

Հարգելի՛ ընթերցող,

Արցախի Երիտասարդ Գիտնականների և Մասնագետների Միավորման (ԱԵԳՄՄ) նախագիծ հանդիսացող **Արցախի Էլեկտրոնային Գրադարանի** կայքում տեղադրվում են Արցախի վերաբերյալ գիտավերլուծական, ճանաչողական և գեղարվեստական նյութեր՝ հայերեն, ռուսերեն և անգլերեն լեզուներով: Նյութերը կարող եք ներբեռնել ԱՆՎՃԱՐ:

Էլեկտրոնային գրադարանի նյութերն այլ կայքերում տեղադրելու համար պետք է ստանալ ԱԵԳՄՄ-ի թույլտվությունը և նշել անհրաժեշտ տվյալները:

Շնորհակալություն ենք հայտնում բոլոր հեղինակներին և հրատարակիչներին՝ աշխատանքների էլեկտրոնային տարբերակները կայքում տեղադրելու թույլտվության համար:



Уважаемый читатель!

На сайте **Электронной библиотеки Арцаха**, являющейся проектом **Объединения Молодых Учёных и Специалистов Арцаха (ОМУСА)**, размещаются научно-аналитические, познавательные и художественные материалы об Арцахе на армянском, русском и английском языках. Материалы можете скачать БЕСПЛАТНО.

Для того, чтобы размещать любой материал Электронной библиотеки на другом сайте, вы должны сначала получить разрешение ОМУСА и указать необходимые данные.

Мы благодарим всех авторов и издателей за разрешение размещать электронные версии своих работ на этом сайте.

Dear reader,

The Union of Young Scientists and Specialists of Artsakh (UYSSA) presents its project - **Artsakh E-Library** website, where you can find and download for FREE scientific and research, cognitive and literary materials on Artsakh in Armenian, Russian and English languages.

If re-using any material from our site you have first to get the UYSSA approval and specify the required data.

We thank all the authors and publishers for giving permission to place the electronic versions of their works on this website.

Մեր տվյալները – Наши контакты - Our contacts

Site: <http://artsakhib.am/>

E-mail: info@artsakhib.am

Facebook: <https://www.facebook.com/www.artsakhib.am/>

ВКонтакте: <https://vk.com/artsakhiblibrary>

Twitter: <https://twitter.com/ArtsakhELibrary>

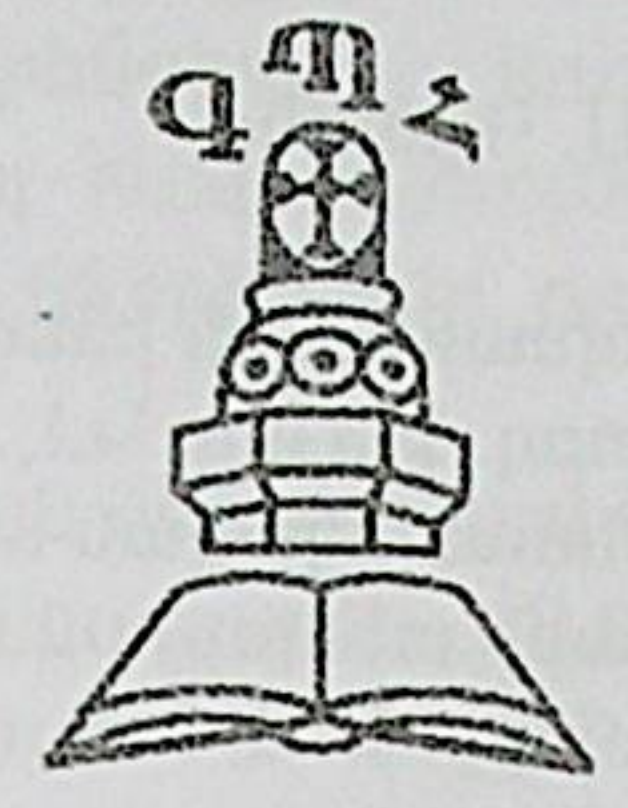
ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ԳՈՐԻՍԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա.Ս. Դիևունց

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԶԵՎԱՓՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ
ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵՉ
Ուսումնասիրողական ձեռնարկ

2019

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ԳՈՐԻՍԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ



Մաթեմատիկայի և ինֆորմատիկայի ամբիոն

Ա.Ս. Դինուկց

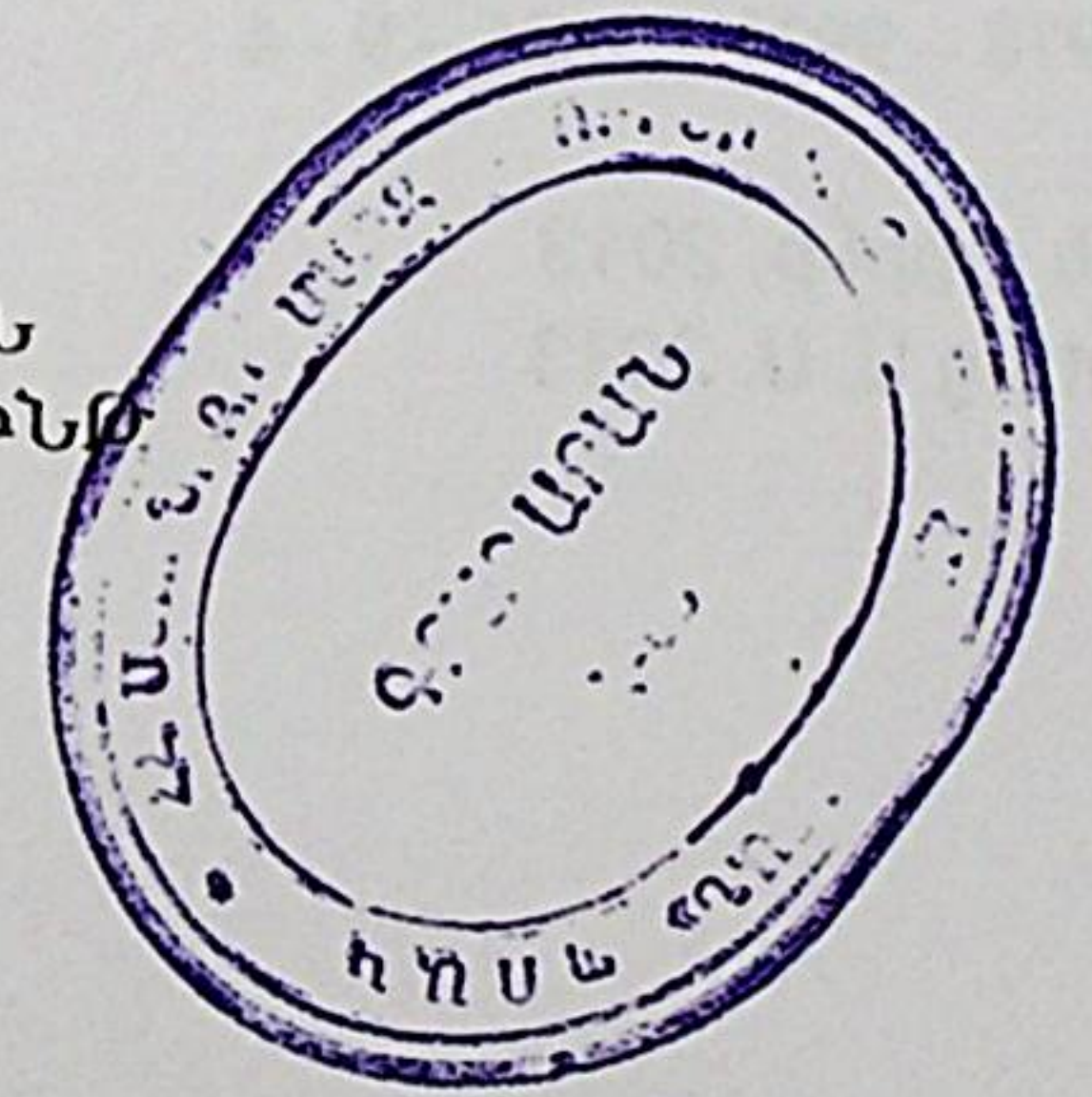
ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵԶ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ

4978 /3/

ԵՐԵՎԱՆ
ԷՆ-ՎԵ ՓՐԻՆՏ
2013



ՀՏԴ 517.3 (07)
ԳՄԴ 22.161.1 9 7
Դ 495

Հրատարակվում է Գորիսի պետական
համալսարանի գիտական խորհրդի
04.06.2013թ. նիստի թիվ 6գ
որոշման համաձայն

Կազմող՝ ֆ.մ.գ.թ. Ա. Ս. Դինունց

Գրախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի առաջատար
գիտաշխատող, ֆ.մ.գ.դ. Կ.Լ. Ալայան
ՀՊՄՀ Մաթեմատիկական անալիզի և
ֆունկցիաների տեսության ամբիոնի
դոցենտ, ֆ.մ.գ.թ. Ս.Ա. Խաչատրյան

Խմբագիր՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ա.Ն. Մարտիրոսյան

Դ 498 Ինտեգրալ ձևափոխությունները կիրառությունների
մեջ: Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ/Ա. Դինունց; ԶԶ
ԿԳՆ; Գորիսի պետական համալսարան.-Եր.: ԷՆ-Վե
փրինթ, 2013թ., 76 էջ:

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկում տրված են հիմնական ինտեգրալ
ձևափոխությունները /Ֆուրյե, Լապլաս, Մելին/, որոնք կարևոր են
ԿՓՖՏ, մաթեմատիկական ֆիզիկայի, մեխանիկայի, էլեկտրատեխ-
նիկայի խնդիրների լուծման մեջ:

Տեսական մասն ուղեկցված է բազմաթիվ օրինակներով և
մեթոդական ցուցումներով:

Նախատեսված է անալիտիկ մեթոդներով մաթեմատիկական
մոդելների հետազոտությամբ զբաղվող մագիստրոսների,
ասպիրանտների համար:

ISBN 978 – 9939 – 9086 – 9 - 4

ՀՏԴ 517.3.(07)
ԳՄԴ 22.161.1 9 7

© ԷՆ-Վե փրինթ, 2013
© Դինունց Ա. Ս. 2013

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների
լուծման հզոր միջոց է ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդը:
Ձևափոխությունը շատ դեպքերում թույլ է տալիս մասնակի
ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումները հանգեցնել
սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների կամ հավասարման մեջ
կրճատել այն փոփոխականների թիվը, որոնց նկատմամբ կատարվում է
մասնակի ածանցում:

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկում տրված են Ֆուրյեի, Լապլասի,
Մելինի ուղիղ և հակադարձ ձևափոխությունները կոնկրետ
կիրառություններում:

Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունը լայնորեն կիրառվում է
անվերջ միջակայքում տրված եզրային պայմաններով դիֆերենցիալ
հավասարումների լուծման մեջ: Դիտարկված է անվերջ լարի փոքր
տատանումները մոդելավորող Կոշու խնդրի և այլ խնդիրների լուծումը
Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով:

Լապլասի ինտեգրալ ձևափոխությունը կիրառվում է սովորական
դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման մեջ: Սովորական
դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման մեթոդը հայտնի է
օպերացիոն մեթոդ անվամբ: Դիտարկված է երկու խնդիր՝
«Մեխանիկական և էլեկտրական տատանումների հետազոտությունը
պարբերական արտաքին ուժերի դեպքում» և «Տատանումների
հավասարումների լուծումը ռեզոնանսի դեպքում»:

Մելինի ինտեգրալ ձևափոխությունը նշանի ճշտությամբ
համընկնում է Լապլասի երկկողմանի ձևափոխությանը: Դիտարկված
են մի շարք խնդիրներ, մասնավորապես, առաձգականության
տեսության երկրորդ հիմնական խնդիրը սեպի համար:

ԳԼՈՒԽ 1. Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունը և նրա կիրառությունները

§1.1. Ֆուրյեի շարք. համառոտ ակնարկ

Սահմանում 1: Եռանկյունաչափական շարք կոչվում է

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

տեսքի ֆունկցիոնալ շարքը: a_0, a_n և b_n հաստատուն թվերը կոչվում են եռանկյունաչափական շարքի գործակիցներ: Եթե այս շարքը զուգամետ է, ապա նրա գումարը 2π պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է:

Ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան 2π պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է և (1) շարքի գումարը հավասար է այդ ֆունկցիային

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2)$$

Ենթադրենք (1) շարքը կանոնավոր զուգամետ է, որի համար բավական է, որ զուգամետ լինի հետևյալ թվային շարքը.

$$\left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \quad (3)$$

Այդ դեպքում այն կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել և շարքի անդամների ինտեգրալներից կազմված շարքի գումարը հավասար կլինի այդ ֆունկցիայի ինտեգրալին.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right) \quad (4)$$

Հաշվենք այդ ինտեգրալները. (2) հավասարության երկու մասերը ինտեգրենք $-\pi$ -ից մինչև π սահմաններում.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0 \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx = a_n \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx = -b_n \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0:$$

Տեղադրելով ստացված արժեքները (4) հավասարության մեջ կստանանք.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi,$$

որտեղից

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx:$$

Այժմ a_n գործակիցները գտնելու համար (2) հավասարության երկու մասերը բազմապատկենք $\cos kx$ -ով ($k = 1, 2, 3, \dots$).

$$f(x) \cos kx = \frac{a_0}{2} \cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx):$$

Այս շարքը կանոնավոր զուգամետ է, քանի որ զուգամետ է (3) շարքը: Հետևաբար այն կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cos kx dx \right) \quad (5)$$

Քանի որ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx dx = \frac{a_0}{2} \frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(n+k)x + \cos(n-k)x] dx = 0, n \neq k,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2k} \sin 2kx \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi, n = k,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\sin(n+k)x + \sin(n-k)x] dx = 0,$$

(5)-ից կստանանք.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \pi,$$

որտեղից

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx :$$

(2) հավասարության երկու կողմերը բազմապատկելով $\sin kx$ -ով և ինտեգրելով $-\pi$ -ից մինչև π սահմաններում կստանանք.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx :$$

Ստացված a_0, a_k, b_k գործակիցները տեղադրելով եռանկյունաչափական շարքի մեջ՝ կստանանք մի շարք, որը կոչվում է **Ֆուրյեի շարք**, իսկ այդ գործակիցները կոչվում են **Ֆուրյեի գործակիցներ**:

Սահմանում 2: Ֆունկցիան կոչվում է **կտոր առ կտոր մոնոտոն** տրված հատվածում, եթե վերջավոր թվով կետերով այդ հատվածը կարելի է տրոհել միջակայքերի այնպես, որ նրանցից յուրաքանչյուրում այդ ֆունկցիան լինի մոնոտոն:

Թեորեմ (Դիրիխլեի թեորեմը): Եթե $f(x)$ ֆունկցիան պարբերական է 2π պարբերությամբ, $[-\pi, \pi]$ հատվածում կտոր առ կտոր մոնոտոն է և սահմանափակ, ապա նրա Ֆուրյեի շարքը զուգամետ է բոլոր կետերում: Ֆունկցիայի անընդհատության կետերում շարքի գումարը հավասար է ֆունկցիայի արժեքին, իսկ խզման կետերում հավասար է այդ ֆունկցիայի աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանների միջին թվաբանականին.

$$S(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2} :$$

Օրինակ: $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ ֆունկցիան $(-\pi, \pi)$ միջակայքում վերլուծել

Ֆուրյեի շարքի:

Գտնենք Ֆուրյեի գործակիցները՝ օգտվելով որոշյալ ինտեգրալի համար մասերով ինտեգրման բանաձևից.

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{2} x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cos nx dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{\pi}{2} = u, du = dx, \\ \cos nx dx = dv, v = \int \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \sin nx dx = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{\pi}{2} = u, du = dx, \\ \sin nx dx = dv, v = \int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi n} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = -\frac{1}{\pi n} \frac{3\pi}{2} \cos n\pi + \frac{1}{\pi n} \frac{-\pi}{2} \cos n\pi +$$

$$+ \frac{1}{\pi n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}:$$

Տեղադրելով ստացված գործակիցները Ֆուրյեի շարքի մեջ՝ կստանանք.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (0 \cdot \cos nx + (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nx) = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}:$$

ՖՈՒՐՅԵԻ ՇԱՐՔԸ ՉՈՒՅՁ ԵՎ ԿԵՆՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՍԱՐ: Եթե $F(x)$ ֆունկցիան զույգ է, այսինքն $F(-x) = F(x), \forall x \in D(F) \Rightarrow -x \in D(F)$, ապա

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \int_{-\pi}^0 F(x) dx + \int_0^{\pi} F(x) dx = \int_0^{\pi} F(-x) dx + \int_0^{\pi} F(x) dx = 2 \int_0^{\pi} F(x) dx:$$

Եթե $F(x)$ ֆունկցիան կենտ է, այսինքն $F(-x) = -F(x), \forall x \in D(F) \Rightarrow -x \in D(F)$, ապա

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx = \int_{-\pi}^0 F(x) dx + \int_0^{\pi} F(x) dx = \int_0^{\pi} F(-x) dx + \int_0^{\pi} F(x) dx = -\int_0^{\pi} F(x) dx + \int_0^{\pi} F(x) dx = 0:$$

Եթե Ֆուրյեի շարքի է վերլուծվում $f(x)$ զույգ ֆունկցիան, ապա $F(x) = f(x) \cos nx$ արտադրյալը նույնպես զույգ ֆունկցիա է, իսկ $F(x) = f(x) \sin nx$ -ը՝ կենտ ֆունկցիա: Հետևաբար.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = 0,$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx:$$

Ստացանք, որ զույգ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը պարունակում է միայն կոսինուսներ:

Եթե Ֆուրյեի շարքի է վերլուծվում $f(x)$ կենտ ֆունկցիան, ապա $f(x) \cos nx$ արտադրյալը նույնպես կենտ ֆունկցիա է, իսկ $f(x) \sin nx$ -ը՝ զույգ ֆունկցիա: Հետևաբար.

