую функцию J(ρ) (так же, при необходимости, можно дискретную плотность $\rho(x_m, t_n)$, где m=0, 1, 2, . . ., M, n=0, 1, 2, …, N заменить дифференцируемой функцией с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа для функции двух переменных).

Пусть нам известны числовые значения $J_0, J_1, \ldots, J_n$ потока J, соответствующие числовым значениям $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n$ величины ρ(узлы интерполирования). Считая

J функцией от ρ составим таблицу из упомянутых чисел.

(1)

ρ	ρ_0	ρ_1	ρ_2	. . .	ρ_n
J	J_0	J_1	J_2	. .	J_n

Часто возникает потребность в уплотнении имеющейся таблицы, т.е. в вычислении промежуточных значений J, не предусмотренных в таблице, обходясь при этом только имеющимся запасом табличных значений этой величины J. Столь же

[1] **Lighthill M.J., Whitham G.B.** On Kinematik Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads//Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1955, Vol.229, № 1178.

часто нужно бывает найти на базе таблицы аналитическое выражение некоторой функции $J = \varphi(\rho)$, которая принимала бы табличные значения J_k $k=0, 1, \ldots, n$ при табличных значениях ρ_k . Обычно, в качестве $\varphi(\rho)$ берут многочлен степени, не превосходящей **n,** обладающей таким свойством(интерполирующий многочлен). Интерполяционный многочлен Лагранжа является одним из методов интерполирования. Опираясь на таблицу (1) запишем интерполяционный многочлен Лагранжа в следующем виде.

$$\varphi(\rho) = A_0(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_n) + A_1(\rho - \rho_0)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_n) + \ldots + A_n(\rho - \rho_0)(\rho - \rho_1)\ldots(\rho - \rho_{n-1}). \quad (1)$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$ будем полагать в написанном равенстве поочередно $\rho = \rho_0; \rho = \rho_1; \ldots; \rho = \rho_n$, требуя при этом, чтобы $\varphi(\rho_0) = J_0, \varphi(\rho_1) = J_1, \ldots, \varphi(\rho_n) = J_n$. Тогда получаем

$$A_0 = \frac{J_0}{(\rho_0-\rho_1)(\rho_0-\rho_2)\ldots(\rho_0-\rho_n)}; \quad A_1 = \frac{J_1}{(\rho_1-\rho_0)(\rho_1-\rho_2)\ldots(\rho_1-\rho_n)}; \ldots;$$

$$A_n = \frac{J_n}{(\rho_n-\rho_0)(\rho_n-\rho_1)\ldots(\rho_n-\rho_{n-1})}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в выражение интерполяционного многочлена получим интерполяционную формулу Лагранжа для $J(\rho)$.

$$J(\rho)=\frac{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\ldots(\rho-\rho_n)}{(\rho_0-\rho_1)(\rho_0-\rho_2)\ldots(\rho_0-\rho_n)}\cdot J_0+\frac{(\rho-\rho_0)(\rho-\rho_2)\ldots(\rho-\rho_n)}{(\rho_1-\rho_0)(\rho_1-\rho_2)\ldots(\rho_1-\rho_n)}\cdot J_1+\ldots+\frac{(\rho-\rho_0)(\rho-\rho_1)\ldots(\rho-\rho_{n-1})}{(\rho_n-\rho_0)(\rho_n-\rho_1)\ldots(\rho_n-\rho_{n-1})}J_n \quad (2)$$

Полагая в (2) ρ равным нужному нам промежуточному (не табличному) значению, получим соответствующее промежуточное (не табличное) значение J. При табличных же значениях $\rho = \rho_k$ получим соответствующие табличные значения J_k.

Так как $J(\rho) = \varphi(\rho)$ многочлен, то существует $J^{(k)}(\rho)$ (производная произвольного k-го порядка) и является дифференцируемой функцией($k = 1, 2, \ldots$).

Теперь, предполагая, что рассматриваемая нами экономическая задача представляет собой волновое движение в определенной экономической среде, запишем уравнение сохранения числа частиц в виде(считая $\rho(x, t)$- дифференцируемой функцией):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

откуда получается следующее нелинейное уравнение для ρ:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + J'(\rho)\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) имеет вид уравнений характеристик (они имеют вид прямых), вдоль которых ρ имеет постоянные значения. При этом условии (4) можно написать в виде:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = J'(\rho), \quad \rho = \mathrm{const} \quad (5)$$

Интегрируя (5) получим уравнения характеристик

$$\mathbf{x = x_0 + J'(\rho) \cdot t \text{ , (6)}}$$

где x_0 - это тот объект, который при t = 0 имеет плотность $\rho = \rho(x_0, 0)$. Пусть начальное распределение плотности при t = 0 будет $\rho = \rho_0(x)$, тогда (6) можно написать в следующем виде:

$$\mathbf{x = x_0 + J'(\rho) \cdot t \text{ , } \rho = \rho_0(x_0) \text{ , (7)}}$$

решение которого представляет собой веер характеристик. Вид этих характеристик показан на Рис.2 .

