ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ
ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԻՋԵՎԱՆԻ ՄԱՍՆԱՃՅՈՒՂ

Կ.Բ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

ԱՌԿԱ ԵՎ ՀԵՌԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ
ԲԱԺՆԻ ՀՈՒՄԱՆԻՏԱՐ
ՄԱՍՆԱԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ԻՋԵՎԱՆԻ ՄԱՍՆԱՃՅՈՒՂ

ԿԱՄՈ ԱՅՎԱԶՅԱՆ

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

ԱՌԿԱ ԵՎ ՀԵՌԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԲԱԺՆԻ ՀՈՒՄԱՆԻՏԱՐ ՄԱՍՆԱԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԻՋԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2014

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1 ց7
Ա 551

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ Իջևանի մասնաճյուղի
գիտական խորհուրդը*

Այվազյան Կ.
Ա 551 Մաթեմատիկա. առկա և հեռակա ուսուցման բաժնի հումանիտար մասնագիտությունների համար/ Կ. Այվազյան; ԵՊՀ Իջևանի մասնաճյուղ.- Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2014.- 136 էջ:

Ձեռնարկը նախատեսված է ԵՊՀ Իջևանի մասնաճյուղի առկա և հեռակա ուսուցման բաժինների հումանիտար մասնագիտությունների ուսանողների համար:

Այն օգտակար կլինի նաև նշված մասնագիտությունների մագիստրոսների և ասպիրանտների համար:

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1 ց7

ISBN 978-5-8084-1851-6

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ ՀՈՒՄԱՆԻՏԱՐ
ՄԱՍՆԱԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ
(ուսումնական ձեռնարկ)

Հումանիտար մասնագիտությունների համար (պատմաբան, հոգեբան, մանկավարժ, բանասեր) բարձրագույն մաթեմատիկան հանդիսանում է բնագիտական կրթամասի պարտադիր բաղադրիչ մասը: Մաթեմատիկայի իմացությունն անհրաժեշտ է ընդհանուր աշխարհայացքի ձևավորման համար և ունի գործնական նշանակություն մարդու աշխատանքային գործունեության ողջ ընթացքում:

Ձեռնարկում թեմաների ընտրությունը և շարադրման ոճը տարբերվում է բնական գիտությունների մասնագիտությունների համար նախատեսված գրքերում թեմատիկ ընտրության եղանակից և շարադրման ոճից: Սահմանվում են հիմնական գաղափարները և բերվում են տիպային վարժություններ:

Ձեռնարկի հեղինակ՝ տ.գ.թ., դոցենտ Կ.Բ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ

ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Մաթեմատիկական կրթությունը համալսարանական կրթության բաղկացուցիչ մասն է: Մաթեմատիկան իր կիրառական բաղկացուցիչ մասերով (տեղեկատվական տեխնոլոգիաներ, համակարգիչներ և այլն) մուտք է գործել նաև հումանիտար գիտությունների բնագավառ:

Մաթեմատիկայի դասընթացի հիմնական նպատակներից է ուսանողների մոտ վերացական մտածողության ձևավորումը: Մաթեմատիկայի իմացությունը հանգեցնում է մտածողության նոր որակների ձեռքբերմանը: Նրա ուսուցումը նպատակ ունի մաթեմատիկայի օգնությամբ բարձրացնել ուսանողի կրթացենզը:

Մարդն առօրյա կյանքում առնչվում է բազմազան հաշվարկային խնդիրների հետ: Կենցաղային և աշխատանքային բազմաթիվ հարցեր պահանջում են մարդկային ռեսուրսների և ամենատարբեր բնույթի նյութերի ծախսերի հաշվարկումներ: Հաշվարկման սկզբունքները կախված են յուրաքանչյուր մարդու մաթեմատիկական ունակություններից: Շատ կարևոր է հաշվարկման հարմար եղանակի ընտրությունը: Հարմար ու հեշտ հաշվարկ կատարելու հմտություն ունեցող անհատը կարողանում է օգտվել մաթեմատիկայի կիրառական մոդելներից: Այդ պատճառով մաթեմատիկան օժանդակում է բնական գիտություններից գիտելիքներ ձեռք բերելուն:

Առաջարկվող ձեռնարկն ունի քրեստոմատիկ բնույթ: Ծրագրային նյութն ընտրված է հայտնի դասագրքերից: Յուրաքանչյուր նոր գաղափարի սահմանում ուղեկցվում է ամրապնդող վարժություններով: Հեղինակի կարծիքով ձեռնարկի ծրագիրը յուրացրած ուսանողը կկարողանա լուծել պարզագույն կիրառական խնդիրներ:

Հեղինակ

Գ Լ Ու Խ 1
ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ

1.1 ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ

Մաթեմատիկայում ընդունված է կիրառել վերացարկման (աբստրակցիա) մեթոդը, որի ժամանակ չեն կարևորվում կոնկրետ պարագաներ: Գծի, հարթության և տարածության կետերից, կարելի է ստեղծել կետերի համախմբություններ (երկրաչափական պատկերներ և մարմիններ), խնդիր առաջադրել և լուծել ոչ թե յուրաքանչյուր կետի, այլ ամբողջ համախմբության հետ: Բերենք օրինակ: Շրջանագծի վրա դասավորված կետերն օժտված են հետևյալ բնութագրիչ հատկությամբ. նրանցից յուրաքանչյուրը շրջանագծից դուրս վերցրած (տրված) կետից (կենտրոն) ունեն միևնույն հեռավորությունը: Այդ հեռավորությունն անվանում են շրջանագծի շառավիղ: Շրջանագծի որևէ կետում այդ շրջանագծին շոշափող տանելու համար հարկավոր է այդ կետով տանել շառավիղ և այդ շառավղին տվյալ կետում կանգնեցնել ուղղահայաց ուղիղ: Շրջանագծին շոշափող կառուցելու նկարագրած եղանակը նույնն է նրա բոլոր կետերի համար: Իսկ այդ կետերի թիվն անհաշիվ է:

Առարկաներ հաշվելիս կամ համարակալելիս կարելի է հաշվել և համարակալել ոչ միայն յուրաքանչյուրն առանձին – առանձին, այլ նաև նրանց խմբաքանակները:

Բերված օրինակներն անխուսափելիորեն հանգեցնում են բազմության գաղափարին, որը մաթեմատիկայի սկզբնաղբյուրն է: Բազմությունների տեսության լեզուն իր մեջ պարունակում է բազմաթիվ հասկացություններ և կապեր նրանց միջև: Անհրաժեշտ է հասկանալ այդ լեզուն և կարողանալ գործածել այն:

1.2 ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐ

Բազմության գաղափարը, մաթեմատիկայում ելակետային է և չի սահմանվում, քանի որ չկա ուրիշ, ավելի ընդգրկուն գաղափար, որից հնարավոր լիներ ստանալ բազմության գաղափարը՝ իբրև մասնավոր հասկացություն:

Մաթեմատիկայում ուսումնասիրվող բազմությունները կետերի, գծերի, թվերի, ֆունկցիաների և մաթեմատիկական այլ օբյեկտների համախմբություններ են:

Օբյեկտները, որոնցից կազմված է բազմությունը, համարվում են այդ բազմության տարրերը: Բազմությունների ժամանակակից տեսությունը շարադրվում է աքսիոմատիկ համակարգի (չապացուցվող պնդումների) տեսքով: Այդ տեսության կիրառություններում բազմությունը որոշակի և ընդհանուր մեկ հատկանիշով ընտրված իրերի, առարկաների, երևույթների կամ այլ հասկացությունների միասնություն է:

1.3 ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ: ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏ

Բազմությունների տեսության հիմնական հասկացություններն են «բազմությունը» և բազմության «տարրը»: Բազմությունը համարվում է առաջադրված, եթե հստակ կարելի է ասել, թե կամայական ձևով ընտրված որևիցե օբյեկտ նրա տարրն է, թե՝ ոչ:

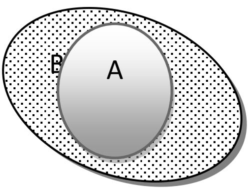
Բազմությունն առաջադրվում է կամ իր տարրերի թվարկմամբ, կամ իր տարրերի այն հատկության նկարագրությամբ, որի միջոցով նրանք միարժեքորեն որոշվում են:

Բազմությունները նշանակվում են լատիներենի մեծատառերով, իսկ նրա տարրերը՝ լատիներենի փոքրատառերով: Եթե a-ն հանդիսանում է A բազմության տարրը, ապա կասենք, որ a-ն պատկանում է A–ին և կգրենք $a \in A$ ($\in$-պատկանելիություն): Այս փաստի բացասումը կգրանցենք $a \notin A$ տեսքով:

Բազմությունների տեսության հիմնական սահմանումներից են.

1.*ԾԱՎԱԼՄԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈւՄԸ՝*

A բազմությունը կհամարենք B–ի ենթաբազմություն ($A \subset B$, A-ն B-ի ենթաբազմությունն է), եթե A-ին պատկանող յուրաքանչյուր տարր պատկանում է B-ին:



Ակնհայտ է, որ $A \subset B$:

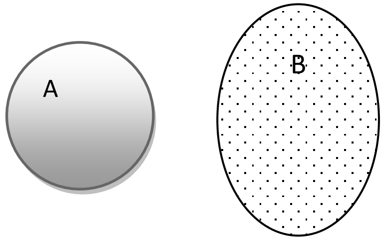
$$\left.\begin{matrix} A \subset B \\ B \subset A \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = B (\Rightarrow -\text{հետևում է}):$$

$I A \subset B - A -$ն B-ի ենթաբազմությունն է:

$II A = B \Leftrightarrow A \subset B$ և $B \subset A$:

Եթե A և B բազմություններին պատկանում են միևնույն տարրերը, ապա բազմությունները համընկնում են՝ $A \equiv B$($\equiv$ -համընկնել):

Ակնհայտ է, որ եթե A և B բազմություններն ընդհանուր տարրեր չունենան, նրանց հատման արդյունքը կլինի տարր չպարունակող բազմություն: Նման բազմությանը կանվանենք դատարկ բազմություն (տարր չպարունակող) և կնշանակենք $\varnothing$ նշանով: Մասնավորապես $A - A = \varnothing$:



2. ԳՈՒՄԱՐԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ՝ $\forall$ (կամայական) A և B բազմությունների համար $\exists$ ($\exists$-գոյություն ունի) բազմություն, որին պատկանում են միայն A և B բազմությունների բոլոր տարրերը և ոչ մի այլ տարր. $A + B$, $A \cup B$($\cup$ - բազմությունների միավորում):

$$A + B = \left\{x : x = a + b, a \in A, b \in B\right\}$$

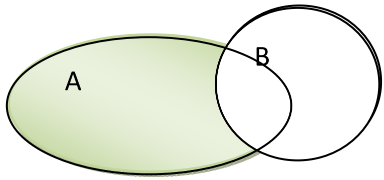
$$A \cup B = \left\{x : x \in A \text{ կամ } x \in B\right\}:$$

3. ՏԱՐԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ՝

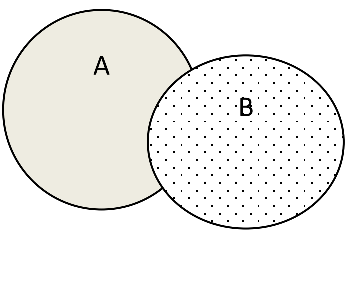
$\forall A$ և B բազմությունների համար $\exists$ բազմության, որին $\in$ են միայն A –ի բոլոր այն տարրերը, որոնք $\notin B$ –ին՝ $A \setminus B$:

$$A \setminus B = \left\{X; x \in A \text{ և } x \notin B\right\}:$$

4. ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ՝ $\exists$ առնվազն մեկ բազմություն:



Բազմությունների տեսության կիրառություններում՝ դիտարկվող բոլոր բազմություններն իրենցից ներկայացնում են մեկ ընդհանուր բազմության (տարածության R^3) ենթաբազմություններ:



A և B բազմությունների հատումը ($\cap$-բազմությունների հատում) նրանց ընդհանուր մասն է, այսինքն՝ կազմված է բոլոր այն տարրերից, որոնք պատկանում են և՛ A –ին, և՛ B –ին:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ և } x \in B\}:$$

Բազմությունները ներառում են անթիվ, անհաշիվ տարրեր: Սակայն հատկանշական է, որ բազմությունների հետ կարելի է կատարել գործողություններ՝ իրար գումարել և իրարից հանել:

Բազմությունների միավորման (գումարման) և հատման գործողությունները հասկանալու համար կատարենք վարժություն.

$$A = \{-3, \sqrt{2}, 4, 5, a, b\}$$

$$B = \{-1, \sqrt{2}, 4a, a\}:$$

$A \cup B$ գտնելու համար հարկավոր է կազմել մի նոր բազմություն, որին պատկանում են A -ի և B-ի բոլոր տարրերը:

$$A \cup B = \{-3, \sqrt{2}, 4, 5, a, b\} \cup \{-1\sqrt{2}, 4, a, c\} = \{-3, -1, \sqrt{2}, 4, 5, a, b, c\}:$$

$A \cap B$ գտնելու համար հարկավոր է կազմել մի նոր բազմություն, որը կազմված է բոլոր այն տարրերից, որոնք պատկանում են և՛ A –ին, և՛ B -ին.

$$A \cap B = \{-3, \sqrt{2}, 4, 5, a, b\} \cap \{-1\sqrt{2}, 4, a, c\} = \{\sqrt{2}, 4, a,\}:$$

$$A \setminus B = \{-3, 5, b\}:$$

1.4 ԹԻՎ: ԹՎԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: ԲՆԱԿԱՆ, ԱՄԲՈՂՋ, ՌԱՑԻՈՆԱԼ, ԻՌԱՑԻՈՆԱԼ ԵՎ ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ

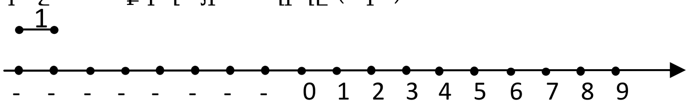
Հաշվումների և չափումների արդյունքներն արտահայտվում են թվերով: Այդ թվերով նշանակվում են նաև օբյեկտների կարգը՝ առաջին, երկրորդ: Այդ թվերը անվանում են բնական թվեր: Բնական թվերի բազմությունը նշանակում են N –ով: Կամայական ($\forall$) երկու բնական թվերի գումարը և արտադրյալը միշտ բնական թիվ է: Այն կախված չէ գումարելիների և արտադրիչների կարգից՝ $a+b=b+a$, $ab=ba$: Բնական թվերի բազմությունը ներքևից սահմանափակ է (ամենափոքր բնական թիվը 1-ն է), վերևից՝ անսահմանափակ (ամենամեծ բնական թիվ չկա):

Հանման և բաժանման գործողությունների դեպքում իրադրությունն ուրիշ է: Հանման գործողություն կատարելիս եթե նվազելին մեծ է հանելիից ստացվում է բնական թիվ, հակառակ դեպքում բնական թիվ չի ստացվում: 5-2=3 թիվը բնական է, իսկ (2-5) թիվը՝ ոչ: Առաջանում է անհրաժեշտություն «նոր» թվեր ներմուծելու:

Բնական թվերն իրար վրա բաժանելիս քանորդը միշտ չէ, որ ստացվում է բնական թիվ:

Ձևակերպենք խնդիր: Բնական թվերի բազմությունն ընդլայնելով՝ կազմենք այնպիսի թվային բազմություններ, որոնց միջոցով միշտ իրականացնելի լինեն թվաբանական գործողությունները. գումարումը, հանումը, (ցածր կարգի) բազմապատկումը(աստիճան բարձրացնելը), բաժանումը, արմատ հանելու (բարձր կարգի) գործողությունները:

Բնական թվերի բազմությունն ընդլայնենք ուղիղի վրա (թվային ուղիղ) թվերը դասավորելու միջոցով: Այնպես, ինչպես թվերի բազմությունն է անվերջ, անվերջ է նաև ուղիղի վրա դասավորված կետերի բազմությունը: Ուստի, թվերի և ուղիղի կետերի միջև կարող ենք ստեղծել փոխմիարժեք համապատասխանություն: Այդ նպատակով վերցնում ենք որևէ կետ 0 (սկզբնակետ) և նրանով տանում հորիզոնական դիրքի ուղիղ: Ընտրում ենք մասշտաբային հատված և 0 սկզբնակետից սկսած՝ հաջորդաբար տեղադրում դեպի աջ և ձախ: 0 սկզբնակետն ընտրելով՝ կողմնորոշում ենք թվային ուղիղը (նկ.1):



Նկ. 1

0 սկզբնակետից սկսած՝ աջ կիսաուղիղի վրա կդասավորվեն բնական թվերը, 0-ից դեպի ձախ դասավորված թվերի նշանները, որպես բացասական կիսաուղիղի վրա դասավորված կետերին համապատասխանող թվեր, կլինեն բնական թվերի նշաններին հակառակ: Սկզբնակետի տարբեր կողմերում հավասար հեռավորությամբ դասավորված կետերին համապատասխանող թվերը ակնհայտորեն կլինեն մեծությամբ հավասար, նշանով՝ հակառակ (նկ.1): Մեծությամբ հավասար, նշանով՝ հակառակ թվերն անվանում են հակադիր թվեր: Հակադիր թվերի գումարը հավասար է 0-ի:

a և $-a$ թվերը հակադիր են $a+(-a)=0$: Բնական թվերի նման ձևով ընդլայնված բազմության մեջ կընդգրկվի նաև 0 թիվը (նկ.1):

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.4.1 ՝ Բնական թվերը, նրանց հակադիրները և 0 -ն կազմում են ամբողջ թվերի բազմությունը (Z) :

Ակնհայտ է, որ

$N \subset Z$: Ամբողջ թվերի բազմությունում իրականացնելի է հանման գործողությունը, սակայն այդ բազմությունը «բավական չէ» բաժանման գործողություն իրականացնելու համար: Բոլոր այդ դեպքերում, երբ $\frac{a}{b}$ քանորդը $(a \in z, b \in N)$ ամբողջաթիվ չէ, բաժանման արդյունքը հաշվելու համար հարկավոր են «նոր» տիպի թվեր, որոնք տարբեր են և՛ բնական, և՛ ամբողջ թվերից: Ստանանք այդ «նոր» թվերի բազմությունը և պատկերենք թվային ուղիղի վրա:

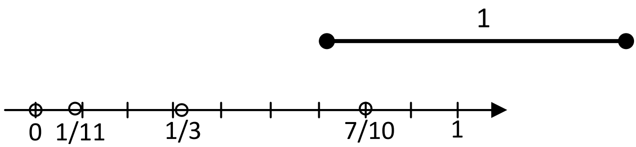
Ձևակերպենք խնդիր: Ի՞նչ տիպի թվերով կարելի է ներկայացնել $\frac{a}{b}$ տեսքի անկրճատելի կոտորակները:

Բերենք օրինակներ և վերլուծենք բաժանման արդյունքները:

$$\frac{1}{11}=0,09090909.....$$
$$\frac{1}{3}=0,33333333.....$$
$$\frac{7}{10}=0,70000000....$$

....

....



Նկ. 2

Բաժանման արդյունքների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ ներկայացված օրինակներում բաժանումը չի ավարտվում, այդ անկրճատելի կոտորակներն արտահայտվում են անվերջ տասնորդական կոտորակների տեսքով, և բաժանման արդյունքում ի հայտ եկող թվերը պարբերաբար կրկնվում են: Գործ ունենք անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակների հետ: Այդպիսի թվերը կանվանենք ռացիոնալ թվեր, իսկ նրանց բազմությունը կնշանակենք Q տառով (նկ.2):

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.4.2՝ $\frac{a}{b}$ տեսքի անկրճատելի կոտորակները $b \neq 0$, որոնցից յուրաքանչյուրը կարելի է ներկայացնել անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով, կազմում են ռացիոնալ թվերի բազմությունը (Q) :

a ամբողջ թիվը կարելի է ներկայացնել $\frac{a}{1}$ տեսքով, ուստի ամբողջ թվերը ռացիոնալ թվերի մաս են կազմում: Քանի որ բնական թվերն էլ ամբողջ թվերի մաս են կազմում, կունենանք.

$$N \subset Z \subset Q:$$

Դժվար չէ համոզվել, որ ռացիոնալ թվերի բազմությունը փակ է գումարում, հանում, բազմապատկում, բաժանում թվաբանական գործողությունների նկատմամբ, այսինքն այդ գործողությունների արդյունքում ստացվում է ռացիոնալ թիվ: Սակայն ռացիոնալ թվերի բազմությունը չի «բավականացնում» թվերից արմատ հանելու գործողություն կատարելիս, այսինքն գոյություն ունեն ոչ ռացիոնալ թվեր: Այդ թվերը ներկայացվում են անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակների տեսքով:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.4.3 ՝Անվերջ ոչ պարբերական տասնորդական կոտորակներին անվանում են իռացիոնալ թվեր, իսկ նրանց բազմությունը՝ իռացիոնալ թվերի բազմություն (I):

Իռացիոնալ թվեր են $\sqrt{2}-$ը, e-ն, π-ն՝

$$\sqrt{2 = 1,414213562373}.......$$

e=2,718281828459045.....

π=3,1415926535589793.....

Ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի բազմությունները միասին կազմում են իրական թվերի բազմություն, որը նշանակում են R տառով:

Այսպիսով՝

$$N \subset Z \subset Q \subset R \; Q = R \setminus I \; I = R \setminus Q:$$

Անընդհատ ընդլայնելով թվային բազմությունները՝ ստացանք թվերի այնպիսի բազմություն, որն իր մեջ ներառում է բոլոր իրական թվերը: Իրական թվերի բազմությունն ընդլայնելու կարիքը չկա, քանի որ այդ բազմությունը փակ է թվաբանական բոլոր գործողությունների նկատմամբ:

Ակնհայտ է, որ իրական թվերի բազմությունն անվերջ է: Թվային ուղիղի կետերը նույնպես անվերջ են: Յուրաքանչյուր կետին վերագրելով համապատասխան իրական թիվ՝ թվային բազմությունների և ուղիղի կետերի միջև կստեղծվի փոխմիարժեք համապատասխանություն:

Նկարագրված եղանակով լուծեցինք մեր կողմից ձևակերպված խնդիրը՝ ստեղծելով միարժեք համապատասխանություն թվերի և ուղիղի կետերի միջև:

1.5 ԲԱՑԱՐՁԱԿ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆ (ՄՈԴՈՒԼ)

Կան մաթեմատիկական խնդիրներ, որոնցում քննարկվում է թվի կամ արտահայտության վերացարկված (աբստրակցիայի ենթարկված)՝ նրա նշանից զատված մեծությունը որը, երկրաչափորեն նշանակում է թվային ուղիղի տվյալ թվին համապատասխանող կետի հեռավորությունը, անկախ այն բանից, թե այդ կետը որ կիսաուղիղին է պատկանում:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.5.1 ՝Թվի (արտահայտության) բացարձակ մեծություն ասելով հասկանում ենք նրա մեծությունը՝ անկախ նշանից.

$$|X| = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}:$$

Լուծենք օրինակ, որը պարունակում է բացարձակ մեծություն:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Հաշվել $\log_{11}(4-15a)$ արտահայտության արժեքը, եթե a –ն բավարարում է $|30a-7|=21$ հավասարմանը:

Դպրոցից հայտնի է, որ լոգարիթմի նշանի տակ գրված արտահայտությունը պետք լինի դրական: Հենց այս պայմանով էլ որոշվում է a-ի թույլատրելի արժեքների բազմությունը (ԹԱԲ):

$$\text{ԹԱԲ}: 4-15a>0 \Rightarrow -15a>-4 \Rightarrow 15a<4 \Rightarrow a<\frac{4}{15}: a\in(-\infty,\frac{4}{15}):$$

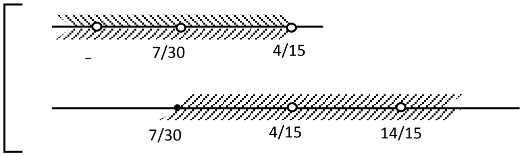
$|30a-7|$ արտահայտության նշանը որոշելու նպատակով օգտվենք մոդուլի սահմանումից.

$$|30a-7| = \begin{cases} 30a-7, \text{ եթե } 30a-7\ge 0 \\ -(30a-7) \text{ եթե } 30a-7<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30a-7, \text{ եթե } 30a\ge 7 \\ -(30a-7) \text{ եթե } 30a<7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 30a-7 \text{ եթե, } a\ge\frac{7}{30} \\ -(30a-7) \text{ եթե, } a<\frac{7}{30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30a-7, \text{եթե, } a\ge\frac{7}{30} \text{ կամ } a\in[\frac{7}{30},+\infty) \\ -(30a-7) \text{ եթե } a\in(-\infty,\frac{7}{30}) \end{cases}:$$

Քանի որ $\frac{7}{30}<\frac{4}{15}=\frac{8}{30}$, ապա կունենանք $a\in\left[\frac{7}{30}+\infty\right)$ միջակայքի նեղացում՝ այսինքն ելնելով ԹԱԲ –ից՝ կունենանք $a\in\left[\frac{7}{30},\frac{4}{15}\right)$:

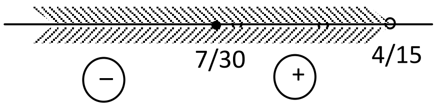
Պարզաբանումը պատկերենք թվային ուղիղի վրա, կունենանք.



$$|30a-7|=21$$

$$\left[\begin{array}{l}30a-7=21\\30a-7=-21\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}30a=28\\30a=-14\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{14}{15}\notin \text{ԹԱԲ -ին}\\[2ex]a=-\dfrac{7}{15}\in \text{ԹԱԲ -ին}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\phi\\[1ex]a=-\dfrac{7}{15}\end{array}\right.\Rightarrow a=-\frac{7}{15}:$$



Լուծված օրինակից երևում է, որ $a=-\dfrac{7}{15}$ արժեքը պատկանում է ԹԱԲ-ին, իսկ $a=\dfrac{14}{15}$ արժեքը՝ ոչ: Ուստի,

$\log_{11}(4-15a)$ արտահայտության արժեքը հաշվելու համար a–ի փոխարեն կտեղադրենք $a=-\dfrac{7}{15}$ արժեքը:

$$\begin{cases}a=-\dfrac{7}{15}\\ \log_{11}(4-15a)\end{cases}=\log_{11}(4-15a)=\log_{11}(4-15.(-\frac{7}{15}))=\log_{11}(4+15.\frac{7}{15})=$$

$$=\log_{11}(4+7)=\log_{11}11=1:$$

Պատ.՝ 1:

Օրինակը լուծելիս կիրառվել են դպրոցից հայտնի մաթեմատիկական տարրական որոշակի իմացություններ: Հայտնի է, որ համախմբի լուծումը նրա մեջ ներառված համակարգերի լուծումների միավորումն է: Առաջին աստիճանի գծային հավասարում լուծելիս (և ընդհանրապես հավասարում լուծելիս) անհայտ մեծությունները հավասարման աջ մասից տեղափոխվում են ձախ մաս՝ փոխելով նրանց նշանները: Հայտնի մեծությունները տեղափոխվում են աջ մաս: Կատարվում է նման անդամների միացում, և վերջում գտնվում է անհայտը:

1.6 ՊԱՐԶ ԵՎ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԹՎԵՐ: ԱՄԵՆԱՄԵԾ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԺԱՆԱՐԱՐ ԵՎ ԱՄԵՆԱՓՈՔՐ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԲԱԶՄԱՊԱՏԻԿ

Հայտնի է, որ մեծ թվերն իրար բաժանելն ավելի դժվար է, քան՝ փոքր թվերը: Ուստի հարկավոր է բաժանում կատարելուց առաջ կոտորակի համարիչն ու հայտարարը փոքրացնել՝ կոտորակը դարձնել անկրճատելի: Դրա համար հարկավոր է համարիչից և հայտարարից դուրս «կորզել» այն թվերը, որոնց վրա առանց մնացորդի բաժանվում են և՛ համարիչը, և՛ հայտարարը (ընդհանուր բաժանարար):

Հայտնի է, որ իրարից տարբեր թվերի բաժանարարների քանակները տարբեր են: Կախված բաժանարարների թվից՝ թվերը լինում են պարզ և բաղադրյալ:

Բաժանարարները գտնելիս, թվերը պարզ արտադրիչների վերլուծելիս, բաժանալիության հայտանիշները դիտարկելիս միշտ ի նկատի ենք ունենալու առանց մնացորդի բաժանումը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.6.1՝ Մեկից մեծ այն բնական թվերը, որոնք բաժանվում են միայն 1-ի և իրենց վրա (երկու բաժանարար) կոչվում են պարզ թվեր, իսկ եթե ունեն երկուսից ավելի բաժանարար՝ բաղադրյալ թվեր:

Ակնհայտ է, որ թվերի բաժանարարներից մեզ հետաքրքրում է ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը: Ուստի ցանկալի է կարողանալ գտնել տրված թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և այդ հմտությունը կիրառել կոտորակների հետ գործողություններ կատարելիս:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.6.2՝ Տրված բնական թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար կոչվում է այն ամենամեծ բնական թիվը, որի վրա միաժամանակ բաժանվում են նրանցից յուրաքանչյուրը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.6.3՝ Տրված բնական թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ կոչվում է այն ամենափոքր բնական թիվը, որը բաժանվում է նրանցից յուրաքանչյուրի վրա:

Կոտորակային թվերը գումարելու և հանելու ժամանակ անհրաժեշտ է գտնել այդ կոտորակների ընդհանուր հայտարարը: Ընդհանուր հայտարարը որոշելիս գտնում են այն թիվը, որը բաժանվում է յուրաքանչյուր կոտորակի հայտարարի և ամենափոքրն է (ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկ):

Հարցը հանգում է տրված թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելու խնդրին:

Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելու գործընթացները պարզաբանելու նպատակով լուծենք օրինակ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Գտնել $72;120;168$ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը՝ $(72;120;168)=?$ և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը՝ $[72;120;168]=?$:

Կատարում ենք հետևյալ գործողությունները՝ նշված հաջորդականությամբ.

1. Տրված թվերից յուրաքանչյուրը հաջորդաբար վերլուծում պարզ արտադրիչների և կազմում յուրաքանչյուրի վերլուծությունը.

$$\begin{array}{r|l}72&2\\36&2\\18&2\\9&3\\3&3\\1&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}120&2\\60&2\\30&2\\15&3\\5&5\\1&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}168&2\\84&2\\42&2\\21&3\\7&7\\1&\end{array}$$

$72=2\times2\times2\times3\times3$

$120=2\times2\times2\times3\times5$

$168=2\times2\times2\times3\times7$

2. Ստացված վերլուծությունների ընդհանուր մասերը ներկայացնենք աստիճանների տեսքով և յուրաքանչյուր վերլուծության համար կազմենք այդ աստիճանների և մնացած արտադրիչների արտադրյալները:

$72=2\times2\times2\times3\times3=2^3\times3^2$

$120=2\times2\times2\times3\times5=2^3\times3\times5$

$168=2\times2\times2\times3\times7=2^3\times3\times7$

$72=2^3\times3^2$

$120=2^3\times3\times5$

$168=2^3\times3\times7$

3. Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը ստանալու նպատակով ընտրում ենք ընդհանուր աստիճանները՝նվազագույն ցուցիչներով և արտադրիչները, այնուհետև կազմում նրանց արտադրյալները:

$$(72;120;168) = 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24 \quad (72;120;168) = 24:$$

Ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելու նպատակով կատարենք նույն գործողությունները՝ նշված հաջորդականությամբ:

1. Տրված թվերից յուրաքանչյուրը հաջորդաբար վեր ենք լուծում պարզ արտադրիչների և կազմում յուրաքանչյուրի վերլուծությունը.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$
$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

2. Ստացված վերլուծությունների ընդհանուր մասերը ներկայացնենք աստիճանների տեսքով և յուրաքանչյուր վերլուծության համար կազմենք այդ աստիճանների և մնացած արտադրիչների արտադրյալները.