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx,$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx:$$

Ստացանք, որ կենտ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը պարունակում է միայն սինուսներ:

Օրինակ 1: $f(x) = |x|$ ֆունկցիան $(-\pi, \pi)$ միջակայքում վերլուծել Ֆուրյեի շարքի:

Քանի որ $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, $f(x)$ -ը զույգ ֆունկցիա է, հետևաբար.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| \cos nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nxdx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = u, du = dx, \\ \cos nxdx = dv, v = \int \cos nxdx = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nxdx = \frac{2}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} [\cos n\pi - \cos 0] = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1], \quad b_n = 0:$$

Քանի որ

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

կստանանք.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [(-1)^n - 1] \cos nx:$$

Օրինակ 2: $f(x) = x$ ֆունկցիան $(-\pi, \pi)$ միջակայքում վերլուծել

Ֆուրյեի շարքի:

Քանի որ $f(-x) = -x = -f(x)$, $f(x)$ - ը կենտ ֆունկցիա է, ուրեմն.

$$a_0 = 0, a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left\{ \begin{array}{l} x = u, du = dx, \\ \sin nx dx = dv, v = \int \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx dx = -\frac{2}{\pi n} \pi \cos n\pi + \frac{2}{\pi n} \cdot 0 + \frac{2}{\pi n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{n} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}:$$

Չետևարար, $f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}:$

§1.2. Ֆուրյեի ինտեգրալային բանաձևը

Դիցուք $2l$ պարբերությամբ $f(t)$ ֆունկցիան վեր է լուծված Ֆուրյեի շարքի.

$$f(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\tau) \cos \frac{n\pi}{l} (\tau - t) d\tau \quad (6)$$

Անցնելով սահմանի, երբ $l \rightarrow \infty$, ստանում ենք Ֆուրյեի ինտեգրալային բանաձևը.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \lambda(\tau - t) d\tau \quad (7)$$

Այն իրենից ներկայացնում է $(-\infty, \infty)$ -ում որոշված ճիշտ այնպիսի ֆունկցիա, ինչպես Ֆուրյեի շարքը իրենից ներկայացնում է վերջավոր միջակայքում: Ձևափոխություններից հետո բանաձևը կարելի է հանգեցնել հետևյալին.

$$f(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l e^{i\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda \tau} f(\tau) d\tau d\lambda \quad (8)$$

կամ

$$f(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin l(t-\tau)}{t-\tau} f(\tau) d\tau \quad (9)$$

(7) բանաձևի աջ մասում ինտեգրալը կոչվում է *Ֆուրյեի կրկնակի ինտեգրալ*: (8) բանաձևը կոչվում է *Ֆուրյեի ինտեգրալի կոմպլեքս տեսք*:

Թեորեմ 2: Դիցուք $f(t)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է ըստ Լեբեգի $(-\infty, \infty)$ -ում և նրա ցանկացած վերջավոր միջակայքում սահմանափակ է: Այդ դեպքում (7), (8), (9) բանաձևերը տեղի ունեն, եթե $f(t)$ -ի խզման

կետերում նրանց ձախ մասերը փոխարինենք $\frac{1}{2} \{f(t+0) + f(t-0)\}$ -ով:

(7), (8), (9) բանաձևերը նույնպես կարող են ընդունել հետևյալ տեսքը.

$$f(t) = \int_0^{\infty} [a(u) \cos tu + b(u) \sin tu] du \quad (10)$$

որտեղ $a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt$, $b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt$,

եթե $f(t)$ -ն զույգ ֆունկցիա է, ապա (10) բանաձևն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos tudu \int_0^{\infty} f(\tau) \cos u\tau d\tau \quad (11)$$

Վերջինս կոչվում է *Ֆուրյեի կոսինուս-բանաձև*:

Հանգումորեն, եթե $f(t)$ -ն կենտ ֆունկցիա է, ապա ստացվում է *Ֆուրյեի սինուս-բանաձևը*.

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin t u d u \int_0^{\infty} f(\tau) \sin u \tau d \tau \quad (12)$$

Օրինակ 1: Հետևյալ ֆունկցիան ներկայացնել Ֆուրյեի ինտեգրալի տեսքով.

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (*)$$

(*) ֆունկցիան բավարարում է թեորեմ 2-ի պայմաններին, և, հետևաբար, այն կարելի է ներկայացնել Ֆուրյեի ինտեգրալի տեսքով: Հեշտ է նկատել, որ $b(\lambda) = 0$, քանի որ (*) ֆունկցիան զույգ է, իսկ

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \lambda x d x = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \lambda x d x = \frac{2 \sin \lambda}{\pi \lambda} :$$

Այդ դեպքում $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d \lambda, |x| \neq 1$:

§1.3. Ֆուրյեի ձևափոխություն, հիմնական հատկությունները

Եթե ընդունենք

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx, \quad (13)$$

ապա (8) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy} dy, \quad (14)$$

որտեղ աջ մասի ինտեգրալը հասկացվում է գլխավոր իմաստով, այսինքն՝ որպես սահման. $\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l F(y) e^{ixy} dy$

$F(y)$ ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի *Ֆուրյեի ձևափոխություն*: Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $(-\infty, \infty)$ միջակայքում, ապա $F(y)$ ֆունկցիան գոյություն ունի ցանկացած x -ի համար:

Հատկությունները:

1. *Ֆուրյեի ձևափոխության գծայնության հատկություն*: Դիցուք f_1 և f_2 ֆունկցիաների համար գոյություն ունեն Ֆուրյեի $F[f_1]$ և $F[f_2]$ ձևափոխություններ: Այդ դեպքում $\forall \lambda_1, \lambda_2 \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ ֆունկցիայի համար առկա է.

$$F[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F[f_1] + \lambda_2 F[f_2] \quad (15)$$

$$F^{-1}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 F^{-1}[f_1] + \lambda_2 F^{-1}[f_2]$$

Այս հատկությունն ակնհայտորեն հետևում է ինտեգրալի գծայնությունից

$$2. F[0] = F^{-1}[0] = 0 \quad (16)$$

3. Եթե f -ը ամբողջ առանցքի վրա ինտեգրելի ֆունկցիա է, ապա $F^{-1}[f]$ ֆունկցիան սահմանափակ ֆունկցիա է:

Իրոք, (5)-ից և $|e^{-ixy}| = 1$ -ից

$$F^{-1}(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad (17)$$

4. Եթե $\{f_n(x)\}$ ֆունկցիաների հաջորդականությունն այնպիսին է, որ $\forall n \in N, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$, ապա $F[f_n]$ հաջորդականությունը հավասարաչափ է զուգամիտում $F[f]$ -ին:

$$\text{Իրոք, } |F^{-1}[f] - f| = |F[f_n - f]| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx$$

5. Եթե $f \in L_1(\mathbb{R})$, ապա $F^{-1}[f]$ -ը անընդհատ ֆունկցիա է և $\lim_{y \rightarrow \infty} F^{-1}[f] = 0$:

Ապացույց: Եթե f -ը $[a, b]$ միջակայքը բնութագրող ֆունկցիան է, այսինքն $f(x) = \begin{cases} 1, x \in (a, b) \\ 0, x \notin (a, b) \end{cases}$, ապա $F^{-1}[f] = \int_a^b e^{-ixy} dx = \frac{e^{-iay} - e^{-iby}}{iy}$, այսինքն

$F^{-1}[f]$ -ը հանդիսանում է անընդհատ ֆունկցիա և ձգտում է 0-ի, երբ $y \rightarrow \pm\infty$:

Եթե f -ը աստիճանաձև ֆունկցիա է, ապա համաձայն (15)-ի՝ թեորեմը ճիշտ է: Եթե $f \in L_1(\mathbb{R})$, ապա գոյություն ունի f -ին ձգտող $\{f_n\}$ աստիճանաձև ֆունկցիաների հաջորդականություն $L_1(-\infty, \infty)$ -ում,

$$\text{այսինքն } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)| dx = 0:$$

Այդ դեպքում (4)-ից $F^{-1}[f_n]$ հաջորդականությունը հավասարաչափ է ձգտում $F^{-1}[f]$ -ին ամբողջ իրական առանցքի վրա: Այնպես որ, երբ $F^{-1}[f_n] \rightarrow 0, y \rightarrow \pm\infty$, ապա $F^{-1}[f] \rightarrow 0$, երբ $y \rightarrow \pm 0$:

6. Եթե f -ը յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում բացարձակ անընդհատ ֆունկցիա է և $f' \in L_1(-\infty, \infty)$, ապա $F[f'] = iyF[f]$:

Չիշենք, որ ցանկացած վերջավոր միջակայքում բացարձակ անընդհատ ֆունկցիան կարելի է գրել $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$

տեսքով:

Քանի որ $f'(x)$ բացարձակ ինտեգրելի է, ապա $f(x)$ -ը ունի սահման, երբ $x \rightarrow \pm\infty$: Այդ սահմանը հավասար է 0-ի, այլապես $f(x)$ ֆունկցիան չէր լինի ինտեգրելի ողջ առանցքի վրա: Այսինքն $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$: Չաշվի առնելով այդ՝ մասերով ինտեգրմամբ ստանում ենք.

$$F[f'](y) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ixy} dx = f(x) e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{\infty} + iy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx = iyF[y]$$

7. Եթե բացարձակ ինտեգրելի $f(x)$ ֆունկցիան ունի n հատ բացարձակ ինտեգրելի և ամբողջ առանցքի վրա անընդհատ ածանցյալներ, ապա

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f] \quad (18)$$

ընդ որում գոյություն ունի $M > 0$ հաստատուն այնպիսին, որ

$$|F[f]| \leq \frac{M}{|y^k|} \quad (19)$$

Ապացույց: $n=1$ դեպքում հատկությունն ապացուցված է: $|F[f^{(n)}]|$ ֆունկցիան հանդիսանում է սահմանափակ ֆունկցիա համաձայն 3)-ի, այդ պատճառով ճշգրիտ վերին եզրը վերջավոր է՝ $M = \sup_{y \in (-\infty, \infty)} |F[f^{(n)}]|$, և (19) գնահատականը հետևում է (18)-ից $k=n$

դեպքում:

8. Եթե $f(x)$ -ը անընդհատ է, իսկ $f(x), xf(x)$ ֆունկցիաները բացարձակ ինտեգրելի են ամբողջ իրական առանցքի վրա, ապա $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի ձևափոխությունը հանդիսանում է n անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա և

$$i \frac{d}{du} F[f] = F[xf] \quad (20)$$

Ապացույց: Դիցուք $f(x)$ -ը իրական փոփոխականի ֆունկցիա է: (13) ինտեգրալը ֆորմալ ձևով դիֆերենցելով ըստ ինտեգրման փոփոխականի՝ ստանում ենք $-i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-ixy} dx$, որը հավասարաչափ

և բացարձակ զուգամետ է, այսինքն $|x f(x) e^{-ixy}| = |x f(x)|$: Հետևաբար,

$f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի $F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$ ձևափոխությունը

հանդիսանում է դիֆերենցելի ֆունկցիա, ընդ որում $iF'[f] = F[x f]$.

Եթե $f = u + iv$, որտեղ u -ն և v -ն իրական փոփոխականի ֆունկցիաներ են, ապա

$$F'[f] = F'[u + iv] = \{F[u] + iF[v]\}' = F'[u] + iF'[v] = -iF[xu] + F[xv] = -iF[xu + ixv] = -iF[x f]$$

9. Եթե $f(x)$ -ն անընդհատ է, իսկ $f(x), x f(x), \dots, x^n f(x)$ ֆունկցիաները բացարձակ ինտեգրելի են ամբողջ առանցքի վրա, ապա Ֆուրյեի $F[f]$ ձևափոխությունը n անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա է, ընդ որում

$$i^k F^{(k)}[f] = F[x^k f], k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

Հատկությունն ապացուցվում է ինդուկցիայով:

10. Դիցուք տրված են ամբողջ իրական առանցքի վրա անընդհատ φ և ψ ֆունկցիաները:

φ և ψ ֆունկցիաների փաթույթ, որը կնշանակենք $(\varphi * \psi)(x)$, կոչվում է

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt \quad (22)$$

Եթե φ և ψ ֆունկցիաները սահմանափակ են և բացարձակ ինտեգրելի, ապա գոյություն ունի այդ ֆունկցիաների $\varphi * \psi$ փաթույթը: Ընդ որում (22) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է ամբողջ իրական առանցքի վրա: Իրոք, φ ֆունկցիայի սահմանափակությունից ունենք $|\varphi| \leq M, M = const$;

$|\varphi(t)\psi(x-t)| \leq M|\varphi(t)|$, իսկ φ ֆունկցիայի բացարձակ ինտեգրելիությունից և Վայերշտրասի հայտանիշից հետևում է (22) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը: Պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալների տեսությունից հետևում է, որ սահմանափակ, բացարձակ ինտեգրելի և անընդհատ ֆունկցիաների փաթույթը նույնպես հանդիսանում է բացարձակ ինտեգրելի, անընդհատ, սահմանափակ ֆունկցիա:

Իրոք, $f = \varphi * \psi$ ֆունկցիայի անընդհատությունը հետևում է ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունից, իսկ սահմանափակությունը՝

$$|f(x)| = |(\varphi * \psi)(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)| dt \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt$$

զնահատականից:

Փաթույթի բացարձակ ինտեգրելիությունը հետևում է հետևյալ անհավասարությունից.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) \psi(x-t)| dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(s)| ds \end{aligned} \quad (23)$$

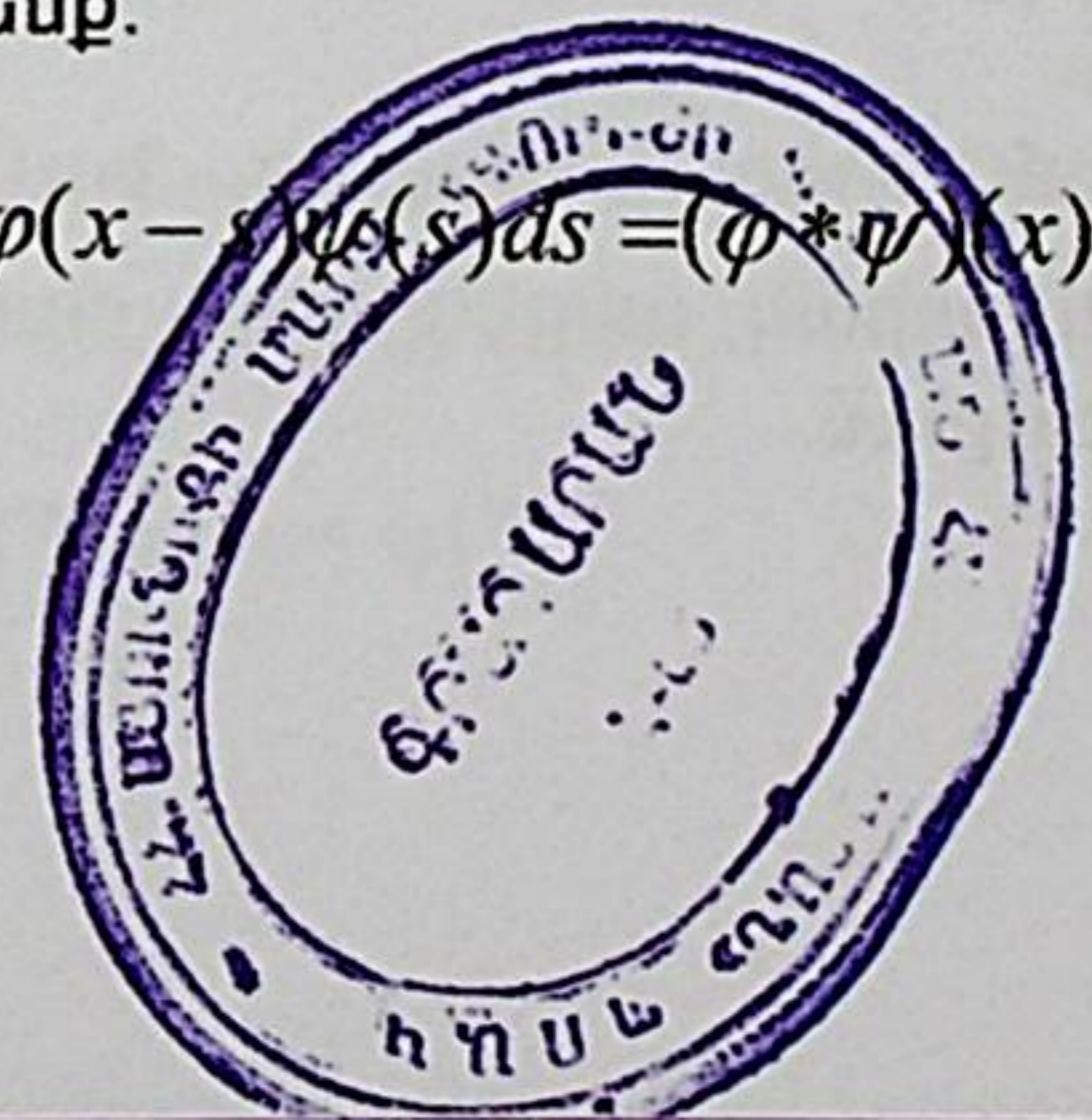
որտեղ $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)\psi(x-t)| dx = |\varphi(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-t)| dx$ ինտեգրալը

հավասարաչափ զուգամետ է ամբողջ առանցքի վրա, հետևաբար կարելի է փոխել ինտեգրման կարգը:

Բացարձակ ինտեգրելի սահմանափակ ֆունկցիաների դասում ֆունկցիաների փաթույթը տեղափոխելի է և զուգորդելի:

1. Տեղափոխելիություն՝ $\varphi * \psi = \psi * \varphi$: Կատարելով $x-t=s$ փոփոխականի փոխարինում՝ ստանում ենք.

