ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ОСЦИЛЛЯЦИИ И НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ОДНОРОДНОЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Саакян

В работе определяется достаточный критерий для осцилляции и неосцилляции однородной линейной канонической системы дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассматривается система

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases} \qquad (1)$$

в предположении, что $p(t)$ и $r(t)$ действительные функции, непрерывные на отрезке $[a,b]$.

Определение 1. Нетривиальное решение $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (1) называется осциллирующим на отрезке $[a,b]$, если каждая из его компонент обращается в нуль в некоторой точке $[a,b]$, т.е. $y_i(t_i) = 0,\ t_i \in [a,b],\ i = 1,2.$

Определение 2. Система (1) называется осциллирующей, если она имеет хотя бы одно осциллирующее решение, в противном случае называется неосциллирующей.

Осцилляция системы (1) является важнейшей ее характеристикой и потому нахождение критериев осцилляции до сих остается предметом исследований (см,. например, [1]-[4]), причем, наиболее существенны те критерии, которые легко проверяемы. В данной работе, для определенного класса рассматривемых систем, определяется критерий как для осцилляции, так и неосцилляции системы (1), легко реализуемый на практике.

Известно (см., например [5]*) , что если в системе* (1) $p(t)$ *и* $r(t)$ *на отрезке* $[a,b]$ *знакопостоянны и имеют одинаковые знаки, то система* (1) *является неосциллирующей.* Поэтому, в случае знакопостоянных коэффициентов, для определения условий осцилляции системы (1), имеет смысл рассматривать лишь случай, когда коэффициенты системы имеют разные знаки. Имеет место

Теорема. *Если в системе* (1) $p(t) > 0$ и $r(t) < 0$ (соответственно $p(t) < 0$ и $r(t) > 0$)*, то при выполнении одного из условий*

1. $p(t) + r(t) \le 0$ и $\int_a^b |p(t)|\,dt \ge \pi$ (соответственно $\int_a^b |r(t)|\,dt \ge \pi$),

или

$p(t) + r(t) \ge 0$ и $\int_a^b |r(t)|\,dt \ge \pi$ (соответственно $\int_a^b |p(t)|\,dt \ge \pi$), *система* (1) *осциллирующая на* $[a,b]$, *а при выполнении одного из условий*

2. $p(t)+r(t)\le 0$ и $\int_a^b |r(t)|\,dt<\frac{\pi}{2}$ (соответственно $\int_a^b |p(t)|\,dt<\frac{\pi}{2}$),

или

$p(t)+r(t)\ge 0$ и $\int_a^b |p(t)|\,dt<\frac{\pi}{2}$ (соответственно $\int_a^b |r(t)|\,dt<\frac{\pi}{2}$),

система (1) *неосциллирующая на* $[a,b]$.

Доказательство. Известно (см., например, [6]), что решение системы (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_1(t)&=q(t)\sin\theta(t),\\ y_2(t)&=q(t)\cos\theta(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\theta(t)$ –решение уравнения

$$\theta'=p(t)\cos^2\theta-r(t)\sin^2\theta \tag{3}$$

с начальным условием, удовлетворяющим условию $0\le\theta(a)<\pi,$ и

$$q(t)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t [p(\tau)+r(\tau)]\sin 2\theta(\tau)d\tau\right\}.$$

Заметим, что поскольку функции $\cos^2\theta(t)$ и $\sin^2\theta(t)$ равномерно ограничены, то уравнение (3) имеет решение на каждом интервале. И так как правая часть уравнения (3) дифференцируема по $\theta(t)$, то его решение единственно в обычном смысле. Не теряя общности рассуждений, будем считать, что $p(t)>0$ и $r(t)<0$ (аналогично рассматривается и случай $p(t)<0$ и $r(t)>0$). Тогда из соотношения (3) будет следовать, что $\theta'(t)>0$, а значит функция $\theta(t)$ на отрезке $[a,b]$ является возрастающей, и, следовательно, $\theta(b)>\theta(a)$. Из формул (2) следует, что система (1) будет осцилллирующей, если $|\theta(b)-\theta(a)|=\theta(b)-\theta(a)\ge\pi$. Проинтегрировав от a до t уравнение (3) найдем

$$\theta(t)-\theta(a)=\int_a^t [p(\tau)\cos^2\theta(\tau)-r(\tau)\sin^2\theta(\tau)]d\tau=\frac{1}{2}\int_a^t [p(\tau)-r(\tau)+(p(\tau)+r(\tau))\cos 2\theta(\tau)]d\tau\,. \tag{4}$$