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$$
$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$$
$$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^3 \times 3 \times 7$$
$$72 = 2^3 \times 3^2$$
$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$
$$168 = 2^3 \times 3 \times 7$$

Ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը ստանալու նպատակով ընտրում ենք ընդհանուր աստիճանները՝առավելագույն ցուցիչներով և արտադրիչները, այնուհետև կազմում նրանց արտադրյալները.

$$[72;120;168] = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 7560: \ [72;120;168] = 7560:$$

Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկը գտնելու ալգորիթմների (արդյունքի հանգեցնող քայլերի հաջորդականություն) վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ նրանից յուրաքանչյուրի առաջին երկու քայլերը նույնն են, իրարից տարբերվում են երրորդ քայլերը. ընտրությունների մոտեցումները տարբեր են:

1.7 ԶՈՒՅԳ ԵՎ ԿԵՆՏ ԹՎԵՐ: ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.7.1՝ Եթե բնական թիվը վերջանում է 0,2,4,6,8 թվանշաններից որևէ մեկով, կոչվում է զույգ, իսկ եթե ոչ՝ կենտ թիվ:

Ակնհայտ է, որ և՛ բնական, և՛ զույգ, և՛ կենտ թվերի բազմություններն անվերջ են:

2-Ի ՎՐԱ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ

2-ի վրա բաժանվում են բոլոր զույգ թվերը:

Այս հայտանիշն ունի պարզ բացատրություն: Ամենափոքր զույգ թիվը երկու թիվն է: Հաջորդ զույգ թվերը ստացվում են երկու թվին զույգ կամ կենտ թվով երկուսներ գումարելու միջոցով: Արդյունքում ցանկացած զույգ թիվ $(2n, n \in N)$ պատիկ է երկուսին, այսինքն ունի երկու բաժանարար: Ակնհայտորեն ցանկացած զույգ թիվ կբաժանվի երկուսի:

Կենտ թվերը ներկայացվում են $2n+1, n = 0,1,2,3...,$ տեսքով:

3-Ի ՎՐԱ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ

Եթե թվի թվանշանների գումարը բաժանվում են 3-ի, ապա թիվը բաժանվում է 3- ի:

Նախքան հայտանիշը հիմնավորելը, ընթերցողին հիշեցնենք թվերի՝ դպրոցից հայտնի դիրքային գրության մասին: Հայտնի է բնական թվերի գրառման և հաշվարկման տասնորդական համակարգը, որի կիրառումը կապված է մարդու երկու ձեռքի վրա տաս մատ ունենալու փաստի հետ:

$$\overline{a_n a_{n-1} ... a_0} = a_n 10^n + a_{n-1.} 10^{n-1} + ... + a_{n-n} 10^{n-n} =$$

$$a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + a_3 \times 10^3 + ... + a_n 10^n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k, n \in Q:$$

$$\overline{a_n a_{n-1} ... a_0} = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k :$$

Մասնավորապես, երկնիշ թվի համար, կունենանք.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = a_0 10^0 + a_1 10 = a_0 + a_1 10:$$

Օրինակ, $a_0 = 9, a_1 = 5$ դեպքում կունենանք

$$a_0 + a_1 10 = 9 + 5\times 10 = 9 + 50 = 59; a_0 + a_1 10 = 59:$$

Անդրադառնանք հայտանիշի հիմնավորմանը: Ցույց տանք, որ եթե $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + +a_n = 3n (n \in N)$, ապա $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ թիվը կբաժանվի 3-ի:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0} = a_0 + 10 a_1 + 10^2 a_2 + \ldots .. + 10^n a_n =$$
$$= (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 9a_1 + 99a_2 + \ldots . + 999\ldots 9a_n =$$
$$= 3n + 9(a_1 + 11a_1 + \ldots + 111\ldots 1a_n):$$

$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ թիվը ներկայացրինք այնպիսի գումարի տեսքով, որն ակնհայտորեն կբաժանվի 3-ի, քանի որ նրա յուրաքանչյուր գումարելին պատիկ է երեք թվին: Բերենք օրինակ: Ցույց տանք, որ 1959 թիվը բաժանվում է 3-ի, քանի որ նրա թվանշանների գումարը՝ 1+9+5+9=24 թիվը բաժանվում է 3-ի.

$$1959 = 9 + 5\times 10 + 9\times 100 + 1\times 1000 = 9 + 5\times 10 + 9\times 10^2 + 1\times 10^2 =$$
$$= (9 + 5 + 9 + 1) + 9\times 5 + 99\times 9 + 999\times 1 = 24 + 9(5 + 11\times 9 + 111\times 1):$$

Ստացանք՝ $1959 = 3\times 8 + 9(1\times 5 + 11\times 9 + 111\times 1)$, որն, ակնհայտորեն կբաժանվի 3-ի:

4 – Ի ՎՐԱ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ

Եթե թվի գրության վերջին երկու թվանշանով կազմավորված թիվը բաժանվում է 4-ի, կամ այդ թվանշանները զրոներ են, ապա թիվը կբաժանվի 4-ի:

Սկզբում դիտարկենք այն դեպքը, երբ թվի գրառման վերջին երկու թվանշանները զրոներ են: Թվի դիրքային գրառման մեջ կունենանք $a_1 = a_0 = 0$:

Կունենանք $\overline{a_n a_{n-1} \ldots .. a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots . 00} = 100\overline{a_n a_{n-1} \ldots \ldots a_{n-(n-2)}}:$

Վերջինս, ակնհայտորեն կբաժանվի 4-ի, քանի որ ներկայացված արտադրյալի արտադրիչներից մեկը 100-ն է, որը բաժանվում է 4-ի: Օրինակ 598700 թիվը կբաժանվի 4-ի, քանի որ.

$598700 = 100\times 5987$, որը բաժանվում է 4-ի: Կունենանք

$$\overline{a_1 a_0} = 4n\left(n \in N\right):$$

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots 00} + \overline{a_1 a_0} = 100\overline{a_n a_{n-1} \ldots \ldots a_{n-(n-2)}} + 4n:$$

Դիտարկվող թիվը ներկայացրինք երկու գումարելիների գումարի տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրի համար 4-ը բաժանարար է:

Օրինակ 598796 թիվը կբաժանվի 4-ի, քանի որ նրա գրության վերջին երկու թվանշանով կազմավորված 96 թիվը բաժանվում է 4-ի: Կունենանք. $598796 = 598700 + 96 = 100 \times 5987 + 96$:

Ստացված գումարը, ակնհայտորեն, կբաժանվի 4-ի:

5 – Ի ՎՐԱ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ

Եթե թվի գրությունն ավարտվում է 0-ով կամ 5-ով, ապա թիվը կբաժանվի 5-ի:

Այս հատկանիշն ունի պարզ մեկնաբանություն: 0 թվանշանով ավարտվող թիվը ստացվում է զույգ, 5-ով ավարտվող թվերը՝ կենտ թվով հինգեր իրար գումարելու միջոցով, ուստի նրանցից յուրաքան-չյուրը կբաժանվի 5-ի վրա:

6 – Ի ՎՐԱ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ

Այն թիվը, որը միաժամանակ բաժանվում է և' 2-ի, և' 3-ի, ապա այն կբաժանվի 6-ի: 7-ի և 8-ի բաժանելիության ձևակերպված, հայտանիշ-ներ չկան: 7-ի բաժանվում են նրան պատիկ $7n,\ n \in N$, 8-ի՝ $8n,\ n \in N$ տեսքի թվերը:

9 – Ի ՎՐԱ ԲԱԺԱՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ.

Եթե թվի գրության թվանշանների գումարը բաժանվում է 9-ի, ապա թիվը բաժանվում է 9-ի:

Հիմնավորենք հայտանիշը:

Ցույց տանք, որ եթե

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} .....a_1 a_0} = a_n \times 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} \times 10^{n-2} +$$

$$.........+ a_1 \times 10 + a_0 = a_n \times 9999........$$

$$9 + a_{n-1} \times 999.....9 + a_{n-2} \times 99.....9 + ...a_1 \times 9 +$$

$$+\left(a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_1 + a_0\right) =$$

$$= 9\left(a_n \times 1111.......1 + a_{n-1} \times 111......1 + a_{n-2} \times 11.....1 + a_1 \times 1\right) + 9n :$$

Ստացված գումարի գումարելիներից յուրաքանչյուրը ակնհայտո-րեն կբաժանվի 9-ի, հետևաբար գումարը ևս կբաժանվի 9-ի:

Բերենք օրինակ, 59608791 թվի թվանշանների գումարը՝ 5+9+6+0+8+7+9+1=(5+9+1)+(6+9)+(8+7)=15+15+15=45, բաժանվում է 9-ի: Կիրառելով հայտանիշը, ցույց տանք, որ այդ թիվը ևս կբաժանվի 9-ի:

$$59608791 = 5\times10^7+9\times10^6+6\times10^5+0\times10^4+8\times10^3+7\times10^2+9\times10+1\times 10^0 = 5\times9999999+9\times999999+6\times99999+0\times9999+8\times999+7\times99+9\times9+ +1\times9+(5+9+6+0+8+7+9+1) = 9\times(5\times1111111+9\times111111+ 6\times11111+8\times111+7\times11+9\times1+1)+45:$$

Ստացված գումարի գումարելիներից յուրաքանչյուրը, ակնհայտորեն, կբաժանվի 9-ի, հետևաբար այդ գումարը ևս կբաժանվի 9-ի:

Բաժանելիության հայտանիշների իմացությունը և առօրյա կյանքում կիրառել կարողանալը շատ է հեշտացնում չափումներ և ամենատարբեր բնույթի հաշվարկներ կատարելը: Հաճախ անհրաժեշտ է լինում չափել կամ հաշվել մեծության մեկ կամ մի քանի մասերը: Որևէ մեծության մասը (մասերը) գտնելու համար ակնհայտ է, որ այն պետք է մասնատել՝ բաժանել հավասար մասերի և նրանցից ընտրել հարկավոր թվով մասեր:

Խնդիրը հանգում է թվի (արտահայտության) մասը և տոկոսը (հարյուրերորդական մասը) գտնելուն:

1.8 ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅԱՆ (ԹՎԻ) ՄԱՍԸ ԵՎ ՏՈԿՈՍԸ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.8.1՝ Արտահայտության (թվի) պահանջվող մասը գտնելու համար հարկավոր է այն բազմապատկել մասն արտահայտող թվով: a-ի p-րդ մասը հավասար է $a\times\frac{1}{p}=\frac{a}{p}$:

ՕՐԻՆԱԿ՝ 35-ի 8-րդ մասը կլինի՝

$35\times\frac{1}{8}=\frac{35}{8}$, իսկ $\frac{3}{4}$ -րդ մասը՝ $35\times\frac{3}{4}=\frac{105}{4}=26\frac{1}{4}$:

Հաճախ հարկավոր է լինում, ոչ թե գտնել տրված թվի անհրաժեշտ մասերը, այլ հակառակը՝ մասի միջոցով գտել ամբողջը: Դիտարկենք օրինակ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Ուսումնական ձեռնարկի 84 էջը սովորելուց հետո ուսանողին մնացել է սովորել նրա $\frac{4}{7}$ -րդ մասը:

Քանի էջ ուներ ուսումնական ձեռնարկը:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Հասկանալի է, որ ձեռնարկի 84 էջը կազմում է նրա $1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$ -րդ մասը: Ուստի, էջերի որոնելի թվի $\frac{3}{7}$ -րդ մասը հավասար է 84-ի: Ձեռնարկի էջերի թիվը գտնելու համար հարկավոր է 84-ը բազմապատկել $\frac{3}{7}$ -րդի հակադարձով (հակադարձ արտահայտությունների արտադրյալը հավասար է 1-ի).

$$84\times\frac{1}{\frac{3}{7}}=84\times\frac{7}{3}=196$$: Պատ.՝ 196:

1%-ը արտահայտության հարյուրերորդական մասն է:

a –ի 1%-ը (%-ը կարդացվում է տոկոս) կլինի՝ $\frac{a}{100}$:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 1.8.2՝ Արտահայտության անհրաժեշտ տոկոսը գտնելու համար այն բազմապատկում են տոկոսն արտահայտող թվով և ստացված արտադրյալը բաժանում հարյուրի: a –ի p%-ը կլինի՝ $\frac{a\times p}{100}$:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Տնօրենը մի աշխատողի աշխատավարձը երկու անգամ հաջորդաբար բարձրացրեց 5 % - ով, մյուսինը՝ միանգամից 10 % - ով: Բարձրացումից առաջ նրանք ստանում էին հավասար աշխատավարձ: Որքա՞ն աշխատավարձ կստանան:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Աշխատողների սկզբնական աշխատավարձերը, ըստ խնդրի պայմանի, հավասար էին: Այն նշանակենք a –ով: Առաջին աշխատողի աշխատավարձը առաջին անգամ 5 % - ով բարձրացնելուց հետո կդառնա $a+\frac{a\times 5}{100}=a(1+\frac{5}{100})$:

Առաջին աշխատողի աշխատավարձը երկրորդ անգամ ևս 5 % -ով բարձրացնելուց հետո կդառնա

$$a(1+\frac{5}{100})+\frac{a(1+\frac{5}{100})\times 5}{100}=a(1+\frac{5}{100})^2 :$$

Երկրորդ աշխատողի աշխատավարձը միանգամից 10%-ով բարձրացնելուց հետո կդառնա.

$$a+\frac{a\times 10}{100}=a(1+\frac{10}{100}):$$

Բարձրացումներից հետո աշխատողների աշխատավարձերը համեմատելու համար կազմենք առաջին և երկրորդ աշխատողների բարձրացված աշխատավարձերի տարբերությունը և դիտարկենք նրա նշանը (մեծությունների բաղդատման հայտանիշը):

$$a(1+\frac{5}{100})^2-a(1+\frac{10}{100})=a[(1+\frac{5}{100})^2-(1+\frac{10}{100})]=$$
$$=a[(1+\frac{1}{20})^2-(1+\frac{1}{10})]=a(1+\frac{1}{400}+2.1.\frac{1}{20}-1-\frac{1}{10})=$$
$$=a(\frac{1}{400}+\frac{1}{10}-\frac{1}{10})=a.\frac{1}{400}>0:$$

Տարբերության նշանը ստացվեց դրական, հետևաբար առաջին աշխատողը բարձրացումից հետո կստանա ավելի բարձր աշխատավարձ, քան՝ երկրորդը:

Ուսանողների մեծ մասն ուսումնառության ընթացքում ուսման վճարները մուծելու նպատակով օգտվում են ուսանողական վարկերից: Հետագայում՝ ավարտելուց հետո, բիզնես հիմնադրելու նպատակով, ևս օգտվում են ամենատարբեր վարկերից: Շատ կարևոր է, որ վարկառուն (վարկ վերցնողը) հասկանա վարկատուին: Նա նախապես պատկերացում ունենա վարկի տոկոսների հաշվառման մասին և գաղափար ունենա մայր գումարի (վարկ) և տոկոսագումարի մարման ժամանակացույցի մասին:

Շարադրածը, առարկայական ձևով, մատուցելու նպատակով առաջադրենք այսպիսի խնդիր:

Վարկառուն, իմանալով բանկի տարեկան p % տոկոսադրույքը, բանկից վերցնում է a չափի գումար՝ n տարի ժամկետով: Որքա՞ն գումար է նա պարտավոր վերադարձնել բանկին:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Վարկառուն պարտավոր է բանկին վերադարձնել՝

Մեկ տարի հետո՝ $a_1=a+\frac{a\times p}{100}=a(1+\frac{p}{100}):$

Երկու տարի հետո՝

$$a_2 = a_1 + \frac{a_1 p}{100} = a + \frac{ap}{100} + \frac{(a+\frac{ap}{100})p}{100} = (a+\frac{ap}{100})(1+\frac{p}{100}) = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$$

$$a_2 = a(1+\frac{p}{100})^2 :$$

....

n տարի հետո՝ $a_n = a(1+\frac{p}{100})^n$ n տարիների ընթացքում կուտակված գումարը բանկին կարելի է վերադարձնել հավասար բաժիններով՝ մարելով և՛ մայր, և՛ տոկոսագումարները:

Բերենք մի օրինակ, որի միջոցով հասկանալի կդառնա բանկում գումար ներդնելու շահութաբերությունը: Ներկայացնենք այնպիսի օրինակ, որտեղ քննարկվում է ավանդ ներդնելու դեպքում ավանդատուի շահութաբերությունը:

ԽՆԴԻՐ՝ **Հայրը որդու ծննդյան օրվա կապակցությամբ բանկում ներդնում է 1000 դրամ գումար որդու մեկ տարեկան դառնալու օրը՝ 16 տարի ժամկետով, մինչև որդու չափահաս դառնալը: Բանկի շահութաբերության տարեկան տոկոսը 12 % է:**

Որքան գումար կստանա որդին չափահաս դառնալիս:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Կուտակված գումարը հաշվելու համար կօգտվենք

$a_n = a(1+\frac{p}{100})^n$ բանաձևից: Ունենք,

$a = 1000 : p = 12\% : n = 16$

$$a_{16} = 1000(1+\frac{12}{100})^{16} = 1000\times(1{,}12)^2\times(1{,}12)^2\times\ldots\times(1{,}12)^2 = 1000$$
$$\times 1{,}254\times 1{,}254\times 1{,}254\times 1{,}254\times 1{,}254\times 1{,}254\times 1{,}254\times 1{,}254 \approx$$
$$\approx 1000\times(1{,}254)^2\times(1{,}254)^2\times(1{,}254)^2\times(1{,}254)^2 \approx 1000\times$$
$$\times 1.572\times 1.572\times 1.572\times 1.572 \approx 1000\times(1{,}572)^2\times(1{,}572)^2 = 1000\times$$
$$\times(2{,}471)^2 \approx 1000\times 6.106 \approx 6105.841 a_{16} = 6105.841$$

Պատ.՝ 6105 դրամ, 841 լումա:

«Բաժանելիության հայտանիշները» թեման շարադրելիս հիշեցվեց թվերի դիրքային գրության տասնորդական համակարգի մասին: Կան թվերի դիրքային գրության այլ համակարգեր ևս: Ցանկալի է պատկերացում կազմել թվերի դիրքային գրության երկուական համակարգի մասին ևս, քանի որ համակարգիչները թվերը «ընկալում» են 0 և 1 թվանշանների միջոցով:

Այս նկատառումներից ելնելով ներկայացնենք թվերի դիրքային գրության 10-ական համակարգի ընդհանրացումը:

1.9 ԹՎԵՐԻ ԴԻՐՔԱՅԻՆ ԳՐՈՒԹՅԱՆ 10-ԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ: ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ 2-ԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԸ

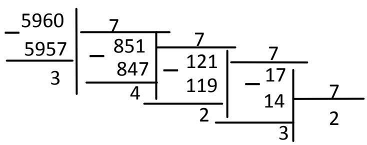
Որպեսզի թվերի դիրքային գրության գոյություն ունեցող համակարգերից յուրաքանչյուրը չնկարագրենք, ներկայացնենք թվերի դիրքային գրության համակարգի ընդհանրացումը:

Ընդհանրապես, մեկից մեծ կամայական բնական թիվը կամայական P - ական համակարգում գրառելու համար անհրաժեշտ է k հատ թվանշան՝

$a_{k-1},...,a_0$, որոնց միջոցով գրառվող թիվը կլինի՝

$$a_{k-1}p^{k-1}+...+a_0 :$$

Բերենք օրինակ: 5960 թիվը ներկայացնենք 7-ական համակարգում: Խնդիրը հանգում է 7-ական համակարգում $a_{k-1},...,a_0$ թվանշանները գտնելուն.



Կունենանք,

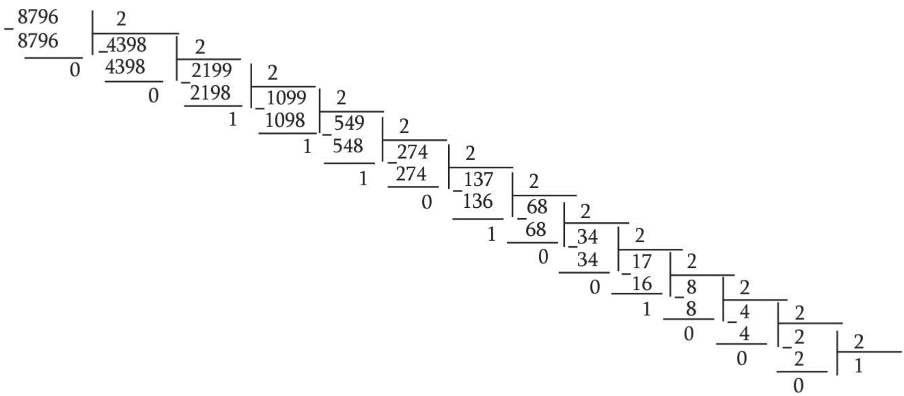
$$5960_{10}=23243_7 :$$

$$5960=2\times 7^4+3\times 7^3\times 2\times 7^2+4\times 7+3\times 7^0 :$$

5960 –ը 7-ի վրա բաժանման արդյունքում ստացանք այն հինգ թվանշանները, որոնց և 7-ի համապատասխան ցուցիչով աստիճանների արտադրյալների գումարի միջոցով գրառվում է 5960 թիվը՝ 7-ական համակարգում:

Համակարգիչների ի հայտ գալու հետ մեկտեղ, պարզվեց, որ նրանք թվաբանական գործողությունները լավ են «կատարում» հատկապես հաշվարկման 2-ական համակարգում: Դեռևս 17-րդ դարում գերմանացի մաթեմատիկոս Գ. Լայբնիցն առաջարկում էր անցում կատարել հաշվման 10-ականից՝ 2-ական համակարգի: Սակայն առաջարկը չընդունվեց նախ այն պատճառով, որ 10-ական համակարգն ավանդական է, ինչպես նաև երկուական համակարգում թվերի գրառումը չափազանց երկար է:

Բերենք օրինակ, որտեղ 8796 թիվը ներկայացվում է 2-ական համակարգում.



$8796_{10} = 10001001011100_2$:

Բերենք օրինակ, որտեղ 2-ական համակարգից անցում է կատարվում 10-ական համակարգի:

Թիվը 2-ական համակարգում ունի 011101100011_2 տեսքը:

Այդ թիվը ներկայացնենք 10-ական համակարգում: Սկզբունքորեն ունենք հակադարձ խնդիրը: Ինչպես արդեն գիտենք 0 և 1 մնացորդները ստացվում են 2-ի բաժանելու արդյունքում: Ուստի, եթե տրված թվի 0 կամ 1 թվանշանները աջից դեպի ձախ համարակալենք 0,1,2,...,13 թվանշաններով, կստանանք 2-ի համապատասխան աստիճանացույցերը: Որոնելի թիվը 10-ական համակարգում ստանալու համար հարկավոր է 2-ի համապատասխան ցուցիչներով աստիճանները բազմապատկել, համապատասխանաբար, 0-ով կամ 1-ով և ստացված արտադրյալները գումարել: Կստանանք`

$$01110110100011_2 = 0\cdot 2^{13} + 1\cdot 2^{12} +$$

$$+1\cdot 2^{11} + 1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^{9} + 1\cdot 2^{8} + 1\cdot 2^{7} + 0\cdot 2^{6} + 1\cdot 2^{5} + 0\cdot 2^{4} +$$

$$+0\cdot 2^{3} + 0\cdot 2^{2} + 1\cdot 2 + 1\cdot 2^{0} = 7587 :$$

Թվերի տեսության համայնապատկերն ունենալու նպատակով նշենք, որ բացի իրական թվերից կան նաև ոչ իրական (կոմպլեքս) թվեր: Ցանկալի է տեղեկացված լինել նաև կոմպլեքս թվերի մասին:

1.10 ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐ

Թվերի տեսության մասին տեղեկատվությունն ամբողջական դարձնելու նպատակով առաջարկվում է ծանոթանալ կոմպլեքս թվերի և նրանց հետ գործողություններ կատարելու կարգի հետ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ1.10.1՝ Կոմպլեքս թիվ է կոչվում $a+bi$ տեսքն ունեցող թիվը, որտեղ $a\in R, b\in R,$ իսկ $i-$ն հատուկ տեսակի թիվ է, այնպիսին, որ

$i^2=-1$:

$$i^3=i^2\times i=(-1)\times i=-i$$

$$i^4=i^3\times i=-i\times i=-i^2=-(-1)=1$$

$$i^5=i^3\times i^2=-i\times(-1)=i$$

$$i^6=i^5\times i=i\times i=i^2=-1$$

....

Կոմպլեքս թվերի հետ թվաբանական գործողությունները կատարում են նույնպիսի կանոններով, ինչպիսին որ կիրառում ենք բազմանդամների հետ կատարվող գործողությունների ժամանակ՝ i^2-ին փոխարինելով (-1) – ով:

Կոմպլեքս թվերի հետ կատարվող գործողությունների կանոնները լուսաբանելու նպատակով բերենք օրինակներ:

$(8+7i)+(9-6i)=(8+9)+(7i-6i)=17+1i$:

$(8+7i)-(9-6i)=(8-9)-(7i-6i)=-1-1i$:

$(8+7i)(9-6i)=8(9-6i)+7i(9-6i)=72-48i+63i-42i^2=$

$=(72-42i^2)+(63i-48i)=(72-42\times(-1))+15i=$

$=(72+42)+15i=114+15i$:

$(8+7i)(9-6i)=114+15i$:

$$\frac{8+7i}{9-6i}=\frac{(8+7i)(9+6i)}{(9-6i)(9+6i)}=\frac{72+48i+63i+42i^2}{9^2-(6i)^2}=$$

$$=\frac{(72+42\times(-1))+(48i+63i)}{81-36i^2}=\frac{30+111i}{81-36\times(-1)}=$$

$$=\frac{30+111i}{81+36}=\frac{30+111i}{117}=\frac{30}{117}+\frac{111}{117}i:$$

$$\frac{8+7i}{9-6i}=\frac{30}{117}+\frac{111}{117}i:$$

1.11 ՊԱՏՄԱԿԱՆ ԱԿՆԱՐԿ ԹՎԵՐԻ «ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ» ՊԱՏՄՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

Հին հույն մաթեմատիկոսները «իսկական» են համարել միայն բնական թվերը, բայց մեր թվարկությունից 2000 տարի առաջ հին եգիպտացիներն ու բաբելոնացիներն իրենց առօրյա հաշիվներում օգտագործել են կոտորակային թվեր:

Բացասական թվերը ներմուծել են չինացի մաթեմատիկները՝ մ.թ. 2000 տարի առաջ: Մ.թ. երրորդ դարում հույն մաթեմատիկոս Դիոֆանտը տիրապետում էր բացասական թվերի հետ գործողությունների կանոններին, իսկ 6-րդ դարում բացասական թվի գաղափարը դարձել էր հնդիկ գիտնականների ուսումնասիրության առարկան: Նրանք բացասական թվերը համեմատում էին «պարտքի» գաղափարի հետ:

Մ.թ. 8-րդ դարում արդեն հայտնի էր, որ $x^2=4$ հավասարման լուծումն ունի երկու արժեք՝ դրական և բացասական, իսկ բացասական թվի քառակուսի արմատը գոյություն չունի. չկա այնպիսի x թիվ, որի քառակուսին լինի բացասական թիվ, այսինքն՝ $x^2=-4$ հավասարումը, իրական թվերի բազմության վրա, լուծում չունի:

XVI դարում, կապված 3-րդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարումների ուսումնասիրության հետ, անհրաժեշտություն առաջացավ հաշվել բացասական թվերի քառակուսի արմատները:

1545 թվականին իտալացի մաթեմատիկոս Ջ. Կարդանոն առաջարկեց դիտարկել նոր բնույթի թվեր: Նա ցույց տվեց, որ $x^2-10x+40=0$

հավասարումն իրական լուծումներ չունի, ունի $x = 5 \pm \sqrt{-15}$ տեսքի լուծումներ, որտեղ անհրաժեշտ է $\sqrt{-15}$ արտահայտության հետ գործողություններ կատարել հանրահաշվի սովորական կանոններով, ընդամենը պայմանավորվել, որ $\sqrt{-15} = \sqrt{15 \cdot (-1)} = \sqrt{15 i^2}$:

1572 թ. լույս է տեսել իտալացի մաթեմատիկոս Ռ. Բոմբելիի հանրահաշվի գիրքը, որտեղ սահմանվում էին Կարդանոյի ներկայացրած թվերի հետ կատարվող թվաբանական գործողությունների կանոնները:

Տարեթիվը դարի վերածելու համար հարմար է գրության վերջին երկու թվանշանները մտովի ջնջել, եթե նրանցից գոնե մեկը 0 չէ, տարեթվի առաջին երկու թվանշանով կազմված թիվը մեկով մեծացնել, հակառակ դեպքում՝ թողնել նույնը:

ՕՐԻՆԱԿ՝ 1637 թ. (1637 = 1600 + 37 = XVI դար + 37 տարի՝ հաջորդ դարից = XVII դար):

Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս, փիլիսոփա Ռ. Դեկարտը ներմուծեց «կեղծ» թվեր տերմինը, իսկ 1777թ. խոշորագույն մաեմատիկոս Լ. Էյլերն առաջարկեց $i^2 = -1, i = \sqrt{-1}$:

Այս նշանակումը համընդհանուր կիրառություն ստացավ, սկսած 1831թ.՝ շնորհիվ Կ. Գաուսի: Դիտարկված $x^2 - 10x + 40 = 0$ քառակուսի հավասարումը կունենա երկու կեղծ լուծում.

$$X = 5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm \sqrt{15(-1)} = 5 \pm \sqrt{15 i^2} = 5 \pm i\sqrt{15}:$$

$$X = 5 \pm i\sqrt{15}:$$

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Գալստյան Լ. Հ., Բազմությունների տեսություն (դասախոսություններ), Երևան, ԵՊՀ, 1998:
2. Грес П. В. Математика для гуманитариев, Москва, Юрист, 2000
3. Верещагин Н. К., Шень А., Начала теории множеств, Москва, МЦНМО, 1999:
4. Тихомиров Н. Б., Шелехов А. М., Математика, учебный курс для Юристов, Москва, Юрайт, 2000г:

ԳԼՈՒԽ 2
ՈՐՈՇԻՉՆԵՐ ԵՎ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐ

2.1 2 -ՐԴ ԿԱՐԳԻ ՈՐՈՇԻՉՆԵՐ

Դիտարկենք երկու անհայտով երկու առաջին աստիճանի հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} : \qquad (1)$$

Այս համակարգի X և Y անհայտները գտնելու համար, նրանցից մեկը (օրինակ Y-ը) արտաքսենք: Այդ նպատակով առաջին հավասարումը անդամ առ անդամ բազմապատկենք b_2-ով, երկրորդը՝ b_1-ով և ապա առաջին հավասարումից հանենք երկրորդը, կստանանք,

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 .b_2 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 .b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = b_2 c_1 \\ a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = b_1 c_2 \end{cases} (2)$$

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y - (a_2 b_1 x + b_1 b_2 y) = b_2 c_1 - b_1 c_2$$

$$a_1 b_2 x - a_2 b_1 x + b_1 b_2 y - b_1 b_2 y = b_2 c_1 - b_1 c_2$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = b_2 c_1 - b_1 c_2 :$$

X անհայտը արտաքսելու նպատակով առաջին հավասարումը բազմապատկենք a_2-ով, երկրորդը՝ a_1-ով և ապա երկրորդ հավասարումից հանենք առաջինը, կստանանք,

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1 : \qquad (3)$$

Եթե $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0,$ ապա (2) և (3)հավասարումներից կստանանք (1)համակարգի լուծումները.

$$X = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} : \qquad (4)$$

Վերլուծելով (1) համակարգի (4) լուծումները գտնելու նպատակով արված ձևափոխությունները՝ նկատում ենք, որ նրանք մեծածավալ են և ժամանակատար: Նպատակահարմար չէ ամեն անգամ առաջին աստիճանի (գծային) հավասարումների համակարգ լուծելու համար կատարել նման ձևափոխություններ:

Եթե ուշադրություն դարձնենք x և y անհայտների համար ստացած (4) լուծումներին, կնկատենք, որ նրանց հայտարարների տարբերություններին մասնակցում են այդ անհայտների գործակիցները, իսկ համարիչներում գրված տարբերություններին՝ և՛ այդ անհայտների գործակիցները, և՛ ազատ անդամները: Ուստի, լուծումների արտահայտությունները ստացվում են գործակիցների և ազատ անդամների միջոցով: Հարկավոր է մշակել ընդհանուր մոտեցում և օգտվել դրանից: Յուրաքանչյուր արտահայտություն երկու գործակիցների արտադրյալների տարբերությունն է, իսկ այդ արտահայտություններին մասնակցում են չորս գործակիցներ՝ չորս թվեր: Այս դեպքում մեզ օգնում են որոշիչները:

Ընդհանրապես, եթե ունենք քառակուսի աղյուսակի ձևով դասավորված չորս թիվ՝

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2, \end{matrix}$$

ապա այս աղյուսակին համապատասխանող $A_1B_2 - A_2B_1$ տարբերությունը կոչվում է 2-րդ կարգի որոշիչ, որի նշանակման պայմանանշանը հետևյալն է.

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1: \qquad (5)$$

A_1, A_2, B_1, B_2 թվերին անվանում են (5) որոշչի տարրեր, նշանիկը (ինդեքս) ցույց է տալիս այն տողի համարը, իսկ տառի այբբենական կարգը՝ այն սյունակի համարը, որոնց հատման կետում գրված է տվյալ տարրը:

Օրինակ՝ A_1 նշանակում է՝ 1-ին սյունակի և 1-ին տողի հատման կետում գրված է տվյալ տարրը:

A_1 և B_2 տարրերով տանելով անկյունագիծ՝ կստանանք որոշիչի առաջին կամ գլխավոր անկյունագիծը, իսկ A_2 և B_1 տարրերով տարված անկյունագիծը կանվանենք երկրորդական անկյունագիծ:

(5) -ից հետևում է, որ $A_1B_2 - A_2B_1 = A_1B_2 - B_1A_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \end{vmatrix}$,

այսինքն՝ տողերը սյուներով փոխարինելիս 2-րդ կարգի որոշիչի մեծությունը չի փոխվում:

$B_1A_2 - B_2A_1 = -(A_1B_2 - A_2B_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} B_1 A_1 \\ B_2 A_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}$ այսինքն, սյունակները տեղափոխելիս փոխվում է միայն որոշիչի նշանը:

Ակներևորեն, կունենանք.

$$b_2c_1 - b_1c_2 = \begin{vmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix}, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix}, \quad a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}:$$

Ուստի (1) համակարգի (4) լուծումը, որոշիչների միջոցով, կարելի է արտահայտել այսպես.

$$X = \frac{\begin{vmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}}, \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}}: \qquad (4')$$

$(4')$ -ի հայտարարներում գրված որոշիչը կազմված է (1) համակարգի հավասարումների անհայտների գործակիցներից (համակարգի որոշիչ), իսկ համարիչներում գրված որոշիչները ստացվում են համակարգի որոշիչից, նրա մեջ, համապատասխանաբար, 1-ին կամ 2-րդ սյունակների տարրերը փոխարինելով համակարգի ազատ անդամներով: Այժմն դիտարկենք (1) համակարգի լուծումների գոյության և կոռեկտության հետ կապված հարցերը, այսինքն՝ այն հարցը թե որ դեպքում այդ համակարգն ունի միակ լուծում, որ դեպքում լուծում չունի, և որ դեպքում կունենա անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Եթե (1) համակարգի որոշիչը հավասար չէ զրոյի, ապա $(4')$ բանաձևերը տալիս են այդ համակարգի միակ լուծումը: Անհայտի արժեքը հավասար է մի կոտորակի, որի հայտարարում տված համակարգի որոշիչն է, իսկ համարիչն այնպիսի որոշիչ է, որը ստացվում է համակարգի որոշիչից՝ նրա մեջ որոնելի անհայտի գործակիցները փոխարինելով համակարգի ազատ անդամներով (նրանք գրված են հավասարումների աջ մասում):

Օրինակ ՝Լուծել հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 2x + 7y = 81 \end{cases}:$$

Հաշվենք այս համակարգի որոշիչը.