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-s) \psi(s) ds = (\psi * \varphi)(x)$$



2. Չուզորդելիություն՝ $(\varphi * \psi) * \chi = \varphi * (\psi * \chi)$: Կատարելով $t = y - \xi$ փոփոխականի փոխարինում, փոխելով ինտեգրման կարգը, մեկ անգամ ևս կատարելով փոփոխականի փոխարինում $x - y + \xi = \eta$ նշանակմամբ՝ ստանում ենք.

$$\begin{aligned} (\varphi * \psi)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(y-x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(y-x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-\xi) \psi(x-y+\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y-\xi) \chi(y-x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\eta) \chi(\xi-\eta) d\eta = \varphi * (\psi * \chi) \end{aligned}$$

Ինտեգրման կարգի փոփոխության թույլատրելիությունը պայմանավորված է $\chi(y-x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y-\xi) \psi(x-y+\xi) d\xi,$

$\varphi(y-\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y+\xi) \chi(y-x) dx$ ինտեգրալների հավասարաչափ

զուգամիտությունով, ինչը ստացվում է ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի՝

$$|\chi(y-x) \varphi(y-\xi) \psi(x-y+\xi)| \leq M^2 |\varphi(y-\xi)|,$$

$$|\varphi(y-\xi) \psi(x-y+\xi) \chi(y-x)| \leq M^2 |\chi(y-x)|$$

որտեղ $M = \text{const} > 0, |\psi| \leq M, |\varphi| \leq M$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(y-x) \varphi(y-\xi) \psi(x-y+\xi)| d\xi = (|\varphi| * |\psi|) * |\chi|$$

Թեորեմ: Դիցուք φ և ψ ֆունկցիաներն իրական առանցքի վրա սահմանափակ, անընդհատ և բացարձակ ինտեգրելի ֆունկցիաներ են, այդ դեպքում.

$$F[\varphi * \psi] = F[\varphi]F[\psi] \quad (24)$$

Ապացույց: Քանի որ φ և ψ սահմանափակ, անընդհատ և բացարձակ ինտեգրելի ֆունկցիաներ են, ապա $f(x) = (\varphi * \psi)(x)$ ֆունկցիան ևս օժտված է վերոնշյալ հատկություններով, ընդ որում.

$$F[\varphi * \psi] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \psi(x-t) dt$$

Փոխելով ինտեգրման կարգը և կատարելով $x = t + s$ փոփոխականի փոխարինում՝ ստանում ենք.

$$F[\varphi * \psi] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-t) e^{ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ity} dt \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) e^{-isy} ds = F[\varphi]F[\psi]:$$

§1.4. Ֆուրյեի ձևափոխության հաշվման օրինակներ

Դիտարկենք կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության մեթոդներով Ֆուրյեի ձևափոխությունը որոնելու հնարավոր միջոցներից մեկը:

Ժորդանի լեմմա: Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\text{Im } z \geq 0$ կիսահարթությունում՝ բացառությամբ վերջավոր թվով վերացնելի եզակի կետերի, և հավասարաչափ ձգտում է զրոյի, երբ $z \rightarrow \infty$: Այդ դեպքում, եթե $t > 0$, ապա

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} e^{iz} f(z) dz = 0, \quad (25)$$

որտեղ γ -ն վերին կիսահարթությունում գտնվող, կորդինատների սկզբնակետում կենտրոն ունեցող, R շառավղով կիսաշրջան է:

Դիտողություն: Դատողությունը մնում է ուժի մեջ, եթե $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\text{Im } z \leq 0$ կիսահարթությունում:

Թեորեմ: Եթե $f(z)$ ֆունկցիան իրական առանցքի վրա չունի եզակի կետեր և առկա է ժորդանի լեմմայի պայմանները, ապա

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z)e^{iz}, z_k] \quad (26)$$

որտեղ մնացքների գումարը կատարվում է ըստ բոլոր z_1, z_2, \dots, z_n եզակի կետերի: Եթե $t > 0$, եզակի կետերը դասավորված են $\operatorname{Im} z \geq 0$ վերին կիսահարթությունում, իսկ $t < 0$ դեպքում՝ $\operatorname{Im} z \leq 0$ ստորին կիսահարթությունում:

Օրինակ: Դիցուք՝ $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, a > 0$:

$$\text{Այդ դեպքում } F[f] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} \frac{dx}{x^2 + a^2}: \text{ Դիցուք } y > 0: f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$$

Ֆունկցիան ստորին կիսահարթությունում ունի մեկ եզակի կետ՝

$$z_0 = -ia: \text{ Այդ կետում մնացքը՝ } \operatorname{res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}: \text{ Ստանում ենք՝}$$

$$F[f] = -2\pi i \frac{e^{-ay}}{-2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-ay}, y > 0:$$

Հանգումորեն, $y < 0$ դեպքում, հաշվի առնելով, որ եզակի կետը գտնվում է միայն վերին կիսահարթությունում, ստանում ենք՝

$$F[f] = \frac{\pi}{a} e^{ay}:$$

Այսպիսով՝

$$F[f] = \frac{\pi}{a} e^{-a|y|}, -\infty < y < +\infty:$$

§1.5. Ֆուրյեի ձևափոխության որոշ կիրառություններ

Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունը լայնորեն կիրառվում է անվերջ միջակայքում տրված եզրային պայմաններով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման ժամանակ:

Խնդիր 1: Գտնենք անվերջ լարի փոքր տատանումները մոդելավորող Կոշու խնդրի լուծումը.

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, u = u(x, t), -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (27)$$

$$u'_t(x, 0) = \varphi(x)$$

որտեղ $f(x), \varphi(x), u(x, t)$ ֆունկցիաները t -ի յուրաքանչյուր արժեքի դեպքում հանդիսանում են Ֆուրյեի էքսպոնենցիալ ձևափոխության օրիգինալներ: Անցնելով նրանց $F(p), \Phi(p), V(t, p)$ պատկերներին՝ ստանում ենք.

$$V''_{tt}(t, p) = -a^2 p^2 V(t, p), t > 0$$

$$V(0, p) = F(p) \quad (28)$$

$$V'_t(0, p) = \Phi(p)$$

Գտնում ենք լուծումը՝ արտահայտված պատկերներով.

$$V(t, p) = F(p) \cos(apt) + \frac{\Phi(p)}{ap} \sin(apt) \quad (29)$$

Ֆուրյեի հակադարձ ձևափոխությունից անցնելով օրիգինալին՝ ստանում ենք.

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(p) \cos(apt) + \frac{\Phi(p)}{ap} \sin(apt)] e^{ipx} dp \quad (30)$$

Ստացված լուծումը կարելի է բերել առավել հարմար տեսքերի: $\cos(apt), \sin(apt)$ ֆունկցիաների համար կիրառելով էյլերի բանաձևը՝ ստանում ենք.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ip(x-at)} dp + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ip(x+at)} dp \right] + \frac{i}{2a} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(p)}{p} e^{ip(x-at)} dp - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(p)}{p} e^{ip(x+at)} dp \right] \quad (31)$$

Առաջին փակագծում ինտեգրալները $f(x-at)$, $f(x+at)$ ֆունկցիա-
օրիգինալներն են, իսկ երկրորդ փակագծում φ ֆունկցիայի
պատկերներն են, համապատասխանաբար, $x-at$, $x+at$ կետերում,
այնպես որ՝

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(p)}{p} e^{ipz} dp \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(p)}{p} \frac{\partial}{\partial z} (e^{ipz}) dp =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p) e^{ipz} dp = \varphi(z) \quad (32)$$

Այսպիսով, ստանում ենք *տատանման հավասարման համար
Դալանբերի բանաձևը՝*

$$u(x,t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(z) dz \quad (33)$$

Խնդիր 2: Ուղղանկյուն կորդինատական համակարգում դիտարկվում է
 $y \geq 0$ տիրույթը զբաղեցնող մարմինը: Խնդիրը կայանում է $\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$

լարումների նկատմամբ $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (34)$

հավասարակշռության հավասարումների և հոծության $\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (35)$
պայմանն արտահայտող հավասարումների համակարգի ինտեգրման
մեջ, հետևյալ եզրային պայմանների դեպքում՝

$$\sigma_y|_{y=0} = f(x), \tau_{xy}|_{y=0} = g(x) \quad (36)$$

որտեղ f -ը և g -ն անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Ենթադրվում է, որ անվերջությունում լարումներն իրենց առաջին կարգի
աժանցյալների հետ մեկտեղ ձգտում են զրոյի:

Ներմուծենք Ֆուրյեի ձևափոխությունը լարումների նկատմամբ.

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x e^{i\lambda x} dx, \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy} e^{i\lambda x} dx, \quad (37)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y e^{i\lambda x} dx,$$

Բազմապատկելով (34), (35)-ը $e^{i\lambda x}$ -ով և ինտեգրելով $-\infty -$ ից ∞ ըստ
 x -ի, կատարելով մասերով ինտեգրում՝ ստացված
հավասարությունների համակարգը հանգեցվում է $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\sigma}_y$ -ի
նկատմամբ սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի.

$$\begin{cases} -i\lambda \bar{\sigma}_x + \bar{\tau}'_{xy} = 0 \\ -i\lambda \bar{\tau}_{xy} + \bar{\sigma}'_y = 0 \\ (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y)'' - \lambda^2 (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

(38) համակարգը պետք է լուծել Ֆուրյեի ձևափոխությունից հետո
ստացված հետևյալ եզրային պայմանների դեպքում.

$$\bar{\sigma}_y|_{y=0} = f(\lambda), \bar{\tau}_{xy}|_{y=0} = g(\lambda) \quad (39)$$

(38) համակարգից արտաքսելով $\bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ մեծությունները հետևյալ

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{1}{\lambda^2} \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{i\lambda} \bar{\sigma}'_y$$

բանաձևերի միջոցով՝ համակարգը

հանգեցվում է $\bar{\sigma}_y$ -ի նկատմամբ չորրորդ աստիճանի հավասարման.

$$\bar{\sigma}_y'''' - 2\lambda^2 \bar{\sigma}_y'' + \lambda^4 \bar{\sigma}_y = 0 \quad (40)$$

որի լուծումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\bar{\sigma}_y = [A(\lambda) + yB(\lambda)]e^{-|\lambda|y}, \quad A = f, B = f + \frac{\lambda}{|\lambda|}ig, \quad (41)$$

որը բավարարում է (39) եզրային պայմաններին:

(38)-ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_x = [(1 - |\lambda|y)f + (2\frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y)ig]e^{-|\lambda|y} \\ \bar{\tau}_{xy} = [i\lambda yf + (1 - |\lambda|y)g]e^{-|\lambda|y} \\ \bar{\sigma}_y = [(1 + |\lambda|y)f + i\lambda yg]e^{-|\lambda|y} \end{cases} \quad (42)$$

Խնդրի լուծումը ստացվում է Ֆուրյեի շրջման բանաձևի կիրառմամբ, օրինակ, լարման համար այն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_x e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [(1 - |\lambda|y)f + (2\frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y)ig] e^{-i\lambda y} e^{-i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - |\lambda|y) e^{-i\lambda y} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2\frac{|\lambda|}{\lambda} - \lambda y) e^{-i\lambda y} e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda y) e^{-\lambda y} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} (2 - \lambda y) e^{-\lambda y} \sin \lambda(x - \xi) d\lambda = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x - \xi)g(\xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} (x - \xi)^2 d\xi \end{aligned} \quad (43)$$

Հանգուցորեն ստանում ենք.

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x - \xi)g(\xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} (x - \xi) y d\xi \\ \sigma_y &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(\xi) + (x - \xi)g(\xi)}{[(x - \xi)^2 + y^2]^2} y^2 d\xi \end{aligned} \quad (44)$$

(43), (44)-ը դրված խնդրի ճշգրիտ լուծումն է կամայական արտաքին ուժի դեպքում:

1. Ֆունկցիաները վերլուծել Ֆուրյեի շարքի.

- 1.1. $f(x) = \cos x$, 1.3. $f(x) = \sin 3x \cos^2 7x$,
1.2. $f(x) = \sin^3 x$, 1.4. $f(x) = |\cos x|$:

2. Գտնել 2π պարբերությամբ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը, եթե.

- 2.1. $f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x < \pi \\ -1, \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$ 2.3. $f(x) = \begin{cases} h, 0 \leq x < \ell \\ -h, \ell \leq x < 2\ell \end{cases}$
2.2. $f(x) = \begin{cases} 1, \frac{-\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -1, \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ 2.4. $f(x) = \begin{cases} h, \frac{-\ell}{2} \leq x < \frac{\ell}{2} \\ -h, \frac{\ell}{2} \leq x < \frac{3\ell}{2} \end{cases}$

3. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ֆունկցիան $(0, 2\pi)$ միջակայքում վերլուծել Ֆուրյեի շարքի:

4. $f(x) = x^2$ ֆունկցիան $(0, \pi)$ միջակայքում վերլուծել Ֆուրյեի սինուսների շարքի:

5. $f(x) = \operatorname{sgn}(x - \alpha) - \operatorname{sgn}(x - \beta)$, $\beta > \alpha$ ֆունկցիան ներկայացնել Ֆուրյեի ինտեգրալի տեսքով:

6. Գտնել հետևյալ ֆունկցիայի Ֆուրյեի ձևափոխությունը.

6.1. $f(x) = e^{-a|x|}$

6.2. $\varphi_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

Ցուցում: Օգտվել Ֆուրյեի ձևափոխության հատկություններից և այն բանից, որ $F[e^{-x^2/2}] = e^{-p^2/2}$

7. Գտնել $f(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x}, 1 < x < \infty \end{cases}$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի կոսինուս-ձևափոխությունները:

8. գտնել $f(x) = \begin{cases} \sin x, 0 < x < \pi \\ 0, x > \pi \end{cases}$ ֆունկցիայի.

8.1. Ֆուրյեի սինուս-ձևափոխությունը,

8.2. Ֆուրյեի կոսինուս-ձևափոխությունը:

9. գտնել $\varphi_{a_1, \sigma_1}; \varphi_{a_2, \sigma_2}$ ֆունկցիաների փաթույթը/տես խնդիր 1.2/:

Ցուցում: Կիրառել Ֆուրյեի ուղիղ և հակադարձ ձևափոխությունները, օգտագործել խնդիր 1.2-ը:

10. Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները.

10.1.
$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = \varphi(x), 0 < x < \infty \\ y(0) = 0, y(+\infty) = y'(+\infty) = 0, \omega = const \end{cases}$$

10.2.
$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = \varphi(x), 0 < x < \infty \\ y'(0) = 0, y(+\infty) = y'(+\infty) = 0, \omega = const \end{cases}$$

11. գտնել հավասարման $u(x, t)$ լուծումը.

11.1.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{2t} e^{-x^2/4t}, t > 0$$

11.2.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0$$

$u(x, 0) = 0$

$u(x, 0) = u_0(x)$

11.3.
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0$$

$u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$

/որտեղ $u_0(x)$ -ը տրված ֆունկցիա է/

Ցուցում: 11.1-11.3 խնդիրներում հավասարման երկու մասերի նկատմամբ կիրառել Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխություն t -ն ընդունելով որպես պարամետր: Որից հետո ստացված հավասարումը լուծել պատկերի նկատմամբ և գտնել Ֆուրյեի հակադարձ ձևափոխությունը:

Պատասխաններ: 1. 1.1) $f(x) = \cos x$, 1.2) $f(x) = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$,

1.3) $f(x) = \frac{1}{4} \sin 17x - \frac{1}{4} \sin 11x$, 1.4) $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos 2nx$:

2. 2.1) $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, 2.2) $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(2n-1)x}{2n-1}$,

2.3) $f(x) = 4 \frac{h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1) \frac{\pi x}{\ell}}{2n-1}$, 2.4) $f(x) = 4 \frac{h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(2n-1) \frac{\pi x}{\ell}}{2n-1}$:

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} (0 < x < 2\pi)$: 4. $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx (0 < x < 2\pi)$:

5. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda(\beta-x) + \sin \lambda(x-\alpha)}{\lambda} d\lambda$: 6. 6.1) $F[p] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + p^2}$,

6.2) $F[p] = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{p^2 \sigma^2}{2}}$: 7. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^2} + \frac{\cos \lambda - \lambda \sin \lambda}{\lambda^2 + 1} \right)$:

8. 8.1) $\int_0^{\infty} f(x) \sin px dx = \frac{p \sin p\pi}{p^2 - 1}$, 8.2) $\int_0^{\infty} f(x) \cos px dx = -\frac{1 + \cos p\pi}{p^2 - 1}$:

9. $\varphi_{a_1, \sigma_1} * \varphi_{a_2, \sigma_2} \equiv \varphi_{a, \sigma}, a = a_1 + a_2, \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$: 10. 10.1) $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_s(\lambda)}{\omega^2 - \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda$:

10.2) $y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_c(\lambda)}{\omega^2 - \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda$: 11. 11.1) $u(x, t) = e^{-x^2/4t}$: 11.2)

$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-p)^2}{4at}} u_0(p) dp$: 11.3) $u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x-at) + u_0(x+at)]$:

§2.1. Լապլասի ինտեգրալ ձևափոխություն, հիմնական հատկությունները

Սահմանում 1: Իրական փոփոխականի $f(t)$ ֆունկցիայի Լապլասի ուղիղ ձևափոխություն կոչվում է $s = \sigma + i\omega$ կոմպլեքս փոփոխականից այնպիսի $F(s)$ ֆունկցիան, որի համար

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (45)$$

Աջ մասը կոչվում է Լապլասի ինտեգրալ, $s = \sigma + i\omega$ կոմպլեքս փոփոխականը՝ Լապլասի պարամետր, իսկ s կոմպլեքս փոփոխականից $F(s)$ ֆունկցիան կոչվում է $f(t)$ ֆունկցիայի (օրիգինալի) Լապլասյան պատկեր և նշանակվում է $F(s) = L\{f(t)\}$, որտեղ L -ը Լապլասի ուղիղ ձևափոխության սիմվոլն է: Լապլասի ուղիղ ձևափոխությունը հակադարձելի է, այսինքն, իմանալով Լապլասյան պատկերը, կարելի է որոշել օրիգինալ ֆունկցիան:

Սահմանում 2: $F(s)$ կոմպլեքս փոփոխականից Լապլասի հակադարձ ձևափոխություն կոչվում է այն $f(t)$ իրական փոփոխականի ֆունկցիան, որի համար

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (46)$$

որտեղ σ_1 -ը որևէ իրական թիվ է: Աջ մասը կոչվում է *Բրոմվիչի ինտեգրալ*:

Սահմանում 3: Լապլասի երկկողմանի ձևափոխություն կոչվում է.

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (47)$$

Դիտարկենք Լապլասի ձևափոխության մի շարք թեորեմներ և հատկություններ, որոնք լայն կիրառություն ունեն առաձգականության տեսությունում և ոչ միայն՝

1. *Բացարձակ զուգամիտություն:* Եթե Լապլասի ինտեգրալը $\sigma = \sigma_0$ -ում բացարձակ զուգամետ է, այսինքն գոյություն ունի

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt,$$

ապա այն բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է $\sigma \geq \sigma_0$ -ի համար, և $F(s)$ -ը անալիտիկ է $\sigma \geq \sigma_0$ -ի դեպքում: σ թվերի բազմության ճշգրիտ ստորին եզրը, որի դեպքում այդ պայմանը տեղի ունի, կոչվում է Լապլասի ձևափոխության բացարձակ զուգամիտության *արսիս*:

2. *Լապլասի ուղիղ ձևափոխության գոյության պայմանը:* Լապլասի $L\{f(t)\}$ ձևափոխությունը բացարձակ զուգամիտության իմաստով գոյություն ունի հետևյալ դեպքերում՝

I դեպք. $\sigma \geq 0$: Լապլասի ձևափոխությունը գոյություն ունի, եթե

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt:$$

II դեպք. $\sigma > \sigma_a$: Լապլասի ձևափոխությունը գոյություն ունի, եթե

$$\int_0^{t_1} |f(t)| dt$$

ինտեգրալը գոյություն ունի յուրաքանչյուր վերջավոր $t_1 > 0$

և $f(t) \leq Ke^{\sigma_a t}$ $t > t_1 \geq 0$ համար:

III դեպք. $\sigma > 0$ կամ $\sigma > \sigma_a$: Ձևափոխությունը գոյություն ունի, եթե գոյություն ունի $f(t)$ -ի Լապլասի ձևափոխությունը $\sigma > \sigma_a$ -ի համար:

Դիտողություն: Նշվածները հանդիսանում են բավարար պայմաններ:

3. *Լապլասի հակադարձ ձևափոխության գոյության պայման:*
Լապլասի հակադարձ ձևափոխության գոյության համար՝

1. Եթե $F(s)$ պատկերն անալիտիկ ֆունկցիա է $\sigma \geq \sigma_a$ -ի համար և ունի -1 -ից փոքր կարգ, ապա

$$L^{-1}\{F(s)\} = 0, \text{ երբ } t \leq 0$$

2. Դիցուք՝ $F(s) = \phi[F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s)]$, որի համար

$\phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ -ը անալիտիկ է ըստ յուրաքանչյուր z_k -ի, հավասար է զրոյի $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$ համար և $F_k(s) = L\{f_k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots, n$,

այդ դեպքում հակադարձ ձևափոխությունը գոյություն ունի, և համապատասխան ուղիղ ձևափոխությունը ունի բացարձակ զուգամիտության արքցիս:

Դիտողություն: Նշվածները հանդիսանում են բավարար պայմաններ:

4. $f_1(t)$ և $f_2(t)$ ֆունկցիաների գումարի Լապլասի ձևափոխությունը հավասար է գումարելիների Լապլասի ձևափոխությունների գումարին.