Предположим, что $p(t)+r(t)\le 0$ для $t\in[a,b]$. Тогда, поскольку $\cos 2\theta(t)\le 1$, то имеет место неравенство

$$\int_a^b p(\tau)+r(\tau)\quad \cos 2\theta(\tau)-1\;\; d\tau\ge 0\,,$$

откуда будет следовать, что

$$\int_a^b p(\tau)+r(\tau)\;\cos 2\theta(\tau)d\tau\ge\int_a^b p(\tau)+r(\tau)\;\;d\tau\,.$$

Тогда, учитывая соотношение (4), найдем, что

$$\theta(b)-\theta(a)=\frac{1}{2}\int_a^b(p(\tau)-r(\tau))d\tau+\frac{1}{2}\int_a^b(p(\tau)+r(\tau))\cos 2\theta(\tau)]d\tau\geq\frac{1}{2}\int_a^b(p(\tau)-r(\tau))d\tau+\frac{1}{2}\int_a^b(p(\tau)+r(\tau))d\tau\geq\frac{1}{2}\int_a^b p(\tau)d\tau\geq\pi.$$

И, следовательно, система (1) осциллирующая.

Рассмотрим теперь случай, когда $p(t)+r(t)\geq 0$ для $t\in[a,b]$. Тогда, воспользовавшись неравенством

$$\int_a^b \left[p(\tau)+r(\tau)\right]\left[1+\cos 2\theta(\tau)\right]d\tau\geq 0,$$

получим

$$\theta(b)\geq\frac{1}{2}\int_a^b\left[p(\tau)-r(\tau)\right]d\tau-\frac{1}{2}\int_a^b\left[p(\tau)+r(\tau)\right]d\tau=\int_a^b\left|r(\tau)\right|d\tau\geq\pi,$$

откуда будет следовать осциллируемость системы (1).

Предположим теперь, что имеет место одно из условий 2, в частности, $p(t)+r(t)\leq 0$ и $\int_a^b\left|r(t)\right|dt<\dfrac{\pi}{2}$ (другой случай рассматривается аналогично). Заметим сначала, что поскольку наименьшее расстояние между нулями разных компонент решения системы (1), определяемых соотношениями (2), составляет $\dfrac{\pi}{2}$, то, очевидно, что система не будет осциллировать при условии, если $\left|\theta(b)-\theta(a)\right|<\dfrac{\pi}{2}$. Учитывая формулу (4), а также наше предположение, будем иметь

$$\left|\theta(b)-\theta(a)\right|=\left|\frac{1}{2}\int_a^b\left[p(\tau)+r(\tau)+\left[p(\tau)-r(\tau)\right]\cos 2\theta(\tau)\right]d\tau\right|\leq\frac{1}{2}\int_a^b\left|p(\tau)+r(\tau)+\left[p(\tau)-r(\tau)\right]\cos 2\theta(\tau)\right|d\tau\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_a^b\left|\left[p(\tau)+r(\tau)\right]\right|d\tau+\frac{1}{2}\int_a^b\left|\left[p(\tau)-r(\tau)\right]\cos 2\theta(\tau)\right|d\tau\leq\frac{1}{2}\int_a^b\left|\left[p(\tau)+r(\tau)\right]\right|d\tau+\frac{1}{2}\int_a^b\left|\left[p(\tau)-r(\tau)\right]\right|d\tau\leq$$

$$\leq-\frac{1}{2}\int_a^b\left[p(\tau)+r(\tau)\right]d\tau-\frac{1}{2}\int_a^b\left[p(\tau)-r(\tau)\right]d\tau=\int_a^b\left|r(\tau)\right|d\tau<\frac{\pi}{2}.$$

И, следовательно, система (1) неосциллирует. Теорема доказана.

Заметим, что постоянная $\dfrac{\pi}{2}$ в условии 2 теоремы является оптимальной и не может быть улучшена. Это следует, например, из того, что если рассмотреть систему

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=-y_1, \end{cases}$$

то решение этой системы $\bar{y}(t)=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ осциллирует и $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|p(t)|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий утверждение теоремы. Рассматривается система

$$\begin{cases} y_1'=(t+1)y_2, \\ y_2'=-ty_1, \end{cases} \tag{5}$$

на отрезке $[0,5]$. В данном случае $p(t)=t+1,\ r(t)=-t,$, и на отрезке $[0,5]$ $p(t)r(t)<0$ и $p(t)+r(t)=1>0$. Заметим, что на отрезке $[0,1]$ $\int_0^1|p(t)|\,dt=\int_0^1(t+1)dt=1{,}5<\frac{\pi}{2}$, и, следовательно, согласно теореме, система на отрезке $[0,1]$ неосциллирует. На отрезке $[1,5]$ $\int_1^3|r(t)|\,dt=\int_1^3 tdt=4>\pi$. А, значит, система (5) на $[1,5]$ осциллирует. На рисунке 1 приводится графическая интерпретация одного решения рассматриваемой системы на отрезке $[0,5]$, построенная в среде MathCad.