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3.7 - 2.(5) = 21 + 10 = 31 \neq 0:$$

Այն հավասար չէ զրոյի, հետևաբար, համակարգն ունի միակ լուծում: Այն գտնելու համար օգտվենք $(4')$ բանաձևերից, կստանանք.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{13.7 - 81(-5)}{31} = \frac{91 + 405}{31} = \frac{496}{31} = 16: \quad x = 16$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{3.81 - 2 \cdot 13}{31} = \frac{243 - 26}{31} = \frac{217}{31} = 7: \quad x = 7:$$

Քննարկենք այն դեպքը, երբ համակարգի որոշիչը հավասար է զրոյի: Կունենանք՝

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \Rightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

այսինքն՝ անհայտների գործակիցները համեմատական են: Այս դեպքում հնարավոր են հետևյալ երկու դեպքերը:

Ազատ անդամները համեմատական չեն անհայտների գործակիցներին: Այս դեպքում համակարգն անհամատեղ է և լուծում չունի:

Օրինակ ՝Լուծել հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ 4x-6y=5 \end{cases}:$$

Հաշվենք այս համակարգի որոշիչը.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2\cdot(-6)-4\cdot(-3) = -12+12 = 0:$$

Հաշվենք (4′) բանաձևերի մյուս որոշիչները՝

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 6\cdot(-6)-5\cdot(-3) = -36+15 = -21 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5-4\cdot 6 = 10-24 = -14 \neq 0:$$

(4′) բանաձևերի համարիչներում գրված որոշիչները տարբեր են զրոյից, իսկ հայտարարներում գրված որոշիչները հավասար են զրոյի: Ստացվում է անհամատեղ համակարգ, այսինքն, համակարգի հավասարումները համատեղելի չեն և համակարգը լուծում չունի: Մաթեմատիկորեն կունենանք՝

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Rightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}:$$

$$\begin{vmatrix} c_1 b_1 \\ c_2 b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0 \Rightarrow c_1b_2 \neq c_2b_1 \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{b_1}{b_2}:$$

$$\begin{vmatrix} a_1 c_1 \\ a_2 c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0 \Rightarrow a_1c_2 \neq a_2c_1 \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{a_1}{a_2}:$$

Արդյունքում ստացվում է $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$: Ստացվեց, որ անհայտների գործակիցները համեմատական են, բայց ազատ անդամները նրանց համեմատական չեն: Համակարգն անհամատեղ համակարգ է:

Այժմ դիտարկենք մյուս հնարավոր դեպքը.

Ազատ անդամները համեմատական են անհայտների գործակիցներին: Այս դեպքում համակարգն անորոշ է և ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Լուծել հետևյալ համակարգը. $\begin{cases} x - y\sqrt{3} = 1 \\ x\sqrt{3} - 3y = \sqrt{3} \end{cases}$:

Հաշվենք այս համակարգի որոշիչը.

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3) - \sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3}) = -3 + 3 = 0:$$

Հաշվենք մյուս որոշիչները.

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{vmatrix} = 1.(-3) - \sqrt{3}.(-\sqrt{3}) = -3 + 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 1.\sqrt{3} - \sqrt{3}.1 = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0:$$

Հետևաբար՝ տրված համակարգն անորոշ է: Իսկապես, եթե համակարգի երկրորդ հավասարումը կրճատենք $\sqrt{3}$ -ով, կտեսնենք, որ համակարգը բերվում է մեկ հավասարման՝ $x - \sqrt{3}y = 1$ և հետևաբար, ունի անթիվ լուծումներ, որ կարելի է գրել այսպես՝ $x = \sqrt{3}y + 1$, որտեղ y-ը կարող է ընդունել ցանկացած արժեք:

Մաթեմատիկորեն կունենանք՝

$$a_1b_2 = a_2b_1; c_1b_2 = c_2b_1; \ a_1c_2 = a_2c_1 \text{ կամ } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

որտեղից էլ հետևում է, որ (1) համակարգի հավասարումներից մեկը մյուսի հետևանքն է:

Ի մի բերելով քննարկված հնարավոր բոլոր դեպքերը՝ հանգում ենք հետևյալ եզրակացության՝

1. Եթե (1) համակարգի հավասարումներում անհայտների գործակիցները համեմատական չեն, ապա համակարգը համատեղ որոշյալ համակարգ է և ունի միակ լուծում: Եթե այդ հավասարումները դիտարկենք որպես ուղիղ գծերի հավասարումներ, այդ երկու ուղիղները պիտի հատվեն մի որոշակի կետում, որի կոորդինատները հենց (1) համակարգի լուծումն է:

2. Եթե անհայտների գործակիցները համեմատական են, բայց ազատ անդամները նրանց համեմատական չեն, ապա համակարգն ան-

համատեղ համակարգ է և լուծում չունի: Եթե երկրաչափորեն մեկնաբանենք, այս դեպքում երկու ուղիղները զուգահեռ են և չեն համընկնում:

3. Եթե համեմատական են անհայտների գործակիցները և ազատ անդամները, ապա համակարգն անորոշ է: Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ այդ երկու ուղիղները համընկնում են:

Մասնավորապես, եթե (1) համակարգում $c_1 = c_2 = 0$, կունենանք համասեռ համակարգ՝

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = 0 \\ a_2 x + b_2 y = 0 \end{cases} : \qquad (6)$$

Ակներևորեն, (6) համակարգի համար եզրակացության երկրորդ դեպքն անհնար է: Եթե (6) համակարգի որոշիչը զրոյից տարբեր է, ապա այն կունենա միակ լուծում՝ x=y=0 զրոյական լուծում, իսկ եթե (6) -ի որոշիչը հավասար է զրոյի՝ $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = 0,\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, ապա նրա հավասարումներից մեկը մյուսի հետևանքն է, այսինքն՝ (6) համակարգը բերվում է մեկ հավասարման, օրինակ՝ $a_1 x + b_1 y = 0$, և այն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ, որոնք որոշվում են կամայական k բազմապատկիչի $(k \neq 0,$ ոչ զրոյական լուծում) ճշտությամբ՝

$$x = kb_1 :$$

$$y = -ka_1 :$$

Երկրաչափորեն (6) համակարգի հավասարումներին համապատասխանում են սկզբնակետով անցնող կամ իրարից տարբեր, կամ համընկնող ուղիղներ:

2.2 3-ՐԴ ԿԱՐԳԻ ՈՐՈՇԻՉՆԵՐ

Դիտարկենք երեք անհայտներով երեք առաջին աստիճանի հավասարումներ հետևյալ համակարգի լուծման հարցը:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 : \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \qquad (1)$$

(1) համակարգը լուծելու համար արտաքսենք y –ը և z-ը նախորդ եղանակով:

Տված հավասարումներից առաջինն անդամ առ անդամ բազմապատկենք ℓ, երկրորդը՝ m, երրորդը՝ n թվերով, որից հետո գումարենք այդ թվերը՝ որոշելով այնպես, որպեսզի y –ի և z-ի գործակիցները հավասարվեն զրոյի: Այդ ձևով կստանանք՝

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \times \ell \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \times m \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \times n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1\ell x + b_1\ell y + c_1\ell z = d_1\ell \\ a_2mx + b_2my + c_2mz = d_2m + \\ a_3nx + b_3ny + c_3nz = d_3n \end{cases}$$

$$(a_1\ell + a_2m + a_3n)x + (b_1\ell + b_2m + b_3n)y + (c_1\ell + c_2m + c_3n)z =$$
$$= d_1\ell + d_2m + d_3n:$$

Ընդունելով՝

$$\begin{cases} b_1\ell + b_2m + b_3n = 0 \\ c_1\ell + c_2m + c_3n = 0: \end{cases} \qquad (2)$$

Կստանանք հետևյալ հավասարումը՝

$$(a_1\ell + a_2m + a_3n)x = d_1\ell + d_2m + d_3n: \qquad (3)$$

(2) համակարգի հավասարումներից որոշենք $l-$ը, m-ը, n–ը՝ ընդհանուր բազմապատկչի ճշտությամբ: Այդ նպատակով (2) համակարգի առաջին հավասարումից ℓ - ն արտահայտենք m-ով և n –ով և ստացված արժեքը տեղադրենք երկրորդ հավասարման մեջ: Կունենանք՝

$$b_1\ell + b_2m + b_3n = 0 \Rightarrow b_1\ell = -(b_2m + b_3n) \Rightarrow \ell = -\frac{b_2m + b_3n,}{b_1}$$

$$b_1 \neq 0:$$

$$-\frac{c_1(b_2m + b_3n)}{b_1} + c_2m + c_3n = 0;\ b_1 \neq 0:$$
$$-c_1(b_2m + b_3n) + b_1c_2m + b_1c_3n = 0:$$
$$-b_2c_1m - b_3c_1n + b_1c_2m + b_1c_3n = 0:$$
$$(b_1c_2 - b_2c_1)m + (b_1c_3 - b_3c_1)n = 0:$$

m-ի և n-ի արժեքները որոշենք կամայական k բազմապատկչի ճըշտությամբ՝

$$m = k(b_1c_3 - b_3c_1)$$
$$n = -k(b_1c_2 - b_2c_1):$$
$$\ell = -\frac{b_2m + b_3n}{b_1} = -(\frac{b_2}{b_1}m + \frac{b_3}{b_1}n) =$$
$$= -k(\frac{b_2}{b_1}(b_1c_3 - b_3c_1) - \frac{b_3}{b_1}(b_1c_2 - b_2c_1)) =$$
$$= -k(\frac{b_1b_2c_3}{b_1} - \frac{b_2b_3c_1}{b_1} - \frac{b_1b_3c_2}{b_1} + \frac{b_2b_3c_1}{b_1}) = -k(b_2c_3 - b_3c_2):$$
$$\ell = -k(b_2c_3 - b_3c_2):$$

(2) հավասարումներից $\ell -$ ի, m-ի, և n-ի համար ընդհանուր բազմապատկիչի ճշտությամբ, ընտրեցինք հետևյալ արժեքները՝

$$\ell = b_2c_3 - b_3c_2 = \begin{vmatrix} b_2c_2 \\ b_3c_3 \end{vmatrix}$$

$$m = -(b_1c_3 - b_3c_1) = b_3c_1 - b_1c_3 = \begin{vmatrix} b_3c_3 \\ b_1c_1 \end{vmatrix}$$

$$n = b_1c_2 - b_2c_1 = \begin{vmatrix} b_1c_1 \\ b_2c_2 \end{vmatrix}:$$

ℓ -ի, m-ի, n –ի այս արժեքները տեղադրենք (3) հավասարման մեջ: Կստանանք մի հավասարում, որի մեջ անհայտ է միայն x-ը՝

$$\left\{a_1\begin{vmatrix} b_2c_2 \\ b_3c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3c_3 \\ b_{1_1}c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1c_1 \\ b_2c_2 \end{vmatrix}\right\} \cdot x = d_1\begin{vmatrix} b_2c_2 \\ b_3c_3 \end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix} b_3c_3 \\ b_1c_1 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1c_1 \\ b_2c_2 \end{vmatrix}: \qquad (4)$$

X-ի մոտ գրված

$$a_1\begin{vmatrix} b_2c_2 \\ b_3c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3c_3 \\ b_1c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1c_1 \\ b_2c_2 \end{vmatrix}: \qquad (5)$$

գործակիցը կանվանենք ինը տարրերից կազմած

$$\begin{matrix} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \\ a_3, b_3, c_3 \end{matrix} \quad : \qquad (6)$$

քառակուսի աղյուսակին համապատասխանող 3-րդ կարգի որոշիչ և այն կնշանակենք այսպես՝

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} :$$

Եթե (5)-ում 2-րդ կարգի որոշիչները փոխարինենք իրենց արտահայտություններով, ապա 3-րդ կարգի որոշիչի համար վերջնականապես կստանանք հետևյալ արտահայտությունը.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 c_2 \\ b_3 c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 c_3 \\ b_1 c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 c_2 \end{vmatrix} =$$

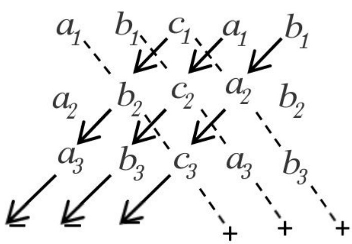
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) =$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 -$$

$$-a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 : \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_2 + a_3b_1c_2 -$$

$$-a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 : \qquad (7)$$

(7) արտահայտությունը կազմելու համար ցույց տանք պարզ եղանակ: Այդ նպատակով գրենք (6)աղյուսակը, նրա աջ կողմում կցագրելով առաջին և երկրորդ սյունակները:



(8)

Վերցնենք «+» նշանով այն երեքական տարրերի արտադրյալները, որոնք գտնվում են որոշիչի գլխավոր անկյունագծի վրա կամ նրան զուգահեռ անկյունագծերի վրա (սխեմայում այդ անկյունագծերը նշված են դեպի աջ ներքև գծիկներով), իսկ երկրորդական անկյունագծի կամ նրան զուգահեռ անկյունագծերի վրա գտնվող երեքակաև տարրերի արտադրյալները վերցնենք «-» նշանով ((8) սխեմայում դրանք նշված են դեպի ձախ ներքև սլաքներով):

Այդ վեց արտադրյալների հանրահաշվական գումարը, ինչպես երևում է (7)-ից, տալիս է (6) քառակուսի աղյուսակին համապատասխանող 3-րդ կարգի որոշիչը:

(4) հավասարման մեջ x-ի գործակիցն ու ազատ անդամը փոխարինելով 3-րդ կարգի համապատասխան որոշիչներով՝ կստանանք՝

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} d_1 b_1 c_1 \\ d_2 b_2 c_2 \\ d_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}: \qquad (9)$$

(9) հավասարման համանման հավասարումներ կարող ենք գրել y և z անհայտների համար: Կունենանք՝

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 d_1 c_1 \\ a_2 d_2 c_2 \\ a_3 d_3 c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} a_1 b_1 d_1 \\ a_2 b_2 d_2 \\ a_3 b_3 d_3 \end{vmatrix}: \qquad (9')$$

Ելնելով (9) և (9′) հավասարումներից (1) համակարգի լուծումը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 b_1 c_1 \\ d_2 b_2 c_2 \\ d_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 d_1 c_1 \\ a_2 d_2 c_2 \\ a_3 d_3 c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}}, z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 b_1 d_1 \\ a_2 b_2 d_2 \\ a_3 b_3 d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}}: \qquad (10)$$

Հանգում ենք հետևյալ եզրակացությանը.

Եթե (1) համակարգի որոշիչը հավասար չէ զրոյի, ապա այդ համակարգն ունի որոշակի լուծում, որը ստացվում է (10) բանաձևով: x-ը, y-ը, z-ն արտահայտող կոտորակների հայտարարներում գրված է տված համակարգի որոշիչը, իսկ համարիչներում՝ 3-րդ կարգի այնպիսի որոշիչներ, որոնք ստացվում են համակարգի որոշիչից (կնշանակենք Δ-ով)՝ համապատասխան անհայտի գործակիցները փոխարինելով ազատ անդամներով (և կնշանակենք համապատասխանաբար Δ_x, Δ_y, Δ_z,): 3-րդ կարգի որոշիչները կիրառվում են երեք անհայտներով երեք առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգեր լուծելիս:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Լուծել հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1: \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$$

Համակարգի որոշիչը կլինի՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-5).(-1) + 2.3.2 +$$

$$+1.3.7 - 1.(-5).2 - 1.3.7 - 2.3.(-1) =$$

$$= 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33$$

$$\Delta = 33 \neq 0:$$

Նմանապես հաշվենք Δ_x, Δ_y, Δ_z,-ը՝

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 4(-5).(-1) + 2.3.8 + 1.1.7 - 1.(-5).8 - 2.1(-1) - 4.3.7 =$$

$$= 20 + 48 + 7 + 40 + 2 - 84 = 33:$$

$$\Delta_x = 33$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 1.1(-1) + 4.3.2 + 1.3.8 - 1.1.2 - 4.3.(-1) - 1.3.8 =$$

$$= -1 + 24 + 24 - 2 + 12 - 24 = 36 - 3 = 33:$$

$$\Delta_y = 33$$

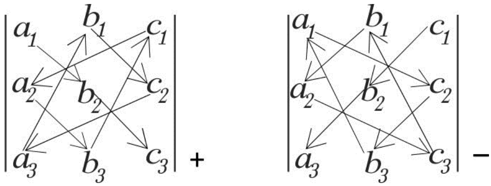
$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 1.(-5).8 + 2.1.2 + 4.3.7 - 4.(-5).2 - 2.3.8 - 1.1.7 =$$

$$= -40 + 4 + 84 + 40 - 48 - 7 = 88 - 55 = 33:$$

$$\Delta_z = 33:$$

$X = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1:$ x=1: $Y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1:$ y=1: $Z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1:$ z=1:

Հասկանալի է, որ 3-րդ կարգի որոշիչ հաշվելիս յուրաքանչյուր անգամ (8) սխեմա ստանալը և նրանից օգտվելն աշխատատար է: Հարկավոր է օգտվել ավելի հեշտ սխեմայից: Այդ նպատակով (7) արտահայտության դրական և բացասական արտադրրյալները, որոնք 3-ական են, հաշվենք հետևյալը ավելի պարզ սխեմաներով.



2.3: 3-ՐԴ ԿԱՐԳԻ ՈՐՈՇԻՉՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

3-րդ կարգի որոշիչներ հաշվելիս հաճախ նպատակահարմար է լինում նրա տողերի և սյունակների հետ կատարել գործողություններ կամ տեղափոխություններ: Նման ձևափոխությունները հեշտացնում են հաշվումները: 3-րդ կարգի որոշիչները հարկավոր ձևափոխությունների ենթարկելու համար անհրաժեշտ է իմանալ նրանց հատկությունները և կարողանալ օգտվել այդ հատկությունների կիրառական նշանակությունից:

I) Տողերը սյունակներով փոխարինելիս որոշիչի մեծությունը չի փոխվում (տողերը և սյուներն իրավահավասար են):

Այս հատկությունը կգրենք այսպես. $\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}$:

Այս հատկության ճիշտ լինելը հեշտ է ստուգել, աջ և ձախ մասերի որոշիչները հաշվելով (8) սխեմայով (ինքնուրույն աշխատանք):

II) Երկու հարևան սյունակները (կամ տողերը) տեղափոխելիս որոշիչը փոխում է միայն նշանը;

Օրինակի համար տեղափոխենք առաջին և երկրորդ սյունակները,

կունենանք՝ $\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 a_1 c_1 \\ b_2 a_2 c_2 \\ b_3 a_3 c_3 \end{vmatrix}$:

Այս հատկությունը ևս հեշտ է ստուգել՝ օգտվելով (8) սխեմայից (ինքնուրույն աշխատանք):

III) Երկու միատեսակ սյունակներ (կամ տողեր) ունեցող որոշիչը հավասար է զրոյի:

Իսկապես, մի կողմից՝ միատեսակ սյունակները տեղափոխելիս որոշիչը չի փոխվում, մյուս կողմից էլ, ըստ II հատկության, նա պետք է նշանը փոխի, այդ նշանակում է, որ $\Delta = -\Delta \Rightarrow \Delta = 0$:

Լուծենք ևս մեկ համակարգ և նրա որոշիչների հաշվումը դյուրին դարձնելու նպատակով օգտվենք 3-րդ կարգի որոշիչների հատկություններից:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Լուծել հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 : \\ 7x + 9y - 9z = 5 \end{cases}$$

Համակարգի որոշիչը կլինի՝

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \\ 7 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -1 & 1 \\ 7 & -9 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 3(7.5 - 9(-9)) =$$

$$= 3 \cdot (35 + 81) = 3 \cdot 116 = 348 :$$

$\Delta_x = 348$, որը զրոյից տարբեր է, ուստի համակարգն ունի միակ լուծում : Ըստ (10) բանաձևերի՝ կունենանք.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 28 & -4 & 9 \\ -1 & 3 & -6 \\ 5 & 9 & -9 \end{vmatrix}}{348} = \frac{3.\begin{vmatrix} 2 & 28 & 3 \\ 7 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & -3 \end{vmatrix}}{3.116} = \frac{\begin{vmatrix} 27 & -1 & 1 \\ -13 & -9 & 0 \\ 33 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{116} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -13 & -9 \\ 33 & 5 \end{vmatrix}}{116} = \frac{(-13).5 - 33.(-9)}{116} = \frac{-65 + 297}{116} = \frac{232}{116} = 2$$

$x = 2$:

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 28 & 9\\ 7 & -1 & -6\\ 7 & 5 & -9\end{vmatrix}}{348}=\frac{3.\begin{vmatrix}2 & 28 & 3\\ 7 & -1 & -2\\ 7 & 5 & -3\end{vmatrix}}{3.116}=\frac{\begin{vmatrix}9 & 27 & 1\\ 7 & -13 & 0\\ 9 & 33 & 0\end{vmatrix}}{116}=\frac{\begin{vmatrix}7 & -13\\ 9 & 33\end{vmatrix}}{116}=$$

$$=\frac{7.33-9(-13)}{116}=\frac{231+117}{116}=\frac{348}{116}=3:$$

$y=3:$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -4 & 28\\ 7 & 3 & -1\\ 7 & 9 & 5\end{vmatrix}}{348}=\frac{2.\begin{vmatrix}1 & -2 & 14\\ 7 & 3 & -1\\ 7 & 9 & 5\end{vmatrix}}{2.174}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & 14\\ 0 & -6 & -6\\ 0 & 23 & -93\end{vmatrix}}{174}=\frac{\begin{vmatrix}-6 & -6\\ 23 & -93\end{vmatrix}}{174}=\frac{6.\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 23 & -93\end{vmatrix}}{6.29}=$$

$$=\frac{(-1).(-93)-23.(-1)}{29}=\frac{93+23}{29}=\frac{116}{29}=4$$

$z=4:$

2.4 ՄԱՏՐԻՑԻ ԳԱՂԱՓԱՐԸ: ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՀԵՏ

Դիտարկենք թվերից կազմված հետևյալ աղյուսակները՝

$$\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\\ a_{21}a_{22}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_{11},a_{12},a_{13}\dots a_{1n}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1},a_{n2},a_{n3}\dots a_{nn}\end{pmatrix},$$

Այս աղյուսակները անվանում են համապատասխանաբար 2-րդ, 3-րդ, n-րդ կարգի քառակուսային մատրիցներ, իսկ a_{11}, a_{12}.... թվերը՝ մատրիցի տարրեր: a_{ij} տարրի առաջին նշանիկը՝ i –ն ցույց է տալիս, թե ո՞ր տողում, իսկ երկրորդ նշանիկը՝ j–ն, թե ո՞ր սյունակում է գտնվում այդ տարրը:

n · m թվերից կազմված հետևյալ ուղղանկյունաձև աղյուսակը՝

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \ldots a_{1m} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \ldots a_{2m} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \\ \mathrm{a}_{n1}, a_{n2}, a_{n3} \ldots a_{nm} \end{pmatrix} : \qquad (1)$$

կոչվում է $n \times m$ չափի մատրից: Եթե $n = m$, ապա այն n-րդ կարգի քառակուսային մատրից է:

Կիրառական առումով նախընտրելի է նշանակման (a_{ij}), $i = 1, 2, 3, \ldots n.$ j=1,2...,m ձևը կամ ուղղակի գրում են մեկ մեծատառով, օրինակ A տառով՝

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \ldots a_{1m} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \ldots a_{2m} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \\ a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} \ldots a_{nm} \end{pmatrix} :$$

A և B մատրիցները կոչվում են հավասար՝ A = B, եթե նրանք ունեն միևնույն թվով տողեր և միևնույն թվով սյուներ, ընդ որում, նրանց համապատասխան տարրերը նույնն են: Եթե մատրիցը կազմված է մեկ սյունից, (մեկ տողից) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$, ապա այն կոչվում է սյուն (տող) մատրից:

Քառակուսային մատրիցը կոչվում է անկյունագծային, եթե նրա բոլոր տարրերը, բացի գլխավոր անկյունագծի վրա դասավորվածներց, հավասար են զրոյի՝

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}:$$

Անկյունագծային մատրիցը կոչվում է սկալյար մատրից, եթե նրա գլխավոր անկյունագծի տարրերը միմյանց հավասար են՝

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}:$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $a = 1$, այն կոչվում է միավոր մատրից, որը նշանակում են E-ով:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}:$$

Եթե մատրիցի բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի, ապա այն կոչվում է զրոյական մատրից:

Մատրիցներն աղյուսակներ են սակայն նրանց հետ կարելի է կատարել գործողություններ՝ իրար գումարել, իրարից հանել, մատրիցան թվով բազմապատկել, մատրիցան բազմապատկել մատրիցայով:

Այժմ դիտարկենք մատրիցների հետ այդ գործողությունների կատարման կանոնակարգերը:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 2.4.1 ՝Միևնույն թվով տողեր և միևնույն թվով սյուներ (նույն չափի) ունեցող $A = (a_{ij})$ և $B = (b_{ij})$ մատրիցների գումար կոչվում է $C = (c_{ij})$ մատրից, որի յուրաքանչյուր տարր հավասար է A և B մատրիցների համապատասխան տարրերի գումարին՝- $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots n, j = 1, 2 \dots m$: $C = A + B$:

Մատրիցների գումարման գործողությունը ենթարկվում է տեղափոխական և զուգորդական օրենքներին, ընդ որում A-ն, B-ն և C-ն ունեն միևնույն թվով տողեր և միևնույն թվով սյուներ:

$1. A+B=B+A$

$2. (A+B)+C=A+(B+C)$:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Եթե

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \text{ապա}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 3+(-3) \\ 2+5 & 3+7 & 1+(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}:$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}:$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 2.4.2՝ $A=(a_{ij})$ մատրիցի և a թվի արտադրյալը կոչվում է $C=(c_{ij})$ մատրից, որտեղ $c_{ij}=a.a_{ij}$, $(i=1,2,\dots n,$ $j=1,2,\dots m)$՝ $C=a.A$:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Եթե

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ a=-3, \text{ապա}$$

$$a.A=(-3).\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3.(-3) & 2.(-3) & (-5).(-3) \\ (-1).(-3) & 2.(-3) & 3.(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -6 & 15 \\ 3 & -6 & -9 \end{pmatrix}:$$

Ուրեմն $C=\begin{pmatrix} -9 & -6 & 15 \\ 3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$:

Մատրիցը թվով բազմապատկելու գործողությունն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

$1. a.(A+B)=aA+aB,$

$2. (a+\beta)A=aA+\beta A,$

$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A),$

որտեղ A-ն և B –ն նույն չափի ուղղանկյունաձև մատրիցներ են, $\alpha\in R$, $\beta\in$ R: Միևնույն չափի A և B մատրիցների տարբերությունը՝ $(A-B)$ –ն, սահմանելու համար օգտվենք $(A+B)$-ի և $\alpha.A$-ի սահմանումներից: Կունենանք՝ $A-B=A+(-1).B$:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Եթե $A=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\2\ 3\ 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\ 1\ \text{-}3\\5\ 7\ \text{-}1\end{pmatrix}$, ապա

$$A-B=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\2\ 3\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\ 1\ \text{-}3\\5\ 7\ \text{-}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\2\ 3\ 1\end{pmatrix}+(-1).\begin{pmatrix}2\ 1\ \text{-}3\\5\ 7\ \text{-}1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\\2\ 3\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\ \text{-}1\ 3\\\text{-}5\ \text{-}7\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\ 1\ 6\\\text{-}3\ \text{-}4\ 2\end{pmatrix}:$$

$$A-B=\begin{pmatrix}-1\ 1\ 6\\\text{-}3\ \text{-}4\ 2\end{pmatrix}:$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 2.4.3՝ Եթե

$$A=\begin{pmatrix}a_{11},a_{12},a_{13}...a_{1m}\\a_{21},a_{22},a_{23}...a_{2m}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.\\ \mathrm{a}_{n1},a_{n2},a_{n3}...a_{nm}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11},b_{12},b_{13}...b_{1n}\\b_{21},b_{22},b_{23}...b_{2n}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.\\ \mathrm{b}_{n1},b_{n2},b_{n3}...bnk\end{pmatrix},\ \text{ապա}$$

A և B մատրիցների արտադրյալ կոչվում է այն $C=(c_{ij})$ մատրիցը, որն ունի m տող և k սյուն և որի տարրերը որոշվում են հետևյալ կերպ՝

$$c_{(ij)}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{kj};(i=1,2,...m,\ j=1,2...,k):$$

Գրում ենք $C=AB$ տեսքով:

Նշենք, որ A մատրիցի սյուների քանակը պետք է հավասար լինի B մատրիցի տողերի քանակին:

Հակառակ դեպքում AB արտադրյալն իմաստ չունի:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Տրված են $A=\begin{pmatrix}2\ 3\ 7\\5\ 1\text{-}4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\ 3\\2\ \text{-}5\\3\ 2\end{pmatrix}$: A-ն 2×3 չափանի է, B-ն՝ 3×2 չափանի:

Հետևապես սահմանված է նրանց արտադրյալը, ընդ որում C = AB մատրիցը պետք է լինի 2×2 չափանի:

Հաշվել AB արտադրյալը:

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 3 & 7\\ 5 & 1 & -4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -5\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.1+3.2+7.3 & 2.3+3.(-5)+7.2\\ 5.1+1.2+(-4).3 & 5.3+1.(-5)+(-4).2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & 5\\ -5 & 2\end{pmatrix}:$$

$$AB=\begin{pmatrix}29 & 5\\ -5 & 2\end{pmatrix}:$$

Լուծենք մատրիցների արտադրյալ հաշվելու ուրիշ օրինակ և հաշվենք AB և BA արտադրյալները:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Տրված են $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -6 & 11\end{pmatrix}$, և $B=\begin{pmatrix}24 & -7\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, մատրիցները:

Հաշվել AB և BA արտադրյալները:

ԼՈւԾՈւՄ՝

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -6 & 11\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}24 & -7\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.24+8.(-2) & 1.(-7)+8.3\\ (-6).24+11.(-2) & (-6).(-7)+11.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 17\\ -166 & 75\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}8 & 17\\ -166 & 75\end{pmatrix}:$$

$$BA=\begin{pmatrix}24 & -7\\ -2 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 8\\ -6 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24.1+(-7).(-6) & 24.8+(-7).11\\ (-2).1+3.(-6) & (-2).8+3.11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}66 & 115\\ -20 & 17\end{pmatrix}:$$

$$BA=\begin{pmatrix}66 & 115\\ -20 & 17\end{pmatrix}:$$

$AB\neq BA$: Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ երկու մատրիցների արտադրյալն ընդհանրապես տեղափոխելի չէ:

Մատրիցների արտադրյալը ենթարկվում է զուգորդական և բաշխական օրենքներին՝

$$A(BC)=(AB)\cdot C \quad (A+B)\cdot C=AC+BC:$$

Նշված հատկությունների ապացուցումը բաց է թողնվում:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ի. Պրիվալով, Անալիտիկ երկրաչափություն, Երևանի պետական համալսարանի հրատակչություն, Երևան, 1970 (գլուխ 6, էջ 153-169):

2. Հ. Ս. Առաքելյան, Հ. Մ. Խոսրովյան, Վ. Ա. Միրզոյան: Անալիտիկ երկրաչափություն և գծային հանրահաշիվ, «Ճարտարագետ», Երևան 2004, էջ 50:

ԳԼՈՒԽ 3
ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱ

3.1 ԻՆԴՈՒԿՑԻԱ ԵՎ ԴԵԴՈՒԿՑԻԱ

Բնական գիտություններին բնորոշ առանձնահատկությունը տեսության դեդուկտիվ կառուցումն է, որի դեպքում բոլոր պնդումները դուրս են բերվում մի քանի հիմնական դրույթներից (աքսիոմներ) դեդուկցիայի օգնությամբ, այսինքն՝ տրամաբանական արտածման միջոցով (ինդուկցիա բառը նշանակում է արտածել, դուրս բերել): Աքսիոմներ անվանում են այն ասույթները, որոնք ներկայացնում են տվյալ տեսության հիմնական հասկացությունների հատկությունները և նրանց միջև եղած կապերը: Տեսության դեդուկտիվ կառուցման օրինակ է հույն երկրաչափ Էվկլիդեսի «Հիմունքները» (մ.թ.ա.III դար), սակայն հետագայում քննադատական մոտեցումը բացահայտեց Էվկլիդեսի շարադրման մեջ եղած թերությունները: Միայն 19-րդ դարի վերջում տարբեր սերունդների երկրաչափների երկարատև և տքնաջան աշխատանքի շնորհիվ ստեղծվեց երկրաչափության լրիվ աքսիոմային համակարգը:

Համանման ձևով կառուցվել է հանրահաշվի աքսիոմային համակարգը՝ հիմնվելով հետևելու հարաբերության վրա:

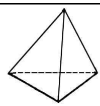
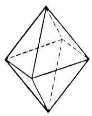
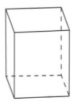
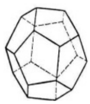
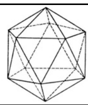
Դեդուկցիան գիտական մտածողության միակ մեթոդը չէ: Ֆիզիկա, քիմիա, կենսաբանություն գիտություններում ուսումնասիրության մեթոդը, հաճախ, դիտարկումն է և փորձին դիմելը: Դրանցում դեդուկցիային զուգահեռ օգտագործվում են ինդուկտիվ դատողություններ, որոնք կատարվում են դիտարկումների, փորձերի հիման վրա, այսինքն՝ մասնավորից ընդհանուրին անցման միջոցով:

Մաթեմատիկայում ինդուկցիայի դերը այն է, որ այն ընկած է ընտրրվող աքսիոմային համակարգի հիմքում: Ինդուկցիան հնարավորություն է ընձեռել տարբերել օգտակար թեորեմները ոչ օգտակարներից, բացահայտում է, թե ո՞ր թեորեմները կարող են ճիշտ լինել, նույնիսկ կանխագծում է ապացուցման ընթացքը: Թեորեմի ճշմարտացիությունը սկզբում ակնհայտ է դառնում փորձից և ակնառու դատողություններից, և միայն հետո է ստանում դեդուկտիվ հաստատում:

3.2 ԼՐԻՎ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱ

Ինդուկցիայի օգնությամբ կանխատեսված արդյունքը ենթակա է դեդուկտիվ ապացուցման: Հաճախ նման ապացույց կարելի է կատարել՝ քննարկելով վերջավոր թվով դեպքեր, բայց այնպես, որ նրանք սպառեն բոլոր հնարավոր դեպքերը:

Աղյուսակ 1

անվանումը	նկարը	գագաթների թիվը	նիստերի թիվը	կողերի թիվը	գ+ն-կ
1	2	3	4	5	6
տետրաէդր		4	4	6	2
օկտաէդր		6	8	12	2
խորանարդ		8	6	12	2
դոդեկաէդր (տասերկուանիստ)		20	12	30	2
իկոսաէդր (քսանանիստ)		12	20	30	2

Բերենք օրինակ: Ապացուցենք հետևյալ պնդումը. Կամայական կանոնավոր բազմանիստի համար տեղի ունի

$$Գ + Ն – Կ = 2$$

պայմանը, որտեղ

Գ – բազմանիստի գագաթների թիվն է

Ն – բազմանիստի նիստերի թիվն է

Կ – բազմանիստի կողերի թիվն է:

Հնարավոր դեպքերը հինգն են՝

1. տետրաէդր (կանոնավոր եռանկյուն բուրգ՝ քառանիստ),

2. օկտաէդր (նրա մակերևույթը սահմանափակված է ութ կանոնավոր եռանկյուններով),

3. խորանարդ,

4. դոդեկաէդր (տասերկուանիստ)

5. իկոսաէդր (քսանանիստ):

Բացի նշվածներից, այլ կանոնավոր բազմանիստեր չկան: Այս հինգ դեպքերի համար պնդումը ստուգենք վերը բերված աղյուսակ 1-ի օգնությամբ.