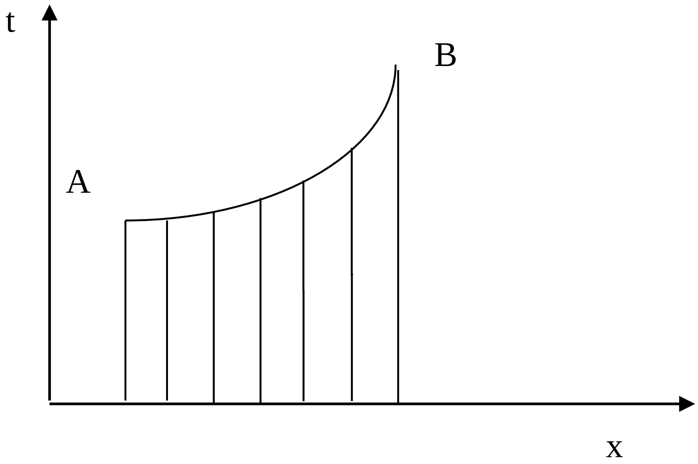

Рис. 2. Картина прямых характеристик.

Пусть $\rho = \rho_0(x) = const = \rho_1$. Придадим приращение (возмущение) ρ_1 в виде: $\rho' = \rho - \rho_1$, и для объекта $x = x_0$ полагаем известным изменение ρ' как функции F времени t

$$\mathbf{\rho' = F(t) \text{ , (8)}}$$

причем следует определить $\rho(x, t)$ для любой точки плотности (x, t). В общем случае, для произвольных изменений ρ' можно изучить решения (7) и выяснить условия, при которых пересекаются уравнения характеристик, т.е. определить условия, при которых образуется неоднозначность решения. Как известно из газовой динамики[1], подобная неоднозначность приводит к образованию разрыва AB (ударной волны) (см. Рис.2), отсекающего область неоднозначности.

Аналогическими рассуждениями, сделанными для газовой динамики, получим уравнение нелинейных характеристик в виде:

$$\mathbf{t - \frac{x}{a_0} + \frac{\gamma x}{a_0^2} \cdot \rho' = f(\rho') \text{ , (9)}}$$

где $a_0 = J'(\rho_1)$ - постоянная линейная скорость возмущения; $\gamma = J''(\rho_1)$ - постоянный нелинейный коэффициент; f – произвольная функция. Обозначим $f(\rho') = y_1$, тогда $\rho' = F(y_1)$ ((8)), следовательно, решение (9) примет вид:

$$\mathbf{t - \frac{x}{a_0} + \frac{\gamma x}{a_0^2} \cdot F(y_1) = y_1 \text{, (10)}}$$

где $y_1 = const$.

---

[1] **Багдоев А.Г.** Некоторые нелинейные задачи движения сжимаемой жидкости, Ереван: Гитутюн, 1967.

По работе[1] сможем утверждать, что на ударной волне выполняется следующее условие:

$$V = a_0 + \frac{\gamma}{2} \cdot \rho', \quad (11)$$

где V – скорость ударной волны, впереди которой имеет место $\rho = \rho_1$.

Подставляя (11) в (10) и учитывая, что $V = \frac{dx}{dt}$, а затем дифференцируя (10) по t (при условии, что $x = x(t)$ вдоль (11)), получим уравнение на ударной волне[2]:

$$F^2(y_1) = \frac{2a_0^2}{\gamma x} \cdot \int_0^{y_1} F(z)dz, \quad (12)$$

где вид $F(y_1)$ задается по (8) на объекте x.

Анализируя полученное уравнение (12) приходим к следующим выводам:

1) Если $F(y_1)\, J''(\rho_1) < 0$, то , считая $J''(\rho_1) < 0$, т.е. $J'(\rho)$ убывающая функция, уравнение (12) имеет решение только при $F(y_1) = 0$, а это значит, что ударная волна отсутствует. Например, при $J''(\rho_1) < 0$, и $F(y_1) > 0$ (т. е. плотность частиц растет: $F(y_1) = \rho' = \rho - \rho_1 > 0$ вдоль линии), то характеристические линии начинаются на оси t, а затем расходятся и ударной волны не возникнет.

2) Если же $F(y_1)\, J''(\rho_1) > 0$, т.е. $J''(\rho_1) < 0$ и $F(y_1) < 0$, то наблюдается уменьшение плотности по сравнению с ее значением ρ_1 и образуется ударная волна.

Предположим, что на первом объекте, при $x = 0$, плотность меняется по формуле

$$F(t) = \rho_2 - \rho_1 + A\sqrt{t}, \quad (13)$$

где A= const. При t=0 она изменяется скачком от начального значения ρ_1 до некоторого $\rho_2 > \rho_1$, $A < 0$ (иначе получится $F > 0$ и ударной волны не будет). Тогда из (12), путем интегрирования, получится:

$$(\rho_2 - \rho_1 + A\sqrt{y_1})^2 = \frac{2a_0^2}{\gamma x} \cdot \left\{(\rho_2 - \rho_1)y_1 + \frac{2}{3}Ay_1^{\frac{3}{2}}\right\} \quad (14)$$

Задавая ρ_1, ρ_2, γ, a_0, из (14) можно найти y_1 как функцию от x решив кубическое уравнение относительно $y_1^{\frac{1}{2}}$, а затем - $\rho' = F(y_1)$ опираясь на (13), после чего по (10) получить уравнение ударной волны.