$D(t,Y):=\begin{bmatrix}(t+1)\cdot Y_1\\ -t\cdot Y_0\end{bmatrix}$ $\quad t0:=0.40 \quad t1:=5 \quad Y0:=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \quad N:=1000$

$S:=\mathrm{Rkadapt}(Y0,t0,t1,N,D)$

$t:=S^{\langle 0\rangle} \qquad y1:=S^{\langle 1\rangle} \qquad y2:=S^{\langle 2\rangle}$

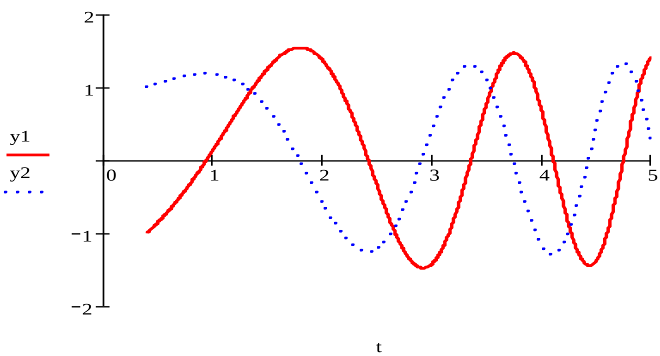

Рис. 1

Из доказанной теоремы, в частности, вытекают

Следствие 1. *Если в системе*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -p(t)y_1, \end{cases}$$

функция $p(t)$ *на отрезке* $[a,b]$ *является знакопостоянной и выполняется условие:*

$$\int_a^b |p(t)|\, dt \geq \pi \ ,$$

то для любой неотрицательной на функции $f(t)$ *система*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -(p(t) + f(t))y_1, \end{cases}$$

будет осциллирующей на этом отрезке.

Следствие 2. *Если в системе*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -p(t)y_1, \end{cases}$$

функция $p(t)$ *на отрезке* $[a,b]$ *является знакопостоянной и выполняется условие:*

$$\int_a^b p(t)dt < \frac{\pi}{2} \ ,$$

то для любой неотрицательной на $[a,b]$ *функции* $f(t)$ *система*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -(p(t) + f(t))y_1, \end{cases}$$

будет неосциллирующей на этом отрезке.

Литература

1. Z. Nehary. Oscillation criteria for second order linear differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* ,85, p. 428-445 (1957).
2. A. Lomtatidze. Oscillation and nonoscillation criteria for second order linear equation. *Georgian Math. J,* 4 (1997), № 2, p. 129-138.
3. A. Lomtatidze and N. Parsvania. Oscillation and nonoscillation criteria for two-dimentional systems of first order linear ordinary differential equations, *Georgian Math. J,* Volume 5, № 3, p.285-295, (1999)
4. Г. Г. Саакян. Об одном критерии неосцилляции для линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка. *Ученые записки АрГУ*, № 2(22), 2010, стр. 3-7.
5. Г. Г. Саакян. О некоторых свойствах решений одной линейной однородной системы дифференциальных уравнений в случае знакопостоянных коэффициентов.
   Вестник РУДН, Серия математика, 2011, № 1.
6. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. –М.: Наука, 1976.

Երկրորդ կարգի կանոնացան համասեռ համակարգի օսցիլյացիայի և ոչ օսցիլյացիայի մեկ հայտանիշի մասին

Գ.Սահակյան

Ամփոփում

Աշխատանքում որոշվում է բավարար հայտանիշ դիֆերենցիալ հավասարումների երկրորդ կարգի գծային համասեռ կանոնական համակարգի օսցիլյացիայի և ոչ օսցիլյացիայի համար:

About one Oscillation and Nonoscillation Criteria for Two-dimentional Homogeneous Canonic System.

G. Sahakyan

Summary

The oscillation and nonoscillation sufficient criteria for two-dimentional linear homogeneous canonic system of differential equations has been determined in this paper.