$$L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2) \quad (48)$$

5. c հաստատունի և $f(t)$ ֆունկցիայի արտադրյալի Լապլասի ձևափոխությունը հավասար է c հաստատունի և $f(t)$ ֆունկցիայի Լապլասի ձևափոխության արտադրյալին.

$$L(cf) = cL(f) \quad (49)$$

Օրինակ1: Գտնել $f(t) = 3 + 2e^{-t}$ ֆունկցիայի պատկերը:

4) և 5) հատկություններից կարող ենք գրել.

$$L[f(t)] = L[3 + 2e^{-t}] = 3L[\sigma_0(t)] + 2L[e^{-t}] = 3 \cdot \frac{1}{p} + 2 \cdot \frac{1}{p+1}$$

Օրինակ2: Գտնել $f(t) = \cos t$ ֆունկցիայի պատկերը:

Օգտվելով էյլերի բանաձևից՝ ստանում ենք $f(t) = \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$

4) և 5) հատկություններից կարող ենք գրել.

$$L[\cos t] = L\left[\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right] = \frac{1}{2}L[e^{it}] + \frac{1}{2}L[e^{-it}] = \frac{1}{2} \frac{1}{p-i} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+i} = \frac{p+i+p-i}{2(p^2+1)} = \frac{p}{p^2+1}$$

6. Եթե Լապլասի ինտեգրալը զուգամետ է $z = z_0 = x_0 + iy_0$ կետում, ապա այն զուգամետ է բոլոր այն կետերում, որտեղ $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$, կամ որ նույնն է՝ $\operatorname{Re} z > x_0$:

7. Եթե $F(z)$ -ը $f(t)$ ֆունկցիայի Լապլասի ձևափոխությունն է, ապա $F(z-a)$ -ն $e^{at} f(t)$ ֆունկցիայի Լապլասի ձևափոխությունն է:

8. Եթե Լապլասի ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է, ապա $F(z)$ ֆունկցիան կլինի անալիտիկ $\operatorname{Re} z > \gamma_a$ կիսահարթությունում: Ընդ որում $\frac{dF(z)}{dz}$ ածանցյալը $\operatorname{Re} z > \gamma_a$ տիրույթում կարելի է հաշվել՝ Լապլասի ինտեգրալի նշանի տակ կատարելով դիֆերենցում.

$$\frac{dF(z)}{dz} = \int_0^{\infty} f(t)(-t)e^{-zt} dt \quad (50)$$

Չեռևանք: 8)-ից և ինտեգրալի բացարձակ զուգամիտությունից կունենանք.

$$\frac{d^n F(z)}{dz^n} = \int_0^{\infty} f(t)(-t)^n e^{-zt} dt \quad (51)$$

9. Դիցուք $l > 0$ և $z_k = z_0 + kl, k = 0, 1, 2, \dots$: Եթե Լապլասի ինտեգրալը զուգամետ է z_0 կետում և բոլոր $z_k = z_0 + kl, k = 0, 1, 2, \dots$ կետերում $F(z_k) = 0$, ապա $(0, \infty)$ -ում $f(t)$ -ն նույնաբար հավասար է 0, բացառությամբ վերջավոր թվով կետերի:

10. Եթե $\operatorname{Re} z > \gamma$ տիրույթում $F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$, $G(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} g(t) dt$

ինտեգրալները բացարձակ զուգամետ են, ապա $H(z) = F(z)G(z)$

Ֆունկցիան Լապլասի ձևափոխություն է և $H(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} h(t) dt$

ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է $\operatorname{Re} z > \gamma$ տիրույթում:

11. Եթե $f(t)$ ֆունկցիան $(0, \infty)$ միջակայքում դիֆերենցելի է և նրա $f'(t)$ ածանցյալը Լապլասի ձևափոխություն է, ապա $f(t)$ -ն նույնպես Լապլասի ձևափոխություն է և

$$L(f'(t)) = zL(f(t)) - f(0) \quad (**)$$

Ապացույց: Օգտվենք $f(t) - f(0) = \int_0^t f'(u) du$ հավասարությունից:

6)-րդ հատկությունից հետևում է, որ $L(f(t) - f(0)) = \frac{1}{z} L(f'(t))$ կամ

$$L(f(t)) - \frac{1}{z} f(0) = \frac{1}{z} L(f'(t)), \quad \text{որտեղից էլ բխում է}$$

$$L(f'(t)) = zL(f(t)) - f(0) \text{ բանաձևը:}$$

Բերենք $(**)$ բանաձևի որոշ կիրառություններ.

$$L(\cos \omega t) = \frac{z}{z^2 + \omega^2} \text{ բանաձևից ստանում ենք.}$$

$$L((\cos \omega t)') = zL(\cos \omega t) - \cos 0 = \frac{z^3}{z^2 + \omega^2} - 1$$

և

$$L((\cos \omega t)') = L(-\omega \sin \omega t) = -\omega L(\sin \omega t)$$

որտեղից

$$L(\sin \omega t) = -\frac{L((\cos \omega t)')}{\omega} = -\frac{z^3}{\omega(z^2 + \omega^2)} + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega}{\omega^2 + z^2}$$

Օգտվելով $(**)$ -ից, $f(t)$ -ի փոխարեն վերցնելով $f'(t)$ կստանանք.

$$L(f''(t)) = zL(f'(t)) - f'(0) = z^2 L(f(t)) - zf(0) - f'(0)$$

Չանգունորեն, կստանանք

$$L(f'''(t)) = z^3 L(f(t)) - z^2 f(0) - zf'(0) - f''(0)$$

$$L(f^{(n)}(t)) = z^n L(f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1} f^{(k)}(0)$$

Օրինակ 1: Գտնել $f'(t)$ պատկերը, եթե $f(t) = e^{-t} \cos 3t$:

$$L(f'(t)) = pL[f(t)] - f(0)$$

Այս դեպքում

$$L[e^{-t} \cos 3t] = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9}, \quad f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} e^{-t} \cos 3t = 1$$

$$\text{Չետևաբար, } L[f'(t)] = p \frac{p+1}{(p+1)^2 + 9} - 1:$$

Օրինակ 2: Գտնել $x'' + 3x' + 2x + 1$ արտահայտության պատկերը, եթե

$$x(+0) = 1, x'(+0) = 4$$

Դիցուք $X(p) = L[x(t)]$, այդ դեպքում

$$L[x'(t)] = pX[p] - 1; L[x''(t)] = p^2 X[p] - p \cdot 1 - 4; L[1] = \frac{1}{p}$$

Գծայնության հատկությունից ստանում ենք.

$$\begin{aligned} L[x'' + 3x' + 2x + 1] &= L[x''] + 3L[x'] + 2L[x] + L[\sigma_0(t)] = \\ &= p^2 X(p) - p - 4 + 3pX(p) - 3 + 2X(p) + \frac{1}{p} = \\ &= (p^2 + 3p + 2)X(p) - p - 7 + \frac{1}{p} \end{aligned}$$

12. Եթե L ապլասի ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է, ապա $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x + iy) = 0$ և զուգամիտությունը հավասարաչափ է բոլոր $x \geq x_1 > \gamma_a \geq 0$ համար:

§2.2. Փաթաթման թեորեմը

Դիֆերենցիալ հավասարումներն օպերացիոն մեթոդով լուծելիս օգտակար է լինում հետևյալը՝

Թեորեմ (փաթաթման): Եթե $F_1(p)$ -ն և $F_2(p)$ -ն $f_1(t)$ և $f_2(t)$ ֆունկցիաների պատկերներն են, այսինքն՝ $F_1(p) \rightarrow f_1(t)$,

$F_2(p) \rightarrow f_2(t)$, ապա $F_1(p)F_2(p)$ -ն $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ ֆունկցիայի

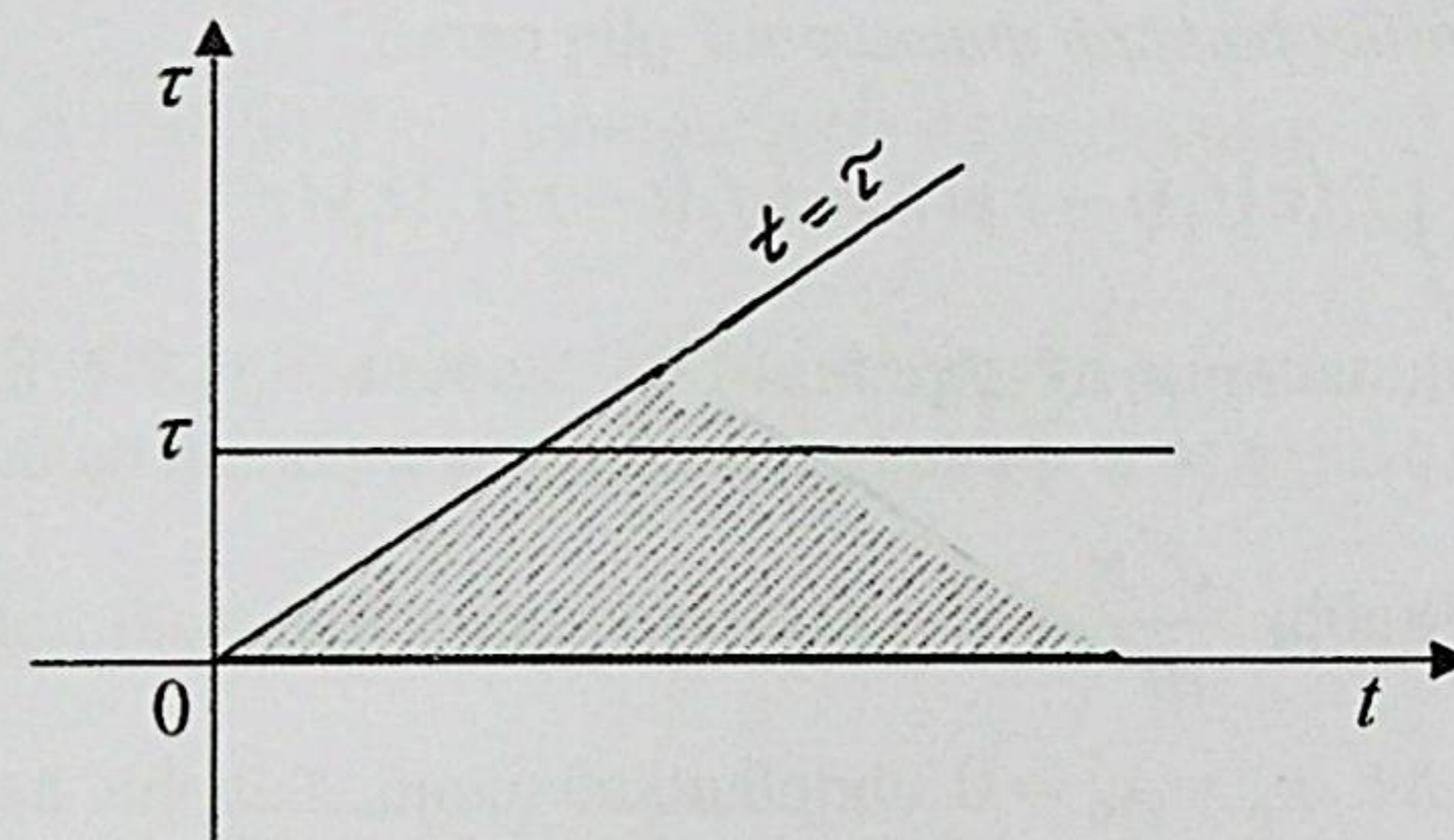
պատկերն է, այսինքն

$$F_1(p)F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \quad (52)$$

Ապացույց: Գտնենք $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ ֆունկցիայի պատկերը՝ ելնելով պատկերի սահմանումից.

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \right] dt$$

Աջ կողմի ինտեգրալը կրկնապատիկ ինտեգրալ է, որը տարածված է $\tau = 0, \tau = t$ ուղիղներով սահմանափակված տիրույթով.



Ու. 1

Այդ ինտեգրալում փոխելով ինտեգրման կարգը՝ կստանանք.

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty f_1(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)dt \right] d\tau$$

Ներքին ինտեգրալում կատարելով $t - \tau = z$ փոփոխականի փոխարինում՝ կստանանք.

$$\int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t-\tau)dt = \int_0^\infty e^{-p(z+\tau)} f_2(z)dz = e^{-p\tau} \int_0^\infty e^{-pz} f_2(z)dz = e^{-p\tau} F_2(p)$$

Չեղարար,

$$L\left\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau}F_2(p)d\tau = F_2(p)\int_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau = F_1(p)F_2(p)$$

եվ այսպես՝

$$F_1(p)F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

Դիտողություն: $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ արտահայտությունը կոչվում է $f_1(t)$

և $f_2(t)$ **ֆունկցիաների փաթույթ:** Փաթույթը ստանալու գործողությունը կոչվում է **ֆունկցիաների փաթաթում**, ընդ որում.

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \quad (53)$$

Վերջին հավասարության ճշտությունը հաստատվում է աջակողմյան ինտեգրալում $t-\tau = z$ փոփոխականի փոխարինման ճանապարհով:

Օրինակ 1: Գտնել $\frac{d^2x}{dt^2} + x = f(t)$ հավասարման այն լուծումը, որը

բավարարում է $x_0 = x'_0 = 0$ սկզբնական պայմաններին, երբ $t = 0$:

Լուծում: Ունենք

$$\bar{x}(p)(p^2 + 1) = F(p)$$

որտեղ $F(p)$ -ն $f(t)$ ֆունկցիայի պատկերն է:

Հետևաբար $\bar{x}(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)}F(p)$, բայց $\frac{1}{(p^2 + 1)} \rightarrow \sin t$ և

$F(p) \rightarrow f(t)$: Կիրառելով փաթաթման բանաձևը և նշանակելով

$\frac{1}{(p^2 + 1)} = F_2(p)$, $F(p) = F_1(p)$ ՝ կստանանք.

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$$

Դիտողություն: Փաթաթման թեորեմի հիման վրա հեշտությամբ գտնվում է ֆունկցիայի ինտեգրալի պատկերը, այն է՝ եթե $F(p) \rightarrow f(t)$, ապա

$$\frac{1}{p}F(p) \rightarrow \int_0^t f(\tau)d\tau \quad (**)$$

իրոք, եթե նշանակենք $f_1(t) = f(t)$, $f_2(t) = 1$, ապա

$F_1(p) = F(p)$, $F_2(p) = \frac{1}{p}$: Այս ֆունկցիաները տեղադրելով

փաթաթման բանաձևի մեջ՝ կստանանք (**)
բանաձևը:

Օրինակ 2: Գտնել օրիգինալը, եթե $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$

$F(p)$ -ն ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$F(p) = F_1(p)F_2(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \frac{p}{p^2 + 1}$$

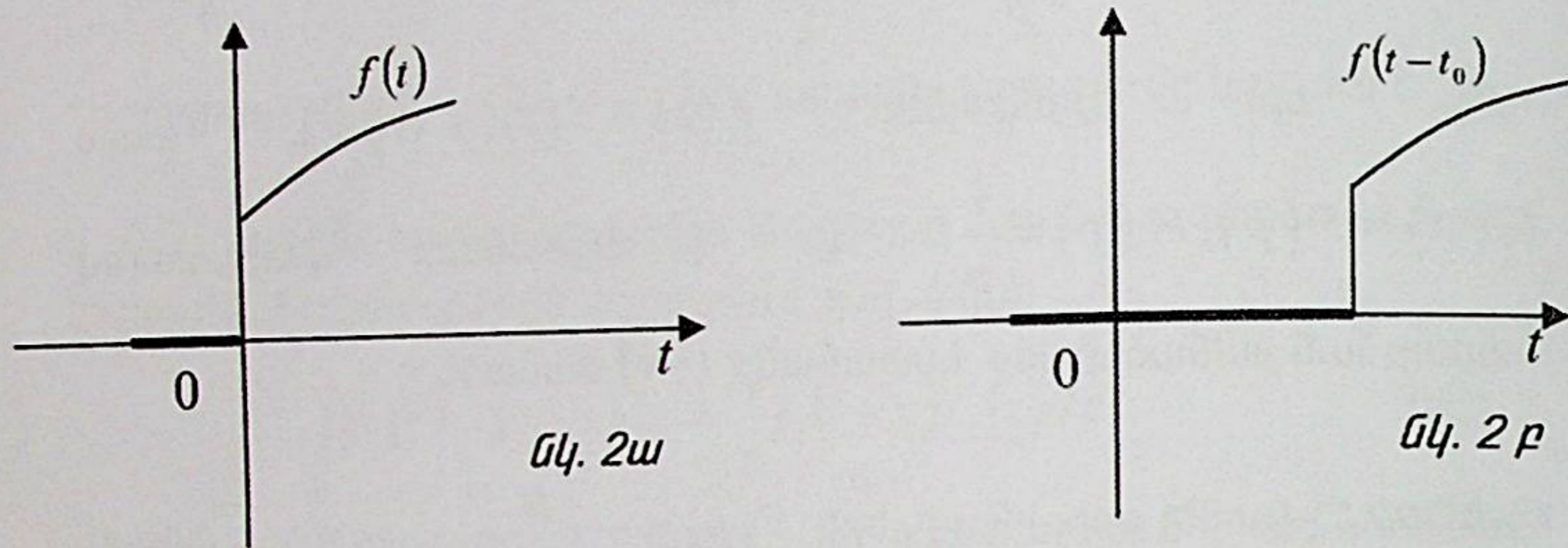
$$f_1(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{p^2 + 1}\right] = \sin t, \quad f_2(t) = L^{-1}\left[\frac{p}{p^2 + 1}\right] = \cos t$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(p^2 + 1)^2}\right] = f_1(t)f_2(t) = \int_0^t \sin \tau \cos(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\sin t + \sin(2\tau - t)]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin t \tau + \frac{\cos(2\tau - t)}{2} \right]_0^t = \frac{1}{2} t \sin t$$

§2.3. Ուշացման թեորեմը

Դիցուք $t > 0$ համար $f(t)$ ֆունկցիան նույնաբար հավասար է 0-ի (նկ. 2ա):



Այդ դեպքում $f(t-t_0)$ ֆունկցիան նույնաբար զրոյի հավասար կլինի $t < t_0$ դեպքում (նկ. 2բ): Ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ(ուշացման): Եթե $F(p)$ -ն $f(t)$ ֆունկցիայի պատկերն է, ապա $e^{-pt_0} F(p)$ էլ $f(t-t_0)$ ֆունկցիայի պատկերն է, այսինքն՝ եթե $F(p) \rightarrow f(t)$, ապա

$$e^{-pt_0} F(p) \rightarrow f(t-t_0) \quad (54)$$

Ապացույց: Պատկերի սահմանումից ունենք.

