ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ԳՈՐԻՍԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Ա. Ս. ԴԻՆՈՒՆՑ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆ 2009

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ԳՈՐԻՍԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոն

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, Ա. Ս. ԴԻՆՈՒՆՑ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆ
ՃԱՐՏԱՐԱԳԵՏ
2009

ՀՏԴ 510.6(07)
ԳՄԴ 22.12 g 7
Մ 394

Տպագրված է համաձայն Գորիսի պետական համալսարանի ԳԽ-ի 19.09.08թ. նիստի:

Մարտիրոսյան Ա. Ն., Դինունց Ա. Ս.

Մ 394 Մաթեմատիկական տրամաբանության տարրեր: Ուսումնական ձեռնարկ.- Եր.:Ճարտարագետ, 2009թ. -72 էջ:

Ուսումնական ձեռնարկը նախատեսված է ձևական մեթոդներ օգտագործող տեսություններից(մաթեմատիկական տրամաբանություն, թվային համակարգեր, կիբեռնետիկա, հավանականությունների տեսություն) մաթեմատիկական տրամաբանության համալսարանական ինգամսյա ծրագրային նյութի իրականացման համար:

Գրախոսներ`
ԳՊՀ Մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոնի ասիստենտ Հ. Ս. Մալինցյան

ԵՊՀ Ծրագրավորման և ինֆորմացիոն տեխնոլոգիաների ամբիոնի ասիստենտ, ֆ. մ. գ. թ. Լ. Է. Բուդաղյան

Խմբագիր` Յու. Սաֆարյան

ԳՄԴ 22.12 g7

ISBN 978-9939-55- 196-8

Ներածություն

Մտածողության ձևերի ուսումնասիրությամբ զբաղվում է տրամաբանությունը: Տրամաբանության հիմնադիր ընդունված է համարել Արիստոտելին, որի աշխատություններում առաջին անգամ ի մի են բերված և համակարգված այն հիմնախնդիրները, որոնք հետագայում կոչվել են տրամաբանական: Նոր ժամանակներում տրամաբանության զարգացման մեջ մեծ ներդրում են կատարել Ֆ. Բեկոնը և այլ մտածողներ: XVII-XVIII դարերում փիլիսոփայության ընդերքում ձևավորվել էր ավանդական կամ դասական, ձևական տրամաբանությունը: Նրա օրենքներն էին` նույնության, հակասության, անթույլատրելիության, երրորդի բացառման և բավարար հիմունքի օրենքները:

Ձևական տրամաբանության հետագա զարգացումը կապված է մի կողմից տրամաբանական վերլուծության նոր միջոցների կիրառման, մյուս կողմից, գիտական ճանաչողության զարգացմամբ առաջ քաշված ապացուցման նոր ձևերի ուսումնասիրման հետ: Մշակվեց մաթեմատիկական սիմվոլիկա տրամաբանական խնդիրների լուծման համար: Ձևական տրամաբանության օգտագործումը մաթեմատիկայում, մասնավորապես նրա հիմնավորման նպատակով, առաջ բերեց նաև բուն ձևական տրամաբանության զարգացում: Այդպես առաջացավ ձևական տրամաբանության մի նոր տարատեսակ, որը կոչվում է սիմվոլիկ կամ մաթեմատիկական: Ներկայումս նրա վերլուծության առարկան գերազանցապես արհեստական, ձևականացված լեզուներն են, այն ուսումնասիրում է նրանց շարահյուսությունը և իմաստաբանությունը: Տրամաբանական շարահյուսությունը ձևակերպում է լեզվական արտահայտությունների կառուցման և ձևափոխման կանոնները միայն ձևական առումով` առանց հաշվի առնելու դրանց արտահայտած բովանդակությունը: Տրամաբանական իմաստաբանությունը վերլուծում է լեզվական համակարգերը` դրանց տարրերի նշանակությունը վերհանելու նպատակով:

Տեսական գիտելիքի ձևական-տրամաբանական վերլուծոթյունը մեծ արդյունքներ է տվել: Այսպես, կիբերնետիկան անհնարին կլիներ առանց արհեստական, ձևականացված լեզուների հիմքի վրա գիտելիքի վերլուծության մեթոդի ստեղծման: Այդ մեթոդի բազայի վրա կարելի է վերլուծել եղած գիտելիքը, համապատասխան ձևով վերակառուցել այն ու հնարավորության չափով արտահայտել խստիվ ձևականացված համակարգում և մարդկային մտածողության որոշ ֆունկցիաներ տալ մեքենային: Ձևական տրամաբանության միջոցներով գիտելիքի վերլուծությունը նպաստում է նաև նոր գիտելիքի ձեռքբերմանը, քանի որ այն օգնում է վեր հանելու որոշ պակասող տարրեր, որոնք անհրաժեշտ են խստիվ ձևականացված տեսության կառուցման համար և մարդկային միտքն ուղղել դրանց որոնմանը:

ԳԼՈՒԽ 1. ԱՍՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՇԻՎ

§1.1. Ասույթներ, գործողություններ դրանց հետ

Ցանկացած մաթեմատիկական տեսություն իրենից ներկայացնում է որոշակի առաջադրությունների, մասնավորաբար, նախադասությունների համախմբություն: Նախադասություն ասելով կհասկանանք այն, ինչը սովորաբար հասկանում են որևէ լեզվի քերականությունում, այսինքն իմաստ ունեցող բառերի իմաստային միավորում:

Սահմանում: Իմաստ ունեցող պատմողական բնույթի նախադասությունը, որը ժամանակի տվյալ պահին կարող է լինել ճիշտ (ճշմարիտ) կամ կեղծ(սխալ), անվանում են ասույթ:

Դա նշանակում է, որ յուրաքանչյուր ասույթի վերագրվում են ճշմարտացիության երկու արժեքներ՝ ճիշտ կամ կեղծ: Այսինքն ասույթը կարելի է դիտարկել մեծություն, որը կարող է ընդունել երկու արժեք՝ ճիշտ կամ կեղծ (հետագայում տրամաբանական ճիշտ և կեղծ արժեքների փոխարեն երբեմն կօգտագործենք համապատասխանաբար 1 և 0):

Օրինակներ՝

- Երկու անգամ երկուսը չորս է:- Ասույթը ճշմարիտ է և նրան կվերագրենք 1 արժեք($\equiv 1$)
- Գորիսը Հայաստանի մայրաքաղաքն է:- Ասույթը սխալ է և նրան կվերագրենք 0 արժեք($\equiv 0$)

Որպես կանոն ասույթներ չեն հանդիսանում հարցական և բացականչական նախադասությունները, ինչպես նաև՝ փոփոխական պարունակող նախադասությունները: Այսպես հետևյալ արտահայտություններում՝ «$x > y$», «x-ը պարզ թիվ է», x, y-ը որոշված են իրական թվերի բազմության վրա, x, y-ի փոխարեն տեղադրելով արժեքներ իրենց որոշման տիրույթներից, կստանանք ասույթներ, որոնք կլինեն ճիշտ կամ կեղծ: Սա նշանակում է որ ասույթները կստանան 1 կամ 0 արժեքները:

Իրոք, «$2 > 3$»$\equiv 0$, «2-ը պարզ թիվ է»$\equiv 1$

Փաստորեն, «$x > y$», «x-ը պարզ թիվ է», ասույթ չեն հանդիսանում, քանի որ հնարավոր չէ ասել՝ նրանք կեղծ են, թե

ճիշտ, երբ մենք չգիտենք, թե ինչի են հավասար x-ը և y-ը: Բայց նրանք վեր են ածվում ճիշտ կամ կեղծ ասույթների x, y արգումենտների կոնկրետ թվային արժեքների դեպքում:

Ըստ էության՝ մեր կողմից վերը բերված արտահայտությունները հատուկ տիպի ֆունկցիաներ են, որոնց արգումենտներն ընդունում են թվային ցանկացած արժեքներ, իսկ ֆունկցիաները՝ միայն երկու արժեք՝ **ճիշտ** (1) կամ **կեղծ** (0):

Եթե x և y արգումենտների համապատասխանաբար 2 և 3 արժեքները գրենք մի աղյուսակում, ապա «$x > y$» արտահայտությունը կընդունի հետևյալ արժեքը՝

x	y	«$x > y$»
2	3	0(կեղծ)

Այս տեսքի աղյուսակներին անվանում են ճշմարտության աղյուսակներ կամ ասույթների ճշմարտաֆունկցիոնալ նկարագրեր: Այսինքն՝ աղյուսակը, որում ցուցանշվում է ֆունկցիայի (հետագայում՝ մինչդիրքային ձևի) ճշմարտացիության արժեքը նրա մեջ մտնող բոլոր ասույթների(հետագայում՝ մինչդիրքային տառերի) հնարավոր ճշմարտացիության արժեքներին համապատասխան, կանվանենք ճշմարտության աղյուսակ:

Օրինակ՝

A	$\overline{A}$	$\overline{(\overline{A})}$
ճ	կ	ճ
կ	ճ	կ

Փաստորեն, յուրաքանչյուր մինչդիրքային ձև որոշում է որոշակի ճշմարտության(բուլյան) ֆունկցիա, որը կարող է գրաֆիկորեն ներկայացնել տվյալ մինչդիրքային ձևի ճշմարտության աղյուսակը: Եթե մինչդիրքային ձևում կան n տարբեր տառեր, այդ դեպքում հնարավոր են տառերի համար 2 տարբեր ճշմարտությամբ արժեքների բաշխում, և, հետևաբար, այդ ձևի ճշմարտության աղյուսակը կունենա 2^n հատ տող:

Օրինակ՝ $\left((A \Rightarrow B) \vee \left(\overline{A}\right)\right)$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A}$	$\left((A \Rightarrow B) \vee \left(\overline{A}\right)\right)$
ճ	ճ	ճ	կ	ճ
կ	ճ	ճ	ճ	ճ
ճ	կ	կ	կ	կ
կ	կ	ճ	ճ	ճ

Մինչդիրքային ձևում կա 2 տառ, ըստ այդմ էլ աղյուսակը կունենա $2^2 = 4$ հատ տող:

Պայմանավորվենք ասույթները նշանակել լատինական այբուբենի մեծատառերով՝ $A, B, C, \ldots, Z$, ինչպես նաև թվային ինդեքսներ պարունակող մեծատառերով՝ $A_1, B_2, \ldots$, և անվանել մինչդիրքային տառեր(տարրական բանաձև, ատոմ,...), իսկ նրանց արժեքները, այսինքն ճիշտը(1) և կեղծը(0), համապատասխանաբար, «ճ» և «կ»:

Մի քանի ասույթների միավորումից կարելի է ստանալ նորերը: Այդ միավորումը կկատարենք՝ օգտագործելով առօրյա խոսակցական լեզվի շաղկապները՝ և, կամ, ...

Այսպես՝ ենթադրենք տրված են երկու ասույթներ՝ «π թիվը մեծ է 3-ից» և «π թիվը փոքր է 4-ից» ասույթները:

Օգտագործելով «և» շաղկապը՝ այս երկու ասույթներից կստանանք «π թիվը մեծ է 3-ից և π թիվը փոքր է 4-ից» ասույթը:

Այս դեպքում միավորվող ասույթներին՝ «π թիվը մեծ է 3-ից» ասույթը և «π թիվը փոքր է 4-ից», անվանում են պարզ ասույթներ, իսկ արդյունարար «π թիվը մեծ է 3-ից և π թիվը փոքր է 4-ից» ասույթին՝ բաղադրյալ ասույթ:

Ասույթների միավորման ընթացքում օգտագործվող շաղկապներին համապատասխան տրամաբանության դասընթացում

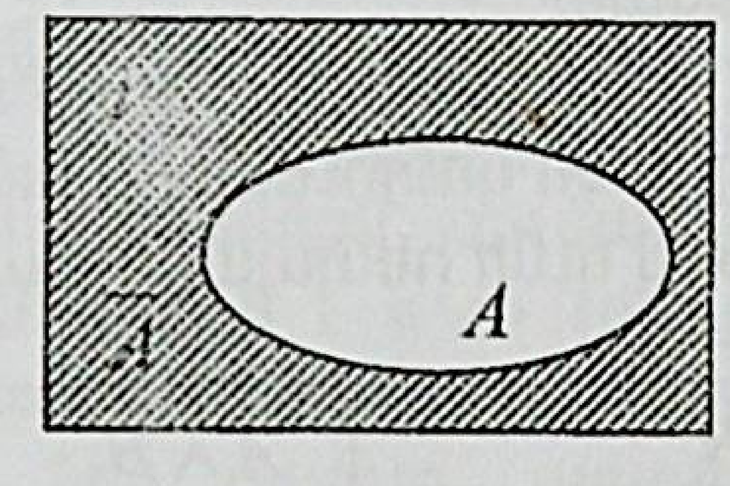
օգտագործում են հետևյալ տրամաբանական գործողությունները, որոնց անվանում են մինչդիրքային կապեր (տրամաբանական նշաններ կամ պրոպոզիցիոն սիմվոլներ), այն է՝

1. Ժխտում:

Եթե խոսակցական լեզվում այս կամ այն նախադասությունը կարող է ժխտվել տարբեր մեթոդներով, ապա ասույթների ժխտումը կանենք մեկ մեթոդով՝ բոլոր ասույթները վերևից ընդգծելով « ‾ » նշանով կամ նրանից առաջ դնելով « ⌉» նշանը: Այսպես՝ եթե A-ն ասույթ է, ապա $\overline{A}$ $(\rceil A)$-ն նշանակում է A-ի ժխտում և կարդացվում է «ոչ A» կամ «ճիշտ չէ, որ տեղի ունի A ասույթը»:

Ժխտման ճշմարտաֆունկցիոնալ նկարագիրը դառնում է պարզ, եթե բերենք հետևյալ ճշմարտության աղյուսակը՝

A	$\overline{A}$
ճ	կ
կ	ճ



Նկ.1

Օրինակ՝

$A \equiv$ «25 թիվը չի բաժանվում 8-ի» $\equiv 1$, $\overline{A} \equiv$ «25 թիվը բաժանվում է 8-ի» $\equiv 0$

$B \equiv «5+3=8» \equiv 1$, $\overline{B} \equiv «5+3 \neq 8» \equiv 0$

$C \equiv$ «20-ը պարզ թիվ է» $\equiv 0$, $\overline{C} \equiv$ «20-ը պարզ թիվ չէ» $\equiv 1$

$A, B, \overline{C}$ ասույթները ճիշտ են, իսկ $\overline{A}, \overline{B}, C$ ասույթները՝ կեղծ:

Իր հերթին ժխտումը բազմությունների տեսությունում ունի յուրօրինակ մեկնաբանություն. տրամաբանական գործողությունները ուղղակիորեն զուգորդվում են բազմությունների հետ կատարվող գործողությունների հետ:

Դիտարկենք որոշակի I ունիվերսալ բազմություն: $A, B, C, \ldots, Z$ ասույթները համապատասխանեցնենք I-ի ենթաբազմությունների հետ՝ ասույթները և նրանց հետ կատարվող գործողությունները ներկայացնելով էյլերի գծապատկերների տեսքով, իսկ նրանց ընդունելիք արժեքները՝ «ճ» և «կ», համապատասխանաբար, մեկնաբանելով որպես «պատկանում է» և «չի պատկանում»: Այդ դեպքում A ասույթի ժխտմանը համապատասխանում է A բազմության լրացումը(նկ.1-ում ստվերագծված տիրույթն է):

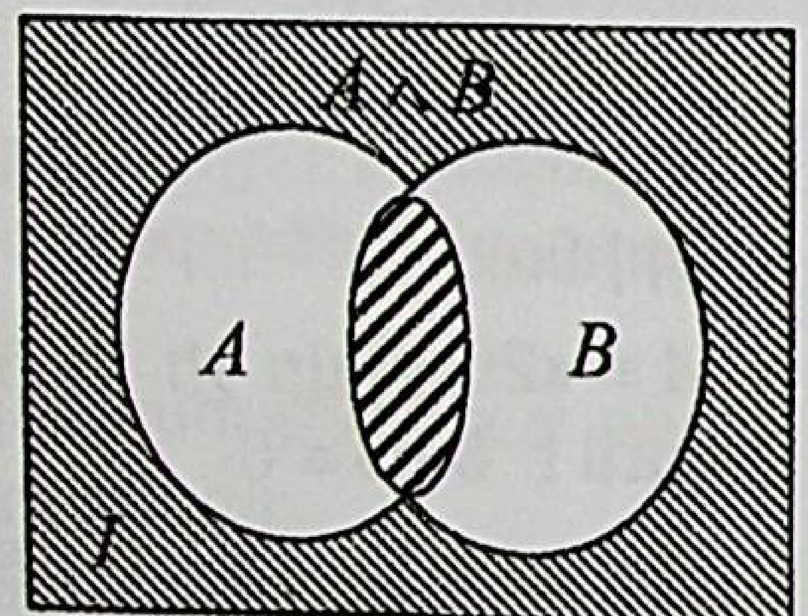
2. Կոնյունկցիա:

Տրված A և B ասույթների կոնյունկցիա (տրամաբանական արտադրյալ) կնշանակենք $A \wedge B$ կամ $A \& B$ (կարդացվում է «A և B»): Կոնյունկցիան սահմանվում է հետևյալ կերպ. ճիշտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն և B-ն ճշմարիտ են միաժամանակ:

A և B ասույթները կոչվում են $A \wedge B$ կոնյունկցիայի անդամներ կամ կոնյունկտիվ անդամներ:

$A \wedge B$-ն ունի հետևյալ ճշմարտության աղյուսակը՝

A	B	$A \wedge B$
ճ	ճ	ճ
կ	ճ	կ
ճ	կ	կ
կ	կ	կ



Նկ.2

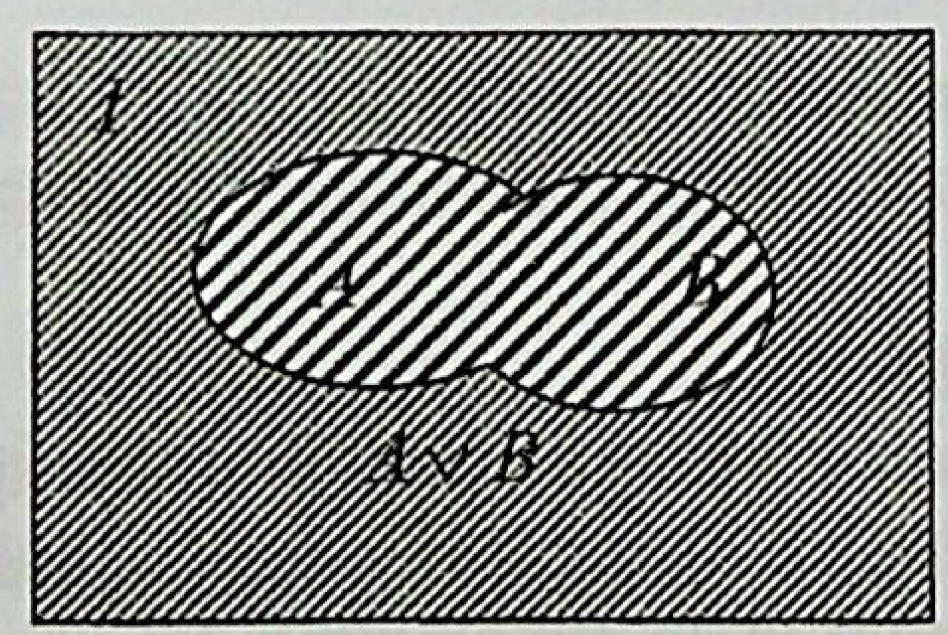
Օրինակ՝ դիցուք $A \equiv «22 < 12» \equiv 0, B \equiv «12 < 19» \equiv 1$ երկու ասույթներ են, այդ դեպքում $C = A \wedge B \equiv «(22<12) \wedge (12<19)»$ ասույթը կեղծ է:

Բազմությունների տեսությունում A և B ասույթների կոնյունկցիային համապատասխանում է A և B բազմությունների հատումը(նկ.2-ում ստվերագծված տիրույթն է):

3. Դիզյունկցիա:

Առօրյա խոսակցական լեզվում «կամ» շաղկապը կիրառվում է երկու տարբեր իմաստներով՝ բացառող և չբացառող: *Առաջին դեպքում* A կամ B նշանակում է, որ բացառվում է A և B ասույթների համատեղ իրականանալը: Այսպես, օրինակ, «Վաղը ժամը 12-ին ես կլինեմ կամ աշխատավայրում, կամ էլ տանը»: Քանի որ հնարավոր չէ միաժամանակ ժամը 12-ին լինել և՛ տանը, և՛ աշխատավայրում, ապա այստեղ «կամ» շաղկապը հասկացվում է բացառող իմաստով՝ բացառելով նախադասության մասերի միավորում: *Երկրորդ դեպքում* «Վաղը ես կգնամ խանութ և թատրոն» ասույթը կեղծ է միայն այն դեպքում, երբ ես չեմ գնա ոչ թատրոն և ոչ էլ խանութ և այն ճիշտ է, երբ նշվածներից գոնե մի տեղ գնացել եմ: Ահա տրամաբանության մեջ հենց այս տիպի դիզյունկցիան է օգտագործվում որպես տրամաբանական գումար: Այսպիսի դիզյունկցիայի համար օգտագործվում է «$\vee$» (դիզյունկցիա-տրամաբանական գումար) նշանը: Այս նշանով կապվում են երկու ասույթներ՝ որպես մի նոր ասույթ, այսինքն երկու ասույթներով սահմանվում է նորը: Դիզյունկցիա գործողության արդյունքը կեղծ է այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն և B-ն կեղծ են միաժամանակ և ունի հետևյալ ճշմարտության աղյուսակը՝