Բոլոր բազմանիստերի համար ունենք Գ+Ն-Կ = 2:

Վերջավոր թվով դեպքերի փորձարկման մեթոդը, որոնք սպառում են բոլոր հնարավոր դեպքերը, անվանում են լրիվ ինդուկցիայի մեթոդ:

Լրիվ ինդուկցիայի մեթոդը հնարավորություն է տալիս ընդհանուր դեպքը բաժանել վերջավոր թվով մասնավոր դեպքերի և այդ դեպքերը դիտարկել առանձին–առանձին:

3.3 ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԸ

Քանի որ մաթեմատիկական պնդումները, որպես կանոն, առնչվում են անվերջ թվով օբյեկտների հետ, ուստի լրիվ ինդուկցիայի մեթոդը մաթեմատիկայում ունի սահմանափակ կիրառման տիրույթ: Սակայն գոյություն ունի դատողության մեթոդը, որը փոխարինում է անվերջ թվով դեպքերի անիրագործելի դիտարկմանն այն հիմնավորումով, որ եթե տվյալ պնդումը ճիշտ է մի դեպքում, ապա այն ճիշտ կլինի նաև դրան հաջորդող դեպքում: Դատողության նման մեթոդը կոչվում է *մաթեմատիկական ինդուկցիա* կամ դատողություն n –ից $n+1$:

Դատողության նման եղանակը հաճախ օգտակար է լինում: Որպես օրինակ հաշվենք կենտ թվերի հաջորդական գումարները.

1,1+3, 1+3+5, 1+3+5+7,…:

Մենք կստանանք 1,4,9,16,… թվերը, որոնք 1,2,3,4,… թվերի քառակուսիներն են: Կարելի է սպասել, որ 1+3+5+7 գումարին ավելացնելով հաջորդ կենտ թիվը՝ 9-ը, կստանանք 5-ի քառակուսին, այսինքն՝ 25-ը: Իրոք, 1+3+5+7+9 = 25:

Այսպիսով՝ մենք եզրակացնում ենք, որ կամայական n բնական թվի համար ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

$$1+3+5+7+....+(2n-1)=n^2: \qquad (1)$$

Այժմ ապացուցենք մեր ենթադրությունը: Մենք պետք է ապացուցենք, որ եթե ճիշտ է

$$1+3+5+7+....+(2k-1)=k^2: \qquad (2)$$

հավասարությունը, ապա նույն հավասարությունը ճիշտ կլինի, եթե (2)-ի ձախ մասին ավելացնենք հաջորդ կենտ թիվը՝ $(2k+1)$-ը , իսկ աջ մասը փոխարինենք $(k+1)^2$ -ով, այսինքն՝

$$1+3+5+7+....+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2: \qquad (3)$$

Արդյունքում (1) հավասարության ճիշտ լինելը կամայական բնական թվի համար հանգում է նրան, որ ապացուցվի հետևյալ պընդումը.եթե ճիշտ է (2)-ը, ապա ճիշտ է նաև (3)-ը: (3) հավասարության ճշմարտացիությունն ապացուցելու նպատակով նրա ձախ մասում գրված $[1+3+5+7+....+(2k-1)]$ արտահայտությունը փոխարինենք k^2-ով:

Արդյունքում կստանանք հետևյալ նույնությունը.

$$[1+3+5+7+....+(2k-1)]+(2k+1)=(k+1)^2$$

$$k^2+2k+1=(k+1)^2=k^2+2k+1:$$

$$k^2+2k+1=k^2+2k+1:$$

Այսպիսով՝(1) հավասարությունը տեղի ունի n=k դեպքում և n=k+1 դեպքում: Եթե ընդհանրացնենք, ապա կստանանք, որ n=1 դեպքում ճիշտ է նաև $n=1+1=2-$ ը, այս դեպքում նաև $n=2+1=3$ -ը,ապա $n=3+1=4$ –ը, ճիշտ է ընդհանրապես բոլոր $n\in N$ թվերի համար:

Վերլուծելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կատարված ապացուցումը՝ նկատում ենք, որ կատարված դատողությունը բաղկացած է հետևյալ մասերից.

1. Մասնավոր դեպքերի դիտարկման հիման վրա ձևակերպվում է $T(n)$ պնդումը, որի ձևակերպման մեջ մասնակցում է n բնական թիվը: Մասնավոր դեպքերի դիտարկումը սկսվում է $n=1$ դեպքից:

2. Ցույց է տրվում, որ $T(n)$ պնդումը տեղի ունի $n=k$ դեպքում, այնուհետև ապացուցվում է, որ այն տեղի կունենա նաև $n=k+1$ դեպքում:

Որպես օրինակ, մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք հետևյալ հավասարությունը.

$$1^3+2^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2: \qquad (4)$$

1. Ցույց տանք, որ (4) հավասարությունը տեղի ունի $n=1$ դեպքում.

$$1^3=\left[\frac{1.(1+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{1.2}{2}\right]^2=1^2:1=1:$$

2. $n=k$ դեպքում կունենանք՝

$$1^3+2^3+...+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2: \qquad (4')$$

Ապացուցենք, որ (4) հավասարությունը տեղի կունենա $n=k+1$ դեպքում, այսինքն՝

$$1^3+2^3+...+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2:$$

Այդ նպատակով (4')- ի ձախ մասում ավելացնենք k –ին հաջորդող $(k+1)$ բնական թվի խորանարդը, իսկ աջ մասում k –ն փոխարինենք $(k+1)$ -ով:

$$[1^3+2^3+...k^3]+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2:$$

$$\left[\frac{k(k+1)^2}{2}\right]+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$\frac{(k+1)^2}{4}[(k^2+4(k+1)]=\frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2:$$

Արդյունքում ստանում ենք հետևյալ նույնությունը.

$$k^2+4k+4=k^2+4k+4:$$

Դիտարկված օրինակը ցույց է տալիս, որ կիրառելով ինդուկցիայի մեթոդը՝ կարելի է հաշվել գումարներ, հետևաբար՝ նաև արտադրյալներ:

3.4 ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ԵՎ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

Դպրոցում պրոգրեսիաները սահմանվում են անդրադարձ (ռեկուրենտ) առնչություններով, որոնք հնարավորություն են տալիս գտնել հաջորդականության հաջորդ անդամը մեկ կամ մի քանի նախորդ անդամների միջոցով:

Թվաբանական պրոգրեսիան տրվում է $a_{n+1} = a_n + d$, իսկ երկրաչափական պրոգրեսիան՝ $b_{n+1} = b_n.q$ անդրադարձ առնչությունների միջոցով: Ըստ էության պրոգրեսիաների սահմանումը տրվում է ինդուկցիայի օգնությամբ՝ n -ից $n+1$:

Հետևաբար, պրոգրեսիաներին վերաբերող շատ բանաձևեր նպատակահարմար է արտածել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի օգնությամբ:

Թվաբանական պրոգրեսիայի ընդհանուր անդամի բանաձևը կամայական n բնական թվի համար հետևյալն է. $a_n = a_1 + (n-1)d$:

Ապացուցենք այն մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

$n = 1$ դեպքում այն ճիշտ է, քանի որ a_n -ը և $(a_1 + (n-1)d)$ -ն $n = 1$ դեպքում հավասար են a_1 –ի:

Ենթադրենք $a_k = a_1 + (k-1)d$:

Ապացուցենք , որ $a_{k+1} = a_1 + k.d$:

$a_k = a_1 + (k-1)d$ բանաձևի մեջ K-ի փոխարեն տեղադրենք $k+1$: Կունենանք

$$a_{k+1} = a_1 + [(k+1)-1]d = a_1 + d \cdot k :$$

Այսպիսով, $a_n = a_1 + (n-1)d$ բանաձևը տեղի ունի $n = 1$ դեպքում և $n = k$ դեպքում ճիշտ լինելուց բխում է նրա ճիշտ լինելը նաև $n = k+1$ դեպքում: Հետևաբար, այն ճիշտ է կամայական n բնական թվի համար:

Համանման ձևով ցույց տանք, որ երկրաչափական պրոգրեսիայի ընդհանուր անդամը տրվում է $b_n = b_1 q^{n-1}$ բանաձևով և այն ճիշտ է կամայական n բնական թվի համար: $n = 1$ դեպքում այն ճիշտ է, քանի որ b_n -ը և $b_1 q^{n-1}$ -ը $n = 1$ դեպքում հավասար են b_1:

Այժմ ենթադրենք $b_k = b_1.q^{k-1}$: Ցույց տանք, որ $n = k+1$ դեպքում

$$b_{k+1} = b_1.q^k :$$

$b_k = b_1.q^{k-1}$ հավասարության մեջ k-ն փոխարինենք $(k+1)$ -ով, $b_{k+1} = b_1.q^{(k+1)-1} = b_1.q^k$: $b_{k+1} = b_1.q^k$, այսինքն $n = k$ դեպքում ճիշտ լինելուց բխում է նրա ճիշտ լինելը նաև $n = k+1$ դեպքում: Հետևաբար, այն ճիշտ է կամայական n բնական թվի համար:

Բերենք օրինակներ դպրոցում անցած նյութի հիշեցման նպատակով, որը կնպաստի հասկանալ ինդուկցիայի մեթոդով մասնակի գումարներ և արտադրյալներ հաշվելը :

ՕՐԻՆԱԿ՝ (a_n) *թվաբանական պրոգրեսիայում.*

$a_{11} = 67,\ \mathrm{a}_{25} = 158:$

Գտնել այն անդամի համարը, որի արժեքը 93 է:

ԼՈւԾՈւՄ՝ $\begin{cases} a_{25} = a_1 + 24d \\ a_{11} = a_1 + 10d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 158 = a_1 + 24d \\ 67 = a_1 + 10d \end{cases} -$

$158 - 67 = a_1 + 24d - (a_1 + 10d) = 14d : 14d = 91 :\ \mathrm{d} = 6.5:$

$d = 6.5:$

$67 = a_1 + 10d = a_1 + 10.6.5 = a_1 + 65 : a_1 = 67 - 65 = 2 :\ a_1 = 2:$

$a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1).6.5 = 2 + 6.5n - 6.5 = 6.5n - 4.5:$

$a_n = 6.5n - 4.5 : 6.5n = a_n + 4.5$

$$n = \frac{a_n + 4.5}{6.5} = \frac{93 + 4.5}{6.5} = \frac{97.5}{6.5} = \frac{975}{65} = 15$$

Պատ. ՝ $n = 15:$

ՕՐԻՆԱԿ՝ (b_n) երկրաչափական պրոգրեսիայում.

$b_5 - b_1 = 9$

$b_1 + b_3 = 3$

Գտնել q- ն:

ԼՈւԾՈւՄ՝ Օգտվելով $b_n = b_1 q^{n-1}$ բանաձևից, b_3-ի և b_5-ի փոխարեն տեղադրենք $b_3 = b_1 q^2$, իսկ $b_5 = b_1 q^4$:

Կստանանք.

$$\left.\begin{cases} b_5 - b_1 = 9 \\ b_1 + b_3 = 3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b_1 q^4 - b_1 = 9 \\ b_1 + b_1 q^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$b_1 q^4 - b_1 = 9 = 3.3 = 3(b_1 + b_1 q^2) : b_1 \neq 0$$

$$\frac{b_1(q^4 - 1)}{q^2} = b_1(3 + 3q^2) : q^4 - 1 = 3(1 + q^2):$$

$$\frac{q^4 - 1}{q^2 + 1} = 3 : \frac{(q^2+1)(q^2-1)}{q^2+1} = 3 : q^2 - 1 = 3 : q^2 = 4 :\ q = \pm\mathring{2}:$$

Պատ. ՝ $q = \pm\mathring{2}:$

Այժմ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով արտածենք բանաձևեր թվաբանական և երկրաչափական պրոգրեսիաների անդամների գումարների համար:

Թվաբանական պրոգրեսիայի համար կունենանք $S_n = = a_1 + a_2 + ... + a_n$: Բնական թվերի գումարը հաշվելու համար կունենանք $S_n = 1 + 2 + ... + n$:

S_n-ի համար բանաձև արտածելու համար հաշվենք մասնակի գումարները, որպեսզի օրինաչափությունը դառնա ակնհայտ:

$S_1 = 1$ $\qquad 2S_1 = 2.1 = 1.(1+1)$

$S_2 = 1 + 2 = 3$ $\qquad 2S_2 = 2.3 = 2(2+1)$

$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$ $\qquad 2S_3 = 2.6 = 3(3+4)$

$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ $\qquad 2S_4 = 2.10 = 4(4+1)$

....

....

Դա բավական է, որպեսզի կատարենք ինդուկտիվ ենթադրությունը. $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n, \quad 2s_n = n(n+1)$:

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}:$$

Քանի որ $s_1 = 1,$ իսկ $n = 1$ դեպքում $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$ ուստի մեր ենթադրությունը ճիշտ է $n = 1$ դեպքում:

Դիցուք այն ճիշտ է $n = k$ դեպքում, այսինքն

$$s_k = 1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}:$$

Այդ դեպքում կունենանք.

$$S_{k+1} = (1 + 2 + ... + k) + (k+1) = S_k + (k+1) =$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}:$$

Ստացված $S_{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ հավասարությունը $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ հավասարությունն է $n=k+1$ դեպքում՝ ինչ որ պահանջվում էր ապացուցել:

Այժմ անդրադառնանք $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ գումարը հաշվելու խնդրին:

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n=a_1+(a_1+d)+...+$$
$$+[a_1+(n-1)d]=na_1+d[1+2+...+(n-1)]:$$

$$S_n=na_1+\frac{n}{2}(n-1)d=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=$$

$$=\frac{n}{2}[a_1+a_1+(n-1)d]=\frac{n}{2}(a_1+a_{n:})$$

$$S_n=na_1+d[1+2...+(n-1)]:$$

$$1+2+...+(n-1)=\frac{1+(n-1)}{2}.\ (n-1)=\frac{n(n-1)}{2}:$$

$$S_n=na_1+\frac{n}{2}(n-1)d=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=$$

$$=\frac{n}{2}[a_1+a_1+(n-1)d]=\frac{n}{2}(a_1+a_{n:})$$

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}:$$

Համանման ձևով արտածենք երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների գումարի բանաձևը՝ օգտվելով կրճատ բազմապատկման բանաձևերից: Ապացուցենք, որ

$$S_n=b_1+b_2+...+b_n=b_1.\frac{q^n-1}{q-1},\ q\neq1:$$

$$S_1=b_1=b_1\frac{q-1}{q-1}:$$

$$S_2 = b_1 + b_2 = b_1 + b_1 q = b_1(1+q) = b_1 . \frac{q^2 - 1}{q - 1},\ \ q \neq 1:$$

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = b_1(1 + q + q^2) = b_1 \frac{q^3 - 1}{q - 1}:$$

....

....

Կարող ենք կատարել ինդուկտիվ ենթադրություն.

$$S_n = b_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}:$$

Քանի որ $S_1 = b_1$, իսկ $n = 1$ դեպքում $b_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 . \frac{q - 1}{q - 1} = b_1$, ուստի մեր ենթադրությունը ճիշտ է $n = 1$ դեպքում :

Դիցուք այն ճիշտ է $n = k$ դեպքում, այսինքն՝ $S_k = b_1 + b_2 + \ldots$ $+ b_k = b_1 . \frac{q^k - 1}{q - 1}$:

Այդ դեպքում կունենանք.

$$S_{k+1} = (b_1 + b_2 + \ldots + b_k) + b_{k+1} = S_k + b_{k+1} = b_1 . \frac{q^{k-1}}{q - 1} + b_1 q^k =$$

$$= b_1 \frac{q^k - 1 + q^k (q - 1)}{q - 1} = b_1 . \frac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q - 1} = b_1 . \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}:$$

$$S_{k+1} = b_1 . \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}:$$

Ստացված հավասարությունը $S_n = b_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$ հավասարությունն է $n = k + 1$ դեպքում:

Այսպիսով՝ $S_n = b_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$ հավասարությունը տեղի ունի $n = 1$ դեպքում և $n = k$ դեպքում ճիշտ լինելուց բխում է նրա ճիշտ լինելը նաև $n = k + 1$ դեպքում: Հետևաբար, այն ճիշտ է կամայական n բնական թվի համար:

Բերենք օրինակներ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ (a_n) թվաբանական պրոգրեսիայում.

$$a_7 = 16 \quad a_{10} = 130:$$

Գտնել S_6 – ը:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Օգտվենք $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2}.n$ բանաձևից,

կունենանք. $S_6 = \dfrac{a_1 + a_6}{2}.6 = 3.(a_1 + a_6),$

$$S_6 = 3.(a_1 + a_6):$$

a_6 -ը արտահայտենք a_1 -ով և d -ով :

Կունենանք.

$$S_6 = 3(a_1 + a_6) = 3[a_1 + (a_1 + 5d)] = 3(2a_1 + 5d):$$

$$S_6 = 3(2a_1 + 5d):$$

Ունենք երկու անհայտ և երկու պայման, որոնցից գտնենք անհայտները:

$$\begin{cases} a_7 = 16 \\ a_{10} = 130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6d = 16 \\ \dfrac{a_1 + a_{10}}{2}.10 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6d = 16 \\ a_1 + a_{10} = 26 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 + 6d = 16 \\ a_1 + a_1 + 9d = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 6d = 16 \\ 2a_1 + 9d = 26 \end{cases}:$$

Ստացված համակարգի առաջին հավասարման կրկնապատիկից հանենք երկրորդ հավասարումը: Կստանանք.

$$(2a_1 + 12d) - (2a_1 + 9d) = 32 - 26 \quad 3d = 6: \quad d = 2:$$

$$a_7 = 16 \Rightarrow a_1 + 6d = 16: \quad a_1 = 16 - 6d = 16 - 6.2 = 16 - 12 = 4$$

$$a_1 = 4:$$

a_1 -ի և d -ի համար ստացված արժեքները տեղադրենք $S_6 = 3(2a_1 + 5d)$ - ի մեջ:

Կունենանք.

$S_6 = 3(2a_1 + 5d) = 3(2.4 + 5.2) = 3(8 + 10) = 3.18 = 54:$

Պատ.՝ $54:$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը հնարավորություն է տալիս արտածել բանաձևեր շարքերի գումարներ հաշվելու համար;

Այս մեթոդով արտածենք (օրինակի համար) բանաձև հետևյալ գումարը հաշվելու համար.

$$1.2+2.3+3.4+...n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}: \qquad (1)$$

$n=1$ դեպքում (1) հավասարության երկու կողմերն էլ հավասար են 2-ի, այսինքն $n=1$ դեպքում այդ հավասարությունը տեղի ունի:

Դիցուք (1) հավասարությունը տեղի ունի $n=k$ դեպքում.

$$s_k=1.2+2.3+3.4+...+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Ուստի կարող ենք գրել

$$s_{k+1}=[1.2+2.3+3.4+...+k(k+1)]+(k+1)(k+2)=$$

$$+(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}:$$

$$S_{k+1}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}:$$

Ստացված հավասարության աջ մասը համընկնում է (1) հավասարության աջ մասի հետ $n=k+1$ դեպքում: Այսպիսով՝ (1) հավասարությունը ճիշտ է $n=1$ դեպքում և նրա $n=k$ դեպքում տեղի ունենալուց բխում է նրա տեղի ունենալը նաև $n=k+1$ դեպքում:

Ուստի, ըստ մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի, այն ճիշտ է ցանկացած բնական n -ի համար:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կարելի է ստանալ բանաձևեր նաև արտադրյալների համար: Այդ նպատակով ապացուցենք, որ

$$p_n=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}, \ n\geq 2: \qquad (2)$$

$n=2$ դեպքում (2) հավասարության երկու կողմերն էլ հավասար են 3/4-ի, այսինքն $n=2$ դեպքում այդ հավասարությունը տեղի ունի: Դիցուք (2) հավասարությանը տեղի ունի $n=k$ դեպքում.

$$p_k=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{k^2})=\frac{k+1}{2k}:$$

Կատարենք ինդուկտիվ ենթադրություն և ցույց տանք, որ (2) հավասարությունը տեղի կունենա նաև $n = k+1$ դեպքում:

$$p_{k+1} = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{k^2})(1-\frac{1}{(k+1)^2}) = p_k.(1-\frac{1}{(k+1)^2}) =$$

$$= \frac{k+1}{2k}..(1-\frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{k+1}{2k}.\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2} = \frac{k+1}{2k}.\frac{(k+1-1)(k+1+1)}{(k+1)^2} =$$

$$= \frac{k(k+2)}{2k(k+1)} = \frac{k+2}{2(k+1)}:$$

$$p_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)}:$$

Ստացված հավասարության աջ մասը համընկնում է (2) հավասարության աջ մասի հետ $n = k+1$ դեպքում:

Այսպիսով՝ (2) հավասարությունը ճիշտ է $n = 1$ դեպքում և նրա $n = k$ դեպքում տեղի ունենալուց բխում է նրա տեղի ունենալը նաև $n = k+1$ դեպքում, հետևաբար այն ճիշտ է ցանկացած բնական n –ի համար:

3.5 ՆՈՒՅՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑՈՒՄԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը հնարավորություն է տալիս ապացուցել այնպիսի նույնություններ և անհավասարումներ, որոնց երկու կողմերն էլ կախված են n բնական թվից;

Ապացուցման քայլերի հաջորդականությունն այսպիսին է .

1. Համոզվում ենք, որ ապացուցվող նույնությունը ճիշտ է $n = 1$ դեպքում:

2. Գրում ենք այն $n = k+1$ և $n = k$ դեպքերում և ստացված նույնությունների համապատասխան մասերը հանում միմյանցից:

3. Եթե նույնության ձախ կողմերի տարբերությունը հավասար լինի աջ կողմերի տարբերությունը, ապա $n = k$ դեպքում ապացուցվող նույնության տեղի ունենալուց կբխի նրա տեղի ունենալը $n = k+1$ դեպքում և դրանով իսկ, համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի, կամայական n բնական թվի համար:

Ապացուցենք, որ կամայական n բնական թվի համար ճիշտ է հետևյալ նույնությունը.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}: \quad (1)$$

1.$n=1$ դեպքում (1) նույնությունը կընդունի հետևյալ տեսքը. $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, որը ճիշտ է:

2.Գրենք (1) նույնությունը $n=k+1$ և $n=k$ դեպքերում,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(k+1)}: \quad (2)$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}: \quad (3)$$

(2) նույնությունից հանենք (3) նույնության համապատասխան մասերը, կունենանք.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}-$$

$$-(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k})=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-(\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{2k}):$$

Ապացուցման հիմնական մասը հետևյալ նույնությունն է,

$$\frac{1}{2(k+1)-1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{2k+1}:$$

Հետևաբար, եթե ճիշտ է (3) հավասարությունը, ապա ճիշտ կլինի նաև (2) հավասարությունը, և մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի շնորհիվ (1) հավասարությունը ճիշտ կլինի կամայական n բնական թվի համար:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով անհավասարումների ապացուցման ժամանակ օգտագործում են անհավասարումների հատկությունները: Վարվում ենք ճիշտ այնպես, ինչպես վարվում էինք նույնությունների ապացուցման ժամանակ:

1. Համոզվում ենք, որ ապացուցվող անհավասարումը ճիշտ է $n=1$ դեպքում, որի ճիշտ լինելն անմիջապես բխում է պայմանից:

2. Կատարում ենք ինդուկտիվ ենթադրություն, որ անհավասարումը տեղի ունի $n=k+1$ դեպքում և ընդհանրապես բոլոր n բնական թվերի համար:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Ապացուցենք, որ ցանկացած $x_1, x_{2,} \ldots, x_n$ դրական թվերի համար եթե $x_1 x_2 \ldots . x_n = 1$, ապա $x_1 + x_2 + \ldots x_n \geq n$: (4)

Երբ $n=1,$ ապա, ըստ պայմանի $x_1 = 1,$ ուստի $x_1 \geq 1,$ այսինքն՝ $n=1$ դեպքում անհավասարումը ճիշտ է:

Ենթադրենք՝ անհավասարումը ճիշտ է $n=k$ դեպքում, այսինքն՝ $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_k \geq k$: (5)

Ապացուցենք, որ (4) անհավասարումը տեղի ունի $n=k+1$ դեպքում, այսինքն՝ եթե

$x_1 . x_2 \cdot_{\ldots} . x_k . x_{k+1} = 1,$ ապա $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k+1$: (6)

Եթե $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ թվերը ցանկացած դրական թվեր են և $x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} = 1,$ ապա հնարավոր է երկու դեպք.

1) $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x_{k+1} = 1$

Այդ թվերից որևէ մեկը (օրինակ x_k –ն) մեծ է 1-ից, իսկ մեկ ուրիշը (օրինակ x_{k+1}) փոքր է 1-ից:

Առաջին դեպքում (6) անհավասարումն ակնհայտ է: Ունենք $k+1$ հատ 1-եր և նրանց գումարը հավասար է $(k+1)$ - ի:

Երկրորդ դեպքում ենթադրում ենք, որ $x_k > 1, \quad x_{k+1} < 1$ այնպես, որ $x_1 . x_2 \ldots x_{k-1} . (x_k . x_{k+1})$ դրական թվերի արտադրյալը, որոնց քանակը k է, հավասար լինի 1-ի, այսինքն՝ $x_1 . x_2 \ldots x_{k-1} . (x_k . x_{k+1}) = 1$

Համաձայն ինդուկցիոն ենթադրության՝

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k . x_{k+1} \geq k:$$

Ուստի $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} + x_k . x_{k+1} +$

$$+x_k + x_{k+1} - x_k x_{k+1} - 1 + 1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} + (x_k - 1) +$$
$$+x_{k+1}(1 - x_k) + 1 = k + 1 + (x_k - 1) - x_{k+1} \cdot (x_k - 1) =$$
$$= k + 1 + (x_k - 1)(1 - x_{k+1}):$$

Օգտվելով մեկ գումարելու և հանելու հնարքից, ստացանք՝
$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = k + 1 + (x_k - 1)(1 - x_{k+1})$, որից հետևում, որ
$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$:

Հետևաբար (4) անհավասարությունը տեղի ունի ընդհանրապես կամայական n բնական թվի համար, որը բխում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Н. Я. Виленкин. ,,Индукция.Комбинаторика'', Москва, ,,Просвещение'' 1976, стр. 4-24.:

ԳԼՈՒԽ 4
ԿՈՈՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ

4.1 ԵՐԿՈՒ ԿԵՏԵՐԻ ՀԵՌԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Վաղնջական ժամանակներից սկսած՝ մարդը ցանկացել է իր զգացածը և տեսածը նկարել, պատկերել իր բնակատեղին: Նախամարդը որսի տեսարանները պատկերել է քարանձավներում և սերունդներին թողել քարանձավային արձանագրություններ:

Մեր թվագրությունից ավելի քան մեկ դար առաջ հույն գիտնական Հիպարքոսն առաջարկեց երկրագունդը քարտեզի վրա գոտևորել զուգահեռականներով և միջօրեականներով, մտցնել այժմ արդեն հայտնի աշխարհագրական կոորդինատները՝ լայնություն, երկայնություն, և դրանք նշանակել թվերով:

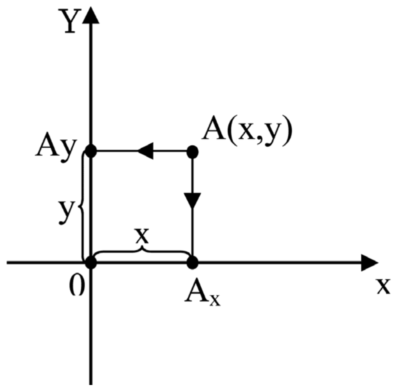
Ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Օրեսմն աշխարհագրական կոորդինատների օրինակով առաջարկեց հարթության վրա ներմուծել կոորդինատներ, հարթությունը ծածկել ուղղանկյուն ցանցով և անվանել լայնություն, երկայնություն, այն, ինչ այժմ մենք անվանում ենք աբսցիս և օրդինատ: Հարթության վրա կետի դիրքը որոշվում է երկու թվերի՝ կոորդինատների միջոցով: Երկրաչափական օբյեկտը՝ կետը, հարթության վրա փոխարինվում է (x, y) թվերի զույգով, այսինքն հանրահաշվական օբյեկտով:Պարզվեց, որ այդ նորարությունը չափազանց արդյունավետ է: Նրա հիմքի վրա առաջացավ կոորդինատների մեթոդը, որը կապեց երկրաչափությունը հանրահաշվի հետ:

Կոորդինատների մեթոդի ստեղծման պատիվը պատկանում է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Ռենե Դեկարտին:

Մենք կդիտարկենք պարզագույն և առավել հաճախ օգտագործվող կոորդինատային համակարգը, որը կոչվում է ուղղանկյուն դեկարտյան համակարգ:

Ուղղանկյուն դեկարտյան համակարգը սահմանվում է երկարությունների չափման միավորի (մասշտաբային հատված), հորիզոնական (աբսիսների առանցք՝ X) և ուղղաձիգ (օրդինատների առանցք՝ Y) փոխուղղահայաց առանցքների տրման միջոցով: Առանցքների հատման կետը կոչվում է կոորդինատների սկզբնակետ (0):

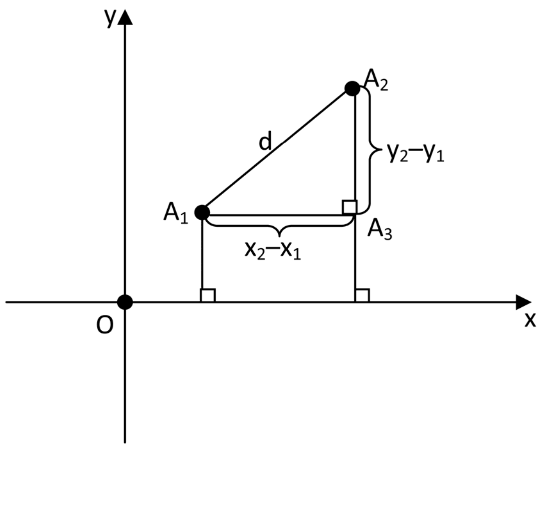
Ենթադրենք A կետը հարթության կամայական կետ է: Այդ կետից տանենք ուղղահայացներ OX և OY առանցքների նկատմամբ, այսինքն՝ A կետը պրոյեկտենք կոորդինատական առանցքների վրա (նկ.1):



Նկ. 1

Այդ ուղղահայացների հիմքերը նշանակենք համապատասխանաբար A_x և A_y : A կետի կոորդինատներն են $X = OA_x$, $Y = OA_y$ թվերը. x թիվը կոչվում է A – ի աբսիս, իսկ y թիվը՝ A–ի օրդինատ: Այդ փաստը գրում ենք այսպես՝ $A(x, y)$:

Վերլուծական երկրաչափության հաճախ հանդիպող պարզագույն խնդիրներից է տրված երկու կետերի հեռավորության որոշումը:



Նկ. 2

Դիցուք՝ հարթության վրա առաջադրված են երկու կետեր՝ $A_1(x_1 y_1)$ և $A_2(x_2 y_2)$: Արտածենք բանաձև նրանց միջև հեռավորությունը (d) հաշվելու համար՝ անկախ նրանց դասավորությունից $A_1A_2A_3$ ուղղանկյուն եռանկյան համար գրենք Պյութագորասի թեորեման և գտնենք A_1A_2 ներքնաձիգի d երկարությունը:

Պարզ է, որ

$$(A_1A_2)^2 = (A_1A_3)^2 + (A_2A_3)^2 : |A_1A_3| = x_2 - x_1,\ |A_2A_3| = y_2 - y_1 :$$

$$d^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 :$$

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 :}$$

Կետի դիրքը տարածության մեջ որոշելու համար անհրաժեշտ է մտցնել երրորդ՝ ապլիկատների առանցքը (Z): Կետի դիրքը տարածության մեջ կտրվի երեք թվերով: Տարածության մեջ դասավորված երկու կետերի հեռավորությունը կորոշվի այսպիսի բանաձևով՝

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2 :}$$

Այս բանաձևի արտածումը հանձնարարվում է որպես ինքնուրույն աշխատանք:

Գծերը և մակերևույթները, որոնք նախկինում սահմանվում էին երկրաչափորեն, կոորդինատային մեթոդի շնորհիվ, ստանում են բանաձևային նկարագրություն: Երկրաչափական օբյեկտները ստանում են մաթեմատիկական նկարագրություն, որը խթանեց կիրառական մաթեմատիկայի զարգացումը:

Հարթության վրա գոյություն ունեն նաև կոորդինատների ուրիշ համակարգեր, օրինակ կոորդինատների բևեռային համակարգը, որն օգտագործում են աշխարհագետները, հրետանավորները, կոորդինատների գնդային (սֆերիկ) համակարգը, որից օգտվում են օդանավակայաններում և այլն:

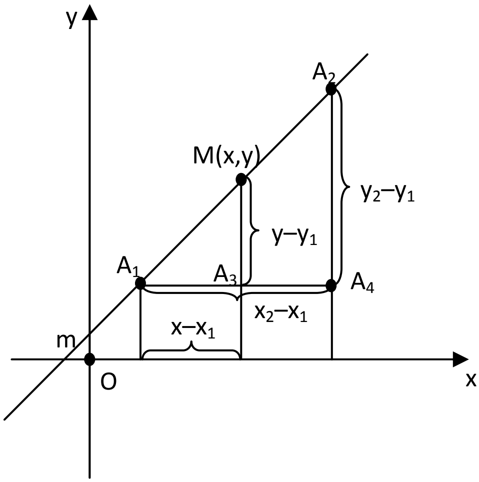
Դիցուք՝ հարթության վրա տրված է ինչ-որ կոր և ընտրված է կոորդինատների որևէ համակարգ: Ընտրված կոորդինատական համակարգում $F(x, y) = 0$ երկու անհայտներով հավասարումը կոչվում է տրված կորի հավասարում, եթե նրան բավարարում են այդ կորի վրա գտնվող ցանկացած կետի (x, y) կոորդինատները և չեն բավարարում կորի վրա չգտնվող կետերի կոորդինատները:

Վերլուծական երկրաչափության մեջ կորերն ուսումնասիրվում են նրանց հավասարումների հետազոտման միջոցով:

$Y = f(x)$ հավասարումով որոշվող կորը կոչվում է f ֆունկցիայի գծապատկեր (գրաֆիկ): Ձևակերպենք խնդիր:

Դեկարտյան կոորդինատական համակարգում արտածել ուղիղ գծի և երկրորդ կարգի կոր գծերի հավասարումները:

4.2 ՈՒՂԻՂ ԳԾԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ



Նկ. 3

Դիցուք՝ XOY դեկարտյան կոորդինատական համակարգում ուղիղ գիծն առաջադրված է իր կամայական երկու՝ $A_1(x_1, y_1)$ և $A_2(x_2, y_2)$ կետերով (նկ.3):

A_1 և A_2 (m) կետերով անցնող ուղիղ գծի հավասարումը ստանալ, նշանակում է նրա M (x, y) ընթացիկ կետի x և y կոորդինատների միջև ստանալ կապ՝ արտածել $F(x, y) = 0$ ուղիղ գծի հավասարումը:

Օգտվենք A_1MA_3 և $A_1A_2A_4$ ուղղանկյուն եռանկյունների նմանությունից: Նրանց նմանակ էջերը համեմատական են:

$$\Delta A_1MA_3 \sim \Delta A_1A_2A_4 :$$

$$\frac{A_1A_3}{A_1A_4} = \frac{MA_3}{A_2A_4} : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} : x_1 \neq x_2, \;\; y_1 \neq y_2$$

Ստացված արդյունքը՝ $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1},$ (1)

տրված $A_1(x_1, y_1)$ և $A_2(x_2, y_2)$ կետերով անցնող ուղիղի հավասարումն է :

(m) ուղիղ գծի ընդհանուր տեսքի հավասարումը ստանալու նպատակով ձևափոխենք (1) հավասարումը և ձևափոխության վերջնական արտահայտության մեջ կատարենք նշանակումներ: Կունենանք՝

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

$$(y_2 - y_1).x - x_1(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)y + y_1(x_2 - x_1) = 0$$

$$(y_2-y_1).x-(x_2-x_1)y-x_1y_2+x_1y_1+x_2y_1-x_1y_1=0$$

$$(y_2-y_1).x-(x_2-x_1)y+x_2y_1-x_1y_2+x_2y_1=0: \qquad (2)$$

Ստացված (2) հավասարման մեջ կատարենք հետևյալ նշանակումները՝

$$\left.\begin{aligned} y_{2-}y_1 &= A \\ -(x_2-x_1) &= B \\ x_2y_1-x_1y_2 &= C \end{aligned}\right\} \Rightarrow AX+BY+C=0: \qquad (3)$$

(3) հավասարումը (m) ուղիղ գծի ընդհանուր տեսքի հավասարումն է (I աստիճանի հավասարում) A և B գործակիցները միաժամանակ զրո լինել չեն կարող:

Կատարենք վարժություն:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Կազմել $A_1(2;3)$ և $A_2(-2;1)$ կետերով անցնող ուղիղի հավասարումը:

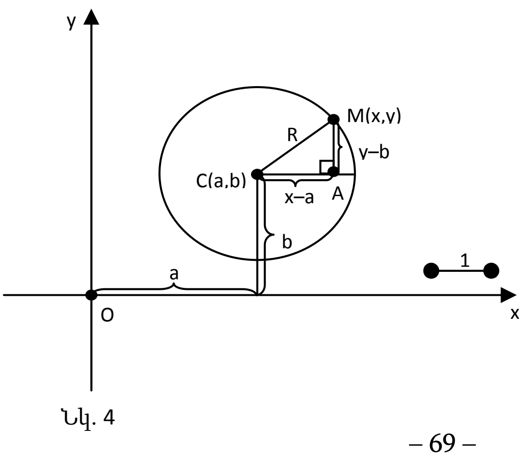
ԼՈւԾՈւՄ՝ Օգտվենք (1) հավասարումից: Կունենանք՝

$$\frac{x-2}{-2-2}=\frac{y-3}{1-3}:$$

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y-3}{-2}: x-2=2(y-3)$$

$$x-2y+4=0, \quad (A=1, B=-2, C=4):$$

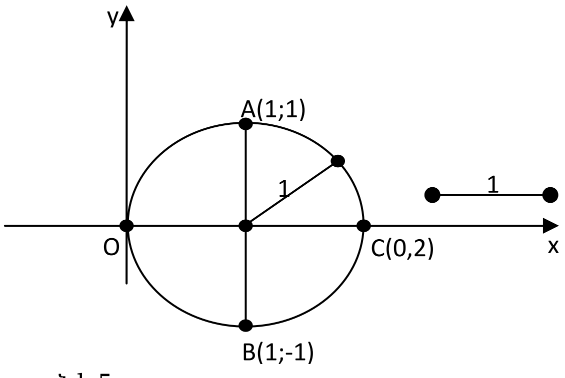
4.3 II ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ



Նկ. 4

Դիտարկենք շրջանագծի, էլիպսի, հիպերբոլի և պարաբոլի հավասարումների ստացման հետ կապված հարցերը: Նրանց հավասարումները երկրորդ աստիճանի հավասարումներ են, ուստի այդ կորերը կոչվում են II կարգի կորեր:

Դիցուք՝ XOY դեկարտյան կոորդինատական համակարգում տրված է $C(a,b)$ կենտրոնով, R շառավղով շրջանագիծը (նկ.4):



Նկ.5

Անհրաժեշտ է ստանալ կապ շրջանագծի M ընթացիկ կետի x և y կոորդինատների միջև՝ $F(x,y)=0$ հավասարման տեսքով:

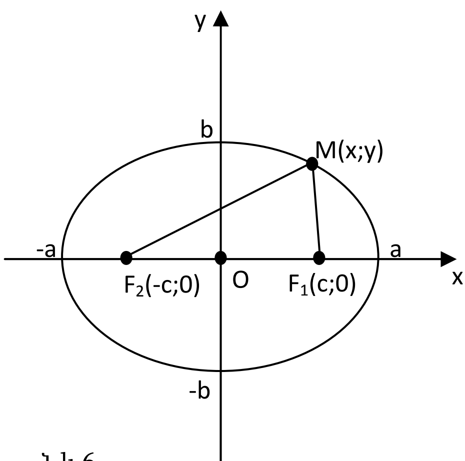
CMA ուղղանկյան եռանկյան համար գրենք Պյութագորասի թեորեման:

Կունենանք՝

$$(CM)^2=(MA)^2+(AC)^2: (X-a)^2+(y-b)^2=R^2: \quad (4)$$

ՀԵՏԵՎԱՆՔ՝ Եթե շրջանագծի կենտրոնը համընկնի կոորդինատների սկզբնակետի հետ, այսինքն, եթե $a=0; \quad b=0,$ ապա (4) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x^2+y^2=R^2: \quad (5)$$



Նկ.6

Բացատրությունը հասկանալի դարձնելու նպատակով կատարենք վարժություն:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Շրջագիծն անցնում է $A(1;1), \quad B(1;-1)$ և $C(2;0)$ կետերով: Կազմել այդ շրջանագծի հավասարումը:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ XOY դեկարտյան կոորդինատական համակարգում կառուցենք տրված կետերը և նրանցով անցնող շրջանագծի նկար 5-ից ակնհայտորեն ստացվում է այդ շրջանագծի որոնելի հավասարումը $(x-1)^2+y^2=1$: Արտածենք էլիպսի հավասարումը: Էլիպսը սահմանվում է որպես կոր, որը բաղկացած է հարթության այն կետերից, որոնց հեռավորությունների գումարը տրված F_1 և F_2 կետերից հաստատուն է:

F_1 և F_2 կետերը կոչվում են էլիպսի կիզակետեր (ֆոկուսներ) (նկ.6):

Էլիպսի հավասարումն իրենից ներկայացնում է M ընթացիկ կետի x և y կոորդինատների միջև կապ՝ $F(x,y)=0$ հավասարման տեսքով:

Այդ կապը ստանալու համար օգտվենք էլիպսի սահմանումից՝

$$MF_1+MF_2=2a$$

$$MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}:$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2=(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2:$$

$$(x+c)^2-(x-c)^2=4a(a-\sqrt{(x-c)^2+y^2})$$

$$(x+c-x+c)(x+c+x-c)=4a(a-\sqrt{(x-c)^2+y^2})$$

$$4cx=4a(a-\sqrt{(x-c)^2+y^2})$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

$$a^2[(x-c)^2+y^2]=(a^2-cx)^2:$$

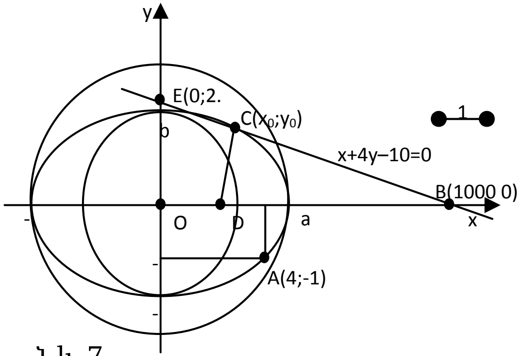
$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$(a^2-c^2).x^2+a^2x^2=a^4-a^2c^2=a^2(a^2-c^2):$$

$$a^2-c^2=b^2\Rightarrow b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1: \qquad (5)$$



Նկ. 7

(5) հավասարումը a և b մեծ և փոքր կիսաառանցքներով էլիպսի կանոնական հավասարումն է: Կատարենք մի վարժություն:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Էլիպսը անցնում է $A(4;-1)$ կետով և շոշափում է $x+4y-10=0$ ուղիղին: Կազմել այդ էլիպսի հավասարումը, պայմանով, որ նրա առանցքները համընկնում են կոորդինատական առանցքների հետ:

ԼՈւԾՈՒՄ՝ XOY դեկարտյան կոորդինատական համակարգում կառուցենք $A(4;-1)$ կետը $x+4y-10=0$ հավասարումով տրված ուղիղ գիծը, օրինակի պայմաններին բավարարող էլիպսը, որի հավասարումնն անհրաժեշտ է ստանալ:

Օգտվենք էլիպսի (5) կանոնական հավասարումից՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1:$$

Անհրաժեշտ է գտնել էլիպսի a և b մեծ և փոքր կիսաառանցքները: Ըստ պայմանի էլիպսն անցնում է $A(4;-1)$ կետով, ուստի այդ կետի կոորդինատները կբավարարեն էլիպսի հավասարմանը, այսինքն՝

$$\frac{4^2}{a^2}+\frac{(-1)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{16}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1:$$

Նկար 7-ից երևում է, որ C կետի x_0, y_0 կոորդինատները (C-ն էլիպսի և ուղիղ գծի շոշափման կետն է) ևս պետք է բավարարեն էլիպսի որոնելի հավասարմանը: Կունենանք՝ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$: Վերլուծական երկբաշափությունից հայտնի է, որ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսին նրա $C(x_0, y_0)$ կետում տարված շոշափողն ունի հետևյալ հավասարումը՝

$$\frac{x_0}{a^2}.x+\frac{y_0}{b^2}.y=1: \qquad (6)$$

(6) հավասարումը լուծենք y –ի նկատմամբ: Կունենանք՝

$$\frac{y_0}{b^2}.y=1-\frac{x_0}{a^2}.x$$

$$y=-\frac{b^2}{y_0}.\frac{x_0}{a^2}.x+\frac{b^2}{y_0}$$

$$y=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{x_0}{y_0}.x+\frac{b^2}{y_0}: \qquad (7)$$

Շոշափողի (7) հավասարումը համարժեք է վարժության պայմանում տրված $x+4y-10=0$ հավասարմանը: Վերջինս, նույնպես, լուծենք y –ի նկատմամբ: Կունենանք՝ $y=-\frac{1}{4}.x+\frac{10}{4}$: (8)

Փաստացի (7)-ը և (8)–ը նույն ուղիղ գծի հավասարման տարբեր տեսքերն են: Ուստի, նրանք համարժեք են: (7) և (8) հավասարումների բաղդատումից կունենանք՝

$$\begin{cases} -\frac{b^2}{a^2}.\frac{x_0}{y_0}=-\frac{1}{4} \\ \frac{b^2}{y_0}=\frac{10}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_0=\frac{a^2}{10} \\ y_0=\frac{4}{10}b^2=\frac{2}{5}b^2: \end{cases} \qquad (9)$$

Քանի որ $C(x_0, y_0)$ կետը դասավորված է էլիպսի վրա, կունենանք՝ $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$: (10)

(9) համակարգից x_0 -ի և y_0 -ի արժեքները տեղադրենք (10) հավասարման մեջ:

Կունենանք՝

$$\frac{\left(\dfrac{a^2}{10}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\dfrac{2}{5}b\right)^2}{b^2}=1 \qquad \frac{a^2}{100}+\frac{4b^2}{25}=1:$$

Էլիպսի a և b մեծ և փոքր կիսաառանցքները գտնելու համար ստացանք երկու հավասարում՝

$$\frac{16}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

$$\frac{a^2}{100}+\frac{4b^2}{25}=1:$$

a և b կիսաառանցքները գտնելու համար համատեղ լուծենք վերջին երկու հավասարումները: Կունենանք՝

$$\begin{cases}\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1\\[2mm] \dfrac{a^2}{100}+\dfrac{4b^2}{25}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{16}{a^2}=1-\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{b^2-1}{b^2}: a^2=\dfrac{16b^2}{b^2-1}\\[2mm] \dfrac{16b^2}{100(b^2-1)}+\dfrac{4b^2}{25}=1\end{cases}$$

$$\frac{4b^2}{25(b^2-1)}+\frac{4b^2}{25}=1$$

$$4b^2+4b^2(b^2-1)=25(b^2-1)$$

$$4b^2+4b^4-4b^2=25b^2-25$$

$$4b^4-25b^2+25=0$$

$$b^2=\frac{25\pm\sqrt{625-400}}{8}=\frac{25\pm\sqrt{225}}{8}:$$

$$b^2=\frac{25\pm 15}{8} \qquad b_1^2=5: a_1^2=\frac{16b_1^2}{b_1^2-1}=\frac{80}{4}=20$$

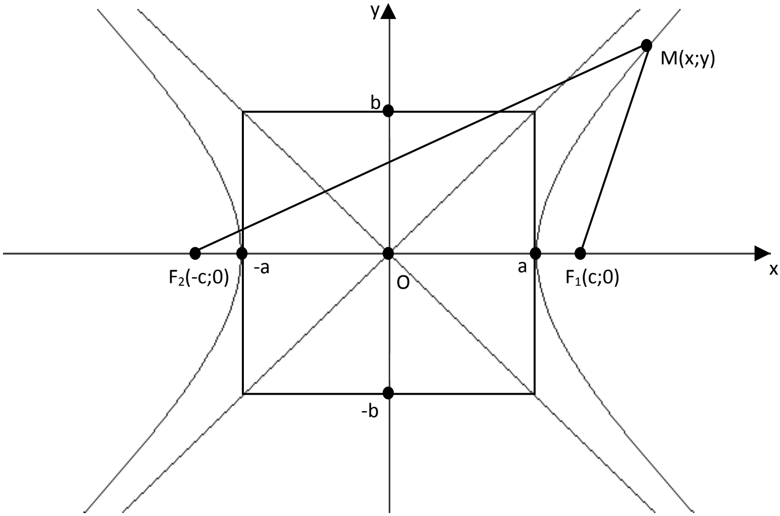
$$b_2^2=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}: \qquad a_2^2=\frac{16.\dfrac{5}{4}}{\dfrac{5}{4}-1}=\frac{20.4}{5-4}=80:$$

Էլիպսի որոնելի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \text{ կամ ՝ } \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1$$

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1 \text{ կամ } \frac{x^2}{90}+\frac{4y^2}{5}=1:$$

Արտածենք հիպերբոլի հավասարումը: Հիպերբոլը սահմանվում է որպես կոր, որը բաղկացած է հարթության այն կետերից, որոնց հեռավորությունների տարբերությունը տրված F_1 և F_2 կետերից հաստատուն է: F_1 և F_2 կետերը կոչվում են հիպերբոլի կիզակետեր (նկ. 8):



Նկ. 8

Հիպերբոլի հավասարումն իրենից ներկայացնում է նրա M ընթացիկ կետի X և Y կոորդինատների միջև կապ՝ $F(x,y)=0$ հավասարման տեսքով: Այդ կապը ստանալու համար օգտվենք հիպերբոլի սահմանումից՝

$$MF_2-MF_1=2a$$

$$MF_2=\sqrt{(X+C)^2+y^2}$$

$$MF_1=\sqrt{(X-C)^2+y^2}$$

$$\sqrt{(X+C)^2+y^2}-\sqrt{(X-C)^2+y^2}=2a$$
$$(X+C)^2+y^2=4a^2+(X-C)^2+y^2+4a\sqrt{(X-C)^2+y^2}$$
$$(X+C)^2-(X-C)^2=4a^2+4a\sqrt{(X-C)^2+y^2}$$
$$4cX=4a^2+4a\sqrt{(X-C)^2+y^2}$$
$$(a\sqrt{(X-c)^2+y^2})^2=(cX-a^2)^2$$
$$a^2[(X-c)^2+y^2]=c^2X^2+a^4-2ca^2X$$
$$a^2X-a^2c^2-2ca^2X+a^2y^2=c^2X^2-2ca^2X$$
$$(c^2-a^2).X-a^2y^2=a^2c^2-a^4=a^2(c^2-a^2)$$
$$c^2-a^2=b^2$$
պայմանից հետևում է , որ
$$b^2X^2-a^2y^2=a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1: \quad (11)$$
(11) հավասարումը հիպերբոլի որոնելի կանոնական հավասարումն է:

Կատարենք վարժության օրինակ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Կազմել $5x-6y-16=0$ և $13x-10y-48=0$ ուղիղները շոշափող հիպերբոլի հավասարումը, պայմանով, որ նրա առանցքները համընկնեն կոորդինատային առանցքների հետ:

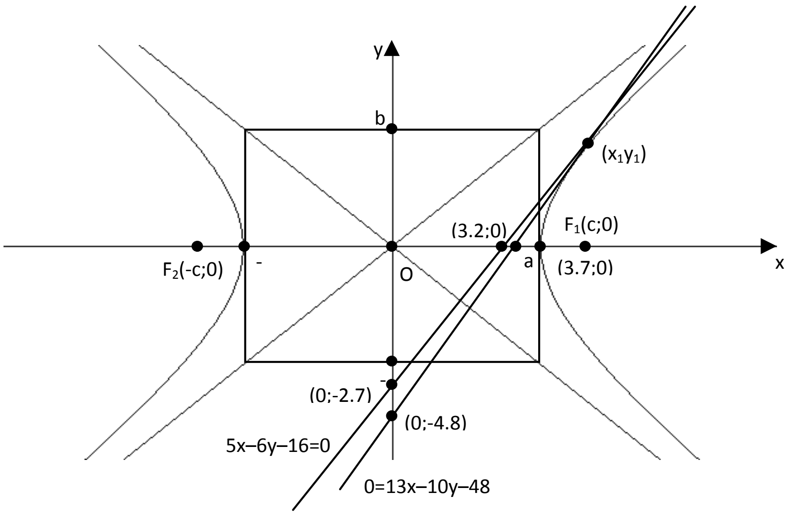
ԼՈՒԾՈՒՄ՝՝ XOY դեկարտյան կոորդինատական համակարգում կառուցենք $5x-6y-16=0$, $13x-10y-48=0$ ուղիղները և օրինակի պայմանները բավարարող հիպերբոլը, որի հավասարումը անհրաժեշտ է ստանալ (նկ.9):

Օգտվենք հիպերբոլի (11) կանոնական հավասարումից՝ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: Անհրաժեշտ է գտնել հիպերբոլի a և b մեծ և փոքր կիսաառանցքները:

Վերլուծական երկրաչափությունից հայտնի է, որ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ հիպերբոլին նրա (x_0y_0) կետում տարված շոշափողն ունի հետևյալ հավասարումը՝ $\frac{x_0}{a^2}.x-\frac{y_0}{b^2}.y=1$:

5x – 6y – 16 = 0 ուղիղի և հիպերբոլի շոշափման կետի կոորդինատները նշանակենք (x_1, y_1), իսկ 13x – 10y – 48 = 0 ուղիղի և հիպերբոլի շոշափման կետի կոորդինատները՝ (x_2, y_2) – ով: Կունենանք՝

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x_1}{a^2}X-\dfrac{y_1}{b^2}Y=1\\ \dfrac{5}{16}X-\dfrac{6}{16}=1\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x_2}{a^2}X-\dfrac{y_2}{b^2}y=1\\ \dfrac{13}{48}X-\dfrac{10}{48}y=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x_1}{a^2}=\dfrac{5}{16}\\ \dfrac{y_1}{b^2}=\dfrac{6}{16}\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{x_2}{a^2}=\dfrac{13}{48}\\ \dfrac{y_2}{b^2}=\dfrac{10}{48}\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}X_1=\dfrac{5}{16}a^2\\ y_1=\dfrac{6}{16}b^2\end{cases}\\ \begin{cases}X_2=\dfrac{13}{48}a^2\\ y^2=-\dfrac{10}{48}b^2\end{cases}\end{array}\right. :$$



Նկ. 9

$$\begin{cases}\dfrac{x_2}{a^2}-\dfrac{y_2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_2}{a^2}-\dfrac{y_2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{25}{256}a^2-\dfrac{36}{256}b^2=1\\ \dfrac{169a^2}{2304}-\dfrac{100}{2304}b^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}25a^2-36b^2=256\\ 169a^2-100b^2=2304\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}625a^2-900b^2=6400\\ 1521a^2-900b^2=20736\end{cases}: \qquad (12)$$

(12) համակարգի II հավասարումից հանենք I հավասարումը: Կունենանք՝

$1521a^2 - 900b^2 - 625a^2 + 900b^2 = 20736 - 6400 = 14336:$

$896a^2 = 14336$

$a^2 = 16:$

$25a^2 - 36b^2 = 256 \Rightarrow 36b^2 = 25a^2 - 256 = 25.16 - 256 = 400 - 256:$

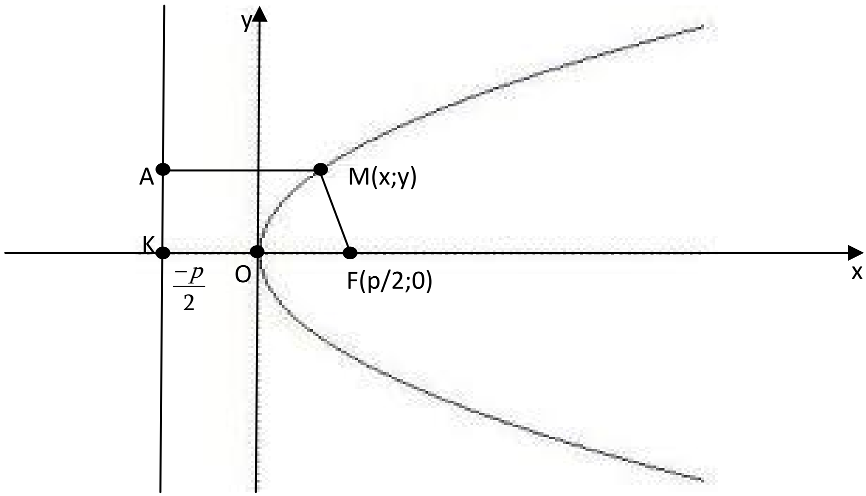
$36b^2 = 144$

$b^2 = 4$

a^2 -ու և b^2-ու ստացված արժեքները տեղադրելով (11) -ում, կստանանք հիպերբոլի որոնելի հավասարումը՝ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1:$

Դիտարկենք պարաբոլի հավասարումն արտածելու հարցը: Պարաբոլը սահմանվում է որպես կոր, որը բաղկացած է հարթության այն կետերից, որոնց հեռավորությունները տրված կետից (պարաբոլի կիզակետ) և տրված ուղիղից իրար հավասար են:

Ուղիղը կոչվում է պարաբոլի դիրեկտրիս (նկ. 10):



Նկ.10

Պարաբոլի հավասարումն իրենից ներկայացնում է նրա M ընթացիկ կետի x և y կոորդինատների միջև կապ՝ $F(x, y) = 0$ հավասարման տեսքով: Այդ կապը ստանալու համար օգտվենք պարաբոլի սահմանումից՝

$$MA = MF$$

$$MA = X + \frac{p}{2}$$

$$NF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{\left(x - \frac{p}{2} \right)^2 + y^2} \right)^2 = (x + \frac{p}{2})^2$$

$$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$$

$$y^2 = (x + \frac{p}{2})^2 - (x - \frac{p}{2})^2 = (x + \frac{p}{2} + x - \frac{p}{2})(x + \frac{p}{2} - x + \frac{p}{2}) = 2PX$$

$$y^2 = 2PX \quad (13)$$

հավասարումը կոչվում է պարաբոլի կանոնական հավասարում:

Կատարենք վարժության օրինակ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Տրված են պարաբոլի $A(6;-3)$ գագաթը և դիրեկտրիսի $3x-5y+1=0$ հավասարումը: Գտնել այդ պարաբոլի F ֆոկուսի կոորդինատները:

ԼՈւԾՈւՄ՝ (XOY) դեկարտյան կոորդինատական համակարգում կառուցենք պարաբոլի $A(6;-3)$ գագաթը և $3x-5y+1=0$ հավասարումն ունեցող դիրեկտրիսը (նկ. 11): Օրինակի վարժությունը համառոտագրենք.

$A(6;-3)$: Գագաթ

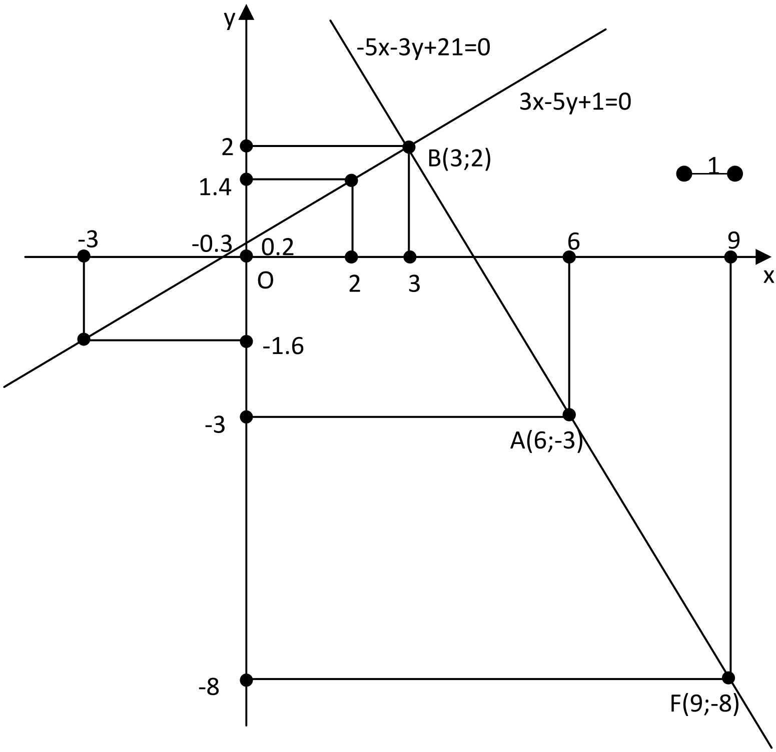
$3x-5y+1=0$: Դիրեկտրիսա

$F(X_F;Y_F)=?$

Խնդիրը հանգում է F կետի կոորդինատները գտնելուն: Նկար 11-ում դիրեկտրիսը կառուցված է նրա երկու կամայական կետերի օգնությամբ:

Աղյուսակ 2

X	Y
2	1,4
-3	-1,6



Նկ. 11

Պարաբոլի F գագաթը դասավորվում է նրա $A(6;-3)$ գագաթից դիրեկտրիսին տարված ուղղահայաց ուղիղի վրա: Առաջին հերթին գտնենք վերջինիս հավասարումը՝ $y = KX + m$ տեսքով, որտեղ K-ն այդ ուղիղի անկյունային գործակիցն է, m-ը՝ ազատ անդամը:

Վերլուծական երկրաչափությունից հայտնի է, որ ուղիղների ուղղահայացության բանաձևային պայմանը նրանց անկյունային գործակիցների արտադրյալը -1-ի հավասար լինելն է, այսինքն՝ դիրեկտրիսին ուղղահայաց ուղիղի K անկյունային գործակիցը հավասար է դիրեկտրիսի անկյունային գործակցի հակադարձին՝ հակառակ նշանով:

$K = -\frac{5}{3}$:

Կունենանք՝

$y=-\frac{5}{3}X+m$: m ազատ անդամը գտնելու համար այդ հավասարման մեջ տեղադրենք պարաբոլի $A(6;-3)$ գագաթի կոորդինատները: Կունենանք՝ $-3=-\frac{5}{3}\cdot 6+m$

$$m-10=-3$$

$$m=7,$$

այսինքն՝ $y=-\frac{5}{3}X+7$, որը կլինի դիրեկտրիսին՝ $A(6;-3)$ կետից տարված ուղղահայաց ուղիղի հավասարումը: Հենց այդ ուղիղի վրա է դասավորված F որոնելի կետը:

Այժմ գտնենք դիրեկտրիսի ուղիղի և նրան ուղղահայաց ուղիղի հատման կետի կոորդինատները՝ $B(x_0,y_0)$: X_0-ն և y_0-ն գտնելու համար համատեղ լուծենք $3x-5y+1=0$ և $-5x-3y+21=0$ հավասարումները:

$$\begin{cases}3x_0-5y_0+1=0 & \Big|\times 5\\ -5x_0-3y_0+21=0 & \Big|\times 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}15x_0-25y_0+5=0\\ -15x_0-9y_0+63=0\end{cases}$$

$$15x_0-25y_0-15x_0-9y_0=-5-63=-68:$$

$$-34y_0=-68\quad y_0=2$$

$$y_0=2\Rightarrow x_0=\frac{5}{3}y_0-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}.2-\frac{1}{3}=\frac{10}{3}-\frac{1}{3}=\frac{9}{3}=3:$$

Պարաբոլի սահմանումից հետևում է, որ նրա $A(6;-3)$ գագաթը BF հատվածի միջնակետն է: BF հատվածի F ծայրակետի կոորդինատները գտնելու նպատակով օգտվենք հատվածի միջնակետի կոորդինատները նրա ծայրակետերի կոորդինատների միջոցով գտնելու բանաձևերից: Կունենանք՝

$$\begin{cases}X_A=\dfrac{x_B+x_F}{2}\\ Y_A=\dfrac{y_B+y_F}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_F = 2X_A - X_B \\ y_F = 2Y_A - Y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_F = 2.(6) - 3 = 12 - 3 = 9 \\ Y_F = 2.(-3) - 2 = -6 - 2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_F = 9 \\ Y_F = -8 \end{cases}:$$

Պատ.՝ $F(9;-8)$:

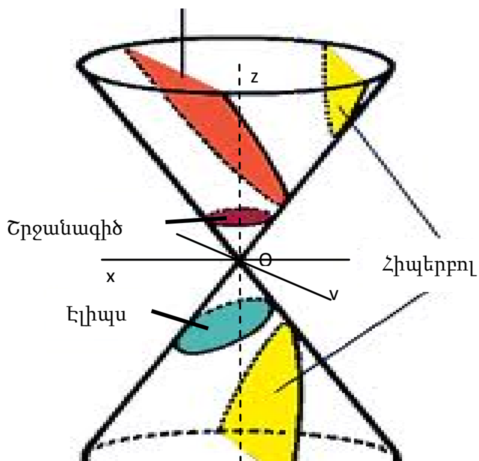
Ստացանք F ֆոկուսի կոորդինատները:

Եթե օրդինատների առանցքը հանդիսանա պարաբոլի առանցքը, նրա հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝ $Y = PX^2$, որն ընդունված է գրել $Y = aX^2$ տեսքով:

Ցանկացած քառակուսի եռանդամի գրաֆիկ պարաբոլ է: Շրջանագիծը, էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը կոնական մակերևույթների հատույթներ են: Սահմանափակ հատույթունները ստացվում են շրջանագծեր և էլիպսներ, անսահմանափակները՝ հիպերբոլներ (եթե հարթությունը հատում է կոնի երկու խոռոչները) և պարաբոլներ (եթե հարթությունը հատում է միայն մեկ խոռոչը) (նկ.12):

Կոնական հատույթների բոլոր տեսակները կարելի է ստանալ գրպանի լապտերիկի օգնությամբ, եթե նրա լույսն ուղղենք հարթ մակերեսի վրա տարբեր անկյուններով: Էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլն օժտված են օպտիկական հատկություններով:

Էլիպսի մի ֆոկուսում գտնվող լույսի աղբյուրից դուրս եկող լույսի ճառագայթն էլիպսից անդրադառնալով ուղղվում է դեպի մյուս ֆոկուսը: Այս հատկությունն ընկած է էլիպսի ձև ունեցող շինություններում ակուստիկական էֆեկտի հիմքում:



Նկ.12

Հիպերբոլի ֆոկուսից դուրս եկող ճառագայթն անդրադարձումից հետո շարժվում է այնպես, ինչպես եթե նա դուրս գար մյուս ֆոկուսից: Հիպերբոլի այս հատկությունն օգտագործվում է զանազան օպտիկական սարքերի արտադրության մեջ:

Պարաբոլի ֆոկուսում տեղադրված լույսի աղբյուրից եկող լույսի ճառագայթն անդրադարձումից հետո ուղղվում է նրա առանցքին զուգահեռ: Պարաբոլի այս հատկությունն օգտագործում են լուսարձակների, մեքենաների լույսերի, գրպանի և ձեռքի լապտերների պատրաստման ժամանակ:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Энциклопедиический словарь юного математика, М., “Педагогика”, 1985: (77-78,147-149,151-153, 229-230, 336-337):
2. Н. В. Ефимов ,,Краткий курс аналитическй геометрий”, М., Наука, 1975 (15-16,43-45).