В частном случае, при $\rho_2 = \rho_1$, из (14) получится

$$y_1^{\frac{1}{2}} = \frac{3A\gamma x}{4a_0^2}, \quad \rho' = \frac{3A^2\gamma x}{4a_0^2}$$

и уравнение ударной волны в этом случае будет:

$$t - \frac{x}{a_0} + \frac{3A^2\gamma^2 x^2}{16a_0^4} = 0, \text{ где } \gamma < 0. \quad (15)$$

Из уравнения (15) вытекает, что объект $x = 0$ входит в ударную волну при t=0

---

[1] **Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.** Определение ударной волны в нелинейных задачах теории упругости // Известия АН АрмССР, Механика, 1968, Т. 21, № 3.

[2] Там же.

(координаты (x, t)=(0, 0) удовлетворяют (15)).

Обобщая, можно сделать такой вывод: при исследовании экономических задач, если их можно рассматривать как волновое движение, с точки зрения задачи нахождения ударной волны(затора), нужно:

1) по дискретным данным ρ для произвольного дискретного объекта x построить дифференцируемую функцию J(ρ) (экспериментальное нахождение J(ρ) будет одинаково для произвольного объекта x, т.к. экономический процесс – волновое движение);

2) найти $J'(\rho)$, $J''(\rho)$ по построенной функции J = J(ρ);

3) выбрать объект x и определить плотность в этом объекте в момент t=0;

4) определить функцию $\rho' = F(t)$ для объекта x ($x = x_k$, k=0, 1, 2, ….N , где N количество объектов);

5) выяснить появление ударной волны по этим данным: если да, то по полученному уравнению ударной волны определится – какой объект в какой момент окажется в данной ударной волне.

УДАРНАЯ ВОЛНА В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Сусанна Мнацакановна Испирян

Доцент кафедры «Информационные технологии» ЕФ РЭУ им. Г.В. Плеханова, кандидат технических наук

Аннотация

Во многих экономических задачах, рассматривая экономические процессы в волновом режиме, периодически возрастая и убывая, приходится сталкиваться с проблемой, когда нарушается «равновесие» этих процессов.

В данной статье предлагается математическая модель указанных экономических задач, аналогичная модели для решения волновых задач нелинейной газовой динамики и задач теории упругости. Приводятся также шаги для исследования экономических задач с точки зрения задачи нахождения ударной волны.

Ключевые слова: ударная волна, газовая динамика, теория упругости, волновой режим, нелинейная задача, уравнение ударной волны, уравнение нелинейных характеристик, плотность потока, скорость движения потока.

ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԸ ՏՆՏԵՍԱԳԻՏԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Սուսաննա Մնացականի Իսպիրյան
Գ.Վ. Պլեխանովի անվան ՌՏՀ Երևանի մասնաճյուղի Ինֆորմացիոն տեխնոլոգիաների ամբիոնի դոցենտ, տեխնիկական գիտությունների թեկնածու

Համառոտագիր

Բազմաթիվ տնտեսական խնդիրներում, դիտարկելով տնտեսական գործընթացները որպես ալիքային ռեժիմում պրոցեսներ՝ պարբերաբար աճող եւ նվազող, երբեմն ստիպված են լինում բախվել այնպիսի խնդրի հետ, երբ խախտվում է գործընթացների «հավասարակշռությունը»:

Հոդվածում առաջարկվում է նշված տնտեսական խնդիրների մաթեմատիկական մոդել, որը ոչ գծային գազային դինամիկայի ալիքային խնդիրների և առաձգականության տեսության խնդիրների լուծման մոդելի անալոգն է: Առաջարկվում են նաև տնտեսական այն խընդիրների ուսումնասիրության քայլերը, որոնք կապված են հարվածային ալիք գտնելու հետ:

Հիմնաբառեր. հարվածային ալիք, գազի դինամիկա, առաձգականության տեսություն, ալիքային ռեժիմ, ոչ գծային խնդիր, հարվածային ալիքի հավասարում, ոչ գծային բնութագրիչների հավասարում, հոսքի խտություն, հոսքի շարժման արագություն:

SHOCK WAVE IN ECONOMIC TASKS

Susanna Mnatsakan Ispiryan
Associate Professor of the Department of "Information Technology" of YB Plekhanov Russian University of Economics, PhD in technical sciences

Abstract

In many economic problems, considering economic processes in the wave mode, periodically increasing and diminishing, one has to face the problem when the “balance” of these processes is disturbed.

This article proposes a mathematical model of these economic problems, similar to the model for solving wave problems of nonlinear gas dynamics and problems of the theory of elasticity. Steps are also given for the study of economic problems from the point of view of finding a shock wave.

Keywords: Shock wave, gas dynamics, theory of elasticity, wave mode, nonlinear problem, equation of a shock wave, equation of nonlinear characteristics, flux density, flow velocity.