A	B	$A \vee B$
ճ	ճ	ճ
կ	ճ	ճ
ճ	կ	ճ
կ	կ	կ



Նկ.3

Օրինակ՝ $A \equiv$ «$5 > 2$ կամ $5 = 2$» $\equiv 1$

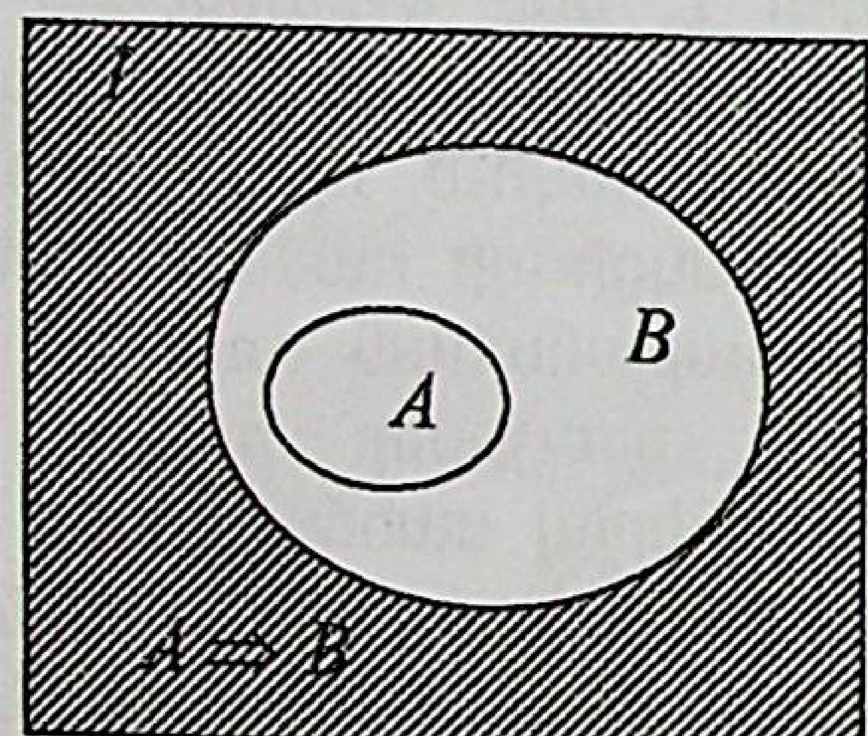
Բազմությունների տեսությունում A և B ասույթների կոնյունկցիային համապատասխանում է A և B բազմությունների միավորումը(Նկ.3-ում ստվերագծված տիրույթն է):

4. Իմպլիկացիա:

Մյուս կարևոր ճշմարտաֆունկցիոնալ գործողությունը հանդիսանում է «հետևում է» գործողությունը, այսինքն «եթե A, ապա B»: Կնշանակենք «եթե A, ապա B» ասույթը $A \Rightarrow B$ կամ $A \supset B$ և կկարդանք «A իմպլիկացիա B», նաև՝ «եթե A, ապա B»: Իմպլիկացիայի առաջին A անդամը (պայմանը) կոչվում է անտեցեդենտ, իսկ երկրորդ B անդամը (եզրակացությունը) կոչվում է կոնսեկվենտ:

Կընդունենք, որ «եթե A, ապա B» ասույթը կեղծ է այն և միայն այն դեպքում, երբ A պայմանը ճիշտ է և B եզրակացությունը՝ կեղծ: Ահա իմպլիկացիայի ճշմարտության աղյուսակը՝

A	B	$A \Rightarrow B$
ճ	ճ	ճ
կ	ճ	ճ
ճ	կ	կ
կ	կ	ճ



Նկ.4

Օրինակ՝ «եթե $25 > 12$ և $12 > 5$, ապա $25 > 5$» $\equiv 1$,
«եթե թիվը բաժանվում է և՛ 2-ի, և՛ 3-ի, ապա այն բաժանվում է
6-ի» $\equiv 1$:

Բազմությունների տեսությունում A և B ասույթների իմպլիկացիային համապատասխանում է A և B բազմություններից մեկի ընդգրկվելը մյուսի մեջ(Նկ.4-ում ստվերագծված տիրույթն է):

«եթե A, ապա B» ասույթի իմաստի այսպիսի պարզաբանումը չի հակառակում սովորական պրակտիկային, ընդհակառակը՝ ընդլայնում է: Սովորական պրակտիկայում օգտագործվող «հետևում է» հասկացությունը տարբերվում է այս գործողությունից նրանով, որ այստեղ A-ն և B-ն անպայման չէ, որ լինեն բովանդակորեն կապված: Այդ իսկ պատճառով մաթեմատիկական տրամաբանությունում «եթե Փարիզը Ֆրանսիայի մայրաքաղաքն է, ապա 1+1=2» ասույթը համարվում է ճշմարիտ:

$A \Rightarrow B$ իմպլիկացիայից փոխելով պայմանի և եզրակացության տեղերը՝ կստանանք մի նոր իմպլիկացիա՝ $B \Rightarrow A$, որը կոչվում է տրվածին հակադարձ իմպլիկացիա:

Օրինակ՝ «եթե $148 \vdots 3$, ապա նրա թվանշանների գումարը բաժանվում է 3-ի» ճիշտ ասույթի հակադարձը կլինի «եթե 1+4+8-ը բաժանվում է 3-ի, ապա $148 \vdots 3$», որը ևս ճիշտ ասույթ է:

Մինչդեռ միշտ չէ, որ իմպլիկացիայի հակադարձը հանդիսանում է ճիշտ: Օրինակ՝ «եթե 5-ը զույգ թիվ է, ապա 5>2» ճիշտ ասույթի հակադարձը կլինի «եթե 5>2, ապա 5-ը զույգ թիվ է», որը կեղծ ասույթ է:

$A \Rightarrow B$ իմպլիկացիայից ժխտելով պայմանը և եզրակացությունը՝ կստանանք $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, որը կոչվում է տրվածին հակադիր իմպլիկացիա: Փոխելով պայմանի և եզրակացության տեղերը՝ կստանանք $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, որը կոչվում է հակադիրին հակադարձ իմպլիկացիա կամ հակադարձին հակադիր իմպլիկացիա:

5. Համարժեքություն:

«A-ն այն և միայն այն դեպքում, երբ B» ասույթը նշանակում են հետևյալ կերպ՝ $A \Leftrightarrow B$. այսպիսի արտահայտությունն անվանում են համարժեքություն:

Կընդունենք, որ $A \Leftrightarrow B$ ճիշտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն և B-ն ունեն միևնույն տրամաբանական արժեքները, և դրան համապատասխան կունենանք հետևյալ ճշմարտության աղյուսակը՝

A	B	$A \Leftrightarrow B$
ճ	ճ	ճ
կ	ճ	կ
ճ	կ	կ
կ	կ	ճ

Օրինակ՝ «148⋮3 այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա թվանշանների գումարը բաժանվում է 3-ի» $\equiv 1$:

«$\overline{\ }$», «$\wedge$», «$\vee$», «$\Rightarrow$», «$\Leftrightarrow$» սիմվոլներին կանվանենք մինչդիրքային կապեր: Արտահայտությունների համար կկիրառենք մինչդիրքային ձև(տրամաբանական բանաձև) տերմինը, որը կազմված է $A,B,C,...,Z$ մինչդիրքային տառերից և մինչդիրքային կապերից:

Ավելի կոնկրետ՝

1. բոլոր մինչդիրքային տառերը լատինական այբուբենի մեծատառեր են՝ $A,B,C,...,Z$, ինչպես նաև թվային ինդեքսներ պարունակող մեծատառեր,օրինակ, $A_1, B_2, ...$,

2. եթե A-ն և B-ն մինչդիրքային տառեր են, ապա $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ մինչդիրքային ձևեր են,

3. միայն այն արտահայտություններն են հանդիսանում մինչդիրքային ձևեր, որոնք ստացվում են 1), 2) կետերից:

§1.2. Բանաձևերի ճշմարտացիության արժեքները, համարժեք բանաձևեր և համարժեք ձևափոխություններ

Ցանկացած մինչդիրքային ձև, որը պարունակում է n մինչդիրքային տառ, որոշում է որոշակի ճշմարտության բանաձև՝ n անդամներով(փոփոխականներով): Այդ բանաձևերի և անդամների (փոփոխականների) արժեքներ են հանդիսանում «ճիշտը» և «կեղծը»:

Սահմանում: Ցանկացած բաղադրյալ ասույթ, որը ստացվում է 1)-ից 5) տրամաբանական գործողություններով(§1.2) կազմված պարզ ասույթներից, կոչվում է ասույթների հաշվի տրամաբանական բանաձև(մինչդիրքային ձև) կամ ուղղակի բանաձև:

Ավելի կոնկրետ՝

1. բոլոր պարզ ասույթները հանդիսանում են բանաձևեր,
2. եթե A-ն և B-ն բանաձևեր են, ապա $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ նույնպես բանաձևեր են,
3. միայն այն արտահայտություններն են հանդիսանում բանաձևեր, որոնք ստացվում են 1), 2) կետերից:

Փաստորեն, մինչդիրքային ձևի ֆունկցիոնալ նշանակության փոխարեն այսուհետ կարող ենք օգտագործել բանաձև հասկացությունը: Ընդ որում բանաձևերի ճշմարտացիության արժեքները որոշվում են ճշմարտության աղյուսակներով:

Օրինակ՝ $\left((A \Rightarrow B) \vee (\overline{A})\right)$ բանաձևի ճշմարտության աղյուսակը հետևյալն է՝

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A}$	$\left((A \Rightarrow B) \vee (\overline{A})\right)$
ճ	ճ	ճ	կ	ճ
կ	ճ	ճ	ճ	ճ
ճ	կ	կ	կ	կ
կ	կ	ճ	ճ	ճ

Դիտողություն: Որպեսզի չծանրաբեռնենք բանաձևերի գրառումները և բարդ մինչդիրքային ձևերի ընթերցումը հանգեցնենք ոչ միարժեքության՝ օգտագործելով բազմաթիվ փակագծեր, պայմանավորվենք կատարել որոշ կրճատումներ՝

1. բաց ենք թողնում արտաքին փակագծերը,
2. եթե մինչդիրքային ձևը պարունակում է նույն տրամաբանական կապերը՝ «$\Rightarrow$», «$\Leftrightarrow$», «$\vee$» կամ «$\wedge$», ապա այդ կապերի յուրաքանչյուր ներմուծման դեպքում ձախ կողմից փակագծերը հանում ենք:

Օրինակ՝ $A \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C$-ն գրվում է $(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow C)$-ի փոխարեն,

3. տրամաբանական կապերը դասակարգվում են հետևյալ հերթականությամբ՝ «$\Leftrightarrow$», «$\Rightarrow$», «$\vee$», «$\wedge$», «$\overline{\ }$»:Հաշվի առնելով հետևյալ դասակարգումը՝ հերթով հանում ենք փակագծերը, ընդ որում այս հաջորդականության մեջ ձախ մասում գտնվող կապն ունի ավելի լայն գործողության տիրույթ, քան աջ մասում գտնվողը:

Օրինակ՝ $A \vee \overline{B} \Rightarrow C \Leftrightarrow A$-ում փակագծերը վերականգնվում են հետևյալ քայլերով՝

$$\left(\left(\left(A \overset{2}{\vee} \underset{1}{\left(\overline{B}\right)}\right) \overset{3}{\Rightarrow} C\right) \underset{4}{\Leftrightarrow} A\right)$$

Մինչդեռ հետևյալ ձևի մեջ փակագծերի արտաքսումն անհնար է՝

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

Կասենք $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ և $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ բանաձևերը համարժեք (համազոր) են, եթե բանաձևերի մեջ մտնող $x_1, x_2, \ldots, x_n$ փոփոխականների ցանկացած արժեքների համար այդ բանաձևերն ընդունում են միևնույն տրամաբանական արժեքները և կնշանակենք $\varphi \equiv \psi$:

Օրինակ՝ $\overline{\overline{\varphi}} \equiv \varphi$, $\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$:

Այս ձևով սահմանված համազորության հասկացության և համարժեքություն($\Leftrightarrow$) տրամաբանական գործողության միջև գոյություն ունի ուղղակի կապ, այն է՝

Եթե φ-ն և ψ-ն համազոր են՝ $\varphi \equiv \psi$, ապա $\varphi \Leftrightarrow \psi$ բանաձևն ընդունում է «ճ» արժեք փոփոխականների բոլոր արժեքների համար և հակառակը:

Այս հաստատման իրավացիությունն անմիջապես հետևում է «$\Leftrightarrow$» գործողության սահմանումից:

Հեշտ է նկատել, որ բանաձևերի համազորության հարաբերությունը

- անդրադարձելի է(ռեֆլեքսիվ), այսինքն $\varphi \equiv \varphi$ $\forall \varphi$ բանաձևի համար,

- համաչափելի է (սիմետրիկ), այսինքն $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 \equiv \varphi_1$ $\forall \varphi_1, \varphi_2$ բանաձևերի համար,
- փոխանցելի է(տրանզիտիվ), այսինքն՝ $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_3 \Rightarrow \varphi_1 \equiv \varphi_3$ $\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ բանաձևերի համար:

Այսինքն համազորության հարաբերությունը հանդիսանում է համարժեքության հարաբերություն: Այս հատկությունը թույլ է տալիս բանաձևերի նկատմամբ կիրառել ձևափոխություններ (ցանկացած բանաձև փոխարինել իրեն համարժեք բանաձևով)՝ բարդ բանաձևերը բերելով շատ ավելի հարմար և պարզ տեսքերի:

Բերենք համազոր բանաձևերի առավել կարևոր օրինակներ, որոնք հեշտությամբ ստուգվում են՝ օգտագործելով հանդիպվող գործողությունների սահմանումները:

Այսպես՝ $\forall X, Y, Z$ բանաձևերի համար ճիշտ են հետևյալ համարժեքության բանաձևերը՝

1. $\overline{\overline{X}} \equiv X$
2. $X \wedge Y \equiv Y \wedge X$
3. $X \vee Y \equiv Y \vee X$
4. $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$
5. $(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z)$
6. $(X \wedge Y) \vee Z \equiv (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$
7. $(X \vee Y) \wedge Z \equiv (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$
8. $X \vee (X \wedge Y) \equiv X$
9. $X \wedge (X \vee Y) \equiv X$
10. $\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$
11. $\overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$
12. $X \vee X \equiv X$
13. $X \vee \overline{X} \equiv$ ճ
14. $X \wedge X \equiv X$
15. $X \wedge \overline{X} \equiv$ կ
16. $X \vee$ կ $\equiv X$

17. $X \wedge ճ \equiv X$, որտեղ ճ-ով նշանակված է նույնաբար ճիշտ ասույթը, իսկ կ-ով՝ նույնաբար կեղծ ասույթը:

Օրինակ՝ ցույց տանք, որ $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) \equiv A$:

Իրոք, $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) \overset{7}{\equiv} A \vee (B \wedge \overline{B}) \overset{15}{\equiv} A \vee կ \overset{16}{\equiv} A$:

§1.3. Տավտալոգիաներ

Սահմանում: Մինչդիրքային ձևը, որի ճշմարտությունը կախված չէ նրանից, թե ինչպիսի արժեքներ են ընդունում նրանում հանդիպվող մինչդիրքային տառերը, անվանում են նույնաբանություն կամ, ըստ Վիտգենշտեյնի(1921), տավտալոգիա:

Այսինքն, մինչդիրքային ձևը հանդիսանում է նույնաբանություն այն և միայն այն դեպքում, երբ համապատասխան ճշմարտության ֆունկցիան ընդունում է միայն ճիշտ արժեք, կամ որ նույնն է, եթե իր ճշմարտության աղյուսակում ճշմարտության սյունը կազմված է միայն «ճ» տառերից:

Օրինակ՝

- $((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow B$-ն նույնաբանություն չէ, քանի որ նրա ճշմարտության աղյուսակը հետևյալն է՝

A	B	$A \Rightarrow B$	$((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$	$((A \Rightarrow B) \Rightarrow B) \Rightarrow B$
ճ	ճ	ճ	ճ	ճ
կ	ճ	ճ	ճ	ճ
ճ	կ	կ	ճ	կ
կ	կ	ճ	կ	ճ

- $\overline{A \wedge \overline{A}}$-ը նույնաբանություն է, քանի որ նրա ճշմարտության աղյուսակը հետևյալն է՝

A	$\overline{A}$	$A \wedge \overline{A}$	$\overline{A \wedge \overline{A}}$
ճ	կ	կ	ճ
կ	ճ	կ	ճ

Սահմանում: Մինչդիրքային ձևը, որը կեղծ է իր տառերի բոլոր հնարավոր ճիշտ արժեքների դեպքում, անվանում են հակասություն:

Այսպիսի մինչդիրքային ձևի ճշմարտության աղյուսակում ճշմարտության սյունը կազմված է միայն «կ» տառերից:

Օրինակ՝ $A \equiv \overline{A}$-ն հակասություն է՝

A	$\overline{A}$	$A \equiv \overline{A}$
ճ	կ	կ
կ	ճ	կ

Պարզ է, որ A մինչդիրքային ձևը հանդիսանում է նույնաբանություն այն և միայն այն դեպքում, երբ $\overline{A}$-ն հակասություն է:

Թեորեմ: Եթե A-ն և $A \Rightarrow B$-ն նույնաբանություններ են, ապա նույնաբանություն է նաև B-ն:

Ապացույց: Ունենք A-ն և $A \Rightarrow B$-ն նույնաբանություններ են: Ընդունենք, որ A-ի և $A \Rightarrow B$-ի «ճ» արժեքների բաշխման դեպքում B-ն ընդունում է «կ» արժեք: Քանի որ A-ն նույնաբանություն է, ապա արժեքների վերը նշված բաշխման դեպքում $A \Rightarrow B$-ն ստանում է «կ» արժեք, իսկ դա հակասում է թեորեմի այն պայմանին, որ $A \Rightarrow B$-ն նույնաբանություն է:

Թեորեմ1. Որպեսզի փոփոխականների և նրանց ժխտումների դիզյունկցիան լինի նույնաբանություն, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի դիզյունկցիան պարունակի գոնե մեկ դիզյունկտիվ անդամ, որից մեկը կլինի որոշակի փոփոխական, իսկ մյուսը՝ նրա ժխտումը:

Ապացույց:

Բավարարություն: Ընդհանուր դեպքում, եթե այդպիսի դիզյունկտիվ անդամներ գտնվեն, ապա դիզյունկցիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$X \vee \overline{X} \vee Y \vee Z \vee \ldots$$

($Y, Z, \ldots$ դիզյունկտիվ անդամները կարող են նաև չլինել): Բայց $X \vee \overline{X}$-ը նույնաբանություն է, այդ իսկ պատճառով մեր կողմից դիտարկվող դիզյունկցիան նույնաբանություն է, ինչպիսին էլ որ լինեն նրա մեջ մտնող դիզյունկտիվ $Y, Z, \ldots$ անդամները:

Անհրաժեշտություն: Ենթադրենք, որ դիզյունկտիվ անդամների այդպիսի զույգ, որոնցից մեկը հանդիսանում է մյուսի ժխտումը, դիզյունկցիայի մեջ չկա: Այդ դեպքում, մենք կարող ենք ժխտման նշանի տակ չգտնվող յուրաքանչյուր փոփոխականի տալ «կ» արժեք, իսկ ժխտման նշանի տակ գտնվող յուրաքանչյուր փոփոխականի տալ «ճ» արժեք: Դա կարելի է անել, քանի որ յուրաքանչյուր փոփոխական չի կարող մտնել դիզյունկցիայի մեջ միաժամանակ և՛ ժխտումով, և՛ առանց ժխտումի: Այս տեղադրումից հետո յուրաքանչյուր դիզյունկտիվ անդամ ընդունում է «կ» արժեք: Այդ դեպքում դիզյունկցիան կընդունի «կ» արժեք և, հետևաբար, դիզյունկցիան չի լինի նույնաբանություն, և որն էլ անհրաժեշտ էր ապացուցել:

Նույն ձևով ցույց է տրվում`

Թեորեմ2. Որպեսզի փոփոխականների և նրանց ժխտումների կոնյունկցիան լինի հակասություն, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի կոնյունկցիան պարունակի գոնե մեկ կոնյունկտիվ անդամ, որից մեկը կլինի մյուսի ժխտումը:

§1.4. Տրամաբանության հիմնական օրենքները

Կդիտարկենք մինչդիրքային կապերի որոշ հատկություններ, որոնք կձևակերպվեն հետևյալ թեորեմի տեսքով`

Թեորեմ: Դիցուք A, B, C-ն մինչդիրքային ձևեր են: Այդ դեպքում հետևյալ բանաձևերը հանդիսանում են նույնաբանություններ`

1. *Կրկնակի ժխտման տրամաբանական օրենք`*

$$\overline{\overline{A}} \equiv A$$

$\overline{\overline{A}}$-ն` $A$-ի կրկնակի ժխտումը, ճիշտ(կեղծ) է այն և միայն այն դեպքում, երբ ճիշտ (կեղծ) է ինքը` A-ն:

2. *Երրորդի բացառման օրենք`* ցանկացած ասույթ հանդիսանում է կամ ճիշտ, կամ կեղծ

$$A \vee \overline{A} \equiv \text{Ճ}$$

3. *Հակասության օրենք`* ոչ մի ասույթ միաժամանակ չի կարող լինել ճիշտ և կեղծ: Դրա համար բավական է նկատի ունենալ, որ նախադասությունը, որի համար հնարավոր չէ միարժեք պատասխանել այն հարցին` ճիշտ է այն թե կեղծ, ասույթ չի հանդիսանում:

$$A \wedge \overline{A} \equiv \text{Կ}$$

4. *Դը Մորգանի օրենքներ`*

$$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$$

$$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$$

Դը Մորգանի կանոնի հետևությունները`

4.1. $A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$

4.2. $A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$

հնարավորություն են տալիս կոնյունկցիան արտահայտել դիզյունկցիայով և ժխտումով կամ դիզյունկցիան` կոնյունկցիայի ու ժխտման միջոցով:

Դը Մորգանի կանոնը և հետևությունները իրավացի են ցանկացած վերջավոր թվով փոփոխականների համար`

4.1.1. $\overline{A \vee B \vee \ldots \vee Z} = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \ldots \wedge \overline{Z}$

4.1.2. $\overline{A \wedge B \wedge \ldots \wedge Z} = \overline{A} \vee \overline{B} \vee \ldots \vee \overline{Z}$

5. *Հակադիրքայնության(կոնտրապոզիցիայի) օրենք`*

$$A \Rightarrow B \equiv \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$$

6. $A \vee B \equiv B \vee A$ - *դիզյունկցիայի տեղափոխելիության օրենք*
7. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ - *դիզյունկցիայի զուգորդելիության օրենք*
8. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ - *կոնյունկցիայի տեղափոխելիության օրենք*
9. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ - *կոնյունկցիայի զուգորդելիության օրենք*
10. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ - *կոնյունկցիայի բաշխականություն դիզյունկցիայի նկատմամբ*

11. $A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ *- դիզյունկցիայի բաշխականություն կոնյունկցիայի նկատմամբ*

$$\left.\begin{array}{l}12.\ A\vee A\equiv A\\ 13.\ A\wedge A\equiv A\end{array}\right\}\ \textit{Ինքնահամընկնման օրենքներ}$$

$$\left.\begin{array}{l}14.\ A\wedge \text{Ճ}\equiv A\\ 15.\ A\wedge \text{Կ}\equiv \text{Կ}\\ 16.\ A\vee \text{Կ}\equiv A\\ 17.\ A\vee \text{Ճ}\equiv \text{Ճ}\end{array}\right\}\ \textit{Կլանման օրենքներ}$$