ԳԼՈՒԽ 5
ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ

5.1 ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Հավանականության գաղափարի վերաբերյալ յուրաքանչյուր մարդ ունի ինտուիտիվ պատկերացում: Հավանականության մասին խոսելիս սովորաբար մտաբերում ենք մետաղադրամի կամ խաղոսկրերի նետում, խաղաքարտեր կամ ուրիշ մոլեխաղեր:

Հավանականությունների տեսության ծնունդը համարվում է XVII դարը և կապվում է մոլեխաղերի կոմբինատոր խնդիրների հետ: Այդ խնդիրների լուծման հավանականային մոդելներն ըմբռնելու համար մենք հաճախակի կանդրադառնանք մոլեխաղերի տարբեր օրինակների:

Հավանականությունների տեսությունն ունի կիրառությունների լայն շրջանակ: Նա հիմնավորում է ժառանգականության տեսությունը և այդ իսկ պատճառով մեծ դեր է խաղում գենետիկայում: Տարրական մասնիկների ժամանակակից տեսություններն օգտագործում են հավանականային մոդելներ: Ինֆեկցիոն հիվանդությունների համաճարակային տարածումը դիտարկվում է հավանականությունների տեսության նոր ճյուղում՝ համաճարակաբանությունում: Հերթերի տեսությունն օգտագործում է հավանակային մոդելներ սպասարկման տարբեր համակարգերի համար:

Բազմությանը կամ նրա տարրին իրական թիվ վերագրելու գաղափարը ծանոթ է բոլորին: Պատահական երևույթի կամ պատահույթի հավանականությունը նույնպես կարելի է արտահայտել իրական թվով:

Այսպիսով՝ հավանականությունների տեսությունն ուսումնասիրում է պատահական երևույթների օրինաչափությունը: Այն մաթեմատիկայի մյուս ճյուղերի նման կառուցվում է հենաասույթային հենքի վրա:

Շարադրենք հավանականությունների տեսության կառուցման ներկայումս ընդունված մոտեցումները:

5.2 ՏԱՐՐԱԿԱՆ ՊԱՏԱՀՈՒՅԹՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Պատահույթի հավանականությունը սահմանելու համար հարկավոր է ծանոթ լինել փորձի հավանականային տարածության և պատահույթի գաղափարներին: Յուրաքանչյուր փորձին համապատասխանում է որևէ ոչ դատարկ բազմություն, որը ներառում է տվյալ փորձի բոլոր հնարավոր ելքերը: Այդ բազմությունը կնշանակենք Ω-ով և կհամարենք բոլոր հնարավոր ելքերի բազմություն կամ տարրական պատահույթների տարածություն: Դիտարկենք օրինակներ: Դիցուք՝ փորձի ելքը նորածին երեխայի սեռի որոշումն է : Այս դեպքում կունենանք՝

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, որտեղ ω_1 ելքը նշանակում է, որ նորածինը տղա է , իսկ ω_2-ը՝ աղջիկ է: Եթե փորձը հարթ մակերևույթի վրա դրամի նետումն է, ապա Ω- ն , այս դեպքում ևս կպարունակի երկու ելք՝ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, որտեղ ω_1 - ը համապատասխանում է գերբ, իսկ ω_2-ը՝ գիր բացվելուն:

Դիցուք՝ փորձը համաչափ խաղոսկրը հարթ մակերևույթի վրա նետելն է:

Այս դեպքում կունենանք՝

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, որտեղ ω_i-ն համապատասխանում է այն ելքին, որ բացված նիստը պարունակում է i կետ, $i = 1, 2, 3 \ldots 6$:

Դիտարկենք հարթ մակերևույթի վրա երկու մետաղադրամ նետելու փորձը: Այս դեպքում Ω հավանակային տարածությունը չորս տարրանոց բազմություն է՝ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, որտեղ $\omega_1 = (1,1)$ ելքը նշանակում է, որ և առաջին, և երկրորդ նետումից բացվել է գերբ;

$\omega_2 = (1,0)$ ելքը նշանակում է, որ առաջին նետումից հետո բացվել է գերբ, իսկ երկրորդ նետումից՝ գիր;

$\omega_3 = (0,1)$ ելքը առաջին նետումից բացվել է գիր, իսկ երկրորդ նետումից՝ գերբ:

$\omega_4 = (0,0)$ ելքը առաջին նետումից բացվել է գիր, երկրորդ նետումից՝ նույնպես գիր:

Դիտարկենք հարթ մակերևույթի վրա երկու համաչափ խաղոսկրե-րի նետման փորձը: Այս դեպքում առաջին խաղոսկրի ցուցանիշը կա-րող է զուգորդվել երկրորդ խաղոսկրի վեց ցուցանիշներից յուրաքան-չյուրի հետ: Յուրաքանչյուր խաղոսկրն ունի վեց նիստ, ուստի՝ վեց ցու-ցանիշ, զուգորդությունների թիվը 36 է, այսինքն՝ Ω -ն 36 տարրանոց բազմություն է: Կունենանք՝

$\Omega = \{\omega_1 = (1,1),\ \omega_2 = (1,2),\ \omega_3 = (1,3), \ldots \omega_{36} = (6,6)\}$, որտեղ (i, j), այն ելքն է , երբ առաջին խաղոսկրի ցուցանիշը հավասար է i, իսկ երկրորդ խաղոսկրի ցուցանիշը՝ j :

Փորձի հավանականային տարածությունը կառուցվում է ոչ միակ ձևով: Տարբեր մարդիկ միևնույն փորձի համար կարող են կառուցել տարբեր հավանականային տարածություններ:

Դիտարկված օրինակներում Ω -ն վերջավոր տարրերից կազմված բազմություն է: Կան փորձեր, որտեղ Ω -ի տարրերի քանակն անվերջ է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ՝ 5.2.1՝ Հավանականային տարածության յուրաքան-չյուր A ենթաբազմություն կոչվում է պատահույթ:

Եթե փորձի ելքը A պատահույթն է, ապա ասում ենք, որ A–ն տեղի է ունեցել:

$\omega \in A (\omega \notin A)$ գրառումը նշանակում է, որ ω -ն հանդիսանում է-(չի հանդիսանում) A ենթաբազմության տարր:

Դիտարկենք պատահույթների օրինակներ:

Եթե երեխայի սեռը որոշելու փորձում $A = \{\omega_2\}$, ապա A -ն այն պատահույթն է, որ երեխան աղջիկ է:

Եթե մետաղադրամի նետման փորձում $A = \{\omega_1\}$, ապա A -ն այն պատահույթն է, որ դրամը նետելուց բացվել է գերբ:

Եթե համաչափ խաղոսկրի նետման փորձում $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, ապա A -ն այն պատահույթն է, որ բացվել է կենտ թիվ պարունակող նիստը:

Եթե հարթ մակերևույթի վրա 2 դրամ նետելու փորձում $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, ապա A -ն այն պատահույթն է, որ բացվել է առնը-վազն մեկ գերբ:

Մասնավոր դեպքում Ω տարածությունը ինքն է իր ենթաբազմութ-յունը և հետևաբար պատահույթ է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ՝ 5.2.2՝ Պատահույթը կանվանենք հավաստի պատահույթ (Ω), եթե նա ըստ Ω-ի կառուցման եղանակի միշտ տեղի ունի:

Ω հավանականային տարածության կամայական A և B պատահույթների համար սահմանենք նոր պատահույթ՝

$$A \cup B,$$

որը կանվանենք A-ի և B-ի միավորում: Այնպես, ինչպես բազմությունների միավորման ժամանակ, $A \cup B$, պարունակում է միայն այն էլքերը, որոնք պատկանում են առնվազն մեկին՝ կամ A-ին կամ B-ին:

Նմանապես, ցանկացած երկու A և B պատահույթների համար

$A \cap B$ կոչվում է A-ի և B-ի հատում և պարունակում է բոլոր այն էլքերը, որոնք պատկանում են և՛ A-ին, և՛ B-ին:

Օրինակ՝ եթե երեխայի սեռը որոշելու փորձում $A = \{\omega_1\}$, $B = \{\omega_2\}$, ապա $A \cup B = \Omega$, այսինքն $A \cup B$ հավաստի պատահույթ է, իսկ $A \cap B$ չի պարունակում որևէ էլք և հետևաբար տեղի չունի: Այդ պատահույթն անվանելու համար ներմուծենք անհնար պատահույթի գաղափարը՝ $\varnothing$:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ՝ 5.2.3՝ Էլքեր չպարունակող պատահույթը կանվանենք անհնար պատահույթ:

Եթե $A \cap B = \varnothing$, ապա կասենք, որ A-ն և B-ն անհամատեղելի են: Կամայական A պատահույթի համար $\overline{A}$ պատահույթը կոչվում է A–ի լրացում և պարունակում է Ω-ի բոլոր էլքերը, որոնք չեն պատկանում A–ին:

Օրինակ, եթե համաչափ խաղոսկրի նետման փորձում $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, ապա $\overline{A} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, այն պատահույթն է, երբ բացված նիստը պարունակում է զույգ թիվ:

Եթե հարթ մակերևույթի վրա երկու մետաղադրամ նետելու փորձում $A = \{\omega_1\} = \{1,1\}$ և $B = \{\omega_4\} = \{0,0\}$, ապա նրանք անհամատեղելի են:

Կամայական A և B պատահույթների համար, եթե A-ի բոլոր էլքերը պատկանում են նաև B-ին, ապա A-ն կհամարենք B-ի ենթապատահույթ և կգրենք $A \subset B$: Եթե $A \subset B$ և $B \subset A$, ապա A-ն և B-ն համընկնում են և կգրենք $A = B$:

5.3 ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԵՆԱՍՈՒՅԹՆԵՐԸ

Դիցուք՝ Ω -ն դիտարկվող որևէ փորձի տարրական պատահույթների տարածությունն է: A պատահույթի հավանականությունը Ω -ում հանդիսանում է $P(A)$ իրական ֆունկցիան, որի որոշման տիրույթը Ω -ի պարահույթներն են և բավարարում են հետևյալ երեք հենասույթներին.

ՀԵՆԱՍՈւՅԹ1՝ Ցանկացած A պատահույթի $P(A)$ հավանականությունը ոչ բացասական է՝ $P(A) \geq 0$:

ՀԵՆԱՍՈւՅԹ 2՝ Հավաստի պատահույթի հավանականությունը հավասար է 1-ի՝ $P(\Omega) = 1$:

ՀԵՆԱՍՈւՅԹ 3՝ $A_1, A_2, \ldots$ անհամատեղելի պատահույթների ցանկացած հաջորդականության համար (այսինքն՝ եթե $i \neq j$, ապա $A_i \cap A_j = \varnothing$ հավանականությունը , որ այդ պատահույթներից առնըվազն մեկը տեղի կունենա, հավասար է նրանց համապատասխան հավանականությունների գումարին՝

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} P(A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

5.4 ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Եթե հարթ մակերևույթի վրա համաչափ դրամ նետելիս զերբ և գիր բացվելու հավանականությունները հավասար հնարավորություն ունեն, ապա

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2}:$$

Եթե նետում ենք ոչ համաչափ դրամ և նկատում, որ զերբը բացվում է երկու անգամ ավելի հաճախ, քան գիրը, ապա

$$P(\{\omega_1\}) = \frac{2}{3},\ P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{3}:$$

ՀԱՏԿՈւԹՅՈւՆ 1՝ Անհնար պատահույթի հավանականությունը հավասար է զրոյի՝ $P(\varnothing) = 0$:

Ցանկացած վերջավոր թվով $A_1, A_2, ..., A_n$ անհամատեղելի պատահույթների համար $P(U_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$:

Մասնավորապես, կամայական երկու անհամատեղելի A և B պատահույթների համար

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B):$$

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 2՝ Կամայական A և $\overline{A}$ միշտ անհամատեղելի պատահույթների համար՝ $P(A) = 1 - P(\overline{A})$:

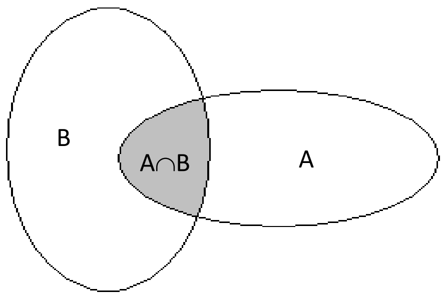
Քանի որ A և $\overline{A}$ միշտ անհամատեղելի են, ապա $A \cup \overline{A} = \Omega$:

$$P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega)$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1 \qquad P(A) + P(\overline{A}) = 1:$$

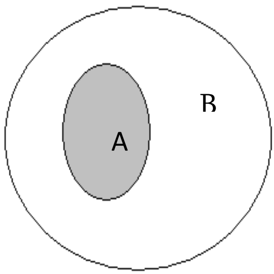
Որտեղից կստանանք, որ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$:

Մասնավոր դեպքում $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0,$ քանի որ անհնար պատահույթը Ω -ի լրացումն է:



ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 3՝ Կամայական A և B պատահույթների տարբերություն պատահույթի հավանականությունը հավասար է B պատահույթի հավանականությունից հանած այդ պատահույթների հատում պատահույթի հավանականությունը՝

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B):$$



Իրոք՝

$$B \setminus A = B - B \setminus A = B - (A \cap B),$$

որտեղից կստանանք՝

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B):$$

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 4՝ Եթե A պատահույթը B -ի ենթապատահույթն է, այսինքն $A \subset B$, ապա տարբերություն պատահույթի հավանականությունը հավասար է նրանց հավանականությունների տարբերությանը՝

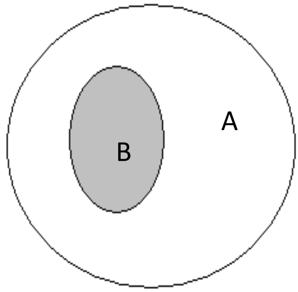
$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$:

Իրոք, օգտվելով հատկության 3-ից, կունենանք՝

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B):$$

Քանի որ, $P(A \cap B) = P(A)$, կստանանք՝ $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$:

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 5՝ Եթե $A \subset B$, ապա $P(A) \le P(B)$, այսինքն՝ պատահույթի P հավանականությունը համարվում է չնվազող ֆունկցիա:



$A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) \ge 0$

$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \ge 0$

$\Rightarrow P(A) \le P(B)$,

$P(A) \le P(B)$:

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 6՝ Կամայական A պատահույթի հավանականությունը չի գերազանցում 1-ին.

$$P(A) \le 1:$$

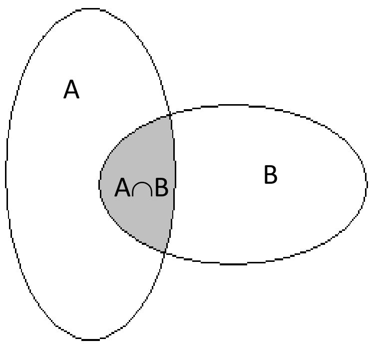
Ենթադրենք, որ $B = \Omega$: Քանի որ A պատահույթը համարվում է հավաստի պատահույթի ենթապատահույթ, ապա կունենանք՝

$$P(A) \le P(B) = P(\Omega) = 1$$

$$P(A) \le 1:$$

Հենասույթ 1-ը և հատկություն 6-ը պնդում են, որ փորձի ելքը A-ում պարունակվելու հավանականությունը 0-ի և 1-ի միջև ընկած թիվ է՝ $0 \le P(A) \le 1$:

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 7՝ Կամայական A և B պատահույթների միավորում պատահույթի հավանականությանը հավասար է այդ պատահույթների հավանականությունների գումարից հանած նրանց հատում պատահույթի հավանականությունը՝



$A \cup B = A + B - (A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

Դիտարկենք օրինակ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ 52 խաղաքարտերից բաղկացած կապուկից պատահականորեն ընտրում ենք մեկը: Մենք կհաղթենք, եթե ընտրված խաղաքարտը կամ սիրտ է, կամ արքա: Գտնել հաղթելու հավանականությունը:

ԼՈւԾՈւՄ՝ Նշանակենք A–ով այն պատահույթը, որի խաղաքարտը սիրտ է, իսկ B –ով՝ այն, որի խաղաքարտը արքա է: Պահանջվող հավանականությունը հավասար կլինի $P(A\cup B)$:

Ըստ հատկություն 7-ի՝ կունենանք՝

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B):$$

Որպեսզի տեղի ունենա A պատահույթը, այսինքն ընտրված խաղաքարտը սիրտ լինի, հարկավոր է ընտրել կապուկի մեջ եղած 13 հատ սիրտ խաղաքարտերից որևէ մեկը, այսինքն՝ $P(A)=\frac{13}{52}$:

Որպեսզի տեղի ունենա B պատահույթը, այսինքն ընտրված խաղաքարտը լինի արքա, հարկավոր է ընտրել 4 արքաներից մեկը, այսինքն՝ $P(B)=\frac{4}{52}$: Որպեսզի տեղի ունենա $A\cup B$ պատահույթը, այսինքն ընտրված խաղաքարտը լինի և սիրտ, և արքա, հարկավոր է ընտրել սրտի արքան, այսինքն՝ $P(A\cap B)=\frac{1}{52}$: Ի վերջո կունենանք՝

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52}=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$$

$$P(A\cup B)=\frac{4}{13}:$$

ՀԱՏԿՈւԹՅՈւՆ 8՝ Կամայական A և B պատահույթների միավորում պատահույթի հավանականությունը չի գերազանցում այդ պատահույթների հավանականությունների գումարին՝

$$P(A\cup B)\le P(A)+P(B):$$

Ըստ հատկություն 7-ի՝

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cup B)\le P(A)+P(B):$$

ՍԱՀՄԱՆՈւՄ 5.4.1՝ (Ω,P) զույգը կոչվում է հավանականային տարածություն, որտեղ Ω -ն տարրական պատահույթների բազմություն է, իսկ P-ն Ω-ի վրա սահմանված հավանականություն է, որը բավարարում է 1, 2 և 3 հենաասույթներին:

5.5 ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Դիցուք՝ պատահականորեն ընտրում ենք որևէ կետ $D \subset R^n$, $n = 1, 2, 3$ սահմանափակ ենթաբազմությունից, այսինքն՝ $\Omega = D$ և պատահույթները D –ի ենթաբազմություններն են:

Ենթադրենք D–ի ծավալը հավասար չէ 0, $V(D) \neq 0$ $A \subset D$ պատահույթի հավանականությունը սահմանենք հետևյալ բանաձևով.

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}:$$

Մասնավորապես, երբ $n = 2$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

որտեղ S - ը մակերես է:

Երբ $n = 1$, $P(A) = \dfrac{L(A)}{L(\Omega)}$, որտեղ L – ը երկարություն է:

Դիտարկենք օրինակներ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ $[0,1]$ հատվածի վրա հաջողության ակնկալիքով նետված են երկու կետեր, որոնք նրան տրոհում են 3 հատվածների:

Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ այդ հատվածներից կարելի կլինի կառուցել եռանկյուն:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Այդ կետերից առաջինը նշանակենք A_1-ով, կոորդինատը՝ X_1 –ով, երկրորդը նշանակենք A_2-ով, կոորդինատը X_2-ով: Քանի որ, CA_1, A_1A_2 և A_2D հատվածները պետք է լինեն եռանկյան կողմեր, ուստի նրանց երկարությունները պետք է բավարարեն եռանկյան անհավասարության պայմանին, այսինքն՝

$$A_1A_2 + A_2D \geq CA_1 \quad X_2 - X_1 + 1 - X_2 \geq X_1$$

$$1 \geq 2X_1 \;\; X_1 \leq \frac{1}{2}:$$

Այսինքն՝ առաջին կետը պետք է դասավորվի CD հատվածի միջնակետից դեպի ձախ: Այդ պատահույթը նշանակենք A-ով: Նրա հավանականությունը, ըստ $P(A)=\dfrac{L(A)}{L(\Omega)}$ բանաձևի, կլինի՝

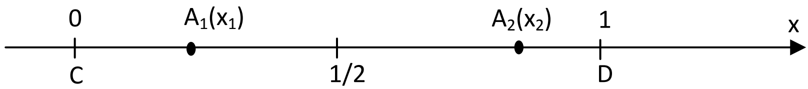
$$P(A_1)=\frac{CA_1}{CD}=\frac{X_1}{1}=X_1=\frac{1}{2}:\ P(A_1)=\frac{1}{2}:$$

Քանի որ եռանկյան անհավասարությունը պետք է տեղի ունենա CD -ն այդ երեք հատվածներով կամայական ձևով տրոհման դեպքում, ապա կունենանք՝

$$CA_1+A_1A_2\geq A_2D\ \ X_1+X_2-X_1\geq 1-X_2\ \ 2X_2\geq 1\ \ X_2\geq\frac{1}{2},$$

այսինքն երկրորդ կետը պետք է դասավորվի CD հատվածի միջնակետից դեպի աջ: Այդ պատահույթը նշանակենք A_2 -ով: Նրա հավանականությունը կլինի՝

$$P(A_2)=\frac{CA_2}{CD}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2},\ \ P(A_2)=\frac{1}{2}:$$



Այսպիսով, եթե առաջին կետը դասավորվի $[0,1]=CD$ հատվածի առաջին կեսում, իսկ երկրորդ կետը, այդ հատվածի երկրորդ կեսում, ապա այդ կետերով $[0,1]$ հատվածը կտրոհվի այնպիսի երեք հատվածների, որոնցով կարող ենք կառուցել եռանկյուն: Որոնելի հավանականությունը $(P(A))$ -ն հավասար կլինի A_1 և A_2 պատահույթների հավանականությունների արտադրյալին.

$$P(A)=P(A_1).P(A_2)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}:\ P(A)=\frac{1}{4}:\ \text{Պատ.՝}\ \frac{1}{4}:$$

ՕՐԻՆԱԿ՝ 4 միավոր երկարությամբ կողմ ունեցող քառակուսու վրա, հաջողության ակնկալիքով, նետված է որևէ կետ: Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ կետը կհայտնվի $-2x+3y-6=0$ և

$x-1,5y-1,5=0$ հավասարումներ ունեցող ուղիղներով և քառակուսու կողմերով կազմավորված տիրույթի ներսում:

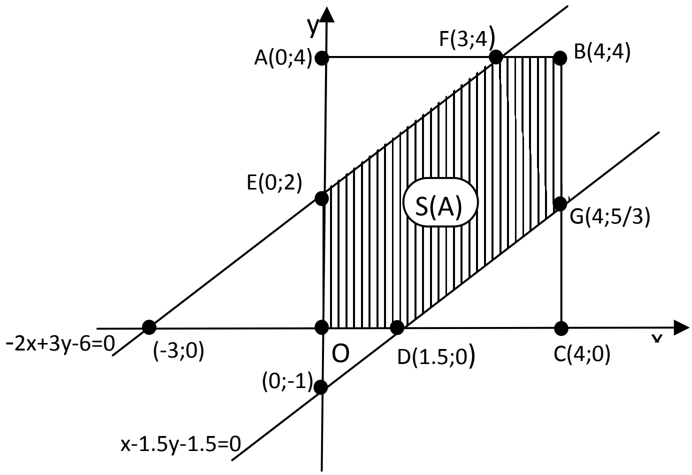
ԼՈւԾՈւՄ՝ XOY դեկարտյան կոորդինատական համակարգում կառուցենք օրինակում տրված քառակուսու և ուղիղների գծապատկերները (նկ. 1): Հաջողություն կունենանք, եթե նետված կետը հայտնվի $OEFBGDO$ տիրույթում $(S(A))$ -ում: Հարկավոր է գտնել նկար 13-ում նրբագծված տիրույթի մակերեսը:

E կետի x կոորդինատը հավասար է զրոյի: Նրա y կոորդինատը գտնելու նպատակով $-2x+3y-6=0$ հավասարման մեջ y -ի փոխարեն տեղադրենք 4:

Կունենանք՝

$$-2x_F+3.4-6=0 \Rightarrow -2x_F=12+6=-6 \Rightarrow x_F=3:$$

D և G կետերի կոորդինատները գտնում ենք նման ձևով՝



Նկ. 13

օգտագործելով $x-1,5y-1,5=0$ հավասարումը:

$P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$ բանաձևից, որտեղ $S(A)$ -ն նկար 13-ում նրբագծված տիրույթի մակերեսն է, իսկ $S(\Omega)$ -ն՝ $ABCO$ քառակուսու մակերեսն է, որ հավասար է 16 քառ. միավորի:

$S(\Omega)=16$: (նկ. 13) -ից ակնհայտ է, որ

$$S(A)=S(\Omega)-(S_{\Delta AFE}+S_{\Delta DGC}) \quad (1)$$

$$S_{\Delta AFE}=\frac{1}{2}AF.AE=\frac{1}{2}.3.2=3$$

$$S_{\Delta AFE}=3 \qquad (2)$$

$$S_{\Delta DGC}=\frac{1}{2}DC.CG=\frac{1}{2}.2.5.\frac{5}{3}=\frac{12.5}{6}=\frac{25}{2}.\frac{1}{6}=\frac{25}{12}$$

$$S_{\Delta DGC}=\frac{25}{12}: \qquad (3)$$

(2) -ը և (3) -ը տեղադրենք (1)-ի մեջ, կունենանք՝

$$S(A)=S(\Omega)-(S_{\Delta AFE}+S_{\Delta DGC})=16-(3+\frac{25}{12})=$$

$$=16-(\frac{36}{12}+\frac{25}{12})=16-\frac{61}{12}=\frac{192}{12}-\frac{61}{12}=\frac{192-61}{12}=\frac{131}{12}$$

$$S(A)=\frac{131}{12}=10\frac{11}{12}:$$

Որոնելի հավանականությունը կլինի՝

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{131}{12}.\frac{1}{16}=\frac{131}{192}=0,683:$$

Պատ.՝ $0,683$:

5.6 ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԴԱՍԱԿԱՆ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

Կան փորձեր, որոնց ելքերի Ω բազմությունը վերջավոր է, այսինքն ելքերի թիվը հաշվելի է:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 5.5.1՝ Ω ելքերի բազմությունը կոչվում է վերջավոր, եթե փորձի հնարավոր ելքերի թիվը վերջավոր է.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\},$$

այսինքն՝ (Ω, P) հավանականային տարածությունը վերջավոր է, եթե նրան համապատասխանող պատահական փորձն ունի վերջավոր թվով հնարավոր ելքեր: Եթե A պատահույթը պարունակում է միայն մեկ ω_i ելքը, ապա $A = \{\omega_i\}$, այսինքն՝ $\{\omega_i\}$-ն պատահույթ է, որը տեղի է ունենում միայն և միայն այն դեպքում, երբ իրագործվում է ω_i ելքը:

Դիտարկենք (Ω, P) վերջավոր հավանականային տարածությունը: P_i թվերը $(0 \le P_i \le 1)$ ընտրենք այնպես, որ $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$, $i = 1, 2, ..., n$ և $P(A)$-ն սահմանենք՝ $P(A) = \sum\limits_{i \in \omega_i \in A}^{n} P_i$: (1)

Վերջավոր հավանականային տարածությունների մոդելներում կարելի է ենթադրել, որ բոլոր ω_i ելքերը հավասարահնարավոր են, այսինքն՝ ունեն հավասար հավանականություններ:

Ուստի՝ $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = ... = P(\{\omega_n\}) = P$:

Քանի որ $P(\Omega) = 1$ և $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P_i(\{\omega_i\})$, ապա կունենանք՝

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P_i(\{\omega_i\})$$

$$P(\{\omega_i\}) + P(\{\omega_2\}) + ... + P(\{\omega_n\}) = p + p + ... + p = n.p,$$

որտեղից $p = \frac{1}{n}$:

Հետևաբար՝ $P(\{\omega_i\}) = p = \frac{1}{n}$ կամայական, $i = 1, 2, .., n$ համար:

Արդյունքում ստացվեց, որ $\{\omega_i\}$ պատահույթներից յուրաքանչյուրն ունի $\frac{1}{n}$ հավանականություն, քանի որ $\exists$ n պատահույթներ են, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի հավասար հավանականություն, իսկ նրանց հավանականությունների գումարը հավասար է 1-ի, այսինքն հավասար է հավաստի պատահույթի հավանականությանը:

Հենասույթ 3-ից հետևում է, որ կամայական A պատահույթի համար՝

$$A = \sum_{ij\omega_1 \in A} \omega_i$$

$$P(A) = \sum_{ij\omega_1 \in A} P(\{\omega_i\}) = P \cdot (\omega_1 + \omega_2 + ..., +\omega_n) =$$

$$= \frac{1}{n}(\omega_1 + \omega_2 + ..., +\omega_n) = \frac{A - \text{ի ելքերի թիվը}}{n}:$$

$$P(A) = \frac{\text{A-ի ելքերի թիվը}}{n},$$

այսինքն՝ A-ի հավանականությունը հավասար է A-ին պատկանող ելքերի թիվը բազմապատկած $\frac{1}{n}$-ով:

Եթե A պատահույթի ելքերի քանակը նշանակենք $N\ (A)$ -ով, ապա նախորդ եզրահանգումները կարելի է բանաձևել հետևյալ կերպ.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}:$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 5.5.2՝ Պատահույթի հավանականությունը հավասար է այդ պատահույթին նպաստավոր ելքերի թիվը բաժանած տվյալ փորձի բոլոր հնարավոր ելքերի թվի վրա:

Սա հավանականության դասական սահմանումն է, որն առաջին անգամ ձևակերպել է Լապլասը 1812 թվականին:

$N\ (A)$ և $N\ (\Omega)$ թվերի իմաստը և նրանց հաշվելու եղանակները պարզաբանելու նպատակով դիտարկենք օրինակներ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Նետում ենք երկու խաղոսկր: Գտնել հավանականությունը, որ բացված թվերի գումարը հավասար է 7-ի:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Օգտվենք հավանականության դասական սահմանումից՝

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)},$$

որտեղ $N\ (A)$ – ն նպաստավոր ելքերի թիվն է, $N\ (\Omega)$ -ն ելքերի ընդհանուր քանակն է:

Ելքերի ընդհանուր քանակը, մենք արդեն գիտենք, 36 է: Հաշվենք նպաստավոր ելքերի թիվը: Նպաստավոր ելքերի զույգերը վեցն են.

$$(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1):$$

Հետևաբար $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$: $P(A)=\frac{1}{6}$, Պատ.՝ $\frac{1}{6}$:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Նետում ենք երկու խաղոսկր: Գտնել հավանականությունը, եթե նրանց վրա բացված թվերի գումարը 5 է, իսկ արտադրյալը՝ 4:

ԼՈւԾՈՒՄ: Լուծման ընթացքը նման է նախորդ օրինակին: Նպաստավոր ելքերի զույգերն են. (1,4) և (4,1) այսինքն՝

$$N(A)=2$$

$$N(\Omega)=36$$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}:$$

$$P(A)=\frac{1}{18},\ \text{Պատ.՝ } \frac{1}{18}:$$

5.7 ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐ ԱՆԱԼԻԶ

Հավանականությունների տեսության շատ խնդիրներում անհրաժեշտ է հաշվել պատահույթին նպաստավոր ելքերի թիվը:

Հաշվման մաթեմատիկական տեսությունը հայտնի է որպես Կոմբինատոր անալիզ:

Դիտարկենք կոմբինատոր անալիզի հիմնական գաղափարները:

Դրանք են.