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} f(t-t_0) dt + \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t-t_0) dt$$

Հավասարության աջ մասի առաջին ինտեգրալը հավասար է 0-ի, քանի որ $t < t_0$ դեպքում $f(t-t_0) = 0$: Վերջին ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում, ընդունելով $t-t_0 = z$

$$L\{f(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-p(z+t_0)} f(z) dz = e^{-pt_0} \int_0^{\infty} e^{-pz} f(z) dz = e^{-pt_0} F(p)$$

Այսպիսով

$$e^{-pt_0} F(p) \rightarrow f(t-t_0)$$

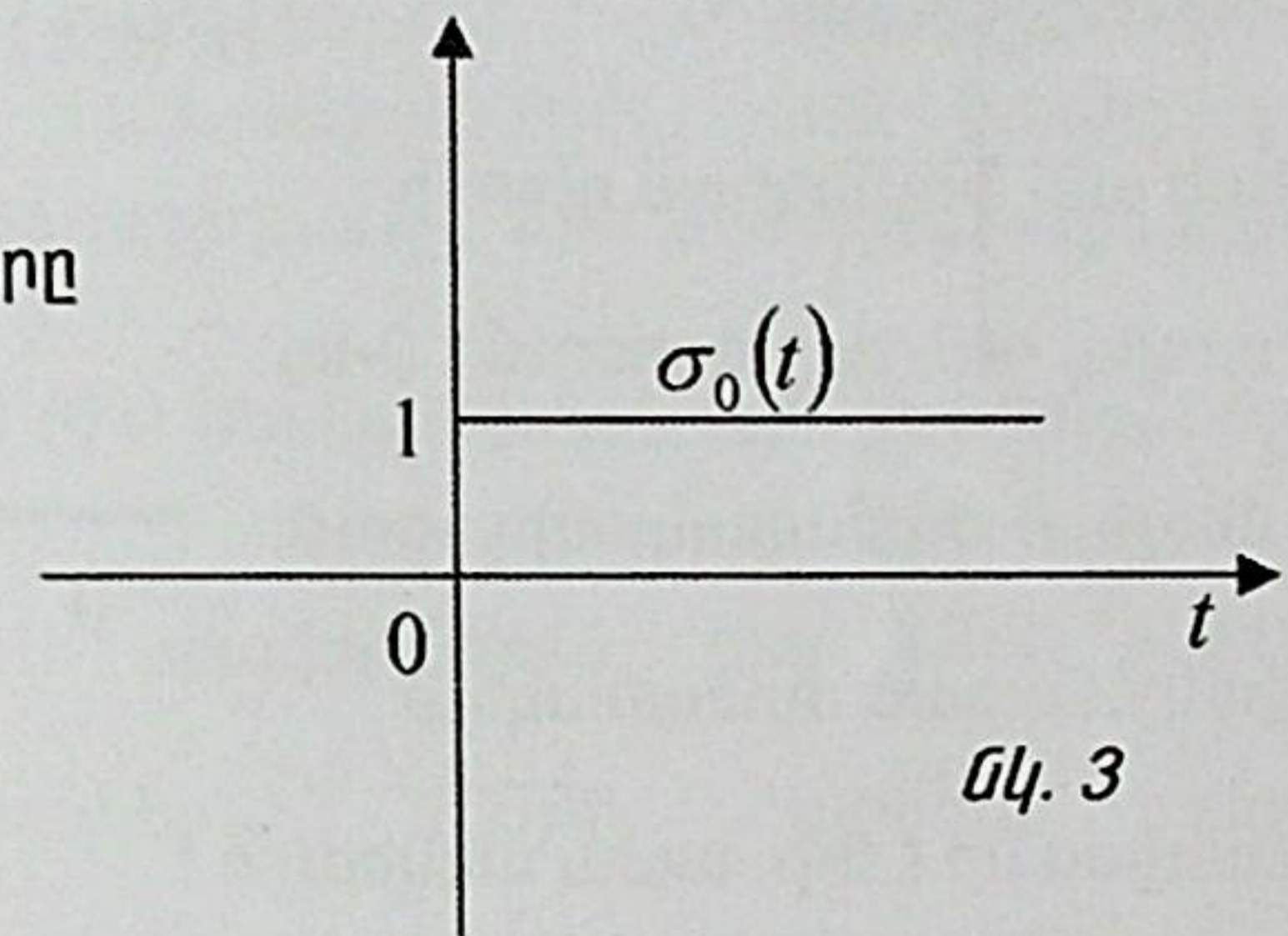
Օրինակ1: Ինչպես գիտենք *Հեվիսայդի միավոր ֆունկցիայի* համար $\sigma_0(t) \rightarrow \frac{1}{p}$ (55): Ապացուցված թեորեմից հետևում է, որ նկ. 3-ում

պատկերված $\sigma_0(t-h)$

ֆունկցիայի համար L -պատկերը

կլինի $\frac{1}{p} e^{-ph}$ -ը, այսինքն

$$\frac{1}{p} e^{-ph} \rightarrow \sigma_0(t-h) \quad (56)$$



Օրինակ2: Գտնել $f(t) = \cos(t-3)$ ֆունկցիայի պատկերը:

Ունենք $L[\cos t] = \frac{p}{p^2+1}$

Ուշացման թեորեմից, երբ $t_0 = 3$, ստանում ենք.

$$L[\cos(t-3)] = e^{-3p} \frac{p}{p^2+1}$$

§2.4. Դելտա ֆունկցիան և նրա պատկերը

Դիտարկենք

$$\sigma_1(t, h) = \frac{1}{h}(\sigma_0(t) - \sigma_0(t-h)) = \begin{cases} 0, & \text{երբ, } t < 0 \\ \frac{1}{h}, & \text{երբ, } 0 \leq t < h \\ 0, & \text{երբ, } h \leq t \end{cases} \quad (57)$$

Ֆունկցիան (նկ. 4):

Եթե այս ֆունկցիան դիտվի

որպես ուժ, որը գործում է 0-ից

մինչև h ժամանակամիջոցում,

իսկ մնացած ժամանակում

հավասար է 0-ի, ապա ակնհայտ է՝

այդ ուժի իմպուլսը հավասար կլինի միավորի: (55) և (56) բանաձևերի հիման վրա այդ ֆունկցիայի պատկերը կլինի.

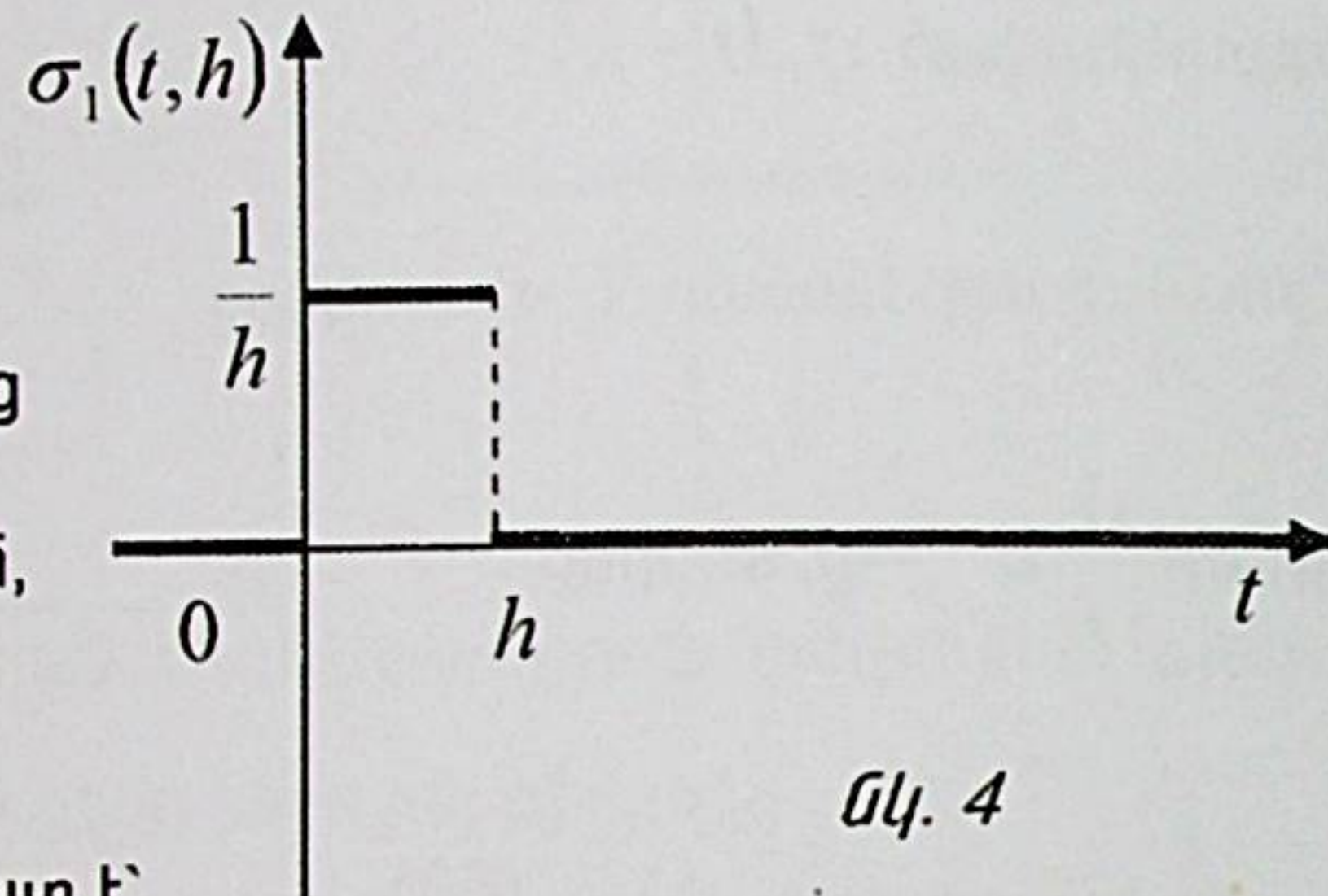
$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ph} \right)$$

Այսինքն՝

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ph} \right) \rightarrow \sigma_1(t, h) \quad (58)$$

Մեխանիկայում հարմար է լինում դիտարկել այնպիսի ուժեր, որոնք ազդում են շատ կարճ ժամանակամիջոցում, որպես ակնթարթորեն գործող ուժեր, բայց ունեն վերջավոր իմպուլս: Ուստի ներմուծում ենք $\delta(t)$ ֆունկցիան՝ որպես $\sigma_1(t, h)$ ֆունկցիայի սահման $h \rightarrow 0$

դեպքում $\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_1(t, h)$



նկ. 4

Այս ֆունկցիային անվանում են միավոր իմպուլսային ֆունկցիա կամ Դիրակի դելտա-ֆունկցիա. ընդունվում է, որ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (59)$$

Գրում են նաև՝

$$\int_0^0 \delta(t) dt = 1 \quad (60)$$

Եշենք, որ $\delta(x)$ ֆունկցիան կիրառվում է ոչ միայն մեխանիկայում, այլև մաթեմատիկայի շատ բաժիններում, մասնավորապես մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումների շատ խնդիրներ լուծելիս: Դիտարկենք $\delta(t)$ -ի ազդեցությունը, եթե այն պատկերացվի

որպես ուժ: Գտնենք $\frac{d^2 s}{dt^2} = \delta(t)$ (61) հավասարման այն լուծումը, որը

բավարարում է $s=0, \frac{ds}{dt} = 0$ պայմաններին, երբ $t=0$: (61)

հավասարումից, հաշվի առնելով (60)-ը, գտնում ենք

$$v = \frac{ds}{dt} = \int_0^t \delta(\tau) d\tau = 1 \text{ ցանկացած } t\text{-ի դեպքում, մասնավորապես, երբ}$$

$t=0$: Չետևարար, (59) հավասարությամբ որոշելով $\delta(x)$ -ը՝ կարելի է

այդ ֆունկցիան մեկնաբանել որպես այնպիսի ուժ, որը $t=0$ պահին միավոր զանգվածն ունեցող նյութական կետին հաղորդում է միավոր արագություն: $\delta(t)$ ֆունկցիայի L -պատկերը սահմանենք որպես

$\sigma_1(t, h)$ ֆունկցիայի պատկերի սահման, երբ $h \rightarrow 0$

$$L\{\delta(x)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - e^{-ph}}{h} = \frac{1}{p} \cdot p = 1$$

Եվ այսպես

$$\delta(t) \rightarrow 1 \quad (62)$$

Այնուհետև որոշվում է $\delta(t-t_0)$ ֆունկցիան, որը մեկնաբանվում է որպես այնպիսի ուժ, որն ակնթարթորեն $t=t_0$ պահին միավոր զանգվածին հաղորդում է 1-ի հավասար արագություն: Ակնհայտ է, որ ուշացման թեորեմի հիման վրա կունենանք.

$$e^{-pt} \rightarrow \delta(t-t_0) \quad (63)$$

Նման ձևով կարող ենք գրել

$$\int_{t_0}^{t_0} \delta(t-t_0) dt = 1 \quad (64)$$

(59) և (60) հավասարությունների հիման վրա կարող ենք գրել.

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{երբ } -\infty < t < 0 \\ 1, & \text{երբ } 0 \leq t < \infty \end{cases} \quad (65)$$

Այսինքն՝ այս ինտեգրալը հավասար է Յեվիսայդի $\sigma_0(t)$ միավոր ֆունկցիային: Եվ այսպես.

$$\sigma_0(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (66)$$

Դիտողություն: Ֆուրյեի ձևափոխությունը նման է Լապլասի երկկողմանի ձևափոխությանը կոմպլեքս $s = i\omega$ արգումենտով.

$$F(\omega) = F\{f(x)\} = L\{f(x)\}|_{s=i\omega} = F(s)|_{s=i\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \quad (67)$$

§2.5. Լապլասի ձևափոխության որոշ կիրառություններ

Օպերացիոն մեթոդը հաջողությամբ կիրառվում է Կոշու խնդիրների լուծման ժամանակ:

Խնդիր 1: Մեխանիկական և էլեկտրական տատանումների հետազոտությունը պարբերական արտաքին ուժերի դեպքում: Մեխանիկական համակարգերի առաձգական տատանումները,

մասնավորապես էլեկտրական տատանումներն ուսումնասիրելիս հարկ է լինում քննարկել $f(t)$ արտաքին ուժի տարբեր տեսակներ: Մանրամասն քննարկենք պարբերական արտաքին ուժի դեպքը: Դիցուք էլեկտրական տատանումների հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = A \sin \omega t \quad (68)$$

Շարժման բնույթը պարզելու համար բավական է քննարկել այն դեպքը, երբ $x_0 = x'_0 = 0$: Մեթոդական տեսակետից հարմար է լուծումը ստանալ՝ կատարելով բոլոր միջանկյալ հաշվումները:

Գրենք հավասարումը պատկերների միջոցով.

$$\bar{x}(p)(p^2 + 2np + k^2) = A \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (69)$$

որտեղից ստանում ենք.

$$\bar{x}(p) = \frac{A\omega}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + 2np + k^2)} \quad (70)$$

Քննարկենք այն դեպքը, երբ $n \neq 0 (n^2 < k^2)$: Աջ կողմում գտնվող կոտորակը վերլուծենք պարզագույն կոտորակների.

$$\frac{A\omega}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + 2np + k^2)} = \frac{Np + B}{p^2 + 2np + k^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + \omega^2} \quad (71)$$

N, B, C, D հաստատունները որոշվում են անորոշ գործակիցների մեթոդով: (70)-ից գտնենք սկզբնական ֆունկցիան.

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} \{ (k^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n\omega \cos \omega t + e^{-nt} [(2n^2 - k^2 + \omega^2) \frac{\omega}{k_1} \sin k_1 t + 2n\omega \cos k_1 t] \} \quad (72)$$

այստեղ նորից $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$: (72) -ը հավասարման այն լուծումն է, որը բավարարում է $x_0 = x'_0 = 0$ սկզբնական պայմաններին, երբ $t = 0$:

Քննարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $n = 0$: Սա համապատասխանում է այն բանին, որ օրինակ մեխանիկական համակարգում չկա ներքին դիմադրություն, չկա մեղմիչ: Էլեկտրական կոնտուրի դեպքում դա համապատասխանում է նրան, որ $R = 0$, այսինքն բացակայում է շղթայի ներքին դիմադրությունը: (68) հավասարումն այս դեպքում ընդունում է

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A \sin \omega t \quad (73)$$

տեսքը, իսկ այս հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $x_0 = x'_0 = 0$ սկզբնական պայմաններին, երբ $t = 0$, ստացվում է, եթե բանաձևում ընդունենք $n = 0$.

$$x(t) = \frac{A}{k(k^2 - \omega^2)} [-\omega \sin kt + k \sin \omega t] \quad (74)$$

Այստեղ ունենք երկու հարմոնիկ տատանումների գումար՝ սեփական, որն ունի k հաճախություն.

$$x_c(t) = -\frac{A}{k^2 - \omega^2} \frac{\omega}{k} \sin kt$$

և հարկադրական, որն ունի ω հաճախություն.

$$x_B(t) = \frac{A}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

Վերադառնանք (72) բանաձևին: Եթե $n > 0$, որը և տեղի ունի քննարկվող մեխանիկական և էլեկտրական համակարգերում, ապա e^{-nt} բազմապատկիչ պարունակող անդամը, որը ներկայացնում է մարող սեփական տատանումները, t -ի աճման դեպքում արագ նվազում է: Բավականաչափ մեծ t -ի դեպքում տատանումների բնույթը կորոշվի e^{-nt} բազմապատկիչ չպարունակող անդամով, այսինքն.

$$x(t) = \frac{A}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \{(k^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n\omega \cos \omega t\} \quad (75)$$

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները.

$$\frac{A(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M \cos \delta, \quad \frac{A2n\omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = M \sin \delta \quad (76)$$

$$\text{որտեղ } M = \frac{A}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}$$

(75) լուծումը կարելի է գրել այսպես

$$x(t) = \frac{A}{k^2 \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{k^2})^2 + 4n^2 \frac{\omega^2}{k^4}}} \sin(\omega t + \delta) \quad (77)$$

(77) բանաձևից հետևում է, որ հարկադրական տատանումների k հաճախությունը չի համընկնում արտաքին ուժի ω հաճախությանը: Եթե n թվով բնորոշվող ներքին դիմադրությունը փոքր է, իսկ ω հաճախությունը մոտ է k հաճախությանը, ապա տատանումների ամպլիտուդան կարող է դառնալ հնարավորին չափ մեծ, քանի որ հայտարարը կարող է լինել հնարավորին չափ փոքր: Երբ $n = 0, \omega^2 = k^2$, լուծումը (77) բանաձևով չի արտահայտվում:

Խնդիր 2: Տատանումների հավասարումների լուծումը ռեզոնանսի դեպքում: Քննարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ $a_1 = 2n = 0$, այսինքն երբ դիմադրությունը բացակայում է, իսկ արտաքին ուժի հաճախությունը համընկնում է սեփական տատանումների $k = \omega$ հաճախությանը: Այս դեպքում հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A \sin kt \quad (78)$$

Որոնենք այս հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է $x_0 = 0, x'_0 = 0$ սկզբնական պայմաններին, երբ $t = 0$: Օժանդակ հավասարումը կլինի.

$$\bar{x}(p)(p^2 + k^2) = A \frac{k}{p^2 + k^2} \quad (79)$$

որտեղից

$$\bar{x}(p) = A \frac{k}{(p^2 + k^2)^2} \quad (80)$$

(80) պատկերի համար սկզբնական ֆունկցիան գտնելու համար օգտվենք հետևյալ եղանակից: Գրում ենք հետևյալ նույնությունը.

$$\frac{k}{(p^2 + k^2)^2} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin ktdt \quad (81)$$

Այս հավասարության երկու մասը դիֆերենցենք ըստ k -ի.

$$\frac{1}{p^2 + k^2} - \frac{2k^2}{(p^2 + k^2)^2} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos ktdt$$

Օգտվելով (81) նույնությունից՝ այս հավասարությունը կարելի է գրել այսպես.

$$-\frac{2k^2}{(p^2 + k^2)^2} = \int_0^{\infty} e^{-pt} [t \cos kt - \frac{1}{k} \sin kt] dt$$

Այստեղից անմիջապես հետևում է.

$$\frac{Ak}{(p^2 + k^2)^2} \rightarrow \frac{A}{2k} \left(\frac{1}{k} \sin kt - t \cos kt \right)$$

Այսպես, ուրեմն, հավասարման որոնվող լուծումը կլինի.

$$x(t) = \frac{A}{2k} \left(\frac{1}{k} \sin kt - t \cos kt \right) \quad (82)$$

Ուսումնասիրենք այս լուծման երկրորդ գումարելին, այն է.

$$x_2(t) = -\frac{A}{2k} t \cos kt \quad (83)$$

t -ն մեծանալիս այս մեծությունը սահմանափակ չէ: (83) բանաձևին համապատասխանող տատանումների ամպլիտուդան անսահմանափակորեն աճում է, երբ t -ն անսահմանափակորեն աճում է: Հետևաբար, նաև (82) բանաձևին համապատասխանող տատանումների ամպլիտուդան է անսահմանափակորեն աճում: Այս երևույթը, որը տեղի ունի, երբ սեփական տատանումների հաճախությունը համընկնում է արտաքին ուժերի հաճախությանը, կոչվում է *ռեզոնանս*.