Այս օրենքներում դիտարկվում է ասույթների հաշվի և հանրահաշվի միջև համանմանությունը(անալոգիան), եթե դիզյունկցիան դիտարկվի որպես գումարում, կոնյունկցիան՝ բազմապատկում: Գլխավոր տարբերությունը 11)-17) հատկություններում է, իսկ 12), 13)-ից հետևում է, որ ասույթների հաշվում պետք չեն ո՛չ աստիճանացույցեր, ո՛չ գործակիցներ:

18. Սիլոգիզմի օրենք՝ $(A\Rightarrow B\wedge B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\equiv C)$

§1.5. Կապերի լրիվ համակարգեր

Բարդ ֆունկցիաները կարող են կառուցվել տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Այն տարրական ֆունկցիաների հավաքածուն, որոնցով պատկերվում են ցանկացած բարդություն ունեցող տրամաբանական ֆունկցիաները, ընդունված է անվանել բազիս: Ցանկացած բարդության տրամաբանական ֆունկցիա կազմելու համար տարրական ֆունկցիաների հավաքածուն պետք է լինի ֆունկցիոնալ լրիվ:

Սահմանում: Լրիվ կոչվում է այն տարրական ֆունկցիաների համակարգը, որոնց հասարակ վերադրումով ու տեղադրումով կարող է արտահայտվել ցանկացած տրամաբանական ֆունկցիա:

Տարածված բազիս է կոնյունկցիայի, դիզյունկցիայի ու ժխտման բազիսը: Տարբերում են մինիմալ ու ոչ մինիմալ բազիսներ:

Սահմանում: Մինիմալ բազիս է համարվում տարրական ֆունկցիաների այն համակարգը, որոնց համար բազիսը գոյացնող գոնե մի տարրական ֆունկցիայի հեռացումը փոխարկում է բազիսը ոչ լրիվի: Եթե մեկ կամ մի քանի ֆունկցիաների հեռացումը չի ազդում համակարգի լրիվության վրա, ապա նման բազիսը ընդունված է համարել ոչ մինիմալ: Մասնավորապես $\{\wedge,\vee,\bar{\ }\}$ բազիսը մինիմալ չէ:

Թեորեմ: Որպեսզի տարրական ֆունկցիաների համակարգը լինի ֆունկցիոնալ լրիվ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ունենա գոնե մեկ զրոն չպահպանող, մեկը չպահպանող, անինքնաերկակի, ոչ մոնոտոն ֆունկցիան:

1. Զրոյի պահպանումը: Ֆունկցիան անվանվում է զրոն պահպանող, եթե $x_1=0,x_2=0,\ldots,x_n=0$ դեպքում կատարվում է հետևյալ պայմանը՝ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$,
2. Մեկի պահպանումը: Ֆունկցիան կոչվում է մեկը պահպանող, եթե կատարվում է հետևյալ պայմանը՝ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(1,1,\ldots,1)=1$,
3. Ինքնաերկակիություն: Ֆունկցիան կոչվում է ինքնաերկակի, եթե կատարվում է հետևյալ պայմանը՝ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\overline{f(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})}$,
4. Մոնոտոնություն: Ֆունկցիան կոչվում է մոնոտոն, եթե $x_1<x_1'$, $x_2<x_2'$, $\ldots,x_n<x_n'$ դեպքում կատարվում է հետևյալ պայմանը $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le f(x_1',x_2',\ldots,x_n')$:

Ցույց է տրվում, որ $\{\wedge,\vee,\bar{\ }\}$ բազիսը համապատասխանում է թեորեմի պահանջներին և լրիվ է: Ավելին՝ $\{\wedge,\vee,\bar{\ }\}$ բազիսը մինիմալ չէ: Ընդունված է $\{\wedge,\vee,\bar{\ }\}$ բազիսն անվանել բուլյան հանրահաշվի բազիս կամ կանոնական բազիս, ընդ որում նրանից կարելի է արտաքսել կամ կոնյունկցիան, կամ դիզյունկցիան: Փաստորեն, մինիմալ բազիսը կարելի է ստանալ $\{\wedge, \bar{\ }\}$ կամ $\{\vee, \bar{\ }\}$ տեսքով:

Հետևանք: «$\wedge$» և «$\bar{\ }$», «$\vee$» և «$\bar{\ }$», «$\Rightarrow$» և «$\bar{\ }$» կապերի հետևյալ զույգերի և ցանկացած f ճշտության ֆունկցիայի համար գոյություն ունի մինչդիրքային ձև, որը պարունակում է կապեր միայն նշված զույգերից և առաջացած f-ից:

Այսինքն գոյություն ունի նշված կապերի զույգեր, օրինակ «$\wedge$» և «$\bar{\ }$», որով կարելի է առաջացնել որոշակի ճշմարտության ֆունկցիա: Ցույց է տրվում, որ նույն արդյունքին կարելի է հասնել՝ օգտագործելով մեկ՝ ժխտման կոնյունկցիա($\downarrow$) կապը, որն ունի հետևյալ ճշմարտության աղյուսակը՝

A	B	$A \downarrow B$
ճ	ճ	կ
կ	ճ	կ
ճ	կ	կ
կ	կ	ճ

Պարզ է, որ $A \downarrow B = \overline{A} \wedge \overline{B}$, ընդ որում $A \downarrow B$-ն ճիշտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն և B-ն կեղծ են:

Դժվար չէ նկատել, որ $\overline{A} \equiv A \downarrow A$ և $A \wedge B \equiv \big((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)\big)$, իրոք, նույնաբանություններ են և, ըստ հետևանքի, $\downarrow$ կապը բավական է բոլոր ճշմարտության ֆունկցիաների կառուցման համար:

Մյուս կապը հանդիսանում է ժխտման դիզյունկցիան («|») կամ Շեֆերի շտրիխը, որն ունի հետևյալ ճշմարտության աղյուսակը՝

A	B	$A \mid B$
ճ	ճ	կ
կ	ճ	ճ
ճ	կ	ճ
կ	կ	ճ

Պարզ է, որ $A \mid B = \overline{A} \vee \overline{B}$ և $A \mid B$ կեղծ է այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն և B-ն ճիշտ են միաժամանակ: «|»-ի բավարարությունը (հետևանքին) հետևում է հետևյալ տավտալոգիաներից, այն է՝

$\overline{A} = A \mid A$, $A \vee B = \big((A \mid A) \mid (B \mid B)\big)$

§1.6. Վերլուծման թեորեմը

Տրամաբանական ֆունկցիան բանաձևային տեսքով տալը ենթադրում է նրա ներկայացումը տրամաբանական հավասարումների տեսքով: Դիտարկենք այդպիսի տրման հետևյալ ձևը: Ներմուծենք արգումենտի աստիճանի հասկացությունը՝ գրանցելով ամեն մի արգումենտը $x_i^{\alpha_i}$ տեսքով, որտեղ α_i-ն x_i արգումենտի աստիճանն է, $i = 0$ կամ $i = 1$:

Պայմանավորվենք, որ $x^{\alpha} = \begin{cases} x & \text{եթե } \alpha = 1 \\ \overline{x} & \text{եթե } \alpha = 0 \end{cases}$

Թեորեմ: Ցանկացած արգումենտ՝ $x^{\alpha} = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x = \alpha$:

Ապացույց: Այս պնդումը հաստատվում է չորս հնարավոր դեպքերի դիտարկումով՝

1. $x = 0$; $\alpha = 0$ ուրեմն, $x^{\alpha} = x^0 = \overline{x} = \overline{0} = 1$
2. $x = 0$; $\alpha = 1$ ուրեմն, $x^{\alpha} = x^1 = x = 0$
3. $x = 1$; $\alpha = 0$ ուրեմն, $x^{\alpha} = x^0 = \overline{x} = \overline{1} = 0$
4. $x = 1$; $\alpha = 1$ ուրեմն $x^{\alpha} = x^1 = x = 1$:

Թեորեմն ապացուցված է:

Տրամաբանական ֆունկցիաների բանաձևային գրանցման տեսքով տրման համար ապացուցենք ևս մի հաստատում, որը կրում է վերլուծության թեորեմ անվանումը:

Թեորեմ: Ցանկացած n արգումենտներով տրամաբանական ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)=\bigvee_{p=1}^{2^k} x_1^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge x_k^{\alpha_k}\wedge f(\alpha_1,\dots,\alpha_k,x_{k+1},\dots,x_n) \quad (1.1)$$

որտեղ $\bigvee_{p=1}^{2^k}$ - $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ արգումենտների բոլոր 2^k հավաքածուների դիզյունկցիան է, $k \le \overline{1,n}$:

Ապացույց1: Ենթադրենք՝ գոյություն ունի արգումենտների կոնկրետ $x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n$ հավաքածու, որոնց համար $f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)=0$:

Այդ դեպքում $x_1^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge x_k^{\alpha_k}$ տեսքի բոլոր կոնյունկցիաների համար, որոնց անեն մի $x_i^{\alpha_i}$ արգումենտը այնպիսին է, որ եթե $x_i \ne \alpha_i$, (1.1) հավասարման աջ մասի համապատասխան կոնյունկցիաները, $f(\alpha_1,\dots,\alpha_k,x_{k+1},\dots,x_n)$ ֆունկցիայի արժեքներից անկախ, հավասարվում են զրոյի:

Նույն կոնյունկցիաները, որոնց համար $x_i=\alpha_i$, նույնությամբ հավասար են զրոյի, քանի որ $f(\alpha_1,\dots\alpha_k,x_{k+1},\dots x_n)=f(x_1,\dots x_n)$:

Ըստ ընտրության պայմանի՝ $x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n$ հավաքածուի որոշակի արժեքները $f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)=0$, ապա (1.1) հավասարման աջ ու ձախ մասերի հավասարությունն ապացուցված է:

Ապացույց2: Դիցուք գոյություն ունի արգումենտների այնպիսի $x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n$ հավաքածու, որի համար $f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)=1$:

Այդ դեպքում գոյություն ունի հետևյալ տեսքի գոնե մեկ կոնյունկցիա՝

$$x_1^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge x_k^{\alpha_k}\wedge f(\alpha_1,\dots,\alpha_k,x_{k+1},\dots,x_n)$$

որի համար $x_i=\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$, և հետևաբար, ընտրված արգումենտների հավաքածուների դեպքում կարելի է հաստատել, որ $x_1^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge x_k^{\alpha_k}\wedge f(\alpha_1,\dots,\alpha_k,x_{k+1},\dots,x_n)=1$

Վերջինս նշանակում է, որ (1.1) հավասարման աջ մասը, անկախ մնացած կոնյունկցիաների արժեքներից, հավասար է մեկի: Վերածման թեորեմի հիման վրա կարելի է ապացուցել հետևյալ բանաձևային գրանցման տարբերակը:

Թեորեմ: Ցանկացած n արգումենտներով տրամաբանական ֆունկցիա, եթե $f\ne 0$, $n\ge 1$, կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)=\bigvee_{1} x_1^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge x_k^{\alpha_k}$$

(1.2)

Այստեղ $\bigvee_1$ նշանակում է, որ դիտարկվում են միայն արգումենտների այնպիսի կոնյունկցիաները, որոնք $f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)$ ֆունկցիան վերածում են մեկի:

Ապացույց: Վերածման թեորեմի հիման վրա տրամաբանական ֆունկցիաների համար կարելի է գրանցել

$$f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)=\bigvee_{p=1}^{2^k} x_1^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge x_k^{\alpha_k}\wedge f(\alpha_1,\dots,\alpha_k,x_{k+1},\dots,x_n)$$

Բոլոր արգումենտների հավաքածուներում, որոնց համար $x_i=\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$, ու $f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)=0$, աջ մասի կոնյունկցիաները նույնաբար հավասար են զրոյի: Արգումենտների նույն հավաքածուների համար, որոնք $f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)$ ֆունկցիան վերածում են մեկի, իրավացի է հետևյալ արտահայտությունը՝

$$x_1^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge x_n^{\alpha_n}\wedge f(\alpha_1,\dots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n)=x_1^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge x_n^{\alpha_n} \quad (1.3)$$

Քանի որ այս կոնյունկցիան հավասար չէ զրոյի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_i=\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$, հետևաբար (1.3) հավասարումը արգումենտների համար հնարավոր 2^n հավաքածուների դիտարկման դեպքում փոխարկվում է հետևյալ տեսքի հավասարման

$$f(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},\dots,x_n)=\bigvee_{i=1}^{s} x_1^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge x_k^{\alpha_k}\wedge\bigvee_{j=1}^{m}(0)$$

(1.4)

որտեղ $s+m=2^n$, i ինդեքսով նշանակված են այն կոնյունկ-ցիաները, որոնցում $f(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)=1$:

Ակնհայտ է, որ (1.4)–ը կարելի է գրանցել հետևյալ տեսքով`

$$f(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)=\underset{1}{\vee}x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_n^{\alpha_n}$$

որտեղ $\underset{1}{\vee}$ նշանակում է, որ դիտարկվում է միայն արգումենտ-ների այն հավաքածուների կոնյունկցիաների դիզյունկցիան, որը մեկի է վերածում ֆունկցիան: Թեորեմն ապացուցված է:

Սահմանում: Տրամաբանական ֆունկցիաների գրանցումը (1.2) տեսքով անվանում են իսկության պայմանով գրանցում կամ տրամաբանական ֆունկցիայի գրանցման կատարյալ դիզյունկտիվ նորմալ ձև:

Այսպիսի գրանցումն անվանում են կատարյալ, քանի որ ամեն մի կոնյունկցիայում մտնում են բոլոր արգումենտները: Դրանք կոչվում են նորմալ, քանի որ հնարավոր է միայն առանձին արգումենտների և ոչ թե արգումենտների խմբերի ժխտումը:

Տրամաբանական ֆունկցիաների ներկայացման կատարյալ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի եղանակի հայտնի լինելու դեպքում կարելի է ձևակերպել գրանցման աղյուսակային ձևից կա-տարյալ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի գրանցման անցման ալգո-րիթմը: Տրամաբանական ֆունկցիաների գրանցման աղյուսա-կային ձևից կատարյալ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի անցման համար անհրաժեշտ է`

1. Կազմել աղյուսակի այն տողերի արգումենտների կոնյունկ-ցիաների դիզյունկցիան, որոնցում տրամաբանական ֆունկցիան հավասար է մեկի;
2. Տվյալ հավաքածուում այն արգումենտները, որոնք հավա-սար են մեկի, գրանցվում են կոնյունկցիայում x_i տեսքով, արգումենտները, որոնք հավասար են զրոյի, գրանցվում են կոնյունկցիայում $\bar{x}_i$ տեսքով

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
ճ	ճ	ճ
կ	ճ	ճ
ճ	կ	կ
կ	կ	ճ

Այսպես, եթե տրված է աղյուսակը, ապա նրա կատարյալ դիզ-յունկտիվ նորմալ ձևի գրանցումը կունենա հետևյալ տեսքը`

$$f(x_1,x_2)=\left(x_1\wedge x_2\right)\vee\left(\bar{x}_1\wedge x_2\right)\vee\left(\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\right)$$

Տրամաբանական ֆունկցիայի ձևական տրման կատարյալ դիզյունկտիվ նորմալ ձևը միակը չէ: Ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: Ցանկացած n արգումենտներով տրամաբանա-կան ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով`

$$f(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)=\underset{0}{\wedge}\overline{x_1^{\alpha_1}}\vee...\vee\overline{x_n^{\alpha_n}}$$

Գրանցման $\underset{0}{\wedge}$ տեսքը նշանակում է, որ $\overline{x_1^{\alpha_1}}\vee...\vee\overline{x_n^{\alpha_n}}$ տեսքի դիզյունկցիաները վերցվում են արգումենտների հավաքածու-ների այն արժեքներից, որոնց համար տրամաբանական ֆունկցիաները հավասարվում են զրոյի:

Ապացույց: Վերածման թեորեմի հիման վրա տրամաբա-նական ֆունկցիայի համար կարելի է գրանցել

$$\bar{f}(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)=\underset{p}{\vee}x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_n^{\alpha_n}\wedge\bar{f}(\alpha_1,...,\alpha_n)\quad(1.5)$$

Հավասարման ձախ ու աջ մասերը ժխտենք

$$\bar{\bar{f}}(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)=\overline{\underset{p}{\vee}x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_n^{\alpha_n}\wedge\bar{f}(\alpha_1,...,\alpha_n)}$$

որտեղից կստանանք

$$f(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)=\underset{p}{\wedge}\overline{x_1^{\alpha_1}\wedge...\wedge x_n^{\alpha_n}\wedge\bar{f}(\alpha_1,...,\alpha_n)}$$

Դը Մորգանի կանոնի կիրառմամբ կստանանք

$$f(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)=\underset{p}{\wedge}\overline{x_1^{\alpha_1}}\vee...\vee\overline{x_n^{\alpha_n}}\vee f(\alpha_1,...,\alpha_n)\quad(1.6)$$

Դիցուք գոյություն ունի արգումենտների $x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n$ այնպիսի հավաքածու, որը $f(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)$–ն վերածում է մեկի: Եթե բոլոր $x_i \neq \alpha_i$, ապա աջ մասի համապատասխան դիզյունկցիաները հավասար են մեկի, քանի որ $\overline{x_i^{\alpha_i}} = \overline{0} = 1$ անկախ $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$ արժեքներից:

Եթե $x_i = \alpha_i$, $i = \overline{1,n}$, ապա հավասարման աջ մասի համապատասխան դիզյունկցիաները $f(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)$ ֆունկցիայի համար նույնպես հավասար են մեկի, համաձայն $x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n$ արգումենտների ընտրման պայմանի:

Իսկ այն $x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n$ արգումենտների հավաքածուների համար, որոնք ֆունկցիան վերածում են զրոյի, եթե բոլոր $x_i = \alpha_i$ աջ մասի համապատասխան դիզյունկցիաները կլինեն հավասար մեկի անկախ $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$ արժեքներից:

Այսպիսով արգումենտների այն հավաքածուների համար, որոնցում $f(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)=1$, աջ մասի համապատասխան դիզյունկցիաները կարելի է անտեսել, քանի որ դրանք չեն ազդում կոնյունկցիաների արժեքների վրա:

Հետևաբար (1.6)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով`

$$f(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)=\bigwedge_0 \overline{x_1^{\alpha_1}} \vee ... \vee \overline{x_n^{\alpha_n}} \tag{1.7}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Տրամաբանական ֆունկցիաների գրանցումը (1.7) տեսքով ընդունված է անվանել կոնյունկտիվ կատարյալ նորմալ ձև: Նման գրանցման եղանակն անվանում են անիրավացիությունը պայմանով գրանցում: Տրամաբանական ֆունկցիաների գրանցման աղյուսակային ձևից կոնյունկտիվ կատարյալ նորմալ ձևի անցումը կատարվում է հետևյալ ալգորիթմով`

1. Կազմել աղյուսակի այն տողերի արգումենտների դիզյունկցիաների կոնյունկցիան, որոնցում տրամաբանական ֆունկցիան հավասար է զրոյի;

2. Տվյալ հավաքածուում այն արգումենտները, որոնք հավասար են զրոյի, գրանցվում են դիզյունկցիայում x_i տեսքով, արգումենտները, որոնք հավասար են մեկի, գրանցվում են դիզյունկցիայում $\overline{x_i}$ տեսքով:

§1.7. Ասույթների հաշվի աքսիոմատիկ կառուցումը: Աքսիոմներ և արտածման կանոններ: Ապացույց, թեորեմներ,դեդուկցիայի թեորեմը

Չնայած նրան, որ տրամաբանության` մինչ այժմ հանդիպված հարցերը, որոնք ծագում էին ասույթների տրամաբանության մեջ, լուծվել են ճշմարտության աղյուսակների մեթոդով, այսուհետ գերադասելի կլինի կիրառել ձևական աքսիոմատիկ տեսության մեթոդը, որը կապված է այն հարցի հետ, թե հնարավոր չէ՞ արդյոք տրամաբանական ապացույցները և արտածումները գրել այնպես, ինչպես դա արվում է երկրաչափության մեջ:

I ձևական աքսիոմատիկ տեսությունը որոշված է, եթե տեղի ունեն հետևյալ պայմանները`

1. տրված է I տեսության սիմվոլների որոշակի հաշվելի բազմություն(նախնական սիմվոլներ): I տեսության սիմվոլների նկատմամբ կատարվող բավականին պարզ գործողությունների համակարգը կոչվում է այդ տեսության արտահայտություն:

Ենթադրվում է, որ

ա) տեսության սիմվոլի ոչ մի մաս չի հանդիսանում տեսության օբյեկտ,

բ) ցանկացած արտահայտություն միակ ձևով ներկայացվում է տեսության սիմվոլների հաջորդականության տեսքով,

գ) ցանկացած երկու արտահայտությունների համար կարելի է որոշել` հավասար են նրանք, թե ոչ,

դ) ցանկացած արտահայտության մեջ իրար հարևան սիմվոլների ցանկացած հաջորդականության փոխարեն կարելի է տեղադրել ցանկացած արտահայտություն:

2. գոյություն ունի I տեսության արտահայտությունների ենթաբազմություն, որոնց անվանում են I տեսության բանաձևեր,
3. առանձնացված է բանաձևերի որոշակի բազմություն, որոնց անվանում են I տեսության աքսիոմներ,
4. գոյություն ունի բանաձևերի միջև $R_1,...,R_n$ հարաբերությունների վերջավոր բազմություն, որոնց անվանում են արտածման կանոններ:

Արտածման յուրաքանչյուր R_i կանոնի համար գոյություն ունի այնպիսի j դրական թիվ, որ j հատ բանաձևերից կազմված բազմության և յուրաքանչյուր A բազմության համար տրվում է այն հարցի պատասխանը՝ գտնվում են արդյոք տրված j հատ բանաձևերը R_i հարաբերության մեջ A բանաձևի հետ, և եթե գտնվում են, ապա A-ն կոչվում է տրված j բանաձևերի անմիջական հետևանքը R_i կանոնով:

Սահմանում: I տեսությունում արտածում է կոչվում $A_1,...,A_n$ բանաձևերի որոշակի վերջավոր հաջորդականությունը, որ ցանկացած i-ի համար A_i բանաձևը կամ I տեսության աքսիոմ է կամ նախորդ բանաձևերի անմիջական հետևանք արտածման կանոններից որևէ մեկով:

Սահմանում: I տեսության A բանաձևը կոչվում է I տեսության թեորեմ, եթե գոյություն ունի I տեսությունում արտածում, որտեղ վերջին բանաձևը հանդիսանում է A-ն: Այդպիսի արտածումն անվանում են A բանաձևի ապացույց:

Նկատենք, որ այս ձևով մտցված թեորեմի հասկացության համար պարտադիր չէ, որ գոյություն ունենա տվյալ տեսությունում այդ թեորեմի արտածումը թույլատրող որոշակի ընթացակարգ:

Սահմանում: Տեսությունը, որի համար գոյություն ունի այդպիսի ալգորիթմ, անվանում են լուծելի, հակառակ դեպքում՝ անլուծելի:

Սահմանում: A բանաձևն անվանում են I-ի մեջ Γ բանաձևերի բազմության հետևանք այն և միայն այն դեպքում, երբ

գոյություն ունի այնպիսի $A_1,...,A_n$ բանաձևերի վերջավոր հաջորդականություն, որ A_n-ը A-ն է և ցանկացած i-ի համար A_i-ն կամ աքսիոմ է, կամ Γ-ի տարր կամ էլ նախկին բանաձևերից մեկի անմիջական հետևանքն է արտածման կանոններից որևէ մեկի կիրառմամբ: Այդպիսի հաջորդականությանն անվանում են A-ի Γ արտածում: I տեսությունում Γ-ի անդամներին անվանում են վարկածներ կամ արտածման պայմաններ:

«A-ն Γ-ի հետևանքն է» հաստատման կրճատ գրառումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\Gamma \vdash A$$

Ընդ որում մի քանի տեսությունների կիրառման դեպքում խառնաշփոթությունից խուսափելու համար կիրառվում է հետևյալ գրառումը՝

$$\Gamma \vdash_I A \text{ կամ } I+\Gamma \vdash A,$$

որտեղ I ինդեքսը ցույց է տալիս, թե խոսքը որ տեսությանն է վերաբերում:

Եթե Γ բազմությունը վերջավոր է՝ $\Gamma=\{B_1,...,B_n\}$, ապա $\{B_1,...,B_n\} \vdash A$-ի փոխարեն կգրենք $B_1,...,B_n \vdash A$:

Եթե Γ-ն դատարկ բազմություն է՝ $\Gamma=\varnothing$, ապա $\Gamma \vdash A$ տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն հանդիսանում է թեորեմ(այսինքն աքսիոմներից արտածվող աքսիոմ կամ բանաձև է)՝

$$\varnothing \vdash A \text{ կամ } \vdash A$$

Այսինքն $\vdash A$ նշանակումը «A-ն թեորեմ է» հաստատման կրճատ գրառման ձև է:

Բերենք արտածման մի քանի ակնառու օրինակներ՝

1. Եթե $\Gamma \subseteq \Delta$ և $\Gamma \vdash A$, ապա $\Delta \vdash A$, այսինքն, եթե A-ն արտածվում է Γ պայմանների բազմությունից, ապա այն կմնա արտածված եթե Γ-ին ավելացվեն նոր պայմաններ:
2. $\Gamma \vdash A$ այն և միայն այն դեպքում, երբ Γ-ում գոյություն ունի Δ վարկածների վերջավոր ենթաբազմություն, որի համար

$$\Delta \vdash A:$$

Բավարարությունը հետևում է նախորդից: Իսկ անհրաժեշտությունը բխում է նրանից, որ A-ի յուրաքանչյուր Γ արտածում օգտագործում է միայն վերջավոր թվով պայմաններ Γ-ից:

3. Եթե $\Delta \vdash A$ և $\Gamma \vdash B$ կամայական $B \in \Delta$, ապա $\Gamma \vdash A$, այսինքն եթե A-ն Δ արտածելի է և Δ-ից ցանկացած B բանաձև Γ, ապա A-ն Γ արտածելի է:

Այժմ ներմուծենք դասական ասույթների հաշվի համար ձևական աքսիոմատիկ L տեսություն հետևյալ կերպ՝

1. L-ի սիմվոլներ են հանդիսանում $\bar{\ }, \Rightarrow, (,)$ և $A_1, A_2, A_3, \ldots$ տառերը: Ընդ որում «$\bar{\ }$» և «$\Rightarrow$» սիմվոլներին անվանում են տարրական կապեր, իսկ $A_1, A_2, \ldots$ տառերին՝ մինչդիրքային:
2.
   - Բոլոր մինչդիրքային տառերը բանաձևեր են,
   - Եթե A-ն և B-ն բանաձևեր են, ապա $\overline{A}$ և $A \Rightarrow B$-ն նույնպես բանաձևեր են:

Այսինքն L տեսության ցանկացած բանաձև մինչդիրքային ձև է՝ կազմված $A_i, i = 1,2,\ldots$ մինչդիրքային տառերից և «$\bar{\ }, \Rightarrow$» կապերից:

3. Ինչպիսին էլ որ լինեն L տեսության A, B, C բանաձևերը, հետևյալ բանաձևերը L-ի աքսիոմներ են՝
   Ա1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
   Ա2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
   Ա3. $(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}) \Rightarrow ((\overline{B} \Rightarrow A) \Rightarrow B)$
4. Արտածման միակ օգտագործվող կանոն հանդիսանում է «մոդուս - պոնենսը» ($Modus - ponens$, կրճատ՝ MP - զատման կանոն), այն է՝ B-ն A-ի և $A \Rightarrow B$-ի անմիջական հետևանքն է:

Նկատենք, որ աքսիոմների Ա1-Ա3 տեսքերն իրենցից ներկայացնում են ոչ թե կոնկրետ աքսիոմներ, այլ աքսիոմների սխեմա, որոնց օգնությամբ կարելի է ստանալ անթիվ բազմությամբ աքսիոմներ՝ նրանց մեջ մտնող A, B, C բանաձևերի փո-

խարեն տեղադրելով կոնկրետ բանաձևեր:

Օրինակ՝ եթե A-ն $A_1 \Rightarrow A_2$-ն է, B-ն՝ $\overline{A}_3$, ապա Ա1-ից ստանում ենք հետևյալ աքսիոմը՝ $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow (\overline{A}_3 \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_2))$:

Նկատենք նաև, որ ձևական տեսությունում «$\bar{\ }, \Rightarrow$» նշանները հանդես են գալիս որպես ձևական սիմվոլներ, այլ ոչ թե դիտարկվելիք գործողություններ՝ ժխտում և իմպլիկացիա: Հաշվի առնելով ասվածը՝ կարող ենք բերել կապերի հետևյալ օրինակները՝ $A \wedge B$-ն $\overline{A \Rightarrow \overline{B}}$-ն է, $A \vee B$-ն $\overline{A} \Rightarrow B$-ն է, $A \equiv B$-ն՝ $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$: Այստեղ «$\wedge, \vee, \equiv$»-ը դիտարկվում են որպես աբստրակտ նշաններ:

Դիտարկենք L տեսությունում թեորեմների ապացույցների օրինակներ:

Ցույց տանք, որ ցանկացած A բանաձևի համար իրավացի է՝

$$\vdash_L A \Rightarrow A \qquad (***)$$

Այս հաստատման ապացուցման համար կառուցենք L տեսությունում $A \Rightarrow A$ բանաձևի արտածումը՝

1. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$, որը ստացվում է աքսիոմների Ա2 սխեմայում B-ի փոխարեն $A \Rightarrow A$-ի, C-ի փոխարեն A-ի տեղադրումներից:
2. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$, ստացվում է աքսիոմների Ա1 սխեմայում B-ի փոխարեն տեղադրելով A:
3. $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$, որը ստացվում է 1), 2)-ից MP-կանոնով
4. $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ ստացվում է աքսիոմների Ա1 սխեմայում B-ի փոխարեն A-ի տեղադրումով:
5. $A \Rightarrow A$ ստացվում է 4), 3)-ից MP-կանոնով

Այդ դեպքում $\vdash_L A \Rightarrow A$ ապացուցվեց:

Ցույց տանք, որ ցանկացած A բանաձևի համար իրավացի է

$$\vdash_L (\overline{A} \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

1. $(\overline{A}\Rightarrow\overline{A})\Rightarrow((\overline{A}\Rightarrow A)\Rightarrow A)$, ստացվում է աքսիոմների Ա$_3$ սխեմայում B-ի փոխարեն A-ի տեղադրումով:
2. $\overline{A}\Rightarrow\overline{A}$, ստացվում է $(***)$-ից A-ի փոխարեն $\overline{A}$-ի տեղադրումով:
3. $(\overline{A}\Rightarrow A)\Rightarrow A$, ստացվում է 1), 2)-ից MP-կանոնով:

Այս ձևով $\vdash_L (\overline{A}\Rightarrow A)\Rightarrow A$-ն ապացուցվեց:

Ցույց տանք, որ ցանկացած A,B,C բանաձևերի համար իրավացի է $A\Rightarrow B, B\Rightarrow C \vdash_L A\Rightarrow C$ $\quad(****)$

1. $(A\Rightarrow(B\Rightarrow C))\Rightarrow((A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C))$, աքսիոմների Ա$_2$ սխեմայից,
2. $(B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow(B\Rightarrow C))$ ստացվում է աքսիոմների Ա$_1$ սխեմայից A-ի փոխարեն $B\Rightarrow C$ և B-ի փոխարեն A-ի տեղադրումով
3. $B\Rightarrow C$, հիպոթեզ
4. $A\Rightarrow(B\Rightarrow C)$, 3), 2)-ից MP-կանոնով
5. $(A\Rightarrow B)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$, 4) և 1)-ից MP-կանոնով
6. $A\Rightarrow B$, հիպոթեզ
7. $A\Rightarrow C$, 6) և 5)-ից MP-կանոնով

Այսպիսով $(****)$-ը ապացուցվեց:

Ասույթների հաշվում կարևոր նշանակություն ունի դեդուկցիայի թեորեմը: Այս թեորեմը հանդիսանում է մաթեմատիկական դատողություններում օգտագործվող հնարների տեսական հիմնավորում՝ ապացուցվում է, որ եթե B-ն իրավացի է որևէ A հաստատման իրավացիության ենթադրության դեպքում, ապա իրավացի է նաև «եթե A, ապա B» ասույթը:

Թեորեմ(դեդուկցիայի): Եթե $\Gamma + A_0 \vdash B_0$, ապա $\Gamma \vdash A_0\Rightarrow B_0$, որտեղ Γ-ն բանաձևերի բազմություն է, A_0, B_0-ն՝ բանաձևեր:

Ապացույց: $\Gamma + A_0 \quad B_0$ նշանակում է, որ գոյություն ունի $A_1,\ldots,A_n$ բանաձևերի հաջորդականություն, որ $A_n = B_0$ և յուրաքանչյուր անդամ

1. աքսիոմ է,

2. Γ-ից է, վարկած
3. A_0-ն է, ստացվում է նախորդ երկուսից MP կանոնով:

Ցույց տանք ավելին՝ $A_0\Rightarrow A_i$: Ապացույցը կատարենք ինդուկցիայով՝ ցույց տանք $i=1$-ի համար, այսինքն՝ $A_0\Rightarrow A_1$: Քանի որ A_1-ը նախորդ անդամ չունի, ապա այն կամ աքսիոմ է, կամ վարկած է, կամ A_0-ն է:

Դիտարկենք բանաձևերի հետևյալ հաջորդականությունը՝

1. աքսիոմների Ա$_1$ սխեմայից ստանում ենք՝ $A_1\Rightarrow(A_0\Rightarrow A_1)$ ($A\to A_1$, $B\to A_0$),
2. A_1 վարկած,
3. $A_0\Rightarrow A_1$, MP, 1,2:

Այժմ ենթադրենք $i=k$ համար ճիշտ է, այսինքն $A_0\Rightarrow A_k$: Ցույց տանք $i=k+1$-ի համար: Քանի որ A_{k+1} ունի նախորդ անդամներ, ապա այս անգամ բացի A_1-ի քննարկած 3 դեպքերից, A_{k+1}-ը կարող է ստացվել իր նախորդներից MP կանոնով՝ $A_{k+1}=MP(A_j,A_m)$, $j,m<k+1$:

Այս դեպքում հնարավոր է, որ նախորդներից որևէ մեկը կունենա հետևյալ տեսքը՝ $A_j\Rightarrow A_{k+1}$ կամ $A_m\Rightarrow A_{k+1}$:

ենթադրենք $A_j = A_m\Rightarrow A_{k+1}$:

Վերցնելով $j,m<k+1$՝ ինդուկցիայի ենթադրությունից կարող ենք գրել՝ $\Gamma\vdash A_0\Rightarrow A_m$, $\Gamma\vdash A_0\Rightarrow A_j$, որտեղից՝
$\Gamma\vdash A_0\Rightarrow(A_m\Rightarrow A_{k+1})$:

Այժմ գրենք հետևյալ արտածումները՝

1. $(A_0\Rightarrow(A_m\Rightarrow A_{k+1}))\Rightarrow((A_0\Rightarrow A_m)\Rightarrow(A_0\Rightarrow A_{k+1}))$ Ա$_2$
2. $A_0\Rightarrow(A_m\Rightarrow A_{k+1})$ վարկած
3. $((A_0\Rightarrow A_m)\Rightarrow(A_0\Rightarrow A_{k+1}))$ MP,1,2
4. $A_0\Rightarrow A_m$ վարկած

5. $A_0 \Rightarrow A_{k+1}$ $MP,3,4$:

Այսպիսով՝ ստացանք $\Delta = \{(A_0 \Rightarrow A_m); A_0 \Rightarrow (A_m \Rightarrow A_{k+1})\}$ վարկածների բազմությունը, որի համար, եթե $\{\Gamma \vdash \Delta$ և $\Delta \vdash A_0 \Rightarrow A_{k+1}\}$, ապա $\Gamma \vdash A_0 \Rightarrow A_{k+1}$:

Հետևանք: Եթե $A \vdash B$, ապա $\vdash A \Rightarrow B$:

Դիտողություն: Դեդուկցիայի թեորեմն առաջին անգամ պարզ ձևով ձևակերպվել էր Էրբրանի կողմից (1930թ.) և ուներ հետևյալ տեսքը՝

ա) Եթե $A \vdash B$, ապա $\vdash A \Rightarrow B$

բ) Եթե $A_1, A_2, ..., A_m \vdash B$, ապա $A_1, A_2, ..., A_{m-1} \vdash A_m \Rightarrow B$:

Մեր դեպքում ձևակերպված թեորեմի մեջ ներառված են Էրբրանի թեորեմի ա) և բ) դեպքերը:

Դեդուկցիայի թեորեմի միջոցով կարելի է թեթևացնել ապացույցների ողջ ընթացակարգը:

Օրինակ՝ $\forall A, B$-ի համար ցույց տանք $\vdash A \Rightarrow (\overline{A} \Rightarrow B)$-ի իրավացիությունը՝

1. A վարկած
2. $A \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow A)$ Ա1($A \rightarrow B, B \rightarrow \overline{B}$)
3. $\overline{B} \Rightarrow A$ $MP,1,2$
4. $\overline{A}$ վարկած
5. $\overline{A} \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$ Ա1($A \rightarrow \overline{A}, B \rightarrow \overline{B}$)
6. $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ $MP,4,5$
7. $(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}) \Rightarrow ((\overline{B} \Rightarrow A) \Rightarrow B)$ Ա3($A \rightarrow B, B \rightarrow A$)
8. $(\overline{B} \Rightarrow A) \Rightarrow B$ $MP,6,7$
9. B $MP,3,8$
10. $A, \overline{A} \vdash B$
11. $A \vdash \overline{A} \Rightarrow B$
12. $\vdash A \Rightarrow (\overline{A} \Rightarrow B)$:

§1.8. Ասույթների հաշվի անհակասելիությունը, լրիվությունը և աքսիոմների անկախությունը

Ասույթների հաշվի աքսիոմատիկ համակարգն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1. *Անհակասելիություն.*

Ասույթների աքսիոմատիկ տեսության յուրաքանչյուր բանաձևի համապատասխանեցնենք ասույթների հաշվի որևէ ասույթ այնպես, որ թեորեմներին համապատասխանեն նույնաբանություններ: Այդ համապատասխանությունը նշանակենք j-ով՝

$j(\Rightarrow) = \supset, \; j(\overline{\;\;}) = \neg, \; j(() = (, \; j()) =)$:

Սահմանում: Ասույթների հաշվի A բանաձևը կոչվում է հատուկ, եթե նրա j պատկերը նույնաբանություն է, այսինքն՝ $j(A) \equiv 1$:

Ապացուցել, որ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ հատուկ է:

Իրոք,

$$j(A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) = j(A)j(\Rightarrow)(j(B)j(\Rightarrow)j(A)) =$$
$$= j(A)j(\Rightarrow)j(()j(B)j(\Rightarrow)j(A)j()) = j(A) \supset (j(B) \supset j(A)) \equiv 1$$

Հետևանք1: Ասույթների հաշվի բոլոր աքսիոմները հատուկ են:

Հետևանք2: Հատուկ բանաձևերից MP կանոնով ստացված բանաձևը հատուկ է:

Թեորեմ: Ասույթների հաշվի յուրաքանչյուր թեորեմ հատուկ բանաձև է:

Ապացույց: Եթե A-ն արտածելի է, նշանակում է՝ գոյություն ունի $B_0, ..., B_n$ հաջորդականություն, որի վերջին անդամը A-ն է: Իսկ հաջորդականության յուրաքանչյուր B_i անդամ կամ աքսիոմ է, կամ ստացվում է իր նախորդներից MP կանոնով՝

ա) եթե B_i-ն աքսիոմ է, նշանակում է B_i-ն հատուկ է,

բ) եթե B_i-ն աքսիոմ չէ, ուրեմն ստացվել է իր նախորդներից MP կանոնով,

գ) հետևանք2-ից ունենք, որ B_i-ն հատուկ է:

Քանի որ $B_0,...,B_n$ հաջորդականության յուրաքանչյուր անդամ հատուկ է, հետևաբար A-ն հատուկ է: Այժմ ստուգենք, որ թեորեմի ժխտումը թեորեմ լինել չի կարող: Եթե A-ն թեորեմ է, ուրեմն $j(A)\equiv 1$, $j(\overline{A})\equiv \rceil(j(A))\equiv 0$: Ստացանք, որ $\rceil(j(A))$-ն նույնաբանություն չէ, հետևաբար այն թեորեմ չէ:

Սահմանում: Տեսությունը կոչվում է հակասելի, եթե նրա յուրաքանչյուր A բանաձև նրանում թեորեմ է: Տեսությունը կոչվում է անհակասելի, եթե այն հակասելի չէ, այսինքն գոյություն ունի բանաձև, որը թեորեմ չէ: Կամ որ նույնն է՝ համակարգը անհակասելիություն է, եթե նրանում կգտնվի որոշակի ոչ ապացուցելի բանաձև, հակասելիություն է, եթե ցանկացած բանաձև ապացուցելի է:

Ուրեմն ասույթների հաշիվը(և ընդհանրապես, ցանկացած ձևական համակարգ, որը պարունակում է $\overline{\ }$ -ժխտում սիմվոլը) անհակասելի տեսություն է:

2. Լրիվություն, այսինքն, բոլոր նույնաբանությունները արտածվում են աքսիոմներից, հետևաբար, թեորեմների բազմությունը համընկնում է նույնաբանությունների բազմության հետ:

Թեորեմ(լրիվության մասին): Եթե A բանաձևը հանդիսանում է L տեսության նույնաբանություն, ապա այն հանդիսանում է L տեսության թեորեմ:

Հետևանք: A բանաձևը հանդիսանում է նույնաբանություն այն և միայն այն դեպքում, երբ A-ն հանդիսանում է L տեսության թեորեմ:

3. Անկախություն, այսինքն աքսիոմներից ոչ մեկը չի հանդիսանում մյուսի հետևանքը:

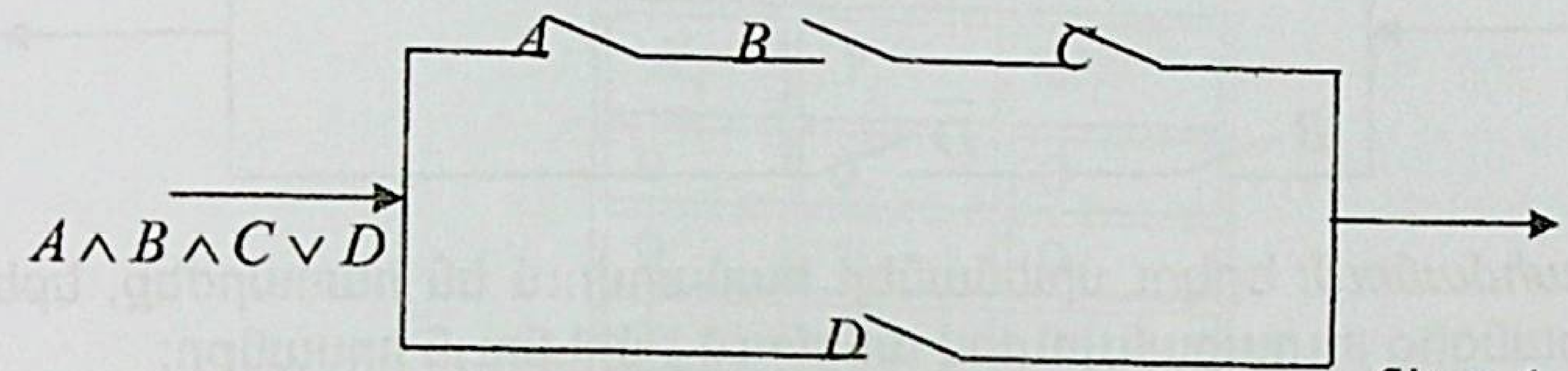
§1.9. Ասույթների հաշվի կիրառությունները

Մաթեմատիկական տրամաբանության առաջին կիրառություններից է՝

1. Էլեկտրական շղթաների մոդելավորումը: Պարզագույն էլեկտրական շղթան բաղկացած է հաղորդալարերից և երկդիր-

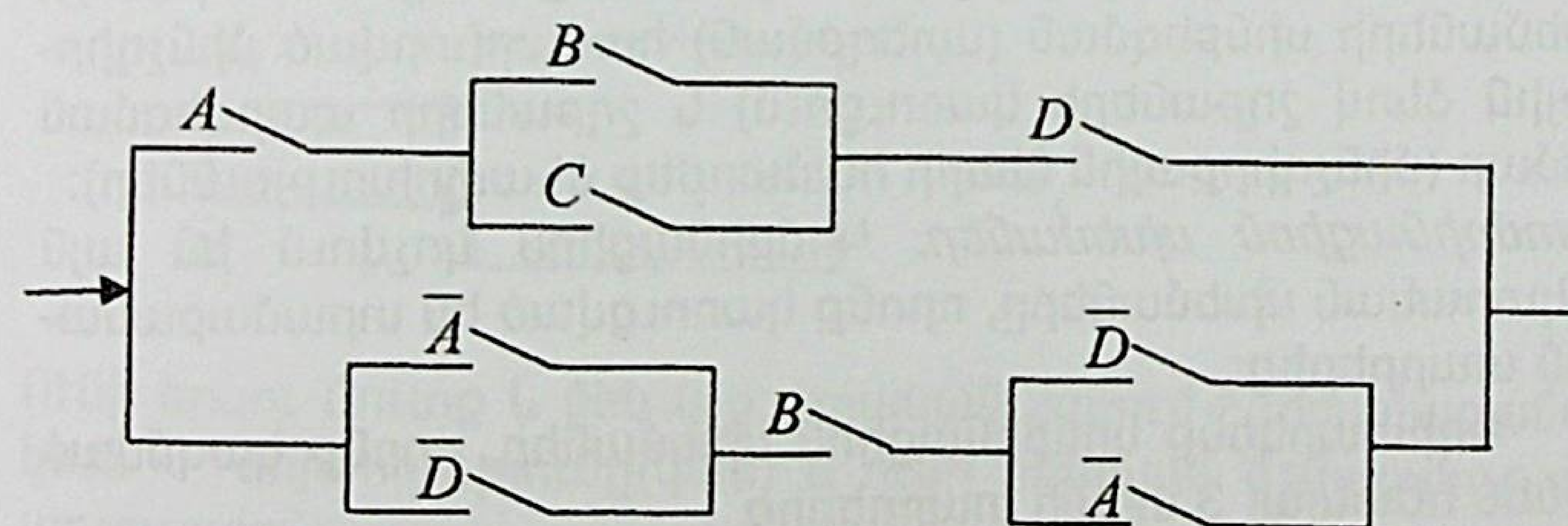
քային փոխարկիչներից(միացնող-անջատող սարք. փոխարկիչի բաց վիճակում շղթայով հոսանք չի անցնում, իսկ փակ վիճակում անցնում է): Փոխարկիչները կարող են գտնվել 2 վիճակներում՝ բաց և փակ: Փոխարկիչները համադրենք ասույթներով հետևյալ կերպ՝ յուրաքանչյուր փոխարկիչի համադրենք որևէ մինչդիրքային տառ, որի ճշմարտության արժեքներ են «ճ»(«1») կամ «կ»(«0»): Եթե P ասույթը՝ $P=$«ճ», ապա համապատասխան փոխարկիչը փակ վիճակում է. շղթայով հոսանք է անցնում, և եթե $P=$«կ», ապա փոխարկիչը բաց վիճակում է, շղթայով հոսանք չի անցնում: Այդ դեպքում պայմանը, որի դեպքում շղթայով հոսանք կանցնի, արտահայտվում է որոշակի մինչդիրքային ձևով:

- Օրինակ1՝ նկ.1-ի շղթայով հոսանքի անցնելն արտահայտվում է $A\wedge B\wedge C\vee D$ մինչդիրքային ձևով՝



Նկար1.