1. Հաշվարկման հիմնական սկզբունքը:
2. Հաշվարկման ընդհանրացված հիմական սկզբունքը:
3. Կարգավորված հաջորդականություններ՝ տեղափոխություններ:
4. Զուգորդություններ:
5. Ոչ կարգավորված նմուշներ՝ վերադարձումով:

5.7.1 ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

Դիտարկենք երկու փորձ: Ապացուցենք, որ եթե առաջին փորձին համապատասխանում է m հնարավոր ելք, իսկ երկրորդ փորձին՝ n ելք, ապա այդ երկու փորձերին կհամապատասխանեն $m \times n$ հնարավոր ելք: Այս սկզբունքը կարելի է ապացուցել երկու փորձերի հնարավոր ել-քերի համարակալումով՝ հետևյալ կերպ.

$$\begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,n) \\ (2,1) & (2,2) & \ldots & (2,n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (m,1) & (m,2) & \ldots & (m,n), \end{array}$$

որտեղ (i,j) ելքը կնշանակի, որ առաջին փորձի իրագործումից ստաց-վել է i -րդ ելքը, իսկ երկրորդ փորձի իրագործումից՝ j -րդ ելքը: Հե-տևաբար, հնարավոր ելքերի բազմությունը բաղկացած է m տողից, իսկ յուրաքանչյուր տող պարունակում է n տարր, այսինքն այդ բազմութ-յունն ունի $m \times n$ տարրեր:

5.7.2 ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

Եթե կատարում ենք k թվով փորձեր, ընդ որում առաջին փորձն ունի n_1 հնարավոր ելքեր, այդ n_1 հնարավոր ելքերից յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունեն երկրորդ փորձի n_2 հնարավոր ելքեր, առաջին երկու փորձերի յուրաքանչյուր հնարավոր ելքի համար գոյություն ու-նեն երրորդ փորձի n_3 հնարավոր ելքեր, և այսպես շարունակ մինչև k –րդ փորձը, ապա ընդհանուր առմամբ գոյություն կունենան k փորձերի $n_1.n_2....n_k$ հնարավոր ելքեր:

5.7.3 ԿԱՐԳԱՎՈՐՎԱԾ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ՝ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Օբյեկտների կարգավորված դասավորությունը (հաջորդականութ-յուն) անվանում են տեղափոխություն: Եթե k օբյեկտներ ընտրվում են n տարբեր օբյեկտների բազմությունից, ապա այդ օբյեկտների ցանկա-ցած մասնավոր դասավորություն (կարգ) կոչվում է տեղափոխություն:

Գոյություն ունեն k օբյեկտների $n.(n-1).(n-2)....(n-k+1)$ հնարա-վոր տեղափոխություններ վերցված n օբյեկտներից, այսինքն՝

$$(n)_k = n.(n-1).(n-2)....(n-k+1),$$

$(n)_k$ կարդացվում է որպես տեղափոխություն՝ n–ից k–ական: Իրոք, տեղափոխության առաջին օբյեկտն ընտրվում է n օբյեկտներից երկրորդ օբյեկտն ընտրվում է մնացած $(n-1)$ օբյեկտներից, երրորդ օբյեկտն ընտրվում է մնացած $(n-2)$ օբյեկտներից և այլն, տեղափոխության վերջին k –րդ օբյեկտն ընտրվում է մնացած $n-(k-1)$ օբյեկտներից:

Մասնավորապես՝ $(n)_n = n.(n-1).(n-2)....2.1$, որը n–ից n–ական բոլոր տեղափոխությունների թիվն է: Հարմար է ներմուծել ֆակտորիալ նշանակումը, որտեղ $n! = .(n-1)....2.1$ (կարդացվում է n ֆակտորիալ):

Կիրառություններում հարմար է ընդունել $0! = 1$:

$(n)_k$ -ի համար գրված բանաձևը ֆակտորիալների միջոցով ներկայացնելու համար բազմապատկենք և բաժանենք $(n-k)!$ –ով և կունենանք.

$$(n)_k = n.(n-1).(n-2)...(n-k+1) = n.(n-1).(n-2)....(n-k+1).\frac{(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...\ \cdot(n-k+1)...(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot(n-k-2)\cdot\ ...\ \cdot 2.1}{(n-k)!} =$$

$= \dfrac{(n)_n}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, քանի որ $(n)_n = n!$:

Կստանանք՝ $(n_k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$:

Դիտարկենք մի օրինակ.

Արկղում կա 10 դետալ, որոնցից 4-ը ներկված է: Հավաքողը պատահականորեն վերցնում է 3 դետալ: Գտնել հավանականությունը, որ վերցված դետալներից գոնե մեկը ներկված է:

ԼՈւԾՈւՄ՝ Այդ պատահույթը, որ վերցրած դետալներից գոնե մեկը ներկված է, նշանակենք A –ով, իսկ նրա հավանականությունը $P(A)$ -ով: Այս օրինակում $P(A)$ -ի փոխարեն ավելի հեշտ է գտնել $P(\overline{A})$ -ը, որովհետև A –ն կարող է տեղի ունենալ ավելի շատ ձևերով, քան $\overline{A}$ – ը: $\overline{A}$ -ն այն պատահույթն է , որ վերցրած դետալներից ոչ մեկը ներկված չէ: Ինչպես գիտենք

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) :$$

$P(\overline{A})$ - ը գտնելու համար օգտվենք $P(\overline{A}) = \dfrac{N(\overline{A})}{N(\Omega)}$ բանաձևից:

$N(\Omega)$ -ն տեղափոխություն է 10-ից 3-ական, այսինքն՝

$$N(\Omega) = (10)_3 = 10.9\ldots.(10-3+1) = 10.9.8:$$

$N(\overline{A})$ -ը գտնելու համար հարկավոր է հաշվել $\overline{A}$ -ին նպաստավոր ելքերի թիվը: Որպեսզի պատահականորեն վերցրած 3 դետալների մեջ ներկված դետալ չլինի, հարկավոր է հաշվել չներկված $(10-4=6)$ դետալներից 3 դետալ ընտրելու հավանականությունը , այսինքն՝

$$N(\overline{A}) = (6_3) = 6.5.4:$$

Ուստի, կունենանք՝

$$P(\overline{A}) = \frac{N(\overline{A})}{N(\Omega)} = \frac{(6)_3}{(10)_3} = \frac{6.5.4}{10.9.8} = \frac{1}{6},\ \ P(\overline{A}) = \frac{1}{6}:$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(A) = \frac{5}{6}: \ \text{Պատ.՝}\ \frac{5}{6}:$$

Անդրադառնանք $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ բազմությունից k տարրեր ընտրելու և ըստ կարգի դասավորելու հարցին: Քանի՞ եղանակով է դա հնարավոր անել, այսինքն՝ քանի տեղափոխություն կստանանք:

Հասկանալի է, որ հարցի պատասխանը կախված է այն բանից, թե թույլատրվում է տարրերի կրկնության տեղափոխության մեջ: Եթե ոչ, կստանանք առանց վերադարձումների նմուշ, իսկ եթե թույլատրվում է տարրերի կրկնություն, ապա ստանում ենք վերադարձումներով նմուշ, այսինքն՝ ունենք ընտրելու երկու եղանակ:

Ձևակերպենք խնդիր. Կիրառելով հաշվարկման ընդհանրացված հիմնական սկզբունքը՝ հաշվենք n տարրանոց բազմության k նմուշների քանակը:

Սկզբում դիտարկենք վերադարձումներով նմուշը: Ակնհայտ է , որ և՛ առաջին տարրը կարող է ընտրվել n եղանակով, և՛ երկրորդը, և՛ երրորդը և այդպես շարունակ: Այսպիսով՝ գոյություն ունեն $n \times n \times \ldots \times n = n^k$ նմուշներ:

Այժմ ենթադրենք՝ ունենք առանց վերադարձումների նմուշ: Առաջին տարրը կարող ենք ընտրել n եղանակով, երկրորդը՝ $n-1$ եղանակով, երրորդը՝ $n-2$ եղանակով և այլն, k-րդը՝ $n-k+1$ եղանակով: Այսպիսով՝ հանգեցինք հետևյալ լեմմային (պնդմանը):

ԼԵՄՄԱ 1՝ k չափանի վերադարձումով կարգավորված նմուշների ընտրության համար գոյություն ունի n^k տարբեր հնարավորություն և $(n)_k$ հնարավորություն k չափանի անվերադարձ կարգավորված նմուշների ընտրության համար:

Դիտարկենք օրինակներ.

ՕՐԻՆԱԿ՝ Գտնել $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ թվերի հնարավոր տեղափոխությունների քանակը:

ԼՈւԾՈւՄ՝ Ունենք ընտրություն՝ առանց վերադարձման: Անվերադարձ կարգավորված նմուշների ընտրության բանաձևի համաձայն՝

$(7)_7 = 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$ $(7)_7 = 5040$:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Հինգ ուսանողից պատահականորեն ընտրվում են երեքը և կանգնեցվում շարք: Քանի՞ տարբեր շարքեր կարելի է կազմել:

ԼՈւԾՈւՄ՝ Ըստ լեմմա 1-ի՝ կունենանք $(5)_3$ հնարավորություն 3 չափանի անվերադարձ կարգավորված նմուշներ (շարքեր) ընտրելու համար՝ $(5)_3 = 5.4.3 = 60$ $(5)_3 = 60$: Պատ.՝ 60 տարբեր շարքեր:

ՕՐԻՆԱԿ՝ 2011թ. ԵՊՀ ԻՄ ՀԼԳ առաջին կուրսում սովորում էին 32 ուսանողներ: Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ նրանցից առնվազն երկուսը կունենան միևնույն ծննդյան օրը:

ԼՈւԾՈւՄ՝ Կարող ենք ենթադրել, որ պատահականորեն վերցված ուսանողի համար հավասարահնարավոր է ծնվել տարվա 365 օրերից ցանկացած օրը: Նահանջ տարիներն անտեսում ենք:

Նշանակենք A –ով այն պատահույթը, որ գոյություն ունեն առնվազն երկու ուսանող միևնույն ծննդյան օրերով և հաշվենք $P(A)$-ն:

Դիտարկվող օրինակում $P(A)$ - ի փոխարեն ավելի հեշտ է հաշվել $P(\overline{A})$ - ը: $P(\overline{A}) = \dfrac{N(\overline{A})}{N(\Omega)}$:

Գոյություն ունեն $(363)^{32}$ հնարավոր ելքեր, որոնցից $\overline{A}$ -ի համար նպաստավոր կլինեն $365.364. ...(365-32+1) = 365.364. ... .334$:

Այսպիսով,

$$P(\overline{A}) = \frac{365.364.334}{365^{32}} = \frac{364.363......}{365^{31}} = \frac{364}{365.365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}\cdot\frac{361}{365}\cdot \ldots \frac{334}{365} =$$

$= 0,003.0,995.0,992.0,989.0,986.0,984.0,981.0,978.0,975.0,973.$

$.0,970.0,967.0,964.0,962..0,959.0,956.0,953.0,951.0,948.0,945.$

$.0,943.0,940.0,937.0,934..0,932.0,929.0,926..0,923.$

$.0,921.0,918.0,915 = 0,247 :$

$$P(\overline{A}) = 0,247 :$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,247 = 0,753 :$$

$$P(A) = 0,753,$$

Պատ.՝ $0,753$:

Խնդրի ձևակերպումը փոխենք: Դիցուք՝ ԵՊՀ ԻՄ հումանիտար գիտությունների ֆակուլտետի որևէ ուսանողի հետաքրքրում է հետևյալ հարցը՝ քանի՞ ուսանողի է հարկավոր հարցնել, որպեսզի $P(A) = \frac{1}{2}$ հավանականությամբ որևէ մեկի ծննդյան օրը համընկնի իր ծննդյան օրվա հետ:

Ենթադրենք՝ կատարվել է n թվով ուսանողների հարցում: A – ն այն պատահույթն է, որ ևս մեկ ուսանողի ծննդյան օրը համընկնում է հարցում կատարող ուսանողի ծննդյան օրվա հետ:

Ելքերի ընդհանուր թիվը 365^n է, $\overline{A}$ -ին նպաստավոր ելքերի թիվը՝ 364^n :

Այսպիսով՝ $P(\overline{A}) = \frac{364^n}{365^n}$, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{364^n}{365^n}$:

$$P(A) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n : \left(\frac{364}{365}\right)^n = \frac{1}{2} :$$

$$n = \log_{\frac{364}{365}} \frac{1}{2} = \log_{0,997} \frac{1}{2}$$

$$n = \log_{0,997} \frac{1}{2} :$$

Լոգարիթմների աղյուսակից գտնում ենք, որ $n = 253$: Որպեսզի հարցում կատարող ուսանողը կարողանա 0,5–ից ոչ պակաս հավանականությամբ պնդել, որ ֆակուլտետում կա ևս մեկ ուրիշ ուսանող, որը ծնվել է իր ծննդյան օրը, նա պետք է հարցում կատարի 253 –ից ավելի թվով ուսանողների:

5.7.4 ԶՈՒԳՈՐԴՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Դիցուք՝ ունենք n տարրանոց բազմություն:

Ձևակերպենք հետևյալ խնդիրը - Որքա՞ն $K(k \le n)$ տարրանոց ենթաբազմություններ կարելի է ձևավորել: Այդ փաստը կգրառենք $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ձևով և կանվանենք զուգորդություններ n -ից k - ական:

Քանի որ կարգավորված նմուշների թիվը հավասար է $(n)_k$ -ի, իսկ k ծավալ ունեցող նմուշ կարող ենք կարգավորել $(n)_k$ եղանակներով, ապա ոչ կարգավորված նմուշների թիվը կլինի

$$\frac{(n)_k}{k!}:$$

Այսինքն՝

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{(n)_k}{k!}:$$

Անցնելով ֆակտորիալներին՝ կունենանք՝

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot K!}: \quad (5)$$

Դիտարկենք օրինակ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Կուրսը տրոհված է երեք ենթախմբերի: Դիցուք՝ ենթախմբերում սովորում են 6 տղա և 4 աղջիկ: Ենթախմբի դասամատյանի համարներով պատահականորեն ընտրվել են 7 ուսանողներ: Գտնել հավանականությունը, որ ընտրված ուսանողներից 3-ը կլինեն աղջիկ:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Օգտվում ենք հավանականության դասական սահմանումից:

Նշանակենք A –ով այն պատահույթը, որ պատահականորեն ընտրված 7 ուսանողի մեջ կլինեն 3 աղջիկ ուսանող

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}:$$

Փորձի հնարավոր ելքերի ընդհանուր թիվը հավասար է 10 ուսանողից 7 ուսանող ընտրելու ձևերի թվին, այսինքն՝ $\binom{10}{7}$, 10 տարրից 7-ական զուգորդությունների թվին, այսինքն՝

$$N(\Omega)=\binom{10}{7}=\frac{10!}{(10-7)!.7!}=\frac{10!}{3.!.7!}=\frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.7.6.5.4.3.2.1}=5.3.8=120$$

$N(\Omega)=120$ ։

Հաշվենք A –ին նպաստող ելքերի թիվը: Որպեսզի ընտրված 7 ուսանողից 3-ը լինեն աղջիկ, պետք է նրանց ընտրել 4 աղջիկներից՝ $\binom{4}{3}$ ձևերով:

Մնացած 4 ուսանողին պետք է ընտրել 6 տղա ուսանողներից՝ $\binom{6}{4}$ ձևերով: Հետևաբար, նպաստող ելքերի թիվը հավասար է.

$$N(A)=\binom{4}{3}.\binom{6}{4}:$$

$$\binom{4}{3}=\frac{4!}{(4-3)!.3!}=\frac{4.3.2.1}{3.2.1}=4$$

$$\binom{4}{3}=4:$$

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{2!.4!}=\frac{6.5.4.3.2.1}{2.4.3.2.1}=3.5=15$$

$$\binom{6}{4}=15$$

$$N(A)=\binom{4}{3}.\binom{6}{4}=4.15=60$$

$$N(A)=60$$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}:\ \ P(A)=\frac{1}{2}=0,5:$$

5.7.5 ՈՉ ԿԱՐԳԱՎՈՐՎԱԾ ՆՄՈՒՇՆԵՐ՝ ՎԵՐԱԴԱՐՁՈՒՄՈՎ

Անդրադառնանք n տարրերից բաղկացած բազմությունից k ծավալ ունեցող նմուշ ընտրելու հարցերին: Անվերադարձ նմուշահանման ժամանակ ոչ մի տարր չի կարող ընտրվել մեկից ավելի անգամ, այնպես, որ k նիշերը նմուշում կլինեն տարբեր:

Վերադարձումով նմուշում տարրը կարող է ընտրվել մեկից ավելի անգամ այնպես, որ ոչ բոլոր k նիշերը նմուշում կլինեն տարբեր: Իհարկե, չի բացառվում, որ նույն տարրը կարող է ընտրվել յուրաքանչյուր անգամ, որի դեպքում նմուշը կպարունակի k հատ միևնույն տարրեր:

ԼԵՄՄԱ 1 ՝Վերադարձումով մոդելում տարբեր տարրերից բաղկացած n տարրանոց բազմության մեջ պարունակվող բոլոր ոչ կարգավորված k տարրանոց ենթաբազմությունների թիվը հավասար է՝

$$\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-1}{\text{n-1}}:$$

ՀԵՏԵՎԱՆՔ ՝Լեմմա 1-ից բխում է, որ

$$x_1+x_2+...+x_n=k,\;\; n\in N,\;\; k\in N \qquad (6)$$

հավասարման բոլոր ոչ բացասական լուծումների թիվը հավասար է

$$\binom{n+k-1}{n-1}:$$

Որպեսզի ստանանք (6) հավասարման բոլոր դրական լուծումների թիվը, ներմուծենք նոր փոփոխականներ՝

$$y_i=x_i-1, \quad i=1,2\;...,n:$$

Կստանանք՝

$$(y_1+1)+(y_2+1)+\;...\;+(y_n+1)=k$$

$$y_1+y_2+\;...\;+y_n=k-n: \qquad (7)$$

Նկատենք, որ (6) հավասարման դրական լուծումների թիվը համընկնում է (7)-ի ոչ բացասական լուծումների թվին:

ՀԵՏԵՎԱՆՔ ՝ (6) հավասարման բոլոր դրական լուծումների թիվն է

$$\binom{k-1}{n-1}:$$

Դիտարկենք օրինակ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Քանի՞ լուծում ունի

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \qquad (8)$$

հավասարումը, որտեղ $x_1, x_2, x_3,\ \ x_4$ -ը

ա) ոչ բացասական

բ) դրական

ամբողջ թվեր են:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Լուծումների թիվը հաշվելու համար օգտվենք լեմմա -- 1-ի հետևանքներից:

(8)-ի բոլոր ոչ բացասական լուծումների թիվը հավասար է՝

$$\text{ա)}\ \binom{n+k-1}{\text{k}} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{4+18-1}{18} =$$

$$\binom{4+18-1}{\text{4-1}} = \binom{21}{18} = \binom{21}{3} = \frac{21!}{18!.3!} =$$

$$= \frac{18!.19.90.21}{18!.3.2.1} = 19.70 = 1330$$

$$\binom{21}{3} = 1330 :$$

(8)-ի բոլոր դրական լուծումների թիվը հավասար է՝

$$\text{բ)}\binom{18-1}{\text{4-1}} = \binom{17}{3} = \frac{17!}{14!.3!} = \frac{14!.15.16.17}{14!.3.2} = 40.17 = 680$$

$$\binom{17}{3} = 680 :$$

5.8 ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Դիցուք՝ (Ω, P) հավանականային տարածությունում տեղի է ունեցել որևէ A պատահույթ: Քննարկենք հետևյալ հարցը. օգտագործելով այս տեղեկությունը՝ ինչպե՞ս կփոխվեն մնացած պատահույթների հավանականությունները:

B պատահույթի նոր հավանականությունը կանվանենք B –ի պայմանական հավանականություն A –ի տեղի ունենալու պայմանով և կնշանակենք $P(B/A)$ -ով: Փաստորեն, $P(B/A)$ պայմանական հավանականությունը նշանակում է B –ում ω -ի իրագործում պայմանով, որ $\omega \in A$:

Որպեսզի շարադրածը հասկանալի լինի, դիտարկենք օրինակ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Երեք սափորներից յուրաքանչյուրում կա 6 սև և 4 սպիտակ գնդակ: Առաջին սափորից պատահականորեն հանվել է 1 գնդակ և դրվել երկրորդ սափորի մեջ, որից հետո երկրորդ սափորից պատահականորեն հանվել է 1 գնդակ և դրվել երրորդի մեջ: Գտնել հավանականությունը, որ երրորդ սափորից պատահականորեն հանված գնդակը կլինի սպիտակ:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Ունենք 4 հավասարահնարավոր վարկած: Յուրաքանչյուր վարկածի հավանականությունը հաշվելը դժվար չէ:

Վարկածները ներկայացնենք աղյուսակային ձևով:

Աղյուսակ 3

Վարկածը	Տեղափոխությունները		
	I	II	III
1	Սպիտակ	Սպիտակ	Սպիտակ
2	Սպիտակ	Սև	Սպիտակ
3	Սև	Սպիտակ	Սպիտակ
4	Սև	Սև	Սպիտակ

I և II սափորներից սպիտակ գնդակ հանելու հավանականությունը համապատասխանաբար նշանակենք. P_1' -ով և P_2' -ով, իսկ սև գնդակ հանելու հավանականությունը P_3' -ով և P_4' -ով: Նրանց հավանականությունները կլինեն.

$$P_1' = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = P_2' = \frac{2}{5}:\ \ P_3' = P_4' = \frac{3}{5}:$$

Չորս վարկածներից յուրաքանչյուրի հավանականությունը հաշվելու համար կատարենք նույն նշանակումները, ինչպես I վարկածի համար, ստացված արդյունքներն ամփոփենք աղյուսակային ձևով.

Աղյուսակ 4

Վարկածը	Հավանականությունները		
	I	II	III
1	$P_1' = \frac{2}{5}$	$P_1'' = \frac{5}{11}$	$P_1''' = \frac{5}{11}$
2	$P_2' = \frac{2}{5}$	$P_2'' = \frac{6}{11}$	$P_2''' = \frac{4}{11}$
3	$P_3' = \frac{3}{5}$	$P_3'' = \frac{4}{11}$	$P_3''' = \frac{5}{11}$
4	$P_4' = \frac{3}{5}$	$P_4'' = \frac{7}{11}$	$P_4''' = \frac{4}{11}$

Երրորդ սափորից պատահականորեն սպիտակ գնդակ հանելու պատահույթը նշանակենք A -ով և հաշվենք $P(A)$ -ն:

$$P(A) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 :$$

$$P_1 = P_1' \cdot P_1'' \cdot P_1''' = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11} = \frac{10}{121}$$

$$P_1 = \frac{10}{121}:$$

$$P_2 = P_2' \cdot P_2'' \cdot P_2''' = \frac{2}{5}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{4}{11} = \frac{48}{605}$$

$$P_2 = \frac{48}{605}:$$

$$P_3 = P_3' \cdot P_3'' \cdot P_3''' = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{5}{11} = \frac{12}{121}$$

$$P_3 = \frac{12}{121}:$$

$$P_4 = P_4' \cdot P_4'' \cdot P_4''' = \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{11} = \frac{84}{605}$$

$$P_4 = \frac{84}{605}:$$

$$P(A) = P_1 + P_2 + P_2 + P_4 = \frac{10}{121} + \frac{48}{605} + \frac{12}{121} + \frac{84}{605} = (\frac{10}{121} + \frac{12}{121}) +$$

$$+(\frac{48}{605} + \frac{84}{605}) = \frac{22}{121} + \frac{132}{605} = \frac{110}{605} + \frac{132}{605} = \frac{242}{605} = 0,4$$

$$P(A) = 0,4, \text{ Պատ.՝ } 0,4:$$

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 5.7.1 ՝Դիցուք՝ A -ն և B -ն (Ω, P) հավանականային տարածության երկու պատահույթներ են.

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0, \qquad (9)$$

կոչվում է B –ի պայմանական հավանականություն A -ի տեղի ունենալու պայմանով:

(9) հավասարման երկու կողմերը բազմապատկենք $P(A)$ –ով $(P(A) \neq 0)$, կստանանք

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B), \; P(A) \neq 0, \; P(B) \neq 0: \qquad (10)$$

(10) բանաձևը հաճախ օգտակար է հավանականությունների հաշվարկն ավելի դյուրին դարձնելու համար: (10) բանաձևն անվանում են հավանականությունների բազմապատկման օրենք:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Սափորը պարունակում է 10 սպիտակ և 6 սև գնդակ: Սափորից առանց վերադարձման հանում ենք երկու գնդակ: Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ հանված երկու գնդակները կլինեն սպիտակ (A պատահույթ):

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ A_1 -ով նշանակենք այն պատահույթը, որ հանված գնդակներից առաջինը սպիտակ է, A_2 -ով՝ որ երկրորդը նույնպես սպիտակ է: Ըստ (10) բանաձևի

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2 / A_1): \; P(A_1) = \frac{10}{16}:$$

Քանի որ, ընտրված առաջին գնդակը սպիտակ է, ապա սափորում կմնան 9 սպիտակ և 6 սև գնդակ, և հետևաբար

$$P(A_2 / A_1) = \frac{9}{15}:$$

Այսպիսով՝

$$P(A)=P(A_1)P(A_2/A_1)=\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}=\frac{3}{8}$$

$$P(A)=\frac{3}{8}:$$

Դիտարկենք ուրիշ օրինակ:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Խճուղով, որի վրա է բենզակայանը, ընթացող բեռնատար ավտոմեքենաների թիվը հարաբերում է մարդատար ավտոմեքենաների թվին, ինչպես.

3 : 2: Հավանականությունը, որ կլիցքավորվի բեռնատար մեքենան, հավասար է 0,1 –ի, իսկ մարդատար մեքենայի համար այդ հավանականությունը հավասար է 0,2–ի: Լիցքավորման համար բենզակայանին մոտեցավ մեքենան: Գտնել հավանականությունը, որ այն բեռնատար է (A պատահույթ):

ԼՈւԾՈւՄ՝ Քանի որ հայտնի է խճուղով ընթացող բեռնատար և մարդատար մեքենաների թվերի հարաբերությանը $(3:2)$, ապա հարկավոր է ընտրել նրանց թվերը՝տրված հարաբերությանը համապատասխան: Նպատակահարմար է բեռնատարների թիվը ($բ(թ)$) վերցնել հավասար 300-ի՝ ($բ(թ)$)=300 : Հասկանալի է, որ ($Մ(թ)$)=200:

$$P(\text{բ})=\frac{N(\text{բ})}{\text{բ}(\text{թ})}:$$

Որտեղ, $P(\text{բ})$-ն հավանականությունն է, որ կլիցքավորվի բեռնատար ավտոմեքենա:

$N(\text{բ})$-ն լիցքավորման համար բենզակայանին մոտեցած բեռնատար ավտոմեքենաների թիվն է:

$\text{բ}(\text{թ})$ -ն խճուղով ընթացող բեռնատարների թիվն է:

$P(\text{բ})=0.1$

$$\text{բ}(\text{թ})=300\Rightarrow 0.1=\frac{N(\text{բ})}{300}\Rightarrow N(\text{բ})=300\cdot 0.1=30:N(\text{բ})=30:$$

Նմանապես,

$$P(\text{մ})=\frac{N(\text{մ})}{\text{Մ}(\text{թ})}:$$

$P(\text{մ})=0.2$

$$Մ(բ) = 200 \Rightarrow 0.2 = \frac{N(մ)}{200} \Rightarrow N(մ) = 200 \cdot 0.2 = 40 : N(մ) = 40 :$$

Այսպիսով՝

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(բ)}{N(բ) + N(մ)} = \frac{30}{30+40} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$$

$$P(A) = \frac{3}{7} \ :$$

Պատ.՝ $\frac{3}{7}$:

5.9 ԱՆԿԱԽՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԿԱԽՎԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

(Ω, P) հավանականային տարածության A և B պատահույթները կարող են լինեն անկախ և կախյալ: Եթե նրանք այնպիսին են, որ A-ի տեղի ունենալու փաստը չի ազդում B-ի տեղի ունենալու հավանականության վրա, ապա ասում ենք, որ B-ն անկախ է A-ից:

Քանի որ, $P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, ապա ակնհայտ է, որ B-ն անկախ է A-ից, եթե $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, այսինքն՝ $P(B / A) = P(B)$ (11) A-ի և B-ի նկատմամբ (11) -ի համաչափությունից հետևում է, որ եթե B-ն անկախ է A-ից, ապա A նույնպես անկախ է B-ից: Այսպիսով՝ հանգում ենք հետևյալ սահմանմանը.

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 5.8.1՝ Եթե տեղի ունի (11) հավասարումը, կասենք որ A և B պատահույթները անկախ են, հակառակ դեպքում կասենք, որ նրանք կախյալ են:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Նետում ենք երկու խաղոսկր: Ենթադրում ենք, որ բոլոր ելքերը հավասարահնարավոր են, հետևաբար ունեն $\frac{1}{36}$ հավանականություն և որ առաջին խաղոսկրի վրա բացվել է 5:

Ինչպիսի՞ն է պայմանական հավանականությունը, որ երկու խաղոսկրերի վրա բացված միավորների գումարը հավասար է 9-ի (B), եթե հայտնի է, որ առաջին խաղոսկրի վրա բացվել է 5 (A) :

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ A պատահույթը բաղկացած է 6 ելքերից՝

$\{(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6)\}$:

B պատահույթը՝ 4 ելքից՝

$$\{(3,6);(4,5);(5,4);(6,3)\}$$

$$A \cap B = \{(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6)\} \cap$$
$$\cap \{(3,6);(4,5);(5,4);(6,3)\} = (5,4)$$

$$A \cap B = (5,4):$$

$A \cap B$ պատահույթը բաղկացած է 1 ելքից՝ $(5,4)$

Ω -ն 36 տարրանոց բազմություն է: Կստանանք՝

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$:

$P(B) = \frac{1}{9}$:

$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$:

Ըստ (9) հավասարման՝ կունենանք՝

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{36} : \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{1} = \frac{1}{6}$:

$P(B/A) = \frac{1}{6}$:

Հաշվենք $P(A).P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{54}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

$P(A \cap B) \neq P(A).P(B) \Rightarrow A$ և B պատահույթները կախյալ են:

5.9.1 ԱՆԿԱԽ ՊԱՏԱՀՈՒՅԹՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 1՝ Եթե $P(A) \neq 0$, ապա A -ն և B -ն անկախ են միայն այն դեպքում, երբ $P(B/A) = P(B)$: Նախորդ օրինակում

$$\left. \begin{array}{l} P(B/A) = \frac{1}{6} \\ P(B) = \frac{1}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ -ն և } B \text{ -ն կախյալ են:}$$

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 2՝ Եթե A -ն և B -ն անկախ են, ապա անկախ են նաև A և $\overline{B}$, $\overline{A}$ և B $\overline{A}$ և $\overline{B}$ զույգ պատահույթները:

5.10 ԼՐԻՎ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԲԱՅԵՍԻ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

Երբեմն A պատահույթի տեղի ունենալը կախված է ուրիշ $B_i i \geq 1$, պատահույթների տեղի ունենալուց: A պատահույթի հավանականությունը կլինի միջինացված հավանականություն (կշռավորված միջին $P(B_i)$ կշիռներով):

Նման դեպքերում կիրառվում է լրիվ հավանականության բանաձևը:

Դիցուք՝ տրված են B_n անհամատեղելի պատահույթներ և կամայական n–ի համար $P(B_n) \neq 0$: Եթե $A \subset \bigcup_{n \geq 1} B_n$, ապա $P(A) = \sum_{n\geq 1} P(B_n).P(A / B_n)$; (12): (12) բանաձևն անվանում են լրիվ հավանականության բանաձև:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Առաջին սափորը պարունակում է 8 սպիտակ և 6 սև գնդակներ, իսկ երկրորդ սափորը՝7 սպիտակ և 4 սև գնդակներ: Առաջին սափորից մեկ գնդակ տեղափոխում են երկրորդ սափոր, ապա երկրորդ սափորից հանում երկու գնդակ՝ առանց վերադարձման: Ինչպիսի՞ն է այդ երկու գնդակների սպիտակ լինելու հավանականությունը:

ԼՈՒԾՈՒՄ: Նշանակենք B_1 -ով այն պատահույթը, որ առաջին սափորից սպիտակ գնդակ են տեղափոխել երկրորդ սափոր, և B_2 -ով պատահույթը, որ առաջին սափորից տեղափոխել են սև գնդակ: A –ով նշանակենք այն պատահույթը, որ երկրորդ սափորից ընտրել են երկու սպիտակ գնդակ: Ըստ (12) բանաձևի՝

$$P(A) = \sum_{n=1}^{2} P(B_n).P(A / B_n) = P(B_1) \cdot P(A / B_1) + P(B_2) \cdot P(A / B_2):$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A / B_1) + P(B_2).P(A / B_2):$$

$$P(B_1) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7},\ P(B_1) = \frac{4}{7}:$$

$$P(A/B_1)=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{8!}{6!.2!}:\frac{12!}{10!.2!}=\frac{6!.7.8}{6!.2}\cdot\frac{10!.2}{10!.11.12}=28.\frac{1}{66}=\frac{14}{33}:$$

$$P(A/B_1)=\frac{14}{33}:$$

$$P(A/B_2)=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}:$$

$$P(A/B_2)=\frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{7!}{5!.2!}:\frac{12!}{10!.2!}=\frac{5!.6.7}{5!.2}\cdot\frac{1}{66}=\frac{21}{66}:$$

$$P(A/B_2)=\frac{7}{22}:$$

$$P(A)=P(B_1).P(A/B_1)+P(B_2).P(A/B_2)=\frac{4}{7}\cdot\frac{14}{33}+\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{22}=$$

$$=\frac{8}{33}+\frac{3}{22}=\frac{16}{66}+\frac{9}{66}=\frac{25}{66},$$

$P(A)=\frac{25}{66}$, Պատ.՝ $\frac{25}{66}$:

Եթե լրիվ հավանականության (12) բանաձևի բոլոր պայմանները բավարարված են, ապա հանգում ենք հետաքրքիր հետևանքի: Հետևյալ բանաձևը՝

$P(B_i / A)=\frac{P(Bi)\cdot P(A/Bi)}{\sum_{n=1}^{n}P(B_n).P(A/B_n)}$, $i=1,2,$ (13) հայտնի է որպես Բայեսի բանաձև:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Երկու ավտոմատ հաստոցներ արտադրում են միատեսակ դետալներ, որոնք հետո տրվում են հոսքագծին: Առաջին հաստոցի արտադրողականությունը երկու անգամ մեծ է երկրորդի արտադրողականությունից: Առաջին հաստոցի արտադրանքի միջին հաշվով 60%-ը գերազանց որակի դետալներ են, երկրորդի արտադրանքի 80% է գերազանց որակի: Հոսքագծից պատահական վերցրած դետալը գերազանց որակի է: Գտնել հավանականությունը, որ այդ դետալն արտադրված է առաջին հաստոցի կողմից:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Նշանակենք A –ով այն պատահույթը, որ ընտրված դետալը գերազանց որակի է և կատարենք երկու ենթադրություն՝ վարկած:

B_1 - ով նշանակենք այն վարկածը, որ դետալն արտադրվել է առաջին հաստոցով, B_2 - ով՝ որ արտադրվել է երկրորդ հաստոցով:

Քանի որ B_1 - ը և B_2 - ը կազմում են լրիվ խումբ, կունենանք

$$P(B_1)+P(B_2)=1$$

Ըստ պայմանի՝ $P(B_1)=2P(B_2)$, կունենանք $2P(B_2)+P(B_2)=1$

$$3P(B_2)=1$$

$$P(B_2)=\frac{1}{3}:$$

$$P(B_1)=2P(B_2)=\frac{2}{3}$$

$$P(B_1)=\frac{2}{3}:$$

Պայմանական հավանականությունը, որ դետալը գերազանց որակի է, եթե այն արտադրվել է առաջին հաստոցով.

$$P(A/B_1)=0,6:$$

Պայմանական հավանականությունը, որ դետալը գերազանց որակի է, եթե այն արտադրվել է երկրորդ հաստոցով.

$$P(A/B_2)=0,8:$$

Հավանականությունը, որ պատահական ընտրված դետալը գերազանց որակի է, հաշվենք լրիվ հավանականության (12) բանաձևով.

$$P(A)=\sum_{n=1}^{2}P(B_n).P(A/B_n)=P(B_1).P(A/B_1)+P(B_2).P(A/B_2)=$$

$$=\frac{2}{3}.0,6+\frac{1}{3}.0,8=\frac{2}{3}.\frac{6}{10}+\frac{1}{3}.\frac{8}{10}=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15}+\frac{4}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}:\ P(A)=\frac{2}{3}:$$

Որոնելի հավանականությունը, որ ընտրած գերազանց որակի դետալն արտադրված է առաջին հաստոցով, հաշվենք Բայեսի (13) բանաձևով.՝ $P(B_i/A)=\frac{P(B_i).P(A/B_i)}{P(A)},\ i=1$

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1).P(A/B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}.0,6}{\frac{2}{3}}=0,6$$

$$P(B_1/A)=0,6:$$

Պատ.՝ $0,6:$

5.11 ԱՆԿԱԽ ՓՈՐՁԵՐ

Կան փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրը կարելի է դիտարկել որպես ենթափորձերի որևէ հաջորդականություն: Եթե փորձը դրամի n անգամ նետումն է, ապա յուրաքանչյուր նետում կարող ենք դիտարկել որպես ենթափորձ: Եթե ենթափորձերի ցանկացած խմբի ելքերը չեն ազդում ուրիշ ենթափորձերի ելքերի հավանականությունների վրա, ապա կասենք, որ ենթափորձերն անկախ են:

Հավանականությունների տեսության շատ խնդիրներ կարելի է դիտարկել որպես անկախ կրկնվող փորձեր, որոնց ելքերը դասակարգվում են երկու տիպերի՝ «հաջողություն» (A պատահույթ) և «անհաջողություն» ($\overline{A}$ պատահույթ):

A -ի հավանականությունը կնշանակենք p-ով, $(P(A)=p)$, հետևաբար $P(\overline{A})=1-p$, որտեղ $0\le p\le 1$: Այսպիսի փորձերը կոչվում են անկախ փորձեր:

Դիտարկենք n անկախ կրկնվող փորձեր, որոնց ժամանակ հաջողության $(P(A)=p)$ և անհաջողության $(P(\overline{A})=1-p)$ հավանականությունները մնում են հաստատուն (կրկնվում են):

Դիտարկվող խնդիրներում ենթադրում ենք.