ԽՆԴԻՐՆԵՐ II գլխի վերաբերյալ

1. Ստուգել հետևյալ ֆունկցիաների օրիգինալ լինելը.

1.1. $f(t) = b^t \eta(t) / b > 0, b \neq 1/$, 1.2. $f(t) = e^{(2+4i)t} \eta(t)$,

1.3. $f(t) = \frac{1}{t-3} \eta(t)$, 1.4. $f(t) = t^2 \eta(t)$,

1.5. $f(t) = ch(3-i)t \eta(t)$, 1.6. $f(t) = t g t \eta(t)$,

1.7. $f(t) = t' \eta(t)$, 1.8. $f(t) = e^{-t} \cos t \eta(t)$,

1.9. $f(t) = e^{t^2} \eta(t)$, 1.10. $f(t) = e^{-t^2} \eta(t)$,

1.11. $f(t) = \frac{1}{t^2+2} \eta(t)$, 1.12. $f(t) = \eta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \eta(t-k)$,

1.13. $f(t) = \begin{cases} 2e^{5t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 1.14. $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-2}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$:

2. Սահմանումից օգտվելով՝ գտնել հետևյալ ֆունկցիաների պատկերները.

2.1. $f(t) = t$, 2.2. $f(t) = \sin 3t$,

2.3. $f(t) = te^t$, 2.4. $f(t) = t^\alpha / \alpha > -1/$:

3. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների պատկերները՝ օգտվելով համապատասխան հատկությունից.

Ա/ Գծայնության և նմանության հատկություն

1. $f(t) = 1+t$, 2. $f(t) = 2 \sin t - \cos t$, 3. $f(t) = t + \frac{e^{-t}}{2}$,

4. $f(t) = \sin 4t$, 5. $f(t) = sh 3t$, 6. $f(t) = \sin^2 t$,

7. $f(t) = \cos^3 t$, 8. $f(t) = \sin mt \sin nt$, 9. $f(t) = \sin mt \cos nt$:

Բ/ Օրիգինալի դիֆերենցում

1. $f(t) = \cos^2 t$, 2. $f(t) = \sin^3 t$, 3. $f(t) = t \sin \omega t$,

4. $f(t) = \cos^4 t$, 5. $f(t) = t \cos \omega t$, 6. $f(t) = te^t$:

Գ/ Տեղաշարժման և ուշացման թեորեմներ

1. $f(t) = e^{2t} \sin t$, 2. $f(t) = e^{-t^3}$, 3. $f(t) = e^t \sin t$,

4. $f(t) = te^t \cos t$, 5. $f(t) = e^{3t} \sin^2 t$, 6. $f(t) = e^{-\alpha t} \cos^2 \beta t$:

4. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների պատկերները.

4.1. $f(t) = \cos^3 t$, 4.2. $f(t) = \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t}$, 4.3. $f(t) = 2e^t - 4t - 3$:

5. Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների օրիգինալները.

5.1. $F(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}$, 5.2. $F(p) = \frac{6p}{(p^2 - 9)^2}$,

5.3. $F(p) = \frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$:

6. Գտնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների (համակարգերի) լուծումը տրված սկզբնական պայմանների դեպքում.

6.1. $x''' + x' = 0, x(0) = 2, x'(0) = 0, x''(0) = -1$

6.2. $x''' - 3x'' + 3x' - x = e^t, x(0) = 1, x'(0) = -1, x''(0) = 1$

6.3. $x''' - x'' = e^t, x(0) = 1, x'(0) = x''(0) = 0$,

6.4. $x^{IV} - x = \sin t, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = 1$,

6.5. $x''' + 3x'' + 3x' + x = te^{-t}, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$,

6.6. $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x - 2y \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = -1$,

6.7. $\begin{cases} x_1' = -x_2 + 2 \\ x_2' = x_1 + 1 \end{cases} \quad x_1(0) = -1, x_2(0) = 0$,

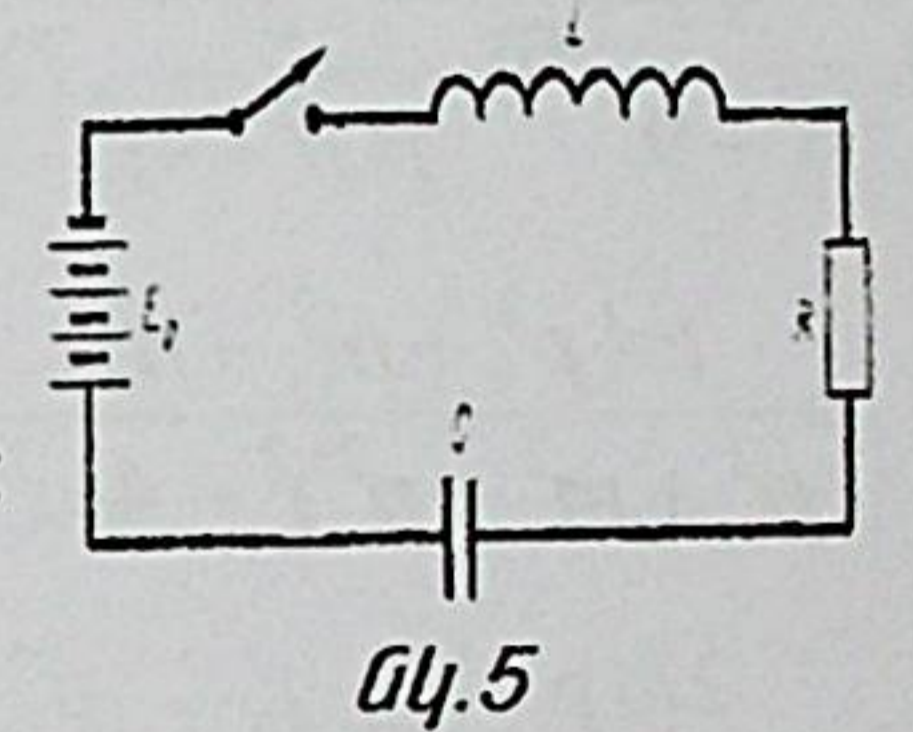
6.8. $\begin{cases} x' + y = 0 \\ x + y' = 0 \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = -1$,

6.9. $\begin{cases} 2x'' + x - y' = -3 \sin t \\ x + y' = -\sin t \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0, x'(0) = 1$,

6.10. $\begin{cases} x'' - y' = 0, x(0) = -1 \\ x - y'' = 2 \sin t \end{cases} \quad x(0) = -1, x'(0) = y(0) = y'(0) = 1$,

6.11. $\begin{cases} x'' + y' = 2 \sin t \\ y'' + z' = 2 \cos t \\ z'' - x = 0 \end{cases} \quad x(0) = z(0) = y'(0) = 0, x'(0) = y(0) = -1, z'(0) = 1$

7. Դիցուք ունենք էլեկտրական շղթա, որը կազմված է L ինդուկտիվությունից, R դիմադրությունից և C ունակությունից, որի նկատմամբ կիրառված է E_0 էլշու/նկ.5/:
- Գտնել շղթայում եղած հոսանքը, եթե անջատիչը փակվում է $t=0$ պահին, իսկ կոնդենսատորի սկզբնական լիցքը հավասար է Q_0 :
- Ցուցում:** I -ն և Q -ն բավարարում են հետևյալ հավասարումներին.



$$RI + L(dI/dt) + (Q/C) = E_0$$

$$(dQ/dt) = I$$

8. Գտնել RC - շղթայում եղած հոսանքը/հաջորդաբար միացված է R դիմադրությունը և C ունակությունը/, հաստատուն $e(t) = E$ էլշուի դեպքում, եթե $u_C(0) = u_0$:

9. Գտնել RL – շղթայում եղած հոսանքը/հաջորդաբար միացված է R դիմադրությունը և L ինդուկտիվությունը/, հաստատուն $e(t) = E$ էլշուի դեպքում, եթե:
10. Գտնել RL – շղթայում եղած հոսանքը $e(t) = E \sin \omega t$ էլշուի դեպքում:
11. Գտնել RC – շղթայում եղած հոսանքը $e(t) = Ete^{-\frac{1}{CR}t}$ էլշուի դեպքում, երբ սկզբնական պայմանները զրոյական են:

Պատասխաններ: 1. 1.1)այո, 1.2)այո, 1.3)ոչ, 1.4)այո, 1.5)այո, 1.6)ոչ, 1.7)ոչ, 1.8)այո, 1.9)ոչ, 1.10)այո, 1.11)այո, 1.12)այո, 1.13)այո, 1.14)ոչ:

2. 2.1) $\frac{1}{p^2}$, 2.2) $\frac{3}{p^2+9}$, 2.3) $\frac{1}{(p-1)^2}$, 2.4) $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$:

3. Մ 1) $\frac{p+1}{p^2}$, 2) $\frac{2-p}{p^2+1}$, 3) $\frac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$, 4) $\frac{4}{p^2+16}$,

5) $\frac{3}{p^2-9}$, 6) $\frac{2}{p(p^2+4)}$, 7) $\frac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$, 8) $\frac{2mnp}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}$,

9) $\frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}$: Բ/ 1) $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$, 2) $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$,

3) $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$, 4) $\frac{p^4+16p^2+24}{p(p^2+4)(p^2+16)}$, 5) $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$, 6) $\frac{1}{(p-1)^2}$:

Գ/ 1) $\frac{1}{(p-2)^2+1}$, 2) $\frac{3!}{(p+1)^4}$, 3) $\frac{1}{(p-1)^2-1}$, 4) $\frac{p^2-2p}{(p^2-2p+2)^2}$,

5) $\frac{1}{2(p-3)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2+4}$, 6) $\frac{1}{2(p+\alpha)} + \frac{p+\alpha}{2[(p+\alpha)^2+4\beta^2]}$:

4. 4.1) $F(p) = \frac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}$, 4.2) $F(p) = \ln \frac{\sqrt{p^2+2p+2}}{p+1}$,

4.3) $F(p) = \frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$: 5. 5.1) $f(t) = e^t[\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t]$, 5.2) $f(t) = tsh 3t$,

5.3) $f(t) = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}$: 6. 6.1) $x(t) = 1 + \cos t$, 6.2) $x(t) = e^t[\frac{1}{6}t^3 + 1 - 2t + 2t^2]$, 6.3) $x(t) = 3 + t + (t-2)e^t$, 6.4) $x(t) = \frac{t}{4}cht - \frac{1}{4}\sin t$,

6.5) $x(t) = \frac{t^4}{24}e^{-t}$, 6.6) $x(t) = 3e^{-t} + te^{-t} - 2$; $y(t) = 1 - 2e^{-t} - te^{-t}$, 6.7) $x_1(t) = 2\sin t - 1$; $y(t) = 2 - 2\cos t$, 6.8) $x(t) = e^t$; $y(t) = -e^t$, 6.9) $x(t) = t\cos t$; $y(t) = -t\sin t$, 6.10) $x(t) = \sin t - \cos t$; $y(t) = \sin t + \cos t$,

6.11) $x(t) = -\sin t$; $y(t) = -\cos t$; $z(t) = \sin t$: 7. $\frac{E_0 - (Q_0/C)e^{-at}\sin bt}{Lb}$: 8. $\frac{E-u_0}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}$: 9. $\frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$: 10. $\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}(L\omega e^{-\frac{R}{L}t} + R\sin \omega t - L\omega \cos \omega t)$: 11. $\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{CR}t}(t - \frac{t^2}{2})$:

§3.1. Մեկինի ինտեգրալ ձևափոխություն, հիմնական հատկությունները

Սահմանում: Իրական փոփոխականի $f(t)$ ֆունկցիայի *Մեկինի ուղիղ ձևափոխություն* կոչվում է $s = \sigma + i\tau$ կոմպլեքս փոփոխականից այնպիսի $F(s)$ ֆունկցիան, որը կնշանակենք $\{Mf\}(s)$ -ով, և որի համար

$$\{Mf\}(s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1}dt \quad (84)$$

Մեկինի ձևափոխության (84) բանաձևում կատարելով ինտեգրման փոփոխականի փոխարինում $\tau = e^{-t}$, ստանում ենք $g(t) = \varphi(e^{-t})$ ֆունկցիայից Լապլասի ինտեգրալային ձևափոխությունը՝ նշանի ճշտությամբ, միայն այն տարբերությամբ, որ այժմ ինտեգրումը կատարվում է ամբողջ առանցքով՝

$$\{MF\}(s) = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(e^{-t})e^{-st}dt, \tau = e^{-t} \quad (85)$$

Այսպիսով, $\varphi(\tau)$ ֆունկցիայի Մեկինի ձևափոխությունը նշանի ճշտությամբ համընկնում է $g(t) = \varphi(e^{-t})$ ֆունկցիայի Լապլասի երկկողմանի ձևափոխությանը:

Մեկինի ձևափոխության անհսկական ինտեգրալն ունի երկու եզակի կետեր՝ 0 և ∞ : Եթե $\varphi(t) = O(t^{-a})$, երբ $t \rightarrow 0$, ապա ինտեգրալը 0 կետում զուգամետ է $\text{Res} > a$ դեպքում, եթե $\varphi(t) = O(t^{-b})$, երբ $t \rightarrow \infty$, ապա ինտեգրալը 0 կետում զուգամետ է $\text{Res} < b$ դեպքում, և Մեկինի ձևափոխությունը անալիտիկ է $a < \text{Res} < b$ շերտում:

$g(t)$ ֆունկցիայի Լապլասի երկկողմանի ձևափոխության ինտեգրալը զուգամետ է $+\infty$ -ում $\text{Res} > a$ դեպքում, եթե $g(t) = O(e^{at})$, երբ $t \rightarrow +\infty$, և զուգամետ է $-\infty$ -ում $\text{Res} < b$ դեպքում, եթե $g(t) = O(e^{bt})$, երբ $t \rightarrow -\infty$: Եվ այս դեպքում Մեկինի ձևափոխությունը անալիտիկ է նույն $a < \text{Res} < b$ շերտում:

Լապլասի երկկողմանի ձևափոխության համար տեղի ունի միակողմանի ձևափոխության շրջման բանաձևը միայն այն պայմանով, որ ինտեգրման կոնտուրը ամբողջությամբ պետք է անցնի $F(p)$ պատկերի անալիտիկության տիրույթով, որն արդեն ոչ թե կիսահարթություն է, այլ՝ $a < \text{Res} < b$ շերտը:

Օգտվելով Լապլասի երկկողմանի ձևափոխության և Մեկինի ձևափոխության կապից՝ ստանում ենք *շրջման բանաձև Մեկինի ձևափոխության համար*՝

$$\varphi(\tau) =_{(t=-\ln \tau)} \varphi(e^{-t}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\tau^{-s}ds \quad (86)$$

Մյուս կողմից՝ Ֆուրյեի ձևափոխության բանաձևը ստացվում է Լապլասի երկկողմանի ձևափոխության բանաձևից՝ փոխարինելով $p -$ ն $i\lambda$ -ով, այնպես որ *բոլոր երեք ձևափոխությունների շրջման բանաձևերն ըստ էության համընկնում են*:

Դիտարկենք Մեկինի ձևափոխության մի շարք թեորեմներ, որոնք լայն կիրառություն ունեն, մասնավորապես, առաձգականության տեսությունում՝

Թեորեմ 1: Դիցուք $\tau^{\tau-1} f(\tau) \in L(0, +\infty)$, ընդ որում $f(\tau)$ ֆունկցիան $\tau = t$ կետի շրջակայքում ունի սահմանափակ փոփոխություն, այդ դեպքում

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda} F(s)t^{-s}ds,$$

որտեղ $F(s)$ - ը Մեկինի ձևափոխությունն է:

Թեորեմ 2: Դիցուք $F(\sigma + iu) \in L(-\infty, +\infty)$, ընդ որում ֆունկցիան $u = t$ կետի շրջակայքում ունի սահմանափակ փոփոխություն: Այդ դեպքում

$$\frac{1}{2}[F(\sigma + i(t+0)) + F(\sigma + i(t-0))] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\lambda} f(t)t^{\sigma+i-1} dt,$$

որտեղ $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)t^{-s} ds :$

Դիցուք $f(t), g(t)$ –ն $F(s), G(s)$ ֆունկցիաների Սելինի ձևափոխությունն է: Անմիջականորեն կարելի է ստանալ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s)G(1-s)ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} G(1-s)ds \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} f(t)dt \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} G(1-s)t^{s-1} ds = \int_0^{\infty} f(t)g(t)dt \end{aligned}$$

Նման ձևով

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s)G(s)ds = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} g(t)dt \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s)t^{s-1} ds = \int_0^{\infty} g(t)f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}:$$

Թեորեմ 3: Դիցուք $\tau^{k-1} f(t) \in L(0, +\infty)$ և $G(1-k-ix) \in L(-\infty, +\infty)$

կամ $F(k+ix) \in L(-\infty, +\infty)$ և $t^k g(t) \in L(0, +\infty)$:

Այդ դեպքում տեղի ունի.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} F(s)G(1-s)ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} G(1-s)ds \int_0^{\infty} f(t)t^{s-1} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} f(t)dt \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} G(1-s)t^{s-1} ds = \int_0^{\infty} f(t)g(t)dt \end{aligned}$$

Թեորեմ 4: Դիցուք $t^k f(t), t^k g(t) \in L(0, +\infty)$ և $h(t) = \int_0^{\infty} f(\tau)f\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} :$

Այդ դեպքում $t^k h(t) \in L(0, +\infty)$ և նրա Սելինի ձևափոխությունը $F(s)G(s)$ ֆունկցիան է: Վերջինս հանդիսանում է փաթաթման թեորեմի համարժեքը Սելինի ձևափոխության տեսությունում:

§3.2. Սելինի ձևափոխության հաշվման օրինակներ

Օրինակ 1: Հաշվենք $\frac{\tau d\varphi(\tau)}{d\tau}$ ֆունկցիայի Սելինի ձևափոխությունը.

$$\begin{aligned} \frac{\tau d\varphi(\tau)}{d\tau} \mapsto \int_0^{\infty} \frac{\tau d\varphi(\tau)}{d\tau} \tau^s \frac{d\tau}{\tau} &= \int_0^{\infty} \tau^s d\varphi(\tau) = \tau^s \varphi(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\infty} - s \int_0^{\infty} \tau^s \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \\ &= -sF(s) - \varphi(0), \end{aligned}$$

որտեղ s – ը գտնվում է $F(s)$ – ի անալիտիկության տիրույթում:

Այս օրինակ-հատկությունը թույլ է տալիս Սելինի ձևափոխությունը կիրառել համասեռ $\tau \frac{d}{d\tau}$ ածանցյալներ պարունակող դիֆերենցիալ հավասարումներում Կոշու խնդրի լուծման համար:

Օրինակ 2: Հաշվենք $f(\tau) = \sum_{n \geq 1} \varphi(n\tau)$ ֆունկցիայի Սելինի ձևափոխությունը.

$$\varphi(n\tau) \mapsto \int_0^{\infty} \varphi(n\tau) \tau^s \frac{d\tau}{\tau} = \int_0^{\infty} \varphi(n\tau) \frac{(n\tau)^s}{n^s} \frac{dn\tau}{n\tau} = \frac{1}{n^s} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) \tau^s \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{n^s} F(s):$$

§3.3. Մեկինի ձևափոխության որոշ կիրառություններ

Կիրառական տեսանկյունից Մեկինի ինտեգրալ ձևափոխությունը հանդիսանում է սեպաձև տիրույթների համար առաձգականության տեսության երկչափ խնդիրների ճշգրիտ լուծման էֆեկտիվ միջոց: Լուծված է առաձգականության տեսության երկրորդ հիմնական խնդիրը սեպի համար:

Խնդիր 1: Գտնել ջերմության ստացիոնար բաշխումը $0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0 < \pi$ երկնիստ անկյան ներսում, երբ անկյան մի նիստը $\varphi = 0$ ունի զրոյական ջերմաստիճան, իսկ մյուս նիստին պահպանվում է ջերմաստիճանային հետևյալ ռեժիմը.

$$T(r) = \begin{cases} T_0, & 0 < r < R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (87)$$

որտեղ T_0, R – տրված թվային պարամետրեր են:

Խնդրի մաթեմատիկական դրվածքը կայանում է հետևյալում.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= 0, r > 0, 0 < \varphi < \varphi_0 \\ u(r, 0) &= 0 \\ u(r, \varphi_0) &= T(r) \end{aligned} \quad (88)$$

Դիֆերենցիալ հավասարումը բազմապատկենք r^2 -ով և r փոփոխականի նկատմամբ կիրառենք Մեկինի ձևափոխությունը: Այդ դեպքում խնդիրը, արտահայտված պատկերներով, կգրվի հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned} U''_{\varphi\varphi}(\varphi, p) + p^2 U(\varphi, p) &= 0, 0 < \varphi < \varphi_0 \\ U(0, p) &= 0 \\ U(\varphi_0, p) &= T_0 R^p p^{-1} \end{aligned} \quad (89)$$

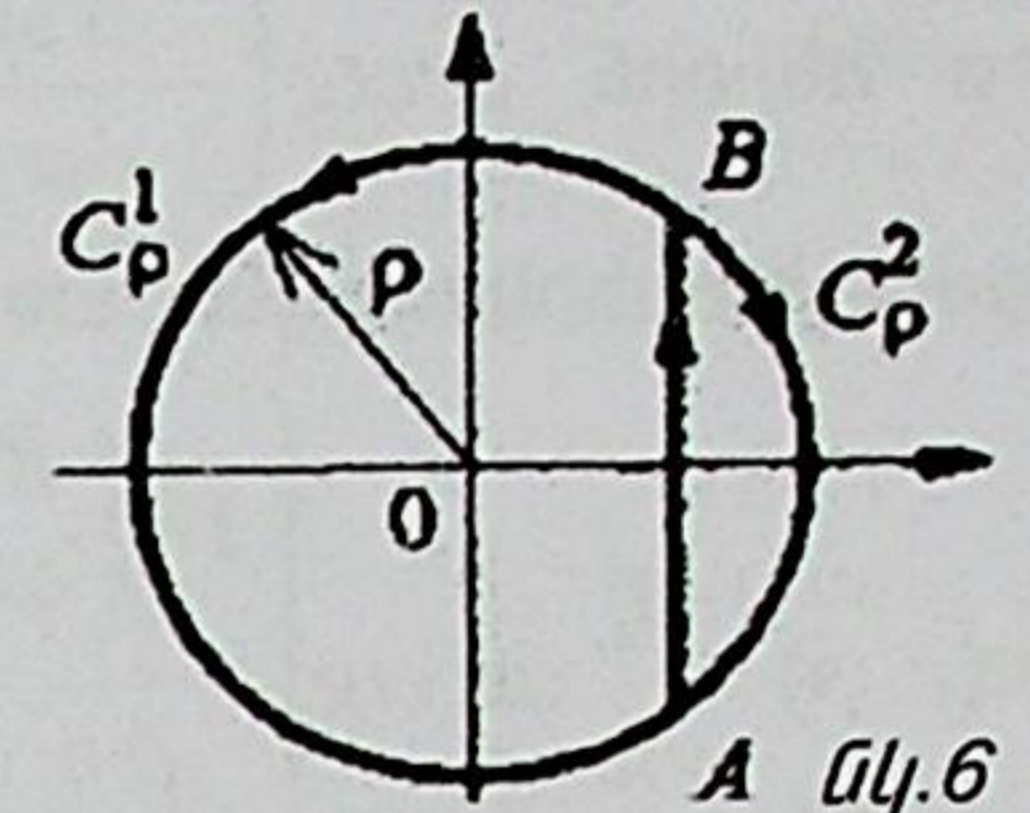
որտեղ $U(\varphi, p)$ -ն որոնելի ֆունկցիայի պատկերն է, իսկ $T_0 R^p p^{-1}$ -ը՝ $T(r)$ ֆունկցիայի պատկերը:

$$M[T(r)](p) = \int_0^R T_0 r^{p-1} dr = T_0 R^p p^{-1} \quad (90)$$

Լուծելով ստացված եզրային խնդիրը՝ ստանում ենք.

$$U(\varphi, p) = \frac{T_0 R^p \sin p\varphi}{p \sin p\varphi_0} \quad (91)$$

Նկատենք, որ $T_0 R^p p^{-1}$ ֆունկցիան անալիտիկ է ամենուրեք, բացառությամբ $p = 0$ կետի, որում այն ունի առաջին կարգի բևեռ: Սակայն այն պետք է դիտարկվի որպես $T(r)$ պատկեր միայն $\operatorname{Re} p > 0$



կիսահարթությունում, ինչը կազմակերպվում է σ_1, σ_2 պարամետրերի հնարավոր ընտրությամբ, որոնց համար ինտեգրալը զուգամետ է: Իր հերթին $U(\varphi, p)$ ֆունկցիան անալիտիկ է ամենուրեք ըստ p -ի, բացառությամբ $p = k\pi/\varphi_0$ կետի, որում նա ունի բևեռներ: (σ_1, σ_2) -ի փոխարեն կարելի է վերցնել $(k\pi/\varphi_0, (k+1)\pi/\varphi_0), k = 1, 2, \dots$ տեսքի ցանկացած միջակայք: Դիտարկենք $(0, \pi/\varphi_0)$ միջակայքը: $U(\varphi, p)$ ֆունկցիայի նկատմամբ կիրառելով հակադարձ ձևափոխություն՝ ստանում ենք.

$$u(r, \varphi) = \frac{T_0}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sin p\varphi}{\sin p\varphi_0} \left(\frac{R}{r}\right)^p \frac{dp}{p} \quad (92)$$

Վերջինիս մեջ ստացված անհսկական կոմպլեքս ինտեգրալը կարելի է հաշվել մնացքների տեսության մեթոդներով: Դրա համար պետք է օգտագործել նկ.6-ում պատկերված կոնտուրներից մեկը և անցնել սահմանին, երբ $p \rightarrow \infty$: Հաշվի առնելով, որ ենթինտեգրալ ֆունկցիան $p = \pi k/\varphi_0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ կետերում ունի անվերջ թվով բևեռներ, ստանում ենք.

$$u(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{T_0 \varphi}{\varphi_0} - \frac{T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{r}{R}\right)^{\pi k / \varphi_0} \sin\left(\frac{\pi k \varphi}{\varphi_0}\right); 0 < r < R \\ \frac{T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{r}{R}\right)^{\pi k / \varphi_0} \sin\left(\frac{\pi k \varphi}{\varphi_0}\right) \end{cases} \quad (93)$$

Իր հերթին $\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha \sin t}{1 + \alpha \cos t}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \alpha^k \sin kt, |\alpha| < 1$ և (93)-ը

կարելի է ներկայացնել առավել կոմպակտ տեսքով.

$$u(r, \varphi) = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{arcctg} \left(\frac{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{\pi \varphi_0} \cos\left(\frac{\pi \varphi}{\varphi_0}\right)}{\left(\frac{R}{r}\right)^{\pi \varphi_0} \sin\left(\frac{\pi \varphi}{\varphi_0}\right)} \right), 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, 0 \leq r < \infty \quad (94)$$

խնդիր 2: Առաձգականության տեսության երկրորդ հիմնական խնդիրը սեպի համար: Դիտարկենք առաձգականության տեսության հարթ խնդրի հավասարումը Պապկովիչ-Նեյբերի տեսքով.

$$\begin{aligned} 2Gu &= \chi(\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta) - r \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \\ 2Gv &= \chi(\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta) - r \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (95)$$

որտեղ G -ն սահքի մոդուլն է, $\chi = 3 - 4\nu$, ν - Պուասոնի գործակիցը/հարթ լարումների դեպքում բավական է բերված բանաձևերում ν -ն փոխարինել $\frac{\nu}{\nu+1}$ - ով/:

Մելինի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ կտրվի սեպի հարթ դեֆորմացիաների վերաբերյալ խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ նրա եզրին տրված են առաձգական u և v տեղափոխությունները:

Խնդիրը տրոհենք, ինչպես սովորաբար, երկու տարբեր խնդիրների՝ սեպի միջին հարթության նկատմամբ սիմետրիկ և անսիմետրիկ

խնդիրների: Այդ խնդիրներին համապատասխան կընդունենք, որ սեպը զբաղեցնում է $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq +\alpha$ տիրույթը, և եզրային պայմանները կդնենք միայն $\theta = \alpha$ ուղղի վրա:

Սիմետրիկ խնդրի դեպքում պահանջվում է սեպածն տիրույթում որոշել հարմոնիկ Φ_1 և Φ_2 ֆունկցիաներ հետևյալ եզրային պայմաններով՝

$$u|_{\theta=0} = u_\alpha(r), v|_{\theta=\sigma} = v_\alpha(r) \quad (96)$$

որտեղ u_α, v_α տրված ֆունկցիաներ են, ընդ որում.

$$\begin{aligned} 2Gu &= \chi(\Phi_1 \cos \theta + \Phi_2 \sin \theta) - r \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) \\ 2Gv &= \chi(\Phi_2 \cos \theta - \Phi_1 \sin \theta) - r \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (97)$$

Լարվածադեֆորմացիոն վիճակի սիմետրիկության համաձայն $u(\theta)$ տեղափոխությունները հանդիսանում են զույգ ֆունկցիա, իսկ v - ն՝ կենտ ֆունկցիա θ կոորդինատից: Որտեղից հետևում է θ փոփոխականից Φ_1 ֆունկցիայի զույգությունը և Φ_2 -ի կենտությունը: Φ_1 և Φ_2 հարմոնիկ ֆունկցիաները փնտրենք Մելինի ինտեգրալի տեսքով.

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} A_1(p) \cos p\theta r^{-p} dp \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} A_2(p) \sin p\theta r^{-p} dp \end{aligned} \quad (98)$$

$A_1(p)$ և $A_2(p)$ ֆունկցիաները որոշվում են եզրային պայմաններից:

(98)-ը տեղադրելով (96)-ում՝ ստանում ենք.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} (\chi + p) [\cos \alpha \cos p\alpha A_1 + \sin \alpha \sin p\alpha A_2] r^{-p} dp = 2G u_\alpha(r) \quad (99)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [(p \cos \alpha \sin p\alpha - \chi \sin \alpha \cos p\alpha) A_1 + (\chi \cos \alpha \sin p\alpha - p \sin \alpha \cos p\alpha) A_2] r^{-p} dp = 2G v_\alpha(r)$$

ենթադրվում է, որ

$$u_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \tilde{u}_\alpha(p) r^{-p} dp, v_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \tilde{v}_\alpha(p) r^{-p} dp \quad (100)$$

(98), (99)-ից հանգում ենք $\chi \cos p\alpha \sin p\alpha - p \sin \alpha \cos \alpha$ որոշիչով, A_1, A_2 -ի նկատմամբ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգին.

$$\cos \alpha \cos p\alpha A_1 + \sin \alpha \sin p\alpha A_2 = \frac{2G \tilde{u}_\alpha}{\chi + p} \quad (101)$$

$$(p \cos \alpha \sin p\alpha - \chi \sin \alpha \cos p\alpha) A_1 + (\chi \cos \alpha \sin p\alpha - p \sin \alpha \cos p\alpha) A_2 = 2G \tilde{v}_\alpha$$

(100)-ի աջ մասում \tilde{u}_α և \tilde{v}_α մեծությունները որոշվում են Մելինի բանաձևից.

$$\tilde{u}_\alpha(p) = \int_0^\infty u_\alpha(r) r^{p-1} dr, \tilde{v}_\alpha(p) = \int_0^\infty v_\alpha(r) r^{p-1} dr \quad (102)$$

Եթե ենթադրենք, որ անվերջությունում տեղափոխությունը $r^{-\delta}$ -ի կարգի է, իսկ սեպի եզրին ($r=0$) մնում է սահմանափակ, ապա (102) ինտեգրալը կգուզամիտի $0 < \operatorname{Re} p < \delta$ պայմանի դեպքում, ինչը և որոշում է շերտի եզրերը՝ (98)-ում ներկայացված (L) կոնտուրը:

Արված ենթադրությունների դեպքում խնդրի լրիվ լուծումը տրվում է (98)-ով, որում պետք է տեղադրել (101)-ից որոշվող $A_1(p), A_2(p)$ ֆունկցիաների արժեքները:

Կոնկրետ խնդիրներում հաշվումների կատարման համար հաճախ կարելի է օգտվել մնացքների վերաբերյալ թեորեմից, որի համար պետք է ունենալ հիմնական համակարգի որոշիչն համապատասխան հավասարման լուծումների աղյուսակ:

Այժմ դիտարկենք սեպի հարթ դեֆորմացիան անտիսիմետրիկ դեպքում: Չեշտ է նկատել, որ Φ_1 և Φ_2 հարմոնիկ ֆունկցիաները պետք է ընտրել հետևյալ տեսքով.

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} B_1(p) \sin p\theta r^{-p} dp, \Phi_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} B_2(p) \cos p\theta r^{-p} dp \quad (103)$$

Վերը բերված դատողություններով հանգումորեն ստանում ենք $shz - \frac{1}{3-4\nu} \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} z(2pa = iz)$ որոշիչով, գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգին.

$$\cos \alpha \sin p\alpha B_1 + \sin \alpha \cos p\alpha B_2 = \frac{2G \tilde{u}_\alpha}{\chi + p} - (p \cos \alpha \cos p\alpha - \chi \sin \alpha \sin p\alpha) B_1 +$$

$$+ (\chi \cos \alpha \cos p\alpha - p \sin \alpha \sin p\alpha) B_2 = 2G \tilde{v}_\alpha \quad (104)$$

Պապկովիչ-Նեյբերի ֆունկցիաների սահմանումից հետո լարումները կարող են գտնվել հետևյալ բանաձևերով.

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \theta^2} - r \left(\cos \theta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r^2} \right) +$$

$$+ 2(1-\nu) \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) + \frac{2\nu}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \theta^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \theta^2} \right) -$$

$$- (1-2\nu) \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) + \frac{2(1-\nu)}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \right) \quad (105)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \right) - \left(\cos \theta \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \theta} \right) - (1-2\nu) \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) + \frac{2(1-\nu)}{r} \left(\cos \theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right)$$

ընդ որում հետևյալ դեպքում պետք է ընդունել $\Phi_0 \equiv 0$:

(98) և (105)-ից երևում է, որ վերը բերված 3 լարումներից յուրաքանչյուրն արտահայտվում է

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} f(\theta, p) r^{-p-1} dp \quad (106)$$

տեսքի կոնալեքս ինտեգրալի տեսքով:

Սեպի անկյունային կետերում լարումների վարքը ուսումնասիրելու համար կիրառենք մնացքների վերաբերյալ թեորեմը և ներկայացնենք

$f(r, \theta)$ լարումը $f(r, \theta) = \sum_{(n)} r^{a_n-1} [d_n(\theta) r^{ib_n} + d_n(\theta) r^{-ib_n}]$ տեսքով:

Որտեղ $p_n = -a_n \pm ib_n$ -ը $\sin 2p\alpha \mp kp \sin 2\alpha = 0 (a_n > 0, b_n \geq 0)$

հավասարման արմատներն են, ընդ որում վերին «-» նշանը վերաբերում է սիմետրիկ դեպքին, ստորին «+» նշանը անտիսիմետրիկին:

Իրական և կեղծ մասերի անջատումից հետո ստանում ենք.

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha a_n \operatorname{ch} 2\alpha b_n &= \pm k a_n \sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha a_n \operatorname{sh} 2\alpha b_n &= \pm k b_n \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (107)$$

1. Գտնել հետևյալ ֆունկցիայի Սելինի ձևափոխությունը.

$$1.1. g(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$1.2. g(x) = e^{-\alpha x}, \operatorname{Re} \alpha > 0,$$

$$1.3. g(x) = \frac{(\ln x)^2}{1+x},$$

$$1.4. g(x) = \operatorname{arctg} x:$$

2. Լրացնել՝

$$2.1. \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \text{ հետևում է } e^{-x} = \dots$$

$$2.2. \Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \text{ հետևում է } \frac{1}{e^x - 1} = \dots$$

3. Ապացուցել C թեորեմը [11] Սելինի ձևափոխության համար.