- Օրինակ 2՝ $A\wedge(B\vee C)\wedge D\vee(\overline{A}\vee\overline{D})\wedge B\wedge(\overline{D}\vee\overline{A})$ մինչդիրքային ձևին համապատասխանում է հետևյալ էլեկտրական շղթան՝

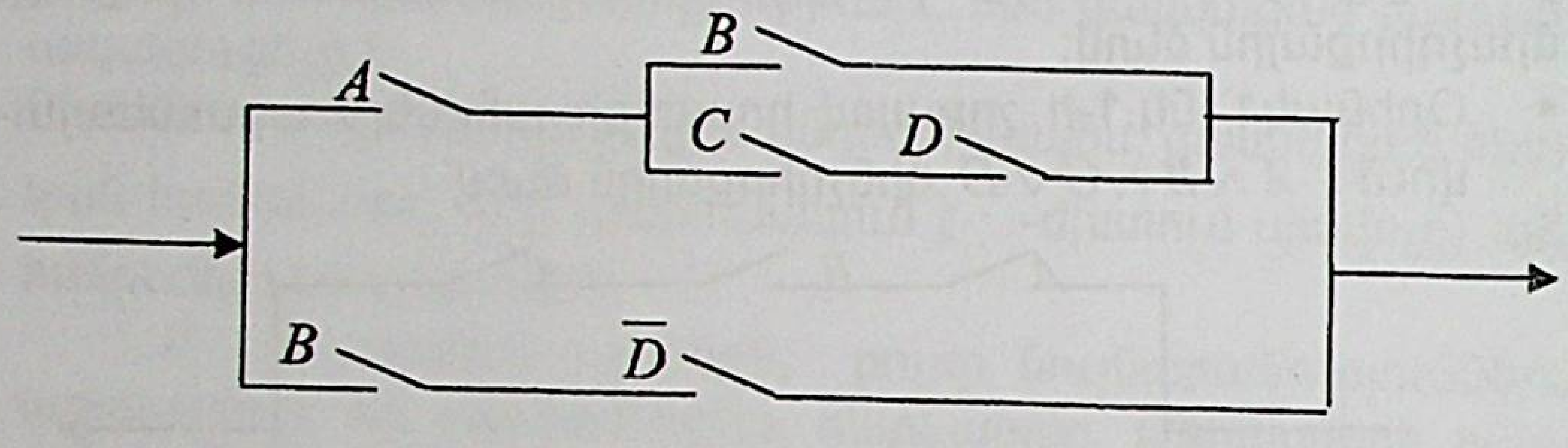


Նկար2.

Ավելին՝ կարելի է ցույց տալ, որ $A\wedge(B\vee C)\wedge D\vee(\overline{A}\vee\overline{D})\wedge B\wedge(\overline{D}\vee\overline{A})$ ձևը մաթեմատիկական տրամաբանության համարժեք ձևափոխությունների ապարատի մի-ջոցով կարող է ստացվել: Իրոք,

$$A \wedge (B \vee C) \wedge D \vee (\overline{A} \vee \overline{D}) \wedge B \wedge (\overline{D} \vee A) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A \wedge B \vee A \wedge C) \wedge D \vee (\overline{A} \vee \overline{D}) \wedge ((B \wedge \overline{D}) \vee (B \vee A)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A \wedge B \wedge D \vee A \wedge C \wedge D \vee (\overline{A} \vee \overline{D}) \wedge ((B \wedge \overline{D}) \vee (B \wedge A)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A \wedge B \wedge D \vee A \wedge C \wedge D \vee ((\overline{A} \vee \overline{D}) \wedge (B \wedge \overline{D})) \vee ((\overline{A} \vee \overline{D}) \wedge (B \wedge A)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A \wedge B \wedge D \vee A \wedge C \wedge D \vee \overline{A} \wedge B \wedge \overline{D} \vee \overline{D} \vee B \wedge \overline{D} \vee \overline{A} \wedge B \wedge A \vee \overline{D} \wedge B \wedge A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A \wedge B \wedge (D \vee \overline{D}) \vee A \wedge C \wedge D \vee B \wedge \overline{D} \wedge (1 \vee \overline{A}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A \wedge (B \vee C \wedge D) \vee B \wedge \overline{D}$$

Այս դեպքում նրան համապատասխան սխեման կընդունի հետևյալ տեսքը, որը համարժեք է նկ.2-ում պատկերված սխե-մային՝

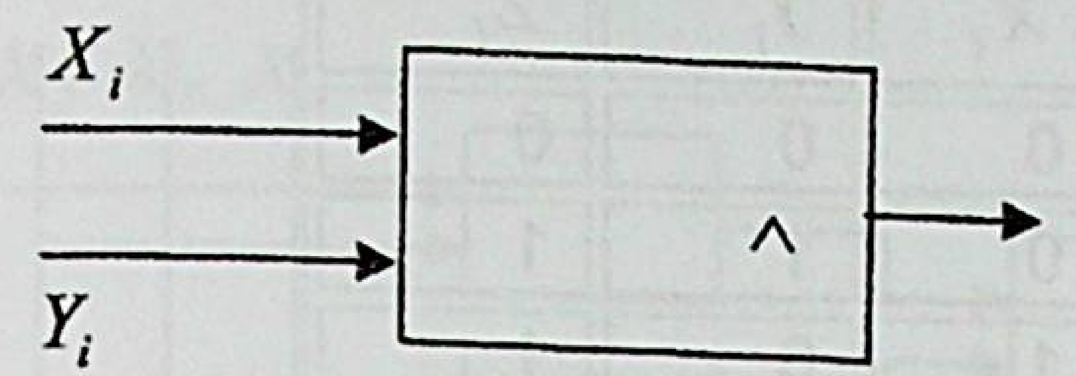


Սահմանում: Երկու սխեմաներ համարվում են համարժեք, եթե նրանցից յուրաքանչյուրով անցնում է միևնույն հոսանքը:
Երկու համարժեք սխեմաներից ավելի պարզ համարվում է այն, որն ունի քիչ թվով փոխարկիչներ: Այնպես, որ ասույթների հաշվման ապարատը կարելի է օգտագործել էլեկտրական սխե-մաների անալիզի համար(նրանով հոսանք անցնում է թե ոչ), սխեմաների սինթեզման (ստեղծման) համար(տրված մինչդիր-քային ձևով շղթաների կառուցում) և շղթաների պարզեցման համար (մինչդիրքային ձևերի համարժեք ձևափոխություններ):
2.Կոմբինացիոն սխեմաներ: Կոմբինացիոն կոչվում են այն էլեկտրական սխեմաները, որոնք կառուցված են տրամաբանա-կան տարրերից:

Կդիտարկենք կոմբինացիոն սխեմաներ, որոնք կազմված կլինեն հետևյալ 3 տիպի տարրերից՝

- Կոնյունկտորներ(«և» տրամաբանական տարրեր)

Նշանակվում են

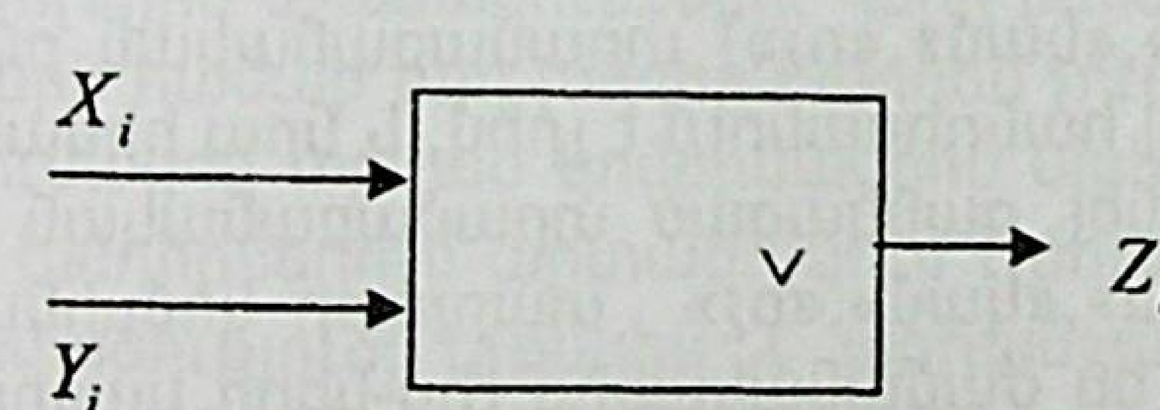


Այս տարրերն ունեն երկու մուտք և մեկ ելք: Կոնյունկտորի յուրաքանչյուր մուտք կարող է հաղորդել զրոյական կամ միավոր պոտենցիալ(լարում): Միավոր պոտենցիալը ելքի մոտ հայտն-վում է այն և միայն այն դեպքում, երբ կոնյունկտորի յուրա-քանչյուր մուտքում առկա է միավոր պոտենցիալ: Մնացած դեպքերում ելքում ստացվում է զրոյական պոտենցիալ: Կոն-յունկտորն իրականացնում է «և»($\wedge$) տրամաբանական գործո-ղությունը և նրա աշխատանքը նկարագրվում է հետևյալ ճշմար-տության աղյուսակով՝

X_i	Y_i	Z_i
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Դիզյունկտորներ(«կամ» տրամաբանական տարրեր)

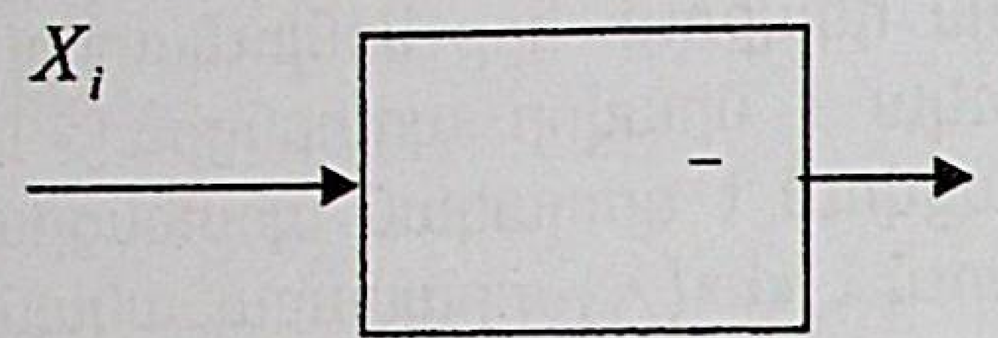
Նշանակվում են՝



Ունի երկու մուտք և մեկ ելք: Իրականացնում է տրամաբանա-կան $\vee$ գործողությունը(կամ) և ունի հետևյալ ճշմարտության աղյուսակը՝

X_i	Y_i	Z_i
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Ինվերտորներ(«ոչ» տարրեր)



Ունի մեկ մուտք և մեկ ելք: Իրականացնում է տրամաբանական (ժխտում) գործողությունը(ոչ):

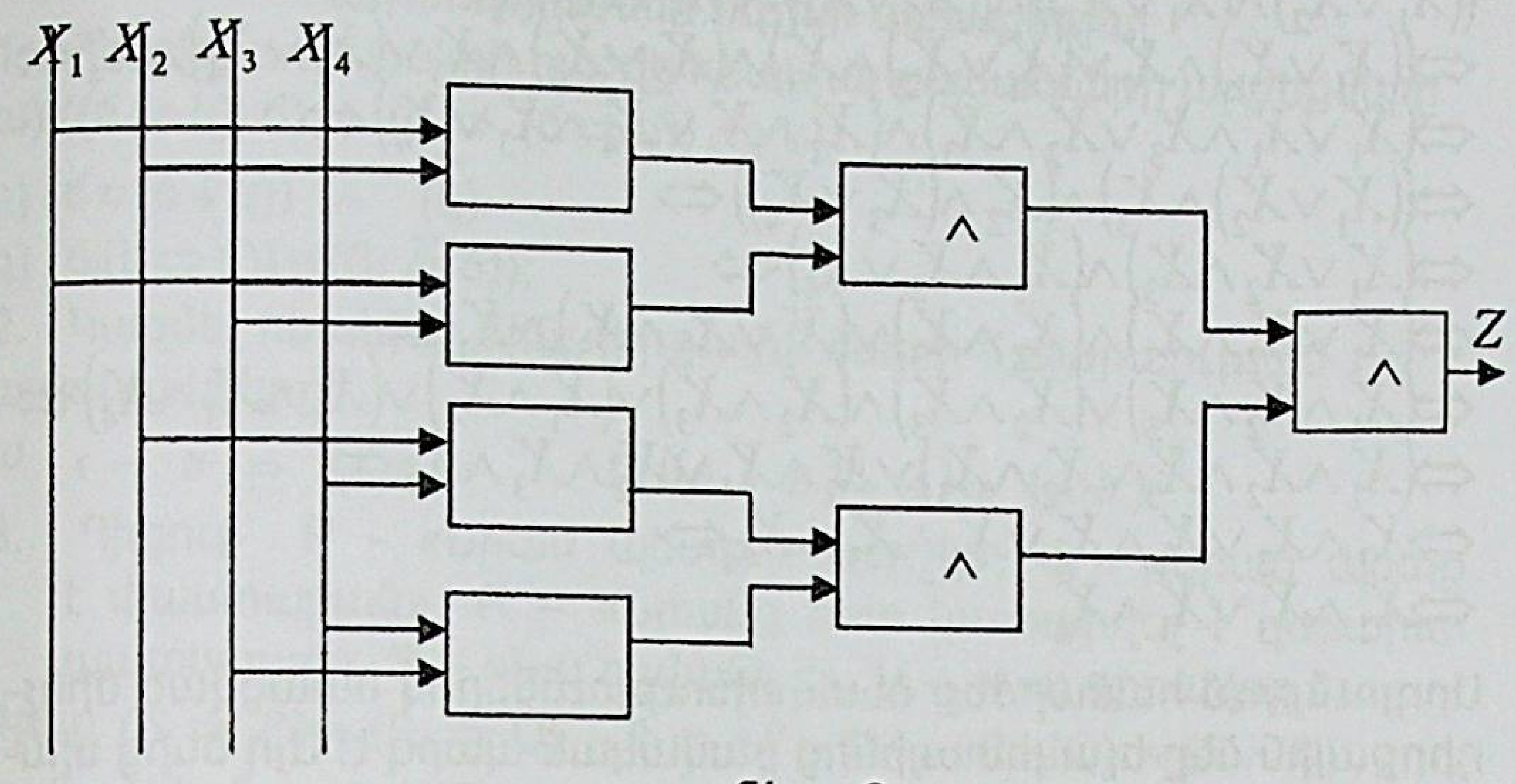
Ճշմարտության աղյուսակն ունի հետևյալ տեսքը՝

X_i	Z_i
0	1
1	0

Ինչպես գիտենք, {«և»,«կամ»,«ոչ»} տրամաբանական բազիսը ֆունկցիոնալ առումով հանդիսանում է լրիվ, և նրա հիման վրա կարելի է իրականացնել ցանկացած տրամաբանական ֆունկցիա. դրա համար «և»,«կամ»,«ոչ» տարրերի կոմբինացիոն սխեմաները կազմում են ժամանակակից էհմ-ների կառուցման հիմքը:

Նկար 3-ում պատկերված է կոմբինացիոն սխեմայի օրինակ, որի աշխատանքի տրամաբանությունը նկարագրող մինչդիրքային ձևն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$Z = \left(\left(X_1 \vee X_2\right) \wedge \left(X_1 \vee X_3\right)\right) \wedge \left(\left(X_2 \vee X_4\right) \wedge \left(X_3 \vee X_4\right)\right)$$



Նկար3.

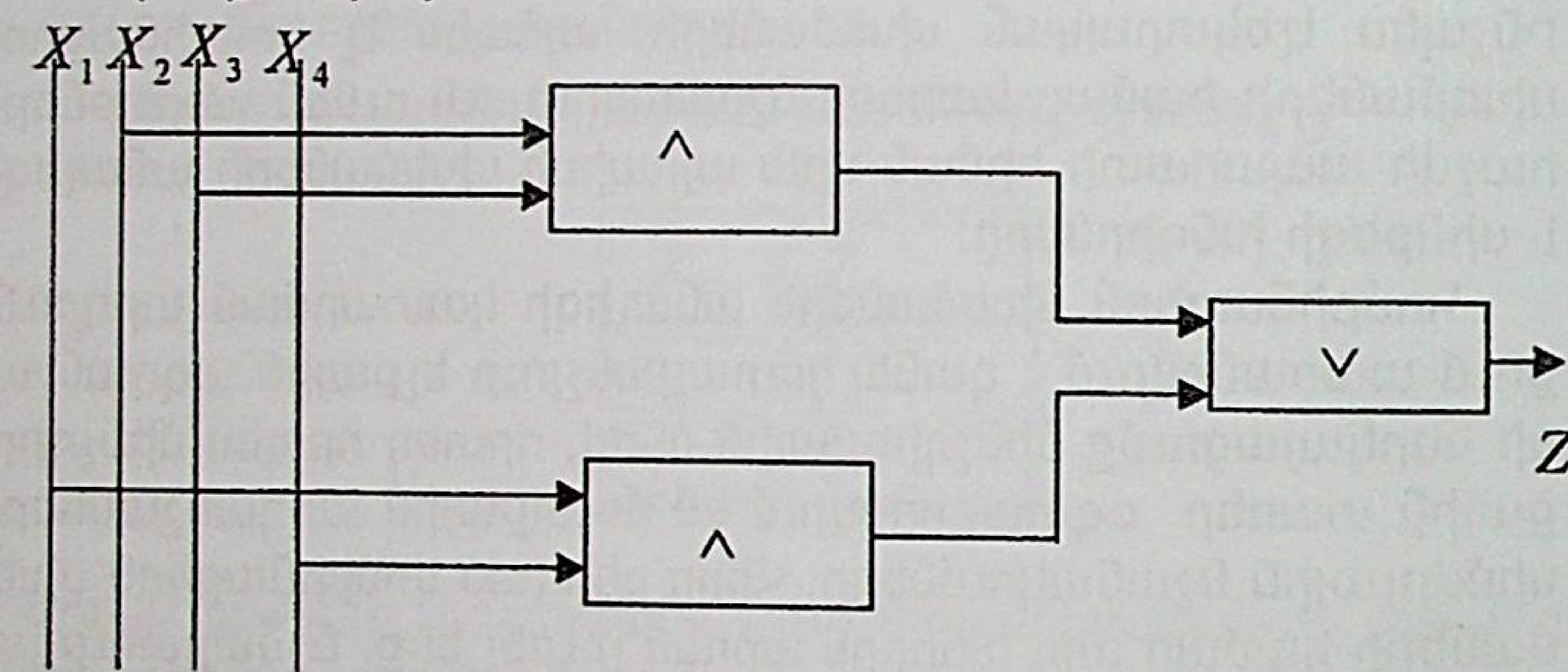
Ինչպես էլեկտրական սխեմաների, այնպես էլ կոմբինացիոն սխեմաների համար կարևոր նշանակություն ունեն ասույթների հաշվի ապարատի հիման վրա այդպիսի սխեմաների անալիզի և սինթեզի խնդիրները:

Կոմբինացիոն սխեմաների անալիզի կատարման արդյունքում պահանջվում է գտնել յուրաքանչյուր ելքային ազդանշանի ներկայացումը մինչդիրքային ձևով, որտեղ որպես մինչդիրքային տառեր օգտագործվում են մուտքային ազդանշանների սիմվոլային նշանակումները: Վերը բերված կոմբինացիոն սխեմաների համար այդ խնդիրն արդեն լուծել ենք: Ճշմարտության աղյուսակով տրված կոմբինացիոն սխեմաների անալիզի լուծման խնդիրներում արտացոլվում է մուտքային Z ազդանշանի կախվածությունը ելքային X ազդանշանի արժեքից: Կոմբինացիոն սխեմաների սինթեզման փուլում լուծվում են նրա մաքսիմալ պարզեցումների խնդիրը՝ օպտիմիզացիան:

Դիտարկենք կոմբինացիոն սխեմաների վերլուծության ստացվելիք արդյունքները(նկ.3) և փորձենք այն պարզեցնել՝ օգտագործելով ասույթների հաշվի համարժեք ձևափոխությունների ապարատը՝

$$\left(\left(X_1 \vee X_2\right) \wedge \left(X_1 \vee X_3\right)\right) \wedge \left(\left(X_2 \vee X_4\right) \wedge \left(X_3 \vee X_4\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(X_1 \vee X_2\right) \wedge X_1 \vee \left(X_1 \vee X_2\right) \wedge X_3\right) \wedge \left(\left(X_2 \vee X_4\right) \wedge X_3 \vee \left(X_2 \vee X_4\right) \wedge X_4 \Leftrightarrow\right.$$
$$\Leftrightarrow \left(X_1 \vee X_1 \wedge X_3 \vee X_2 \wedge X_3\right) \wedge \left(X_2 \wedge X_3 \vee X_4 \wedge X_3 \vee X_4\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(X_1 \vee X_2\right) \wedge X_3\right) \wedge \left(X_2 \wedge \left(X_3 \vee X_4\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(X_1 \vee X_2 \wedge X_3\right) \wedge \left(X_2 \wedge X_3 \vee X_4\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(X_1 \vee X_2 \wedge X_3\right) \wedge \left(X_2 \wedge X_3\right) \vee \left(X_1 \vee X_2 \wedge X_3\right) \wedge X_4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3\right) \vee \left(X_2 \wedge X_3\right) \wedge \left(X_2 \wedge X_3\right) \vee \left(X_1 \wedge X_4\right) \vee \left(X_2 \wedge X_3 \wedge X_4\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \vee X_2 \wedge X_3\right) \vee X_1 \wedge X_4 \vee X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X_2 \wedge X_3 \vee X_1 \wedge X_4 \vee X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X_2 \wedge X_3 \vee X_1 \wedge X_4$$

Արդյունքում համարժեք ձևափոխություններով ստացված մինչ-դիրքային ձևը ելակետայինից բավական պարզ է: Այդ ձևից սին-թեզված կոմբինացիոն սխեման ունի Նկ.4-ի տեսքը, որը համարժեք է Նկ.3-ին:



Նկար4.