1. Յուրաքանչյուր փորձ ունի միայն երկու հնարավոր ելք, որ կոչվում են «հաջողություն» և «անհաջողություն» (հաջողությունը գերադասելի չէ):

2. Հաջողության հավանականությունը նույնն է յուրաքանչյուր փորձի համար:

3. Գոյություն ունեն n փորձեր, որտեղ n=const:n փորձերը անկախ են:

4. Բնական է, որ n փորձերում մեզ հետաքրքրում է k հաջողությունների թիվը, $k=0,1,2,...,n$, այսինքն, «k հաջողություններ n անկախ փորձերում» պատահույթի $P_n(k)$ հավանականության հաշվումը: «k հաջողություններ n անկախ փորձերում» պատահույթը կարող է տեղի ունենալ այնքան եղանակներով, որքան k հատ նույնանման տարրեր կարող ենք բաշխել n տեղերում: Հետևաբար, գոյություն ունեն $\binom{n}{k}$ ելքեր, որոնք պարունակում են k հաջողություններ, յուրաքանչյուրը p

հավանականությամբ և $n-k$ անհաջողություններ՝ $1-p$ հավանականությամբ ՝ $(k=0,1,2,...,n)$ ։

Այսպիսով՝ որոնելի $P_n(k)$ հավանականությունը կհաշվենք

$$P_n(k)=\binom{n}{k}.P^k(1-p)^{n-k} \quad \text{։} \quad (14)$$

(14) – ում արտահայտված օրենքը ստացվում է Նյուտոնի երկանդամի վերլուծությունից՝

$$(a+b)^n=\Sigma_{k=0}^n\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \quad \text{։}$$

Նրա մեջ տեղադրելով $a=p$ և $b=1-p$ կստանանք՝

$$(a+b)^n=(p+(1-p))^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=0}^n P_n(k) \text{։}$$

$$\Sigma_{k=0}^n P_n(k)=1^n=1 \text{։}$$

Եթե տեղադրենք $a=b=1,$ ապա ստանում ենք երկանդամի գործակիցների գումարը, որը հավասար է 2^n ։

$$\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}1^k.1^{n-k}=(a+b)^n=(1+1)^n=2^n \text{ ։}$$

$$\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}=2^n \text{ ։}$$

$b=1$ և $a=-1$ դեպքում ստանում ենք

$$\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-1)^k.1^{n-k}=(a+b)^n=(-1+1)^n=0^n=0$$

$$\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}=0 \text{ ։}$$

ՕՐԻՆԱԿ՝ Ուսանողը գիշերը պարապելու նպատակով օգտագործում է իրարից անկախ աշխատող 4 լամպերից բաղկացած լուսամփոփ: Պարապելու ընթացքում 4 լամպերից երկուսը խափանվում են: Գտնել հավանականությունը, որ խափանվել են առաջին և երկրորդ լամպերը, եթե առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ լամպերի համար խափանվելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են՝

$$P_1=0,1; \quad P_2=0,2; \quad P_3=0,3, \quad P_4=0,4 \text{ ։}$$

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ A -ով նշանակենք այն պատահույթը, որ խափանվել են 2 լամպ:

Կարող են առաջ քաշվել հետևյալ վարկածները:

Ըստ B_1 -ի՝ խափանվել են առաջին և երկրորդ լամպերը, իսկ երրորդն ու չորրորդը սարքին են: Քանի որ լամպերը անկախ են աշխատում, $P(B_1)$ -ը հաշվելու համար կիրառելի է հավանականությունների բազմապատկման թեորեմը.

$$P(B_1) = P_1 . P_2 (1 - P_3)(1 - P_4) = p_1 . p_2 . q_1 . q_2 = 0,1$$
$$.0,2.0,7.0,6 = 0,0084$$
$$P(B_1) = 0,0084 :$$

Ըստ B_2 -ի՝ խափանվել են առաջին և երրորդ լամպերը, իսկ երկրորդ և չորրորդ լամպերը սարքին են.

$$P(B_2) = p_1 . q_2 . p_3 . q_4 = 0,1.0,7.0,3.0,6 = 0,0126$$
$$P(B_2) = 0,0126 :$$

Ըստ B_3 -ի՝ խափանվել են առաջին և չորրորդ լամպերը, իսկ երկրորդ և երրորդ լամպերը սարքին են.

$$P(B_3) = p_1 . q_2 . q_3 . p_4 = 0,1.0,8.0,7.0,4 = 0,0224$$
$$P(B_3) = 0,0224 :$$

Ըստ B_4 -ի՝ խափանվել են երկրորդ և երրորդ լամպերը, իսկ առաջին և չորրորդ լամպերը սարքին են.

$$P(B_4) = q_1 . p_2 . p_3 . q_4 = 0,9.0,2.0,3.0,6 = 0,0324$$
$$P(B_4) = 0,0324 :$$

Ըստ B_5 -ի՝ խափանվել են երկրորդ և չորրորդ լամպերը, իսկ առաջին և երրորդ լամպերը սարքին են.

$$P(B_5) = q_1 . p_2 . q_3 . p_4 = 0,8.0,2.0,7.0,4 = 0,0448$$
$$P(B_5) = 0,0448 :$$

Ըստ B_6 -ի՝ խափանվել են երրորդ և չորրորդ լամպերը, իսկ առաջին և երկրորդ լամպերը սարքին են.

$$P(B_6) = q_1 . q_2 . p_3 . p_4 = 0,9.0,8.0,3.0,4 = 0,0864$$
$$P(B_6) = 0,0864 :$$

Քանի որ $B_1B_2...B_6$ վարկածների դեպքում A պատահույթը հավաստի է, ապա համապատասխան պայմանական հավանականությունները հավասար են 1-ի.

$$P(A/B_1)=P(A/B_2)=...=P(A/B_6)=1:$$

Ըստ լրիվ հավանականության բանաձևի՝ հավանականությունը, որ խափանվել են 2 լամպ, կլինի.

$$P(A)=P(B_1).P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+...+P(B_6).P(A/B_6)=$$
$$=0,084.1+0,0126.1+0,0224.1+0,0324.1+$$
$$+0,0448.1+0,0864.1=0,2826$$
$$P(A)=0,2826:$$

Որոնելի հավանականությունը, որ խափանվել են առաջին և երկրորդ լամպերը, գտնում ենք ըստ Բայեսի բանաձևի.

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1).P(A/B_1)}{P(A)}=\frac{0,0084.1}{0,2826}\approx 0,0297$$

Պատ.՝ $0,0297$:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Կանոնավոր խաղոսկրը նետում են յոթ անգամ: Գտնել հավանականությունը, որ հինգ ցուցանիշը կբացվի ճշգրիտ երկու անգամ:

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Ունենք յոթ անկախ փորձ՝ $n=7$, $P=\frac{1}{6}$, $k=2$ պարամետրերով: Ըստ (14) բանաձևի՝ կունենանք.

$$P_7(2)=\binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{7!}{5!.2}.\left(\frac{1}{6}\right)^2.\left(\frac{5}{6}\right)^5=$$
$$\frac{5!.6.7}{5!.2}.\frac{1}{36}.\frac{25}{36}=\frac{7}{12}.\frac{25}{36}.\frac{1}{36}=\frac{7}{12}.\frac{1}{36}.\frac{25}{36}=$$
$$=0,583\cdot 0,0277\cdot 0,694=0,0112:$$
$$P_7(2)=0,0112:$$

Պատ.՝ $0,0112$:

5.12 ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Հավանականությունների տեսության խնդիրները լուծելիս ստեղծում են լուծման հավանականային մոդելներ: Այդ մոդելներում կանխատեսելի են փորձերի ելքերի հավանականությունները, որոնք մենք արտահայտում ենք $[0,1]$ միջակայքի թվերով: Սակայն կան փորձեր, որոնցում ելքերը թվային արժեքներով չեն արտահայտվում: Այս տիպի ելքերը կարելի է նույնացնել պատահույթին՝ նրանց վերագրելով թվային արժեքներ՝ փորձը նույնացնելով պատահական երևույթի հետ: Այլ կերպ ասած, պատահական երևույթի հնարավոր ելքերը կարելի է բնական կամ արհեստական ձևերով թվայնորեն նույնացնել: Նման նույնականացման պատճառն այն է, որ թվերով աշխատելը հարմար է և ստեղծվում է հնարավորություն՝ առավելագույնս օգտվելու մաթեմատիկական անալիզի եղանակներից:

Պատահական փորձի նկարագրումը թվային տվյալներով կատարվում է պատահական մեծության գաղափարի միջոցով. ցանկացած $\omega \in \Omega$ ելքին համապատասխանում է $\eta(\omega)$ իրական թիվ:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 5.11.1՝ Դիցուք՝ (Ω, P) - ն հավանականային տարածություն է, այսինքն՝ P-ն որոշված է Ω -ի վրա: Պատահական մեծություն է η ֆունկցիան, որն արտապատկերվում է Ω -ն իրական թվերի բազմության վրա. $\eta : \Omega \to R$, այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\omega \in \Omega$ ելքի համար գոյություն ունի իրական թիվ, որը նշանակում է $\eta(\omega)$:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Նետում ենք երեք համաչափ դրամներ: Ենթադրենք, որ $\eta(\omega)$-ն գերբի երևումների թիվն է: Այդ դեպքում $\eta(\omega)$-ն պատահական մեծություն է, որն ընդունում է $0,1,2,3$ արժեքներից մեկը, համապատասխանաբար՝ P_0, P_1, P_2, P_3 հավանականություններով: Գտնել այդ հավանականությունները:

ԼՈւԾՈւՄ՝ Որոնելի հավանականությունները հաշվելու համար $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունը նույնականացնենք «n անկախ փորձերում k հաջողություններ» պատահույթների հետ:

Կունենանք՝

$$P_0 = P(\omega : \eta(\omega) = 0) = P_0(3) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}:$$

$$P_0 = P(\omega : \eta(\omega) = 0) = \frac{1}{8} :$$

$$P_1 = P(\omega : \eta(\omega) = 1) = P_1(3) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P_1 = P(\omega : \eta(\omega) = 1) = \frac{3}{8} :$$

$$P_2 = P(\omega : \eta(\omega) = 2) = P_2(3) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

$$P_2 = P(\omega : \eta(\omega) = 2) = \frac{3}{8} :$$

$$P_3 = P(\omega : \eta(\omega) = 3) = P_3(3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

$$P_3 = P(\omega : \eta(\omega) = 3) = \frac{1}{8} :$$

Քանի որ, $\eta(\omega)$ -ն պետք է ընդունի 0-ից 3 արժեքներից մեկը, կունենանք՝

$$1 = \sum_{k=0}^{3} P_k = \sum_{k=0}^{3} P(\omega : \eta(\omega) = k) :$$

5.13 ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ ԲԱՇԽՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

$\eta(\omega)$ պատահական մեծության F բաշխման ֆունկցիան որոշված է բոլոր $X \in R$ իրական թվերի համար հետևյալ բանաձևով.

$F(x) = P(\omega : \eta(\omega) < x),$ այսինքն՝ $F(x)$ - ը նշանակում է հավանականություն, որ $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունն ընդունում է x –ից փոքր արժեք:

Նշենք բաշխման ֆունկցիայի մի քանի հատկություններ:

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 1՝ Քանի որ $F(x)$ - ը նշանակում է հավանականություն, ապա $0 \le F(x) \le 1$:

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 2՝ F – ը չնվազող ֆունկցիա է, այսինքն՝

$$x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2) :$$

$$P(\omega : x_1 \le \eta(\omega) < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

բոլոր $x_1 < x_2$ համար:

Եթե $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ երկու պատահական մեծությունները միատեսակ են բաշխված, ապա նրանց բաշխման ֆունկցիաները հավասար են. $F\eta_1(x) = F\eta_2(x)$ բոլոր $x \in R$ համար:

Կասենք, որ $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունն ունի նորմալ բաշխում, եթե նրա բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$F(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(y-2)^2}{2\delta^2} \right) dy :$$

Որտեղ՝ α -ն δ -ն հաստատուններ են, ընդ որում՝ $\alpha \in R$ և $\delta > 0$:

Կասենք, որ պատահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխըված (a,b) միջակայքում, եթե նրա բաշխման ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{եթե } \alpha \le x \le b \\ 1, & \text{եթե } x \ge 1 \end{cases} :$$

Պատահական մեծության բաշխումը համարվում է ցուցչային $\lambda > 0$ պարամետրով, եթե նրա բաշխման ֆունկցիան տրվում է հետևյալ բանաձևով. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases}$:

Եթե $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունը հաստատուն մեծություն է $\eta(\omega) \equiv c$, ապա համապատասխան բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝ $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le c \\ 1 & x > c \end{cases}$:

Պատահական մեծությունը, հասկանալի է, կարող է ընդունել հաշվելի կամ անվերջ թվով հնարավոր արժեքներ: Ըստ այդմ էլ՝ համապատասխանաբար կարող է լինել դիսկրետ կամ անընդհատ:

5.14 ԴԻՍԿՐԵՏ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 5.13.1՝ Պատահական մեծությունը կոչվում է դիսկրետ, եթե նա կարող է ընդունել հաշվելի թվով հնարավոր արժեքներ: Դիսկրետ պատահական մեծության օրինակներ են՝

1. ԵՊՀ ԻՄ տվյալ դասին անհարգելի բացակայող ուսանողների թիվը:
2. Անտառաշերտից ապօրինի ծառահատումների թիվը:
3. Տարվա ընթացքում պետական արգելանոցում սպանված կենդանիների թիվը:
4. Գյուղական համայնքում գազաֆիկացված տների քանակը:

Դիսկրետ պատահական մեծության $P(x)$ ֆունկցիան սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$P(x) = P(\omega : \eta)(\omega) = x) :$$

$\eta(\omega)$ դիսկրետ պատահական մեծությունը կարելի է սահմանել իր բաշխման օրենքով, այսինքն՝

Աղյուսակ 5

x_i	x_1	x_2	… … … … … …	x_n
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$		$P(x)_n$

որտեղ $x_1, x_2..$ - ը $\eta(\omega)$ հնարավոր արժեքներն են և $P(x_1)$, $P(x_2)$,… բավարարում են $\sum\limits_{i\geq 1}(Px_i) = 1$ պայմանին:

ՕՐԻՆԱԿ՝ Դիցուք՝ $\eta(\omega)$ դիսկրետ պատահական մեծություն է բաշխման հետևյալ օրենքով՝

Աղյուսակ 6

x_i	3	4	7	10
$P(x_i)$	0,2	0,1	0,4	0,3

Նրա բաշխման ֆունկցիան տրվում է

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{երբ} \quad x\le 3\\ 0.2, & \text{երբ} \quad 3<x\le 4\\ 0.3, & \text{երբ} \quad 4<x\le 7\\ 0.7, & \text{երբ} \quad 7<x\le 10\\ 1, & \text{երբ} \quad x>10\end{cases}$$

բանաձևով:

Եթե $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունը դիսկրետ պատահական մեծություն է՝ տրված

Աղյուսակ 7

x_i	0	1	2	... ...n
$P(x_i)$	$P\ (0)$	$P\ (1)$	$P\ (2)$	$...P(n)$

բաշխման օրենքով, որտեղ

$$P(x)=\binom{n}{x}p^x.(1-p)^{n-x}, \quad x=0,1,2,...,n,$$

ապա այն հանդիսանում է n և p պարամետրերով բինոմական բաշխում ունեցող պատահական մեծություն:

Եթե $\eta(\omega)$ պատահական մեծությունն ունի բինոմական բաշխում $n=4$ և $P=\frac{1}{6}$ պարամետրերով, ապա

$$P(\omega:1<\eta(\omega)\le 2)=\binom{4}{1}.\left(\frac{1}{6}\right)^2.\left(\frac{5}{6}\right)^2==\frac{4!}{2!.2!}.(0,1667)^2.(0,8333)^2=$$

$$=\frac{2!.3.4}{2!.2}.0,0278.0,6944=0,1158:$$

$$P(\omega:1\le\eta(\omega)<2)=\binom{4}{1}.\left(\frac{1}{6}\right)^1.\left(\frac{5}{6}\right)^3==\frac{3!.4}{3!.1!}.0,1667.(0,8333)^3=$$

$$=4.0,1667.0,5786=0,3858: \quad P(\omega:1\le\eta(\omega<2))=0,3858$$

$$P(\omega:1\le\eta(\omega)\le 2)=0,3858+0,1158=0,5016:$$

$\eta(\omega)$ պատահական մեծությունն ունի Պուասոնյան բաշխում $\lambda > 0$ պարամետրով, եթե նա ունի հետևյալ բաշխումը՝

Աղյուսակ 8

x_i	0	1	2	... ...n
$P\ (x_i)$	$P\ (0)$	$P\ (1)$	$P\ (2)$	...$P(n)$

որտեղ $P(n) = P(\eta = n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda}{n!}, \quad n = 0,1:$

5.15 ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

$\eta(\omega)$–ն բացարձակ անընդհատ պատահական մեծություն է, եթե գոյություն ունի այնպիսի $f(x)$ ֆունկցիա (կամայական $x \in R$–ի համար $\eta(\omega)$-ի խտության ֆունկցիան), $F(x)$ բաշխման ֆունկցիան ներկայացվում է հետևյալ կերպ՝

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy :$$

Մաթանալիզից մեզ հայտնի

$$P(x \le \eta(\omega) < x + \Delta x) = F(x_2) - F(x_1) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) =$$
$$= \Delta F(x) = f(x)$$

բանաձևի երկու կողմերը բաժանելով Δx -ի վրա՝ կստանանք

$$\frac{P(x \le \eta(\omega) < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$$

$$f(x) = \frac{P(x \le \eta(\omega) < x + \Delta x)}{\Delta x} :$$

Այսպիսով՝ η պատահական մեծության $(x, x + \Delta x)$ անվերջ փոքր միջակայքում ընկնելու հավանականությունը հավասար է խտության ֆունկցիայի արժեքին x կետում՝ բազմապատկած այդ միջակայքի երկարությամբ:

Բաշխման ֆունկցիաների մեր դիտարկած օրինակներից նորմալ բաշխված պատահական մեծությունը, որի բաշխման ֆունկցիան այսպիսին է. $F(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} d\int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{(x-a)^2}{2b^2})dy,$ բացարձակ անընդհատ է և իր խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$dF(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} d\int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2})dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} d\int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}), \text{որտեղ}$$

$a = const,\ \ a \in R$ և $\delta > 0$ ։

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1 & X \ge b \end{cases}$$

բաշխման ֆունկցիա ունեցող և (a, b) միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պատահական մեծությունը բացարձակ անընդհատ է և իր խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } x \notin (a,b) \\ \frac{1}{b-a}, & \text{երբ } x \in [a,b] \end{cases} \text{ ։}$$

$\lambda > 0$ պարամետրով ցուցչային բաշխում ունեցող պատահական մեծությունը բացարձակ անընդհատ է և իր խտության ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases} \text{ ։}$$

Պատահական մեծությունները դասակարգելու համար հարկավոր են թվային բնութագրիչներ։ Այդպիսի բնութագրիչներ են պատահական մեծությունների մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան։

5.16 ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՍՊԱՍՈՒՄԸ։ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՍՊԱՍՄԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Տրված $\eta(\omega)$ պատահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը նշանակենք $M\eta$ -ով։ $M\eta$ -ն սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.

$$M\eta = \begin{cases} \sum\limits_{x_i P(x>0)} \times P(x) \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \times f_\eta(x)dx \end{cases},$$

առաջին դեպքում՝ η-ն դիսկրետ, երկրորդ դեպքում բացարձակ անընդհատ պատահական մեծություն է՝ կախված նրանից, թե η-ն ինչպես է որոշվում, իր $f_\eta(x)$ խտության ֆունկցիայով, թե՞ բաշխման օրենքով:

ՕՐԻՆԱԿ՝ x պատահական մեծությունը տրված է $(0,1)$ միջակայքում իր խտության ֆունկցիայով $f(x)=x+0,5$, այդ միջակայքից դուրս $f(x)=0$:

Գտնել $y=\varphi(x)=x^3$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասումը (նախապես չգտնելով y-ի խտության ֆունկցիան):

ԼՈՒԾՈՒՄ՝ Օգտվենք x պատահական արգումենտից՝ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի մաթեմատիկական սպասման հաշվման բանաձևից.

$$M[\varphi(x)] = \int_a^b \varphi(x) f(x)dx :$$

Տեղադրելով $\varphi(x)=x^3$, $f(x)=x+0,5$, $a=0$, $b=1$՝ կստանանք՝

$$M(x^3) = \int_0^1 x^3(x+0,5)dx = \int_0^1 (x^4+0,5x^3)dx = \int_0^1 x^4dx + 0,5x\int_0^1 x^3dx =$$

$$= \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 + 0,5.\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5}+0,5.\frac{1}{4} = \frac{1}{5}+\frac{1}{8} = \frac{8}{40}+\frac{5}{40} = \frac{13}{40}:$$

$M(x^3)=\frac{13}{40}$, Պատ.՝ $\frac{13}{40}$:

Դիտարկենք մաթեմատիկական սպասման հատկությունները:

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 1՝ Եթե $\eta(\omega)$ -ն դիսկրետ պատահական մեծություն է, որն ընդունում է $x_i . i \geq 1$ արժեքից որևէ մեկը $P(x_i)$ հավանականություններով, ապա կամայական g (x) ֆունկցիայի համար՝

$$M[g(\eta(\omega)] = \sum_i gM(x_i).P(x_i):$$

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 2՝ Եթե a և b հաստատուններ են, ապա

$$M[a\eta(\omega)+b] = a.M+b$$

ցանկացած $\eta(\omega)$ պատահական մեծության համար:

ՍԱՀՄԱՆՈՒՄ 5. 11. 1՝ $M\eta^n$, $n \geq 1$ մեծությանն անվանում են $\eta(\omega)$ - ի n -րդ մոմենտ՝ $M\eta^n = \begin{cases} \sum_i x_i^n P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\eta(x)dx \end{cases}$:

Առաջին դեպքում η -ն դիսկրետ պատահական մեծություն է, իսկ երկրորդ դեպքում η -ն բացարձակ անընդհատ պատահական մեծություն է:

ՀԱՏԿՈւԹՅՈւՆ 3՝ Եթե $\eta(\omega) \geq 0$, ապա $M\eta \geq 0$:

ՀԱՏԿՈւԹՅՈւՆ 4՝ Եթե $M\eta_1(\omega)$ –ն և $M\eta_2(\omega)$ -ն վերջավոր են, ապա $M(\eta_1(\omega) + \eta_2(\omega)) = M\eta_1(\omega) + M\eta_2(\omega)$:

ՀԵՏԵՎԱՆՔ՝ Կամայական $\eta(\omega)$ պատահական մեծության և իր մաթ. սպասման տարբերության մաթ. սպասումը հավասար է 0-ի.

$$M(\eta(\omega) - M\eta\omega) = 0:$$

ՀԱՏԿՈւԹՅՈւՆ 5՝ Եթե $\eta_1(\omega) \geq \eta_2(\omega)$, ապա $M\eta_1(\omega) \geq M\eta_2(\omega)$:

ՀԱՏԿՈւԹՅՈւՆ 6՝ Եթե η_1 -ը և η_2 -ն անկախ են, ապա

$$M[\eta_1 \cdot \eta_2] = M\eta_1 \cdot M\eta_2:$$

Տարբեր պատահական մեծություններ կարող են ունենալ միևնույն մաթ. սպասումը: Ուստի նրանց տարբերակելու համար հարկավոր է ունենալ ուրիշ թվային բնութագրիչ: Այդպիսի բնութագրիչ է պատահական մեծության դիսպերսիան:

5.17 ԴԻՍՊԵՐՍԻԱ: ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԻՍՊՐԵՍԻԱՅԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

ՍԱՀՄԱՆՈւՄ 5.17.1՝ $\eta(\omega)$ պատահական մեծության դիսպերսիան $D(\eta)$ սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$D(\eta) = M(\eta - M\eta)^2,$$

այսինքն՝ η պատահական մեծության դիսպերսիան այդ պատահական մեծության և նրա մաթ. սպասման տարբերության քառակուսու մաթ. սպասումն է:

Ձևափոխելով $D(\eta)$ -ի սահմանման մեջ գրված բանաձևը՝ ստանում ենք.

$$D(\eta) = M[\eta - M\eta]^2 = M[\eta^2 - 2\eta \cdot M\eta + (M\eta)^2] =$$
$$= M[\eta^2] - 2(M\eta)^2 + [M\eta]^2 = M[\eta^2] - [M\eta]^2 :$$
$$D(\eta) = M(\eta)^2 - [M\eta]^2 :$$

ԴԻՏՈՂՈՒԹՅՈՒՆ՝ $D(\eta)$ –ի քառակուսի արմատն անվանում են η -ի ստանդարտ շեղում և նշանակում են $SD(\eta)$ -ով, $SD(\eta) = \sqrt{D(\eta)}$: Դիտարկենք դիսպերսիայի մի քանի կիրառական հատկություններ:

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 1՝ Կամայական η պատահական մեծության համար $D(\eta) \geq 0$:

ՀԵՏԵՎԱՆՔ՝ $D(\eta) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, եթե η –ն հաստատուն է:

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 2՝ Կամայական a և b հաստատունների համար ունենք հետևյալ բանաձևը.

$$D(a\eta + b) = D(a\eta) + D(b) = D(a\eta) =$$
$$= M[a\eta - M(a\eta)]^2 = M[a^2\eta^2 - 2a\eta.M(a\eta) + (M(a\eta)^2)] =$$
$$= M[a^2\eta^2 - 2a^2\eta.M\eta + a^2(M\eta)^2] =$$
$$= a^2.M[\eta^2.2\eta.M\eta + (M\eta)^2] = a^2 D(\eta) : \; D(a\eta + b) = a^2.D(\eta) :$$

ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆ 3: Կամայական $\eta_1(\omega)$ և $\eta_2(\omega)$ պատահական մեծությունների համար կունենանք.

$$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\eta_1) + D(\eta_2) + 2[M(.\eta_1\eta_2) - M\eta_1.M\eta_2] :$$

ՀԵՏԵՎԱՆՔ: Եթե η_1 - և η_2 -ն անկախ են, ապա

$$D(\eta_1 + \eta_2) = D(\eta_1) + D(\eta_2) :$$

Օրինակ x պատահական մեծությունը (-3, 3) միջակայքում տրված է իր խտության ֆունկցիայով. $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}$:

Այդ միջակայքից դուրս $f(x) = 0$: Գտնել x -ի դիսպերսիան:

ԼՈՒԾՈՒՄ: Դիսպերսիան փնտրենք հետևյալ բանաձևով՝

$$D(x) = \int_{-3}^{3} [x - M(x)^2] f(x) dx :$$

Տեղադրելով $M(x)=0$ (բաշխման կորը համաչափ է $x=0$ ուղիղի նկատմամբ)՝ $f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}$, կստանանք՝

$$D(x)=\int_{-3}^{3}[x-M(x)^2]f(x)dx=$$

$$=2\int_0^3 x^2.\frac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^3\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}:$$

Կատարենք $x=3\sin t$ տեղադրումը.

$$dx=d(3\sin t)=3d(\sin t)dx=3\cos tdt:$$

Վերադառնանք x փոփոխականին․$\sin t=\frac{x}{3}$, $t=\arcsin=\frac{x}{3}$:

Կունենանք. $D(x)=\frac{9}{\pi}(\arcsin\frac{x}{3})\Big|_0^3-\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\Big|_0^3)=$

$$=\frac{9}{\pi}(\arcsin 1-\arcsin 0-(\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{9}{9}}-\frac{0}{3}-\frac{0}{3}\sqrt{1-\frac{0}{9}}))=\frac{9}{\pi}.\frac{\pi}{2}=4,5$$

$D(x)=4,5$ *ՊԱՏ.*՝ $4,5$:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Գ. Հ. Համբարձումյան, Հավանականությունների տեսություն, Երևան, «Լույս» հրատ., 1976թ.:
2. Վ.Ե. Գմուրման, Հավանականությունների տեսության և մաթեմատիկական վիճակագրության խնդիրների լուծման ձեռնարկ, Երևան, «Լույս» հրատ., 1979թ.:
3. Աթաբեկյան Վ., Մարտիրոսյան Մ., և ուրիշներ, Մաթեմատիկա Հումանիտար մասնագիտությունների համար, Երևան – 2004, ուսումնական ձեռնարկ:
4. В. П. Чистяков, Курс теории вероятностей, Москва, ,,Наука’’, 1987г.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆՇՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ԻՋԵՎԱՆԻ ՄԱՍՆԱՃՅՈՒՂ

Մ Ա Թ Ե Մ Ա Տ Ի Կ Ա

ԱՌԿԱ ԵՎ ՀԵՌԱԿԱ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԲԱԺՆԻ
ՀՈՒՄԱՆԻՏԱՐ ՄԱՍՆԱԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Լ. Հովհաննիսյանի

Չափսը՝ 60x84 $^{1}/_{16}$: Տպ. մամուլ 8,5:
Տպաքանակը՝ 100 օրինակ:

ԵՊՀ հրատարակչություն

ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1

ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2014