Դիցուք $F(s), s = \sigma + i\tau$ ռեգուլյար ֆունկցիա է, $\sigma > \sigma_-$ և $s^{-1}F(s) \rightarrow 0$, երբ $r \rightarrow \infty$, ընդ որում $\forall \varepsilon$ համար r -ը

բավարարում է $s - \sigma_- - \varepsilon = re^{i\theta} : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ համար սահմանային

անցումը կատարվում է հավասարաչափ:

Այդ դեպքում. $f(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\rho^{-s} ds, \sigma > \sigma_-$ ֆունկցիան

բավարարում է $F(s) = \int_0^1 f(\rho)\rho^{s-1} d\rho$ ինտեգրալ հավասարմանը:

4. Ապացուցել, որ

$$4.1. F^{(r)}(s) = -(s-1)F^{(r-1)}(s-1)$$

$$4.2. F^{(r)}(s) = (-1)^r \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-r)} F(s-r)$$

որտեղ $F^{(r)}(s)$ -ը $\frac{d^r f}{dx^r}$ ածանցյալի Մելինի ձևափոխությունն է:

5. Գտնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումը տրված սկզբնական պայմանների դեպքում.

$$5.1. x''' + x = 0; x(0) = 0, x'(0) = -1, x''(0) = 2,$$

$$5.2. x'' + 2x' + x = e^{-t}; x(0) = 1, x'(0) = 0,$$

$$5.3. x'' + 4x = \sin 2t; x(0) = 1, x'(0) = -2,$$

$$5.4. x' + x = f(t); x(0) = 0, f(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < 2 \\ 0, t \geq 2 \end{cases}$$

$$5.5. x'' + 3x' = e^{-3t}; x(0) = 0, x'(0) = -1,$$

$$5.6. x'' - 2x' + 2x = \sin t; x(0) = 0, x'(0) = 1,$$

$$5.7. x'' - 9x = sht; x(0) = -1, x'(0) = 3:$$

Պատասխաններ: 1. 1.1) $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{x^{-s}}{s} ds,$ 1.2) $\alpha^{-s}\Gamma(s),$ 1.3)

$$\frac{\pi^3 [2 - \sin^2(\pi s)]}{\sin^3(\pi s)}, 0 < \operatorname{Re} s < 1, 1.4) -\frac{\pi}{2s \cos \frac{\pi s}{2}}, -1 < \operatorname{Re} s < 0: 5. 5.1)$$

$$x(t) = e^t \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} - \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} \right) + e^{-t}, 5.2) x(t) = \left(1+t+\frac{t^2}{3} \right) e^{-t}, 5.3)$$

$$x(t) = \cos 2t - \frac{7}{8} \sin 2t - \frac{t}{4} \cos 2t, 5.4) x(t) = 1 - e^{-t} - \eta(t-2)(1 - e^{-(t-2)}), 5.5)$$

$$x(t) = \frac{2}{9}(e^{-3t} - 1) - \frac{t}{3}e^{-3t}, 5.6) x(t) = \frac{2}{5}(1 - e^{-t}) \cos t + \frac{1}{5}(1 + 6e^{-t}) \sin t, 5.7)$$

$$x(t) = \frac{25}{24} sh 3t - ch 3t - \frac{1}{8} sht:$$

Հիմնական ինտեգրալ ձևափոխությունների աղյուսակ

$$Tf(u) = \int_{t_1}^{t_2} K(t,u) f(t) dt; \quad f(t) = \int_{u_1}^{u_2} K^{-1}(u,t) (Tf(u)) du /$$

Ձևափոխության անվանումը	Ընդունված նշանակումը	K	t_1	t_2	K^{-1}	u_1	u_2
Ֆուրյեի ուղիղ ձևափոխություն	F	$\frac{e^{-iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	∞	$\frac{e^{iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$-\infty$	∞
Ֆուրյեի կոսինուս-ձևափոխություն	F_c	$\frac{\sqrt{2} \cos(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	∞	$\frac{\sqrt{2} \cos(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	∞
Ֆուրյեի սինուս-ձևափոխություն	F_s	$\frac{\sqrt{2} \sin(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	∞	$\frac{\sqrt{2} \sin(ut)}{\sqrt{\pi}}$	0	∞
Լապլասի երկկողմանի ձևափոխություն	B	e^{-ut}	$-\infty$	∞	$\frac{e^{ut}}{2\pi i}$	$c - i\infty$	$c + i\infty$
Լապլասի ուղիղ ձևափոխություն	L	e^{-ut}	0	∞	$\frac{e^{ut}}{2\pi i}$	$c - i\infty$	$c + i\infty$
Մեյլհնի ձևափոխություն	M	t^{u-1}	0	∞	$\frac{t^{-u}}{2\pi i}$	$c - i\infty$	$c + i\infty$

Ֆուրյեի ուղիղ ձևափոխություն

	$f(x)$	$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$
1.	$g(x)$	$2\pi f(-y)$
2.	$\overline{f(x)}$	$\overline{g(-y)}$
3.	$f(x) = f(-x)$	$2 \int_0^{\infty} f(x) \cos xy dx$
4.	$f(x) = -f(-x)$	$-2i \int_0^{\infty} f(x) \sin xy dx$
5.	$f(a^{-1}x + b), a > 0$	$ae^{iaby} g(ay)$
6.	$f(-a^{-1}x + b), a > 0$	$ae^{-iaby} g(-ay)$
7.	$f(ax)e^{ibx}, a > 0$	$\frac{1}{a} g\left(\frac{y-b}{a}\right)$
8.	$f(ax) \cos bx, a > 0$	$\frac{1}{2a} \left[g\left(\frac{y-b}{a}\right) - g\left(\frac{y+b}{a}\right) \right]$
9.	$f(ax) \sin bx, a > 0$	$\frac{1}{2ai} \left[g\left(\frac{y-b}{a}\right) - g\left(\frac{y+b}{a}\right) \right]$
10.	$x^n f(x)$	$i^n \frac{a^n g(y)}{dy^n}$
11.	$(1+x^2)^{-1}$	πe^{-y}

Լապլասի ուղիղ ձևափոխություն

	$f(t)$	$g(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$
1.	$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(z)e^{zt} dz$	$g(p)$
2.	$f(t+a) = f(t)$	$(1-e^{-ap})^{-1} \int_0^a e^{-pt} f(t) dt$
3.	$f(t+a) = -f(t)$	$(1+e^{-ap})^{-1} \int_0^a e^{-pt} f(t) dt$
4.	$0, t < ba^{-1}$ $f(at-b), t > ba^{-1}, a, b > 0$	$a^{-1} e^{-ba^{-1}p} pg(a^{-1}p)$
5.	$e^{-\alpha t} f(t)$	$g(p+\alpha)$
6.	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n g(p)}{dp^n}$
7.	$t^{-n} f(t)$	$\int_p^{\infty} \dots \int_p^{\infty} g(p)(dp)^n$
8.	$f^{(n)}(t)$	$p^n g(p) - p^{n-1} f(0) -$ $-p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
9.	$\int_0^t \dots \int_0^t f(t)(dt)^n$	$p^{-n} g(p)$
10.	$\left(t \frac{d}{dt}\right)^n f(t)$, որտեղ $\left(t \frac{d}{dt}\right)^2 f(t) = t \frac{d}{dt} \left\{ t \frac{d}{dt} [f(t)] \right\}$	$\left(-\frac{d}{dp} p\right)^n g(p)$ $\left(\frac{d}{dp} p\right)^2 g(p) = \frac{d}{dp} \left\{ p \frac{d}{dp} [pg(p)] \right\}$

11.	$\left(\frac{d}{dt} t\right)^n f(t)$	$\left(-\frac{d}{dp} p\right)^n g(p)$
12.	$\left(t^{-1} \frac{d}{dt}\right)^n f(t);$ $\left(t^{-1} \frac{d}{dt}\right)^k f(t) = 0;$ $t=0, k=0, \dots, n-1$	$\int_p^{\infty} p \int_p^{\infty} \dots \int_p^{\infty} pg(p)(dp)^n$
13.	$t^m f^{(n)}(t); m \geq n$	$\left(-\frac{d}{dp}\right)^m [p^n g(p)]$
14.	$t^m f^{(n)}(t); m < n$	$\left(-\frac{d}{dp}\right)^m [p^n g(p)] +$ $+(-1)^{m-1} \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!} p^{n-m-1} f(0) +$ $\frac{(n-2)!}{(n-m-2)!} p^{n-m-2} f'(0) + \dots +$ $+m! f^{(n-m)}(0)$
15.	$\frac{d^n}{dt^n} [t^m f(t)]; m \geq n$	$(-1)^m p^n g^{(m)}(p)$
16.	$\frac{d^n}{dt^n} [t^m f(t)]; m < n$	$(-1)^m p^n g^{(m)}(p) - m! p^{n-m-1} f(0) -$ $-\frac{(m+1)!}{1!} p^{n-m-2} f'(0) -$ $-\dots - \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!} f^{(n-m)}(0)$
17.	$\left(e^t \frac{d}{dt}\right)^n f(t);$ $f^{(k)} = 0, k=0, 1, \dots, n-1$	$(p-1) \dots (p-n) g(p-n)$

18.	$\int_0^t t^{-1} f(t) dt$	$p^{-1} \int_p^{\infty} g(p) dp$
19.	$\int_t^{\infty} t^{-1} f(t) dt$	$p^{-1} \int_0^p g(p) dp$
20.	$\int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du$	$g_1(p) g_2(p)$
21.	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g_1(z) g_2(p-z) dz$
22.	$f(t^2)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-2^{-2} p^2 u^{-2}} g(u^2) du$
23.	$f(ae^t - a), a > 0$	$[a\Gamma(p+1)]^{-1} \int_0^{\infty} e^{-u} u^p g(u/a) du$
24.	$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} f(n^{-1}t)$	$\int_0^{\infty} (e^{pu} - 1)^{-1} f(u) du$
25.	$\int_0^{\infty} \frac{t^{u-1}}{\Gamma(u)} f(u) du$	$g(\ln p)$
26.	$\int_0^{\infty} u^{-1/2} \sin(2u^{1/2} t^{1/2}) f(u) du$	$\pi^{1/2} p^{3/2} g(p^{-1})$
27.	$t^{-1/2} \int_0^{\infty} \cos(2u^{1/2} t^{1/2}) f(u) du$	$\pi^{1/2} p^{-1/2} g(p^{-1})$

Լապլասի հակադարձ ձևափոխություն

	$g(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$	$f(t)$
1.	$g(p)$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(p) e^{pt} dp$
2.	$(p + \alpha)^{-1}$	$e^{-\alpha t}$
3.	$p^{-1} e^{-ap}, a > 0$	$0, 0 < t < a$ $1, t > a$
4.	$p^{-1} (1 - e^{-ap}), a > 0$	$1, 0 < t < a$ $0, t > a$
5.	$p^{-1} (e^{-ap} - e^{-bp}), 0 \leq a < b$	$0, 0 < t < a$ $1, a < t < b$ $0, t > b$
6.	$p^{-2} (e^{-ap} - e^{-bp}), 0 \leq a < b$	$0, 0 < t < a$ $t - a, a < t < b$ $b - a, t > b$
7.	$(p + \beta)^{-1} e^{-ap}, a > 0$	$0, 0 < t < a$ $e^{-\beta(t-a)}, t > a$
8.	$-\sin[\beta + \arctg(\alpha p^{-1})] (p^2 + \alpha^2)^{-1/2}$	$\sin(\alpha t + \beta)$
9.	$\cos[\beta + \arctg(\alpha p^{-1})] (p^2 + \alpha^2)^{-1/2}$	$\cos(\alpha t + \beta)$
10.	$\operatorname{arcth}(p/\alpha)$	$t^{-1} \operatorname{sh}(\alpha t)$
11.	$\ln(p + \beta) (p + \alpha)^{-1}$	$(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) / t$
12.	$\ln(p^2 + \beta^2) (p^2 + \alpha^2)^{-1}$	$2t^{-1} [\cos(\alpha t) - \cos(\beta t)]$

Մեկինի ուղիղ ձևափոխություն

	$f(x)$	$g(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1} dx$
1.	$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(s)x^{-s} ds$	$g(s)$
2.	$f(ax)$	$a^{-s} g(s)$
3.	$x^{\alpha} f(x)$	$g(s + \alpha)$
4.	$f(t/x)$	$g(-s)$
5.	$f(x^h), h > 0$	$h^{-1} g(s/h)$
6.	$f(x^{-h}), h > 0$	$h^{-1} g(-s/h)$
7.	$x^{\beta} f(ax^h), a > 0, h > 0$	$h^{-1} a^{-(s+\beta)/h} g((s+\beta)/h)$
8.	$x^{\beta} f(ax^{-h}), a > 0, h > 0$	$h^{-1} a^{(s+\beta)/h} g(-(s+\beta)/h)$
9.	$f'(x)$	$-(s-1)g(s-1)$
10.	$f^{(n)}(x)$	$(-1)^n (s-n)^n g(s-n)$
11.	$(x \frac{d}{dx})^n f(x)$	$(-1)^n s^n g(s)$
12.	$(\frac{d}{dx} x)^n f(x)$	$(-1)^n (s-1)^n g(s)$
13.	$x^{\alpha} \int_0^{\infty} \xi^{\beta} f_1(x\xi) f_2(\xi) d\xi$	$g_1(s+\alpha) g_2(1-s-\alpha+\beta)$
14.	$x^{\alpha} \int_0^{\infty} \xi^{\beta} f_1(x/\xi) f_2(\xi) d\xi$	$g_1(s+\alpha) g_2(1+s+\alpha+\beta)$

Մեկինի հակադարձ ձևափոխություն

	$g(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1} dx$	$f(x)$
1.	$s^{-1}, \text{Re } s > 0$	$1, 0 < x < 1$ $0, 1 < x < \infty$
2.	$s^{-1}, \text{Re } s < 0$	$0, 0 < x < 1$ $-1, 1 < x < \infty$
3.	$(s + \alpha)^{-1}, \text{Re } s > -\text{Re } \alpha$	$x^{\alpha}, 0 < x < 1$ $0, 1 < x < \infty$
4.	$(s + \alpha)^{-1}, \text{Re } s < -\text{Re } \alpha$	$0, 0 < x < 1$ $-x^{\alpha}, 1 < x < \infty$
5.	$(s + \alpha)^{-2}, \text{Re } s > -\text{Re } \alpha$	$-x^{\alpha} \ln x, 0 < x < 1$ $0, 1 < x < \infty$
6.	$(s + \alpha)^{-2}, \text{Re } s < -\text{Re } \alpha$	$0, 0 < x < 1$ $x^{\alpha} \ln x, 1 < x < \infty$
7.	$\pi \sin^{-1}(\pi s), 0 < \text{Re } s < 1$	$(1+x)^{-1}$
8.	$\pi \sin^{-1}(\pi s), -n < \text{Re } s < 1-n,$ $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$	$(-1)^n x^n (1+x)^{-1}$
9.	$\pi \cos^{-1}(\pi s), -1/2 < \text{Re } s < 1/2$	$x^{1/2} (1+x)^{-1}$
10.	$\pi^2 \sin^{-2}(\pi s), 0 < \text{Re } s < 1$	$(x-1)^{-1} \ln x$
11.	$\pi^2 \sin^{-2}(\pi s), n < \text{Re } s < n+1,$ $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$	$x^{-n} (x-1)^{-1} \ln x$
12.	$2\pi^3 \sin^{-3}(\pi s), 0 < \text{Re } s < 1$	$(\pi^2 + \ln^2 x)(1+x)^{-1}$
13.	$\text{arctg}(\frac{\alpha}{s+\beta}), \text{Re } s > -\text{Re } \beta$	$x^{\beta} y^{-1} \sin(\alpha y), 0 < x < 1$ $0, 1 < x < \infty$

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление.-М., Физматгиз, с. 524, 1961.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.-Л.,Изд. Наука, с. 408, 1968.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.-М., Физматлит, т. 3, с. 662, 2001.
4. Михлин С.Г. Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, -М., ОГИЗ, с. 304, 1947.
5. Волков И.К., Канатников А.Н., Интегральные преобразования и операционное исчисление, -М., Изд. МГТУ им Н.Э. Баумана, с. 229, 2002.
6. Г. Бейтмен, А. Эрдейи и др., Таблицы интегральных преобразований /Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, -М., Изд. Наука, т. 1., с.344, 1969.
7. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье, -М., с.479, 1948.
8. Евграфов М. А. Аналитические функции: Учеб. пособие для вузов.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 448 с.,1991
9. Иванов А.О., Булычева С.В. Метод интегральных преобразований в уравнениях с частными производными. Учебное пособие, с. 78, 2004
10. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. В 4-х томах. 1982.
11. Б.Нобл, Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных,-М., с. 280, 1962.
12. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики,- М, с. 525, 1933.
13. Снеддон И., Преобразования Фурье, -М., Изд. И*Л, с. 669, 1955.
14. Владимиров В.С., Уравнения математической физики, -М., Изд. Наука, с. 512, 1981.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ.....	3
ԳԼՈՒԽ1 Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունը և նրա կիրառությունները	
1.1. Ֆուրյեի շարք. համառոտ ակնարկ.....	4
1.2. Ֆուրյեի ինտեգրալային բանաձևը.....	10
1.3. Ֆուրյեի ձևափոխություն, հիմնական հատկությունները.....	12
1.4. Ֆուրյեի ձևափոխության հաշվման օրինակներ.....	19
1.5. Ֆուրյեի ձևափոխության որոշ կիրառություններ.....	20
Խնդիրներ I գլխի վերաբերյալ.....	25
ԳԼՈՒԽ2 Լապլասի ինտեգրալ ձևափոխությունը և նրա կիրառությունները	
2.1. Լապլասի ձևափոխություն, հիմնական հատկությունները.....	28
2.2. Փաթաթման թեորեմը.....	34
2.3. Ուշացման թեորեմը.....	38
2.4. Դելտա ֆունկցիան և նրա պատկերը.....	40
2.5. Լապլասի ձևափոխության որոշ կիրառություններ.....	42
Խնդիրներ II գլխի վերաբերյալ.....	47
ԳԼՈՒԽ3 Մելինի ինտեգրալ ձևափոխությունը և նրա կիրառությունները	
3.1.Մելինի ինտեգրալ ձևափոխություն, հիմնական հատկությունները.....	52
3.2.Մելինի ձևափոխության հաշվման օրինակներ.....	55
3.3.Մելինի ձևափոխության որոշ կիրառություններ.....	56
Խնդիրներ III գլխի վերաբերյալ.....	63
ՀԱՎԵԼՎԱԾ.....	66
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ.....	74

ԱՐՓԻՆԵ ՍԵՐՈՐԻ ԴԻՆՈՒՆՑ

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵՁ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ

Գրախոսներ՝

ՀՀ ԳԱԱ Մեխանիկայի ինստիտուտի առաջատար

գիտաշխատող, ֆ.մ.գ.դ. Կ.Լ. Աղայան

ՀՊՄՀ Մաթեմատիկական անալիզի և ֆունկցիաների

տեսության ամբիոնի դոցենտ, ֆ.մ.գ.թ. Ս.Ա. Խաչատրյան

Խմբագիր՝

ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր Ա.Ն. Մարտիրոսյան

Տպագրությունը՝ օֆսեթ:

Չափսը՝ 60x84/ 1/16

Թուղթը՝ օֆսեթ: Ծավալը՝ 4,75 մամուլ:

Տպաքանակը՝ 100 օրինակ:

«ԷՆ-ՎԵ ՓՐԻՆԹ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
0041 ՀՀ, ք. Երևան
Ռոստովյան 25/31
Հեռ.՝ (37477) 661-444, (37491) 661-444
E-mail: n-vprint@mail.ru