Վարժություններ I գլխի վերաբերյալ

1. Հաշվել ասույթների հաշվի հետևյալ բանաձևերի արժեքները`

ա) ((ճ$\Rightarrow$կ)| ճ) $\wedge$ (ճ$\Rightarrow$ (ճ$\Rightarrow$կ)) $\Rightarrow$կ)

բ) (ճ$\equiv$(ճ$\downarrow$կ)) $\wedge$ $\overline{(\text{կ})}$

գ) (ճ|(կ$\Rightarrow$ճ))$\equiv$((կ $\overline{\&}$ ճ)):

2. Կազմել հետևյալ մինչդիրքային ձևերի ճշմարտության աղյուսակները`

ա $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\overline{A|B}))$, բ $((A \downarrow B) \downarrow A) \Rightarrow (A|B)$:

3. Դիցուք` P - «Նրան պետք է բժիշկ», Q – «Նրան պետք է փաստաբան», R – «Նրանց հետ կատարվել է դժբախտ պատահար», S – «Նա հիվանդ է», U – «Նա վիրավոր է»:

Գրեք $(S \Rightarrow P) \wedge (R \Rightarrow Q)$, $P \Rightarrow (S \vee U)$, $(P \wedge Q) \equiv (S \wedge U)$ բանաձևերն ասույթների լեզվով:

4. Լրացնել $(\overline{P} \vee Q) \wedge \overline{P \wedge \overline{Q}}$ բանաձևի համապատասխան ճշմարտության աղյուսակը`

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$(\overline{P} \vee Q)$	$(P \wedge \overline{Q})$	$\overline{P \wedge \overline{Q}}$	$(\overline{P} \vee Q) \wedge \overline{P \wedge \overline{Q}}$
ճ	ճ						
ճ	կ						
կ	ճ						
կ	կ						

5. Պարզել` հետևյալ բանաձևերը նույնաբանություն են, թե ոչ`

ա) $(P \wedge (Q \Rightarrow P)) \Rightarrow P$, բ) $(P \vee \overline{Q}) \wedge (\overline{P} \vee Q)$:

6. Գտնել մինչդիրքային այն ձևերը, որոնք ունեն հետևյալ ճշմարտության f ֆունկցիաները`

ա)

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
ճ	ճ	ճ
կ	ճ	կ
ճ	կ	ճ
կ	կ	կ

բ)

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
ճ	ճ	ճ	կ
կ	ճ	ճ	ճ
ճ	կ	ճ	ճ
կ	կ	ճ	կ
ճ	ճ	կ	ճ
կ	ճ	կ	կ
ճ	ճ	կ	կ
կ	ճ	կ	ճ

7. Պարզել՝ հետևյալ մինչդիրքային ձևերից որո՞նք են հանդիսանում դիզյունկտիվ(կոնյունկտիվ)-նորմալ կամ կատարյալ՝

ա) $(\overline{A} \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$,

բ) $(A \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee A$,

գ) $(A \wedge B \wedge \overline{B}) \Rightarrow (\overline{A} \wedge B) \Rightarrow B$,

դ) $(B \wedge C \wedge \overline{D}) \vee (\overline{C} \wedge D \wedge C) \vee (B \wedge \overline{D})$

ե) $(B \wedge C \wedge \overline{D}) \vee (\overline{C} \wedge D \wedge C) \vee (B \wedge \overline{D})$:

8. Ցույց տալ, որ

ա) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$,

բ) $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$,

գ) $\vdash \overline{\overline{A}} \Rightarrow A$,

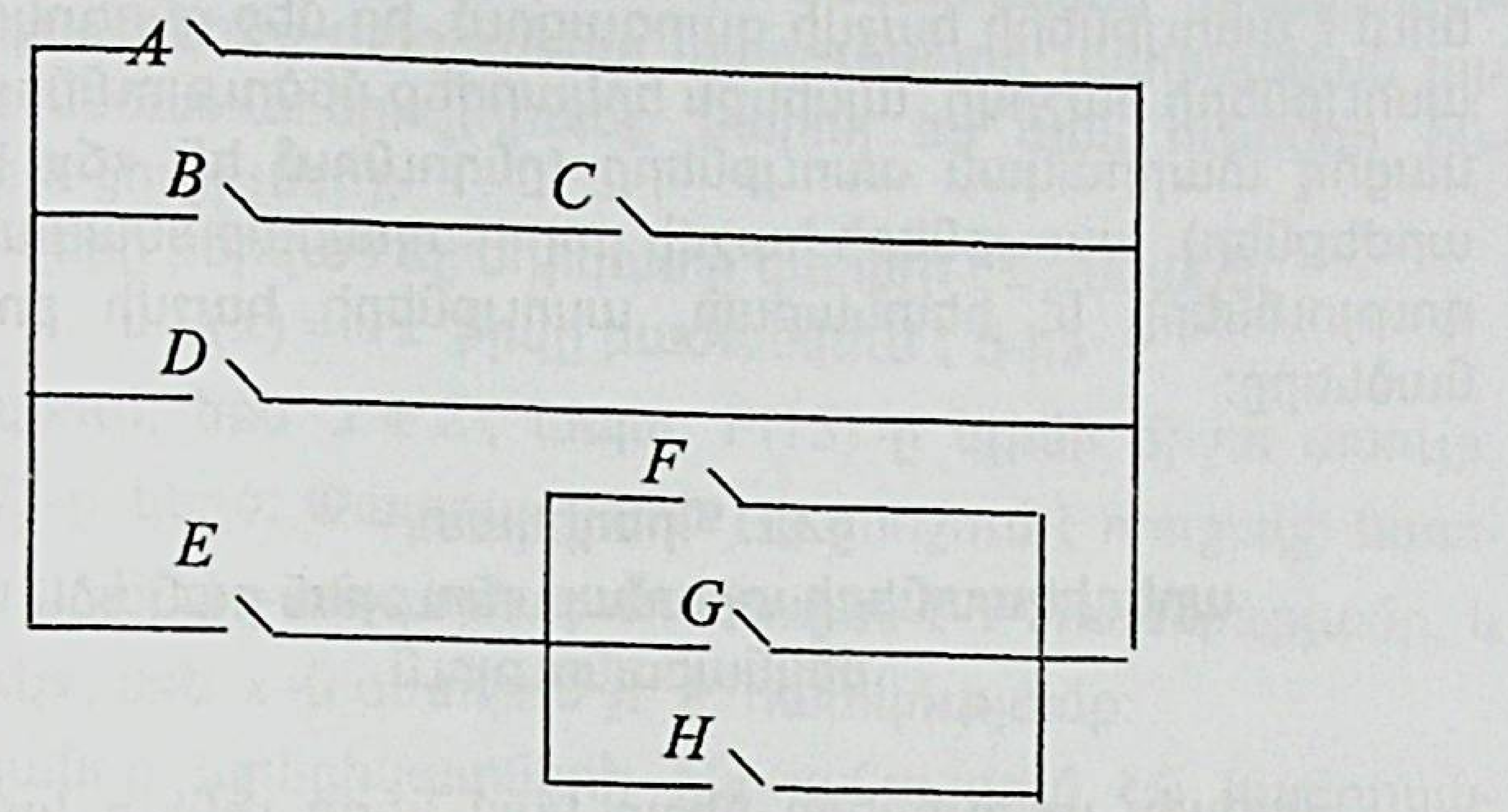
դ) $\vdash A \Rightarrow \overline{\overline{A}}$,

ե) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$:

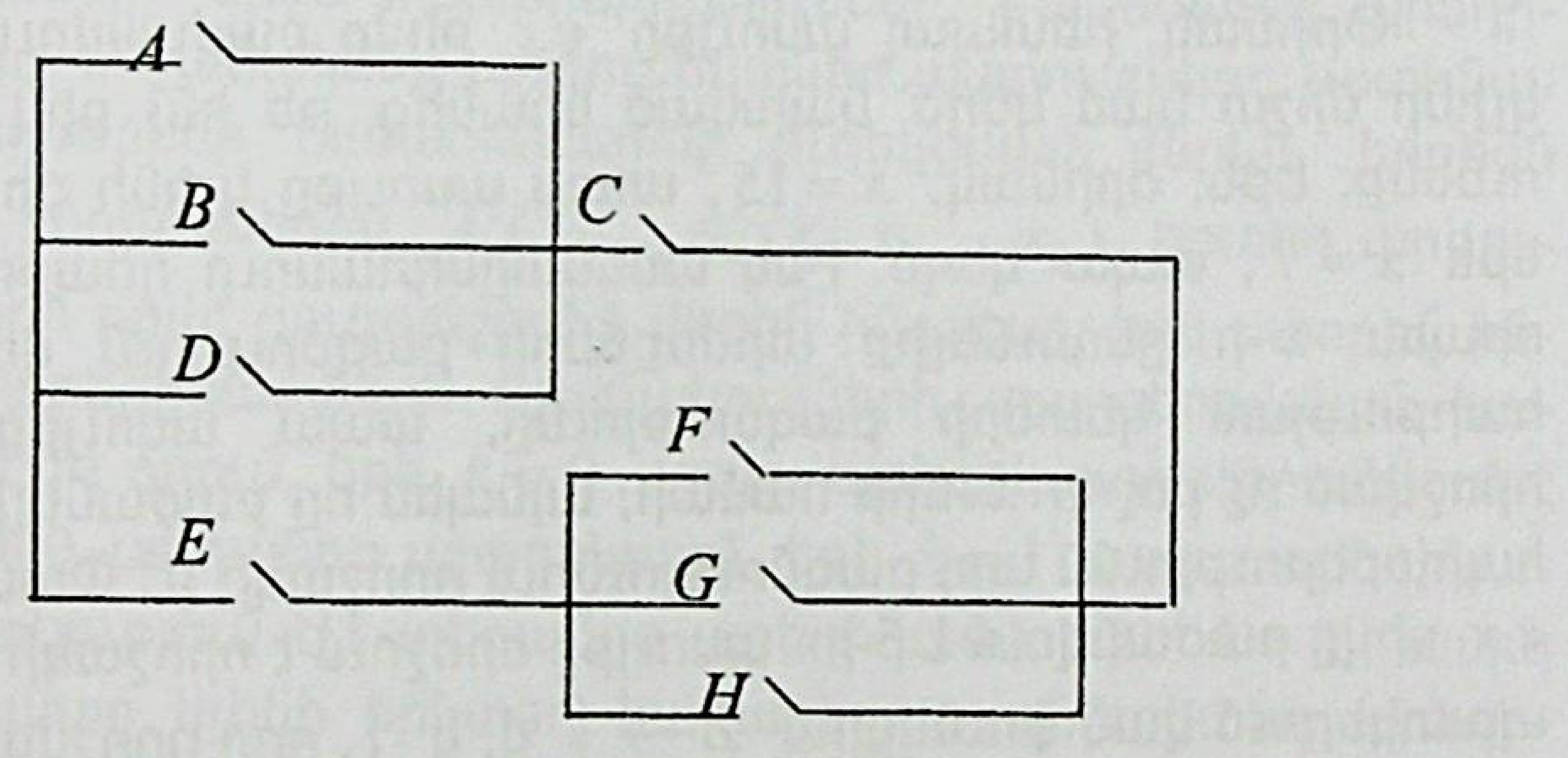
9. Փոխարկիչները համադրեք ասույթներով հետևյալ կերպ՝ եթե համապատասխան փոխարկիչը փակ է, այսինքն շղթայով հոսանք անցնում է, ապա նրան համապատասխան P ասույթը

ճիշտ է, և եթե փոխարկիչը բաց է, այսինքն շղթայով հոսանք չի անցնում, ապա՝ P ասույթը կեղծ է:

ա)



բ)



ԳԼՈՒԽ 2. ՊՐԵԴԻԿԱՏՆԵՐԻ ՀԱՇԻՎ

Պրեդիկատների տրամաբանությունն իրենից ներկայացնում է ասույթների հաշվի զարգացում. իր մեջ ընդգրկում է ողջ ասույթների հաշիվը, այսինքն երկարժեք մեծություններ հանդիսացող տարրական ասույթները (ընդունում են «ճ» կամ «կ» արժեքներ), ասույթների հաշվի բոլոր տրամաբանական գործողությունները և, հետևաբար, ասույթների հաշվի բոլոր բանաձևերը:

§2.1. Պրեդիկատ, պրեդիկատների տրամաբանության բանաձև, մեկնաբանություն

Հաճախ ասույթների ճիշտ կամ կեղծ լինելը կախված է այն իրադրությունից, որում այն ներկայացված է:

Օրինակ, հետևյալ ասույթը՝ «x թիվը բաժանվում է 5-ի» կլինի ճիշտ կամ կեղծ՝ կախված նրանից, թե ինչ թիվ նկատի ունենք: Եթե, օրինակ, $x = 15$, ապա ասույթը կլինի ճիշտ, իսկ եթե $x = 7$, ապա՝ կեղծ: Իսկ ամենաընդհանուր դեպքում, եթե որպես x-ի ընդունելիք արժեքների բազմություն վերցնենք հարթության կետերի բազմությունը, ապա ասույթը կլինի որոշված ոչ բոլոր x-երի համար, այնպես որ բաժանելիության հարաբերությունն այդ բազմությունում որոշակի չէ: Փաստորեն, «x թիվը բաժանվում է 5-ի» ասույթը որոշում է որոշակի արտապատկերում կամ ֆունկցիա՝ $Z \to \{$ ճ, կ $\}$, որը որոշված է Z բազմությունում և ընդունում է արժեքներ $\{$ ճ, կ $\}$ բազմությունից (աղյուսակը բերված է՝ որպես ֆունկցիայի տրման եղանակ)՝

x	«x թիվը բաժանվում է 5-ի»
1	կ
5	ճ
…	…….

Այսպիսի ֆունկցիաները(փոփոխականով ասույթները) կոչվում են տրամաբանական ֆունկցիաներ մեկ փոփոխականից կամ մեկտեղանոց պրեդիկատներ: Մեկտեղանոց պրեդիկատները կնշանակենք արգումենտ պարունակող լատինական այբուբենի մեծատառերով(դրանք կարող են նաև ունենալ ինդեքսներ և ցուցիչներ):

Այսպես՝ վերը բերված պրեդիկատը կարելի է նշանակել

$$P(x) = «x \text{ թիվը բաժանվում է 5-ի»}$$

Այդ դեպքում, եթե $x \in Z$, ապա $P(15)$-ը կլինի ճիշտ ասույթ, իսկ $P(7)$-ը՝ կեղծ: Փաստացի $P(x)$-ը որոշում է որոշակի հատկություն և $P(x) =$ «ճ», եթե x-ն օժտված է P հատկությամբ, և $P(x) =$ «կ», եթե x-ն օժտված չէ P հատկությամբ:

Մեկտեղանոց պրեդիկատների ընդհանրացում են հանդիսանում բազմատեղ պրեդիկատները, որոնք արտահայտում են առարկաների միջև հարաբերություններ: Բազմատեղ պրեդիկատները կնշանակենք արգումենտներ պարունակող լատինական այբուբենի մեծատառերով՝ ուղեկցված վերևի, երբեմն ներքևի ինդեքսներով՝ $A_1^1(x), \ldots, A_n^k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, որտեղ արգումենտների թիվը ցուցանշում է վերին ինդեքսը, իսկ ստորին ինդեքսը պրեդիկատների նշանակումների տարբերակման համար է: Ընդ որում, եթե $k = 0$, ապա պրեդիկատը վերածվում է ասույթի(0-տեղանոց պրեդիկատ), եթե $k = 1$, ապա պրեդիկատը հատկություն է(1-տեղանոց պրեդիկատ), եթե $k = 2$, ապա պրեդիկատը կլինի երկտեղ հարաբերություն(երկտեղ պրեդիկատ), եթե $k = 3$, ապա ստանում ենք տերնար հարաբերություն(3-տեղանոց պրեդիկատ) և այլն:

Սահմանենք որոշակի Ω բազմություն՝ որպես փոփոխականով ասույթների փոփոխականների արժեքների բազմություն: Այդ բազմությունը կոչվում է առարկայական տիրույթ: Այսպես՝ բերված օրինակում Ω է հանդիսանում ամբողջ թվերի բազմությունը:

Ω առարկայական տիրույթի սահմանումը կոչվում է մեկնաբանություն (ինտերպրետացիա):

Այսպես, եթե որպես Ω սահմանենք ընտանիքի անդամների բազմությունը, ապա պրեդիկատներով կարելի է տալ ազգական լինելու հարաբերությունը հետևյալ կերպ, օրինակ, $L(x,y)$-ը կարող է նշանակել՝ «x-ը և y-ը եղբայրներ են», $M(x,y)$-ը՝ «x-ը y-ի հայրն է»:

Ω առարկայական տիրույթի տարրերը կնշանակենք լատինական այբուբենի փոքրատառերով, երբեմն ուղեկցված ինդեքսներով: Պայմանավորվենք լատինական այբուբենի վերջնատառերով՝ $x,y,z,u,v,x_1,x_2,\ldots$ նշանակել տիրույթի չորոշված տարրերը, որոնց կանվանենք առարկայական փոփոխականներ: Այբուբենի սկզբնատառերով՝ $a,b,c,a_1,a_2,\ldots$ կնշանակենք տիրույթի որոշված տարրերը, որոնց կանվանենք առարկայական հաստատուններ: Այս դեպքում $F(x), G(x,y), P(x_1,\ldots,x_n),\ldots$ արտահայտությունները նշանակում են պրեդիկատներ, այսինքն ֆունկցիաներ, որոնց արգումենտներն ընդունում են արժեքներ Ω առարկայական տիրույթից, ընդ որում ֆունկցիաները կարող են ընդունել միայն երկու արժեք:

Այսպիսով՝ կասենք որևէ պրեդիկատ որոշված է, եթե՝

I. տրված է պրեդիկատի առարկայական տիրույթը,

II. սևեռված է { ճ, կ } բազմությունը, այն է՝ պրեդիկատների արժեքների տիրույթը,

III. ցույց է տրված այն կանոնը, որով որոշման տիրույթից վերցրած յուրաքանչյուր տարրի համապատասխանության մեջ է դրված արժեքների տիրույթի 2 տարրերից որևէ մեկը:

Ակնհայտ է, որ պրեդիկատը հանդիսանում է ֆունկցիա, որում սևեռված է արժեքների տիրույթը:

Սահմանում: Առարկայական հաստատունից և առարկայական փոփոխականից կախված պրեդիկատը կոչվում է տարրական բանաձև:

Ներմուծենք պրեդիկատների հաշվում բանաձևի հասկացությունը: Նկատենք, որ ասույթների հաշվի ցանկացած բանաձև հանդիսանում է պրեդիկատների հաշվի բանաձև:

Պրեդիկատների հաշվի բանաձև է հանդիսանում՝

1. յուրաքանչյուր տարրական բանաձև;

2. եթե A-ն և B-ն բանաձևեր են, ապա $\overline{A}, A \Rightarrow B$ արտահայտություններից յուրաքանչյուրը;
3. բոլոր այն արտահայտությունները, որոնք հետևում են 1) և 2) կետերից:

1) և 2) կետերից հետևում է, որ ասույթների հաշվի բոլոր բանաձևերը պրեդիկատների հաշվում նորից բանաձևեր են:

Սահմանում: Եթե P և Q բանաձևերը նրանցում մտնող առարկայական հաստատունների, փոփոխականների՝ Ω-ից վերցրած կամայական արժեքների համար ընդունում են «ճ» և «կ» միևնույն արժեքներ, ապա P-ն կոչվում է համարժեք Q-ին Ω տիրույթում և նշանակվում է՝ $P \underset{\Omega}{\sim} Q$: Իսկ եթե P-ն համարժեք է Q-ին կամայական տիրույթում, ապա ասում են, որ նրանք ուղղակի համարժեք են և նշանակում $P \sim Q$:

Պրեդիկատների համարժեքությունը թույլ է տալիս անհամատարբեր դեպքերում բանաձևերը բերել ավելի հարմար տեսքերի: Ակնհայտ է, որ ասույթների հաշվի՝ բանաձևերի համար մտցրած համարժեքությունը տարածվում է նաև պրեդիկատների հաշվի վրա: Մասնավորաբար, ունենք՝ $(P \Rightarrow Q) \sim \overline{P} \vee Q$:

§2.2. Քվանտորներ

Ասույթների հաշվի տրամաբանական գործողություն-ներից բացի պրեդիկատների հաշվում կօգտագործենք ևս 2 նոր գործողություններ, որոնք արտահայտում են ընդհանրության և գոյության հաստատումը:

1. Ընդհանրության քվանտոր: Դիցուք՝ $R(x)$-ը որևէ պրեդիկատ է, որն ընդունում է «ճ» և «կ» արժեքներ Ω առարկայական տիրույթից վերցրած որևէ x-ի համար:

Այդ դեպքում $\forall x R(x)$ արտահայտության տակ կհասկանանք «Կամայական x տարրի համար(Ω բազմությունից) տեղի ունի $R(x)$» ասույթը, որը ճիշտ է, եթե $R(x)$-ը ճիշտ է Ω-ից վերցրած կամայական x-ի համար: $\forall xR(x)$ գրառման մեջ $\forall x$ մասը կոչվում է ընդհանրության քվանտոր, իսկ $R(x)$-ը հանդիսանում է $\forall x$ քվանտորի ազդեցության տիրույթ:

Պարզ է, որ $\forall xR(x)$ ասույթը կախված չէ x-ից: Ավելին՝ որպեսզի համոզվենք $\forall xR(x)$ ասույթի ճշմարտության մեջ, անհրաժեշտ է Ω-ի բոլոր $a,b,c,\ldots$ տարրերի համար համոզվել, որ $R(a),R(b),R(c),\ldots$ ասույթները «ճ» են, բայց մենք չենք կարող կամ փորձարկումը կապված է տեխնիկական դժվարությունների հետ, ապա որևէ դատողության օգնությամբ պետք է ապացուցել, որ Ω-ի կամայական a տարրի համար $R(a)$-ն ճիշտ է: Իսկ որպեսզի համոզվենք $\forall xR(x)$ ասույթի կեղծ լինելու մեջ, բավական է գտնել Ω-ից գոնե մեկ տարր, որի համար $R(a)$-ն լինի կեղծ, այսինքն գտնել մեկ հակաօրինակ:

Օրինակ1՝ Դիտարկենք բնական թվերի N բազմությունում հետևյալ պրեդիկատը՝ $R(x)\equiv$ «$2^{2^x}+1$ թիվը պարզ թիվ է»:

$x=1,2,3,4$ համար ստանում ենք հետևյալ ասույթները՝

$R(1)\equiv$ «$2^{2^1}+1$ թիվը պարզ թիվ է» $\equiv$ «ճ»

$R(2)\equiv$ «$2^{2^2}+1$ թիվը պարզ թիվ է» $\equiv$ «ճ»

$R(3)\equiv$ «$2^{2^3}+1$ թիվը պարզ թիվ է» $\equiv$ «ճ»

$R(4)\equiv$ «$2^{2^4}+1$ թիվը պարզ թիվ է» $\equiv$ «ճ»

Բոլոր այս ասույթները «ճ» են(կարելի է համոզվել): Բայց կարելի՞ է արդյոք ասել, որ $\forall xR(x)$ ասույթը ճիշտ է, այսինքն այն, որ ցանկացած n բնական թվի համար $2^{2^n}+1$ թիվը պարզ է: Իհարկե, ոչ. այդպիսի եզրահանգման համար մենք բավարար հիմք չունենք: Վերջիվերջո, մենք չենք փորձել բոլոր բնական թվերը(դա հնարավոր չէ. բնական թվերի բազմությունն անվերջ է): Պ. Ֆերման համոզված էր $\forall xR(x)$ ասույթի ճշմարտության մեջ: Հետագայում Լ. Էյլերը ցույց տվեց, որ $R(5)$ ասույթը կեղծ է

($2^{2^5}+1=2^{32}+1$ թիվը պարզ թիվ չէ. այն բազմապատիկ է 641-ին): Այդ ձևով $\forall xR(x)$ ասույթն եղավ «կ»:

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ $\forall xR(x)$ ասույթի ճշմարտության ստուգումն առանձին օրինակների վրա չի կարող փոխարինել ընդհանուր ապացույցին: Ընդհակառակը, մեկ հակաօրինակը, գտնված Էյլերի կողմից, ապացուցեց $\forall xR(x)$ ասույթի կեղծ լինելը:

Օրինակ2՝ Դիտարկենք $\forall xD(x)$ ասույթը, որտեղ $D(x)$-ը N բազմության վրա տրված որևէ պրեդիկատ է՝ $D(x)\equiv$ «x^3+5x թիվը բաժանվում է 6-ի»:

Հեշտ է համոզվել, որ $D(1),D(2),D(3),D(4),D(5)$ ասույթները «ճ» են: Նույն արդյունքը կստացվի արգումենտի շատ այլ արժեքների դեպքում, բայց x-ի որոշակի վերջավոր թվով արժեքների ստուգումը չի հանգեցնում $\forall xD(x)$ ասույթի ճշմարտության ստուգմանը: Նման դեպքում $\forall xD(x)$-ի ապացույցը հարմար է տալ որևէ դատողության օգնությամբ՝ այն է՝

$x^3+5x=x^3-x+6x=x(x^2-1)+6x=x(x-1)(x+1)+6x$:

Եվ քանի որ $x(x-1)(x+1)$-ը բաժանվում է 6-ի՝ որպես 3 հաջորդական թվերի արտադրյալ, $6x$-ը բաժանվում է 6-ի, ապա $x(x-1)(x+1)+6x$-ը բաժանվում է 6-ի ցանկացած x բնական թվի համար, որը և ցույց է տալիս $\forall xD(x)$ ասույթի «ճ» լինելը:

2. Գոյության քվանտոր: Դիցուք՝ $R(x)$-ը որևէ պրեդիկատ է Ω բազմությունում: Այդ դեպքում $\exists xR(x)$ արտահայտության տակ կհասկանանք «Գոյություն ունի Ω բազմությունից x տարր այնպիսին, որի համար տեղի ունի $R(x)$» կամ այլ կերպ՝ «Կգտնվի գոնե մեկ x տարր, որի համար տեղի ունի $R(x)$» ասույթը, որտեղ $\exists x$ սիմվոլը կոչվում է գոյության քվանտոր: Ընդ որում $\exists xR(x)$-ը ճիշտ է, երբ Ω բազմությունից կգտնվի գոնե մեկ a տարր այնպիսին, որ $R(a)$-ն լինի ճիշտ, հակառակ դեպքում, այսինքն, երբ Ω-ում գոյություն չունի ոչ մի a տարր, որի համար $R(a)$ ասույթը ճիշտ է՝ $\exists x R(x)$-ը կեղծ է։

Այսպես՝ օրինակ1-ում $R(x)$ պրեդիկատը հենց N-ից վերցրած 1 տարրի համար ճիշտ է, հետևաբար ճիշտ է նաև $\exists x R(x)$-ը։ Մինչդեռ արդյունավետ է փորձարկումների մեթոդը փոխարինել որևէ ընդհանուր դատողության կիրառմամբ՝

Դիցուք N բազմությունում տրված է հետևյալ պրեդիկատը՝

$P(x) \equiv$ «$x^2 + 2x + 3$ թիվը բաժանվում է 7-ի»։

Դժվար չէ համոզվել, որ $P(1) \equiv 0$, $P(2) \equiv 0$,...(շատ թվով n-երի համար ստանում ենք նույն՝ կեղծ արդյունքը), որը դեռևս ընդհանուր ապացույց չէ։ Նման դեպքերում հարմար է տալ որևէ ընդհանուր դատողություն՝ օրինակ «7-ի վրա բաժանվող յուրաքանչյուր $n \in N$ թիվ կարելի է ներկայացնել $n = 7k + l$ տեսքով, որտեղ $l = 0,1,2,3,4,5,6$»։ Այդ դեպքում՝

$$n^2 + 2n + 3 = (7k + l)^2 + 2(7k + l) + 3 = 7(7k^2 + 2kl + 2k) + l^2 + 2l + 3$$

Երևում է, որ $n^2 + 2n + 3$-ը 7-ի վրա բաժանելուց տալիս է նույն մնացորդը ինչ $l^2 + 2l + 3$-ը (նրանց տարբերությունը բաժանվում է 7-ի)։ Այսինքն $n^2 + 2n + 3$-ը 7-ի վրա բաժանվում է այն և միայն այն դեպքում, երբ 7-ի վրա բաժանվում է $l^2 + 2l + 3$-ը, բայց $l = 0,1,2,3,4,5,6$ ։ Այս արժեքներում հաշվելով $l^2 + 2l + 3$-ը՝ ստանում ենք $3,6,11,18,\ 27,38,51$, որոնցից ոչ մեկը 7-ին բազմապատիկ չէ։ Հետևաբար $\exists x P(x)$-ը կեղծ է։ Բանաձևերի մեջ քվանտորների ներմուծումը բանաձևի մեջ մտնող փոփոխական-
ների բազմությունը տրոհում է 2 ենթաբազմությունների՝ ազատ և կապակցված ներմուծումով փոփոխականների։

Տանք բանաձևում փոփոխականի ազատ և կապակցված ներմուծման հասկացությունները։

Սահմանում: Փոփոխականի ներմուծումը տրված բանաձևի մեջ կոչվում է կապակցված, եթե x-ը այդ բանաձևի մեջ մտնող $\forall x$ քվանտորի փոփոխական է կամ գտնվում է այդ բանաձևի

մեջ մտնող $\forall x$ քվանտորի ազդեցության տիրույթում։ Հակառակ դեպքում x փոփոխականի ներմուծումը տրված բանաձևի մեջ կոչվում է ազատ։

Օրինակ՝ $A_1^2(x_1, x_2)$ բանաձևի մեջ x_1, x_2 առարկայական փոփոխականների ներմուծումն ազատ է։ Ավելին՝ այլ օրինակներում միևնույն փոփոխականի ներմուծումը մի բանաձևում կարող է լինել և՛ կապակցված, և՛ ազատ։ Ազատ (կապակցված) ներմուծումով փոփոխականների գաղափարը լայնորեն օգտագործվում է մաթեմատիկայում՝ արտահայտությունը, որը պարունակում է ազատ ներմուծումով փոփոխական, կախված է այդ փոփոխականի արժեքից, իսկ այն արտահայտությունը, որը պարունակում է կապակցված ներմուծումով փոփոխական, ներկայացնում է գործողության արդյունք։ Օրինակ՝ $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ արտահայտությունում n-ը ազատ ներմուծումով փոփոխական է, i-ն՝ կապակցված ներմուծումով, իսկ a_i-ն հաստատուն է։ Իսկ մաթեմատիկական անալիզում $\int\limits_0^y x^2 y d$ մեծությունը կախված չէ x-ից. $\int\limits_0^y x^2 y dx = \frac{y^3}{3}$։ Նույն կերպ՝ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ մեծությունը կախված չէ n-ից, չնայած կախված է x-ից։ Այդ դեպքում կասենք, որ առաջին արտահայտությունում x-ը կապակցված ներմուծումով փոփոխական է, իսկ y-ը՝ ազատ ներմուծումով փոփոխական։ Երկրորդ արտահայտությունում
n-ը կապակցված ներմուծումով է, իսկ x-ը՝ ազատ ներմուծումով փոփոխական։ «$3x + \int\limits_0^y x^2 y dx$»-ում x-ի առաջին մուտքը բանաձևում ազատ ներմուծումով է, երկրորդը՝ կապակցված ներմուծումով, իսկ y-ը բոլոր մուտքերում ազատ ներմուծումով է։

Դիտողություն: Այստեղ՝ պրեդիկատների հաշվում, որպեսզի չծանրաբեռնենք բանաձևերի գրառումները և բարդ պրեդիկատների ընթերցումը հանգեցնենք ոչ միարժեքության՝ օգտագործելով բազմաթիվ փակագծեր, կարող ենք կատարել որոշ կրճատումներ:

§2.3. Պրեդիկատների հաշվի աքսիոմատիկ կառուցումը, առաջին կարգի տեսություններ, առաջին կարգի պրեդիկատների հաշիվ

Ասույթների հաշվում մինչդիրքային ձևերի ճշմարտության աղյուսակների ուսումնասիրումը թույլ է տալիս ստուգել՝ տվյալ ձևը հանդիսանու՞մ է նույնաբանություն, թե ոչ: Պրեդիկատների հաշվում, որտեղ առարկայական տիրույթը կարող է լինել անվերջ, համանման մեթոդը կիրառելի չէ: Այստեղ ծագում է աքսիոմատիզացիայի և համապատասխան տեսության կառուցման անհրաժեշտություն: Այսուհետ դիտարկվելիք տեսությունները վերաբերում են այսպես ասած առաջին կարգի տեսություններին, որոնցում բաց չեն թողնված, օրինակ, այնպիսի կառույցներ, ինչպիսիք են պրեդիկատները, որոնց արգումենտներն իրենց հերթին կարող են լինել պրեդիկատներ:

Ցանկացած K առաջին կարգի տեսության սիմվոլներ են հանդիսանում $\bar{\ }, \Rightarrow, \ldots$ կապերը, «$\forall$», «$\exists$» քվանտորները, կետադրական նշանները՝ «(,)», «,»(ստորակետն անհրաժեշտ չէ, բայց հարմար է բանաձևերի հեշտ կարդալու համար), $x_1, x_2, \ldots$ փոփոխականների հաշվելի բազմությունը, ոչ դատարկ, վերջավոր կամ հաշվելի $A_j^n (n, j \ge 1)$ պրեդիկատային տառերի բազմությունը, վերջավոր(հնարավոր է և դատարկ) կամ հաշվելի $f_j^n (n, j \ge 1)$ ֆունկցիոնալ տառերի և a_i առարկայական հաստատունների բազմությունը:

Թերմեր և բանաձևեր: Ֆունկցիոնալ տառերը, որոնք կիրառվում են առարկայական փոփոխականների և հաստատունների համար, առաջացնում են թերմեր:
Ավելի կոնկրետ՝

1. յուրաքանչյուր առարկայական փոփոխական կամ հաստատուն հանդիսանում է թերմ,
2. եթե f_i^n-ը ֆունկցիոնալ տառ է և $t_1, t_2, \ldots, t_n$ թերմեր են, ապա $f_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$-ը թերմ է,
3. արտահայտությունը հանդիսանում է թերմ այն և միայն այն դեպքում, եթե դա հետևում է 1) և 2) կետերից:

Մինչդիրքային կապերի, բանաձևերի ձևակերպումները մնում են ուժի մեջ նաև ցանկացած առաջին կարգի տեսությունում: Ավելին՝

$A \wedge B$-ն $\overline{A \Rightarrow \overline{B}}$-ն է

$A \vee B$-ն $\overline{A} \Rightarrow B$-ն է

$A \Leftrightarrow B$-ն $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$-ն է:

Ցանկացած առաջին կարգի K տեսության աքսիոմները բաժանվում են 2 խմբի՝ տրամաբանական և հատուկ(ոչ տրամաբանական) աքսիոմների:

Տրամաբանական աքսիոմներ: Ինչպիսին էլ լինեն K տեսության A, B, C բանաձևերը, հետևյալ բանաձևերը հանդիսանում են K տեսության տրամաբանական աքսիոմներ՝

Ա1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

Ա2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Ա3. $(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}) \Rightarrow ((\overline{B} \Rightarrow A) \Rightarrow B)$

Ա4. $\forall x_i A(x_i) \Rightarrow A(t)$, որտեղ $A(x_i)$-ն K տեսության բանաձև է, t-ն՝ K տեսության ազատ ներմուծված թերմ $A(x_i)$-ում:

Նկատենք, որ t-ն կարող է համընկնել x_i-ի հետ և այդ դեպքում կստանանք $\forall x_i A(x_i) \Rightarrow A(x_i)$ աքսիոմը:

Ա5. $\forall x_i (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x_i B)$, եթե A բանաձևում x_i-ն ազատ ներմուծված է:

Հատուկ աքսիոմներն ընդհանուր դեպքում չեն կարող լինել ձևակերպված. տեսությունից տեսություն փոխվում են:

Սահմանում: Առաջին կարգի տեսությունը, որը չի պարունակում հատուկ աքսիոմներ, կոչվում է առաջին կարգի պրեդիկատների հաշիվ:

Ցանկացած առաջին կարգի տեսության արտածման կանոններ են հանդիսանում՝

1. $Modus-ponens(MP)$՝ A-ից և $A \Rightarrow B$-ից հետևում է B-ն:
2. Ընդհանրացման կանոն($Gen-generalization$)՝ A-ից հետևում է $\forall x_i A$՝ $Gen(A,x_i)=\forall x_i A$:

Առաջին կարգի K տեսության մոդել կոչվում է ցանկացած մեկնաբանություն, որտեղ ճիշտ են K տեսության բոլոր աքսիոմները:

Մասնավորաբար, եթե $Modus-ponens(MP)$ և Gen կանոնները կիրառվում են տվյալ մեկնաբանության ճշմարտության բանաձևերի վրա, ապա որպես արդյունք հանդիսանում են բանաձևեր, որոնք նույնպես ճիշտ են նույն մեկնաբանության ժամանակ: Հետևաբար, ցանկացած K առաջին կարգի տեսության թեորեմ ճիշտ է նրա ցանկացած մոդելի դեպքում:

Բերենք առաջին կարգի տեսության օրինակներ:

1. Դիցուք՝ K-ն պարունակում է A_1^2 պրեդիկատը (2-տեղանոց հարաբերություն), ընդ որում՝ $A_1^2(x_1,x_2)$-ը դա $x_1 < x_2$ -ն է $\overline{A_1^2(x_1,x_2)}$ -ը՝ $x_1 \nless x_2$, և K-ում տրված են հետևյալ հատուկ աքսիոմները՝

- $\forall x_1(x_1 \nless x_1)$- հակաանդրադարձելիություն,
- $\forall x_1\forall x_2\forall x_3((x_1<x_2)\wedge(x_2<x_3))\Rightarrow(x_1<x_3)$- տեղափոխելիություն:

Այս տեսության ցանկացած մոդելի անվանում են մասնակի կարգավորված ստրուկտուրա:

2. Խմբերի տեսություն:

1. $\forall x_1\forall x_2\forall x_3((x_1+x_2)+x_3=x_1+(x_2+x_3))$ զուգորդելիություն,
2. $\forall x_1(0+x_1=x_1)$,
3. $\forall x_1\exists x_2(x_1+x_2=0)$ հակադիր տարրի գոյություն,

4. $\forall x_1(x_1=x_1)$ հավասարության անդրադարձելիություն,
5. $\forall x_1\forall x_2(x_1=x_2\Rightarrow x_2=x_1)$ հավասարության համաչափելիություն,
6. $\forall x_1\forall x_2\forall x_3(x_1=x_2\Rightarrow x_2=x_3)\Rightarrow(x_1=x_3)$-հավասարության տեղափոխելիություն,
7. $\forall x_1\forall x_2\forall x_3(x_2=x_3\Rightarrow(x_1+x_2=x_1+x_3\wedge x_2+x_1=x_3+x_1))$

Այսպիսի հատուկ աքսիոմներով տեսությունը կոչվում է ընդհանուր խմբերի տեսություն, իսկ նրա մոդելները՝ խմբեր: Ընդ որում, եթե $\forall x_1\forall x_2(x_1+x_2=x_2+x_1)$, ապա խումբն անվանում են աբելյան(տեղափոխելի):

1. Բնական թվերի աքսիոմատիկ տեսություն.

N_I. $x_1=x_2\Rightarrow(x_1=x_3\Rightarrow x_2=x_3)$,

N_{II}. $x_1=x_2\Rightarrow x_1'=x_2'$,

N_{III}. $x_1+0=x_1$,

N_{IV}. $x_1+x_2'=(x_1+x_2)'$,

N_V. $x_1\cdot 0=0$,

N_{VI}. $x_1\cdot x_2'=(x_1\cdot x_2)+x_1$,

N_{VII}. $(A(0)\wedge\forall x(A(x)\Rightarrow A(x')))\Rightarrow\forall xA(x)$,

N_{VIII}. $x_1'=x_2'\Rightarrow x_1=x_2$,

N_{IX}. $x_1'\neq 0$:

§2.4. Մեկնաբանություն, մոդել, մոդելների իզոմորֆիզմը

Բանաձևերն իմաստ ունեն միայն այն ժամանակ, երբ նրանցում մտնող սիմվոլներն ունեն որոշակի մեկնաբանություն:

Մեկնաբանության տակ կհասկանանք ցանկացած համակարգ, որը բաղկացած կլինի D ոչ դատարկ բազմությունից (անվանում են մեկնաբանության տիրույթ), ինչ-որ համապատասխանությունից(A_j^n n-տեղանոց պրեդիկատային տառ), յուրաքանչյուր f_j^n ֆունկցիոնալ տառից(որոշակի n-տեղանոց գործողություն, այսինքն ֆունկցիա, որը կարտապատկերի D^n-ը D-ի վրա) և ցանկացած a_i առարկայական հաստատունից(D-ի որևէ տարր):

Օրինակ՝ եթե D-ն մարդկանց բազմություն է, ապա 2 մարդկանց միջև հարաբերությունը տանք հետևյալ կերպ՝ նրանցից մեկը հանդիսանում է մյուսի հայրը: Այս դեպքում D-ն կազմված է այնպիսի (x, y) կարգավորված զույգերից, որոնցում x-ը հանդիսանում է y-ի հայրը:

Դիցուք՝ տրված է D տիրույթով մեկնաբանություն, իսկ Σ-ն D-ի հաշվելի թվով տարրերի հաջորդականություն է:

Սահմանում: A բանաձևը կոչվում է ճիշտ տվյալ մեկնաբանությունում այն և միայն այն դեպքում, եթե այն իրագործելի է Σ-ի ցանկացած ենթահաջորդականության վրա և գրվում է $A \models \Sigma$:

Սահմանում: A բանաձևը կոչվում է կեղծ տվյալ մեկնաբանությունում, եթե այն տեղի չունի Σ-ի ոչ մի ենթաբազմության վրա և գրվում է $A \not\models \Sigma$:

Սահմանում: Տվյալ մեկնաբանությունը կոչվում է Γ բանաձևերի բազմության մոդել, եթե Γ-ից ցանկացած բանաձև ճիշտ է տրված մեկնաբանությունում:

Սահմանում: Կասենք, որ տրված K առաջին կարգի տեսության M մոդելը իզոմորֆ է K տեսության մեկ այլ M' մոդելի, եթե գոյություն ունի այնպիսի g փոխմիարժեք արտապատկերում M մոդելի D տիրույթը M' մոդելի D' տիրույթի վրա այնպես, որ

1. եթե $(A_j^n)^*$ $(A_j^n)'$-ը A_j^n պրեդիկատային տառի M, M' մոդելներ են, ապա ինչպիսին էլ որ լինեն $b_1, b_2, ..., b_n$-ը D-ից, ապա $(A_j^n)^*(b_1, b_2, ..., b_n) = (A_j^n)'(g(b_1), g(b_2), ..., g(b_n))$

2. եթե $(f_j^n)^*$ $(f_j^n)'$-ը f_j^n ֆունկցիոնալ տառի մոդելներ են M, M'-ում, ապա ինչպիսին էլ որ լինեն $b_1, b_2, ..., b_n$-ը D-ից, առկա է՝ $g((f_j^n)^*(b_1, b_2, ..., b_n)) = (f_j^n)'(g(b_1), g(b_2), ..., g(b_n))$
3. եթե a_j^* և a_j'-ը համապատասխանաբար M, M'-ում a_j առարկայական հաստատունի մեկնաբանություններ են, ապա $g(a_j^*) = a_j'$:

Այդպիսի g արտապատկերմանն անվանում են իզոմորֆիզմ, իսկ M և M' մոդելներին՝ իզոմորֆ: Նկատենք, որ եթե M, M'-ը իզոմորֆ են, ապա նրանց տիրույթները կունենան միևնույն հզորությունը:

§2.5. Առաջին կարգի տեսության հատկությունները

Թեորեմ: Ցանկացած K առաջին կարգի պրեդիկատների հաշիվ անհակասականություն է:

Ապացույց: Կամայական A բանաձևի համար $h(A)$-ով նշանակենք այն արտահայտությունը, որը ստացվում է A բանաձևի հետևյալ ձևափոխությամբ՝ ձախից աջ ընթանալով ջնջում ենք այդ բանաձևի բոլոր քվանտորները, թերմերը և նրանց հետ կապված ստորակետներն ու փակագծերը: Օրինակ՝ $h(\forall x_1 A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^1(x_3))$-ը կլինի $A_1^2 \Rightarrow A_1^1$: Ստացված մասը, որը նշանակեցինք $h(A)$-ով, անվանում են A–ի մնացուկ: A-ն կանվանենք հատուկ, եթե նրա մնացուկը, որը դիտարկվում է որպես ասույթների հաշվի բանաձև, նույնաբանություն է: Ակնհայտ է, որ

- $h(\overline{A}) = \overline{h(A)}$ և $h(A \Rightarrow B) = (h(A) \Rightarrow h(B))$
- բոլոր Ա$_1$-Ա$_5$ աքսիոմները հատուկ բանաձևեր են՝ Ա$_1$,Ա$_2$,Ա$_3$-ը ստուգել ինքնուրույն:

Ա$_4$. $\forall x_i A_i \Rightarrow A(t)$, $h(\forall x_i A(x_i) \Rightarrow A(t)) = A(x_i) \Rightarrow A(t)$, որը նույնաբանություն է

Ա$_5$. $\forall x_i((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall x_i B)) = h(A \Rightarrow B) \Rightarrow h(A \Rightarrow B)$, որը նույնաբանություն է

- *Gen* կանոնը պահպանում է հատուկ լինելու հատկությունը: Դիցուք՝ $A = Gen(B, x_i) = \forall x_i B$ և $h(B)$-ն նույնաբանություն է: Քանի որ $h(A) = h(B)$, ապա $h(A)$-ն նույնպես նույնաբանություն է:
- *MP* կանոնը պահպանում է հատուկ լինելու հատկությունը: Դիցուք՝ $A = B \Rightarrow C$, $h(B)$-ն և $h(B \Rightarrow C)$-ն նույնաբանություններ են: Ունենք՝ $h(A) = h(B \Rightarrow C) = h(A) \Rightarrow h(C) = 1$, ուրեմն $h(C) = 1$:

Եթե A-ն K տեսությունում թեորեմ է, ապա $h(A)$-ն նույնաբանություն է: Այս դեպքում եթե K տեսությունում գտնվի այնպիսի B բանաձև, որ $\vdash_K B$ և $\vdash_K \overline{B}$, ապա $h(B)$-ն և $h(\overline{B})$-ը նույնաբանություններ են, այնինչ ասույթը և նրա ժխտումը միաժամանակ ճշմարիտ լինել չեն կարող: Այսպիսով, յուրաքանչյուր առաջին կարգի պրեդիկատների հաշիվ անհակասականություն է:

§2.6. Դեդուկցիայի թեորեմը

Սահմանում: Դիցուք՝ K-ն որևէ տեսություն է, Γ-ն՝ նրա բանաձևերի բազմությունը, A-ն՝ K-ի մի այլ բանաձև, իսկ B-ն Γ, A վարկածներից արտածելի բանաձև է՝ $\Gamma, A \vdash B$:

B-ին կանվանենք A բանաձև Γ-ի նկատմամբ, եթե B-ն միայն արտածելի չէ Γ-ից, այսինքն գոյություն ունի B այնպիսի արտածում, որտեղ օգտագործվել են վարկածներ Γ-ից:

Սահմանում: Դիցուք՝ $A_1, \dots, A_n = B$ արտածում է Γ, A վարկածներից: Այդ արտածմանն անվանում են A ազատ Γ-ի նկատմամբ, եթե

I. կամ այդ հաջորդականության մեջ A բանաձևը չի հանդիպում,

II. կամ այդ արտածման ընթացքում *Gen* կանոնը A-ի ազատ փոփոխականներով ոչ մի անգամ չի կիրառվել ազատ մուտքի նկատմամբ:

Թեորեմ(դեդուկցիայի): Դիցուք՝ Γ-ն վարկածների բազմություն է, A, B-ն բանաձևեր են և $\Gamma, A \vdash B$: Եթե գոյություն ունի B-ի A ազատ արտածում Γ-ից, ապա $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$:

Ապացույց: Դիցուք՝ $A_1, \dots A_i, \dots A_n = B(*)$ հաջորդականությունը B-ի A ազատ արտածում է Γ-ից:

Ինդուկցիայով ցույց տանք, որ յուրաքանչյուր i-ի համար $i \leq n$ տեղի ունի $\Gamma \vdash A \Rightarrow A_i$:

1. Պնդումը ստուգենք $i = 1$ դեպքում;
2. Երբ պնդումը ճիշտ է A_j-ի համար, $j < i$, ցույց տանք, որ պնդումը ճիշտ է նաև A_i-ի համար: Ասույթների հաշվում արդեն ստացել ենք այն դեպքերը, երբ A_1-ը կամ A_i-ն աքսիոմներ են, կամ A_i-ն ստացվել է իր նախորդներից *MP*-ով: Դիտարկենք այն դեպքը, երբ $A_i = Gen(A_j), j < i$:

Դիտարկենք հետևյալ 2 ենթադեպքերը՝ $(*)$-ի ոչ մի անդամ A բանաձև չէ: Մասնավորապես, A բանաձև չէ A_i-ն: Հետևաբար, A_i-ն արտածելի է միայն Γ վարկածներից:

Ա$_1$ աքսիոմի մեջ կատարենք հետևյալ տեղադրումները՝

- $\vdash A_i \Rightarrow (A \Rightarrow A_i)$

Ունենք՝ 1. $\Gamma \vdash A_i$

2. $\vdash A_i \Rightarrow (A \Rightarrow A_i)$

3. $A = A_i$, *MP*, 1,2:

$(*)$-ի մեջ A բանաձևն ունի գոնե մեկ մուտք: Քանի որ *Gen* կանոնը կիրառվել է և արտածումը A ազատ է, *Gen*-ի փոփոխականը պետք է A-ի ազատ փոփոխական չլինի:

Այսինքն, եթե $A_i = \forall x_m A_j$ ապա, x_m-ը A–ում ազատ մուտքեր չունի: Ըստ ինդուկցիայի ենթադրության՝ $\Gamma \vdash A \Rightarrow A_j$: Կիրառելով *Gen* կանոնը՝ ըստ x_m կանոնի, կստանանք

$$\Gamma \vdash \forall x_m A \Rightarrow A_j \quad (1)$$

Այժմ կատարելով համապատասխան տեղադրումներ աքսիոմների Ա5 սխեմայում՝ կստանանք $A \Rightarrow \forall x_m A_j$, MP, 1,2:

Հետևանք1: $\Gamma, A \vdash B$ և գոյություն ունի այնպիսի արտածում, որում *Gen*–ը ոչ մի անգամ չի կիրառվել, ապա՝ $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$:

Հետևանք2: Եթե $\Gamma, \Phi \vdash \Psi$ և Φ-ն փակ բանաձև է, ապա $\Gamma \vdash \Phi \Rightarrow \Psi$:

Օրինակ՝ $\vdash \forall x_1 \forall x_2 A \Rightarrow \forall x_2 \forall x_1 A$:

Ապացույց:

1.	$\forall x_1 \forall x_2 A$	վարկած
2.	$\forall x_1 \forall x_2 A \Rightarrow \forall x_2 A$	Ա4 սխեմա
3.	$\forall x_2 A$	MP, 1,2
4.	$\forall x_2 A \Rightarrow A$	Ա4 սխեմա
5.	A	3,4, MP
6.	$\forall x_1 A$	5, *Gen*
7.	$\forall x_2 \forall x_1 A$	6, *Gen*:

Այսպիսով՝ 1)-7)-ից ունենք՝ $\forall x_1 \forall x_2 A \vdash \forall x_2 \forall x_1 A$, ընդ որում այս արտածման մեջ *Gen* կանոնը $\forall x_1 \forall x_2 A$ բանաձևին ազատ փոփոխական չի կապում: Այդ իսկ պատճառով հետևանք1-ից՝ $\vdash \forall x_1 \forall x_2 A \Rightarrow \forall x_2 \forall x_1 A$:

A_1 կանոն: Եթե $\vdash \forall x_k \Phi(x_k)$ և t-ն թերմ է, որն ազատ է x_k-ի համար Φ–ում, ապա՝ $\vdash \Phi(t)$:

Իրոք, այս դեպքում՝ 1. $\vdash \forall x_k \Phi(x_k) \Rightarrow \Phi(t)$,
2. $\vdash \forall x_k \Phi(x_k)$,
3. $\vdash \Phi(t)$ MP,1,2:

A_2 կանոն: Եթե $\vdash \Phi(x_k)$ և t-ն x_k-ի համար ազատ թերմ է Φ-ում, ապա՝ $\vdash \Phi(t)$:

Ապացույց: 1. $\Phi(x_k)$,
2. $\forall x_k \Phi(x_k)$ *Gen*,1, 3. $\vdash \Phi(t)$ A_1 կանոն:

§2.7. Հյոդելի թեորեմը լրիվության վերաբերյալ

Դիցուք T-ն որևէ տեսություն է, Φ-ն՝ T-ի բանաձև: Եթե Φ-ն փակ բանաձև չէ, ապա այն կարող ենք փակել հետևյալ եղանակով՝ Φ-ի առջևից ավելացնում ենք $\forall x_i$ տիպի քվանտոր՝ ըստ Φ–ի բոլոր ազատ փոփոխականների: Ստացված բանաձևը նշանակում ենք $[\Phi]$ և անվանում Φ–ի փակույթ:

Օրինակ՝

$$\left[P_1^1(x) \Rightarrow \forall x P_1^2(x, f_1^1(y))\right] = \forall x \forall y \left(P_1^1(x) \Rightarrow \forall x P_1^2(x, f_1^1(y))\right)$$

Եթե Φ-ն փակ է, ապա ինքն էլ հենց իր փակույթն է՝ $\Phi = \overline{\Phi}$:

Լեմմա:

ա) Φ-ն թեորեմ է այն և միայն այն դեպքում, երբ Φ-ի փակումը թեորեմ է:

բ) Φ-ն ճիշտ է T-ի որևէ M մոդելում այն և միայն այն դեպքում, երբ $[\Phi]$-ն ճիշտ է T-ում՝ $T \models [\Phi]$:

Ապացույց:

ա)Եթե $T \vdash \Phi$, ապա Φ-ի բոլոր ազատ փոփոխականների նկատմամբ կիրառելով *Gen* կանոնը, ստանում ենք $T \models [\Phi]$: Եթե $T \vdash \Phi$, ապա A_1 կանոնը կիրառելով Φ-ի բոլոր ազատ փոփոխականների նկատմամբ, ստանում ենք՝ $T \vdash \Phi$:

բ)Եթե M-ում Φ-ն ճիշտ է, ապա ակնհայտ է, որ $M \models [\Phi]$, քանի որ Φ-ն ճիշտ է M-ի բոլոր հաջորդականությունների վրա: Իսկ եթե M-ում ճիշտ է Φ-ի փակումը, ապա Φ-ն ճիշտ է M-ի ցանկացած հաջորդականության վրա:

Թեորեմ(անհակասելիության ընդլայնման վերաբերյալ): Դիցուք` T-ն որևէ անհակասելի տեսություն է, Φ-ն T-ի որևէ փակ բանաձև է: Որպեսզի $T+\Phi$ տեսությունը լինի անհակասելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\overline{\Phi}$ բանաձևը T-ում լինի ոչ ապացուցելի:

Ապացույց: Դիցուք` $T+\Phi$-ն անհակասելիություն է, բայց $T+\Phi \vdash \overline{\Phi}$: Այդ դեպքում, $T+\Phi \vdash \Phi$ և ստանում ենք, որ $T+\Phi$-ն հակասելի է:

Բավարարություն: Դիցուք` $\overline{\Phi}$ բանաձևը $T$-ում ոչ ապացուցելի է, սակայն $T+\Phi$-ն հակասելիություն է: Քանի որ հակասելի տեսության յուրաքանչյուր բանաձև թեորեմ է, ապա $T+\Phi \vdash \overline{\Phi}$, իսկ դեդուկցիայի թեորեմից ունենք` $T \vdash \overline{\Phi}$: Քանի որ $(A\Rightarrow\overline{A})\Rightarrow\overline{A}$ բանաձևը նույնաբանություն է, ապա` $(\Phi\Rightarrow\overline{\Phi})\Rightarrow\overline{\Phi}$ և $MP$-ն կիրառելով` կստանանք $T \vdash \overline{\Phi}$, ինչն էլ հակասում է, որ $\overline{\Phi}$-ն անապացուցելի է T-ում:

Սահմանում: T տեսությունը կոչվում է լրիվ, եթե այն անհակասելի է և նրանում ապացուցելի ցանկացած $\overline{\Phi}$ բանաձևի դեպքում $T+\Phi$ տեսությունը հակասելի է:

Թեորեմ: Որպեսզի որևէ T տեսություն լինի լրիվ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ T-ի ցանկացած փակ Φ բանաձևի դեպքում Φ և $\overline{\Phi}$ բանաձևերից ուղիղ մեկը լինի թեորեմ:

Ապացույց:

Անհրաժեշտություն: Դիցուք` Φ-ն T-ի $[\Phi]$ բանաձև է և T-ում ապացուցելի, այդ դեպքում ըստ սահմանման $T+\Phi$-ն հակասելի է: Վերջինս, ըստ անհակասականության ընդլայնման թեորեմի, կարող է տեղի ունենալ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\overline{\Phi}$-ն T-ի թեորեմ է:

Բավարարություն: Դիցուք` $T$-ն լրիվ է, և $\Phi$-ն $T$-ի ապացուցելի բանաձև է: Այդ դեպքում ըստ ենթադրության $T \vdash \overline{\Phi}$, իսկ ըստ անհակասելիության վերաբերյալ թեորեմի` վերջինս կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ $T+\Phi$-ն հակասելիություն է: Դա էլ նշանակում է, որ T-ն լրիվ է: Դիցուք` T-ն լրիվ

տեսություն է, Φ-ն` նրա որևէ $[\Phi]$ բանաձև: Քանի որ T-ն լրիվ է, այն նաև անհակասելիություն է: Ուստի այն ունի մոդել: Ենթադրենք M-ը T-ի որևէ մոդել է: Քանի որ Φ-ն փակ է, ապա կամ Φ-ն կամ $\overline{\Phi}$-ն ճիշտ են M-ում: Քանի որ $\overline{\Phi}$-ն թեորեմ չէ, և T-ն լրիվ է, ապա T-ում արտածվում է Φ:

Թեորեմ(Հյոդելի թեորեմը լրիվության վերաբերյալ): Որպեսզի $[\Phi]$ բանաձևը լինի անհակասելի T տեսության թեորեմ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ճիշտ T-ում: Այսինքն $T \vdash \Phi$ նույնացվում է $T \models \Phi$-ի հետ:

Ապացույց:

Անհրաժեշտությունն ակնհայտ է, ցույց տանք բավարարությունը: Դիցուք` Φ-ն ճիշտ է T-ում, այսինքն Φ-ն ճիշտ է T-ի յուրաքանչյուր մոդելում: Ենթադրենք Φ-ն թեորեմ չէ T-ում: Այդ դեպքում, ըստ անհակասելիության ընդլայնման թեորեմի, $T+\overline{\Phi}$ տեսությունը անհակասելիություն է, ինչպես նաև այն մոդելավորելի է: Ենթադրենք M-ը $T+\overline{\Phi}$ տեսության մոդելներից է: Այդ դեպքում $M \vdash \overline{\Phi}$: Մյուս կողմից քանի որ մեծ տեսության մոդելը մոդել է նաև փոքր տեսության համար, ուրեմն M-ը T-ի մոդել է: Քանի որ Φ-ն ճիշտ է T-ի բոլոր մոդելներում, հետևաբար կստանանք $M \models \Phi$, և ունենք $M \models \overline{\Phi}$: Ստացանք հակասություն, ուրեմն Φ-ն T-ում թեորեմ է:

Հետևանք1: Եթե T-ն լրիվ չէ, ապա գոյություն ունեն $[\Phi]$ բանաձև, M_1 և M_2 մոդելներ այնպիսին, որ Φ-ն M_1-ում ճիշտ է, իսկ M_2-ում` կեղծ:

Ապացույց: Քանի որ T-ն լրիվ չէ, գոյություն ունի այնպիսի փակ բանաձև, որ Φ և $\overline{\Phi}$-ն T-ի թեորեմ չեն: Ինչպես նաև գոյություն ունի T-ի այնպիսի մոդել, որում Φ-ն կեղծ է: Այդ պատճառով նաև գոյություն ունի M_2 մոդել, որում $\overline{\Phi}$-ն կեղծ է: M_2-ում $\overline{\Phi}$-ի կեղծ լինելուց եզրակացնում ենք, որ M_2-ում Φ-ն ճիշտ է:

Սահմանում: Որևէ անհակասելի T տեսության Φ բանաձև կոչվում է ճանաչելի, եթե կամ Φ-ի փակույթը, կամ նրա փակույթի ժխտումը T-ի թեորեմներ են: Բանաձևը կոչվում է անճանաչելի, եթե այն T-ում ճանաչելի չէ:

Սահմանում: T տեսությունը կոչվում է ճանաչելի, եթե գոյություն ունի այնպիսի մեքենա, որը հնարավորություն է ընձեռում՝

ա) յուրաքանչյուր բառի դեպքում պարզել՝ այդ բառը T տեսությունից է, թե ոչ,

բ) եթե բառը T-ից է, ապա պարզել, այն T-ի աքսիոմ է, թե ոչ:

Թեորեմ: ճանաչելի և լրիվ տեսությունը կարելի է տալ մեքենայի միջոցով:

Ապացույց: Դիցուք՝ T-ն ճանաչելի է և լրիվ: Քանի որ T-ն ճանաչելի է, ապա նրա համար կգտնվի այնպիսի $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(*)$ հաջորդականություն, որ՝

1. $(*)$-ի յուրաքանչյուր α_n անդամ T-ի թեորեմ է,
2. T-ի յուրաքանչյուր թեորեմ $(*)$ հաջորդականության անդամ է,
3. գոյություն ունի մեքենա, որը հնարավորություն է ընձեռում $\forall n \in N$ բնական թվի համար իմանալ $(*)$-ի α_n անդամը:

Դիցուք՝ $[\Phi]$-ն T-ի բանաձև է, քանի որ Φ-ն լրիվ է կամ Φ-ն կամ $\overline{\Phi}$-ն T-ի թեորեմ է, և հետևաբար $(*)$ հաջորդականության անդամ է: Այժմ, գործադրելով մեքենան $n = 1,2,3,\ldots$ բնական թվերի համար, հաջորդաբար կգտնենք T-ի $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ թեորեմները: Եվ քանի որ կամ Φ-ն, կամ $\overline{\Phi}$-ն $(*)$-ի անդամ է, ապա կհանդիպենք այդ զույգ բանաձևերից մեկին: Եթե հանդիպենք Φ-ին, ապա $T \vdash \Phi$, եթե հանդիպում ենք $\overline{\Phi}$, ապա $T \vdash \overline{\Phi}$: Ուրեմն, իրոք, T ճանաչելի տեսությունը կարելի է տալ մեքենայի միջոցով:

Վարժություններ II գլխի վերաբերյալ

1. Հետևյալ նախադասությունները գրել պրեդիկատների լեզվով՝

ա) Բոլոր ձկները, բացի շնաձկներից, բարի են երեխաների հանդեպ:

բ) Ոմանք սրամիտ են, երբ հարբած են:

գ) Եթե ինչ-որ մեկը դա կարող է անել, ապա Ջոնն էլ կարող է:

դ) Յուրաքանչյուրը, ով ունի համառություն, կարող է սովորել տրամաբանություն:

2. Վերականգնել փակագծերը

ա) $\forall x_1 \forall x_3 \forall x_4 A_1^1(x_1) \Rightarrow A_2^1(x_3) \wedge \overline{A_1^1(x_1)}$

բ) $\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 A_1^1(x_1) \vee \exists x_2 \overline{\forall x_3 A_1^2(x_3, x_2)}$:

3. Հետևյալ բանաձևերում ցույց տալ ազատ և կապված ներմուծումով փոփոխականները՝

ա) $\forall x_3 (\forall x_1 A_1^2(x_1, x_2) \Rightarrow A_1^2(x_3, x_1))$

բ) $\forall x_2 A_1^2(x_3, x_2) \Rightarrow \forall x_3 A_1^2(x_3, x_2)$:

4. Ցույց տալ, որ

ա) $\vdash \forall x_1 (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall x_1 A \Rightarrow \forall x_1 B)$

բ) $\vdash \forall x (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\exists x A \Rightarrow \exists x B)$:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Иванов Б. Н. "Дискретная математика", Москва, Физматлит, 2007, 408 с.
2. Э. Мендельсон "Введение в математическую логику", Москва, "Наука", 1984.
3. Карпов В. Г., Мощенский В. А. "Математическая логика и дискретная математика", Минск, "Вышейшая школа", 1977.
4. Чень Ч., Ли П. "Математическая логика и основания математики", Москва, "Наука", 1983.
5. Такеути Г. "Теория доказательств", Москва, "Мир", 1978.
6. Новиков П. С. "Элементы математической логики", Москва, "Наука", 1984.
7. Клини С. "Математическая логика", Москва, "Мир", 1973.
8. Галуев Г. А. "Математическая логика и теория алгоритмов", Таганрог, 2003.
9. Գ. Ա. Դավթյան «Մաթեմատիկական տրամաբանական տեսությունները և փիլիսոփայությունը», «Վանեվան», 2000:
10. www.distance.ru
11. www.sprinter.ru/books/1889372.html
12. www.htmlbiblioteka.ru/doc/logic/dictionary/157.htm

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Պատվեր՝ 1365 Տպաքանակ՝ 50

Տպագրված է Հայաստանի Պետական Ճարտարագիտական Համալսարանի տպարանում

Երևան, Տերյան 105