УДК 517.4 *Математика*

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ ОДНОЙ МЕТРИКИ

Р.Мусаелян

В работе рассматривается метрика

$$ds^2 = dx^2 + \left(\alpha^2(x) + \beta^2(y)\right)dy^2 \tag{1}$$

заданная, вообще говоря, на всей плоскости переменных, причем функция $B(x,y) = \alpha^2(x) + \beta^2(y) > 0$ в любой точке области определения.

Ставится задача: найти уравнение геодезических линий в рассматриваемой метрике, если это возможно.

Отметим, что ранее было доказано (см [1]), что метрика (1) заданная на всей плоскости переменных (x, y), имеющая отрицательную гаусову кривизну, регуляно и изометрически погружается в E^3. По этому результату метрика (1) погружается в E^3 в виде регулярной поверхности тогда и только тогда, когда $\alpha^2(x)$ квадратичный трехчлен. Кроме того, с помощью деривационных формул Гаусса-Вейнгартена (см [2]) получена поверхность, несущая метрику (1). Далее, для облегчения вычисления предполагалось, что $\alpha^2(x) = x^2$. При подходящем выборе постоянных интегрирования, параметрические уравнения поверхности имели вид:

$$X(x,y) = x\cos y,\ Y(x,y) = x\sin y,\ Z(y) = \int \beta(y)\,dy \tag{2}$$

В связи со сходством с геликоидом, поверхность (2) в упомянутой работе называлась геликоидообразной поверхностью.

В настоящей работе пытаемся найти уравнение геодезических линий в метрике (1), если это возможно. Пусть искомое уравнение геодезической линии будет $y = y(x)$. Из курса дифференциальной геометрии известно (см [2]), что геодезические линии в метрике (1) определяются интегрированием дифференциального уравнения второго порядка. Это уравнение называется дифференциальным уравнением геодезических линий и имеет следующий вид

$$y''(x) = -\frac{B'_x(x,y)}{2}y'^3(x) - \frac{B'_y(x,y)}{2B(x,y)}y'^2(x) - \frac{B'_x(x,y)}{B(x,y)}y'(x). \tag{3}$$

Напомним, что $B(x,y) = \alpha^2(x) + \beta^2(y)$.

Уравнение (3), подстановкой $P(y) = y'(x)$, преобразуется к следующему виду

$$P'(y)P(y) = -\alpha(x)\alpha'(x)P^3(y) - \frac{\beta(y)\beta'(y)}{\alpha^2(x)+\beta^2(y)}P^2(y) - \frac{2\alpha(x)\alpha'(x)}{\alpha^2(x)+\beta^2(y)}P(y).$$

Из этого уравнения следует: либо $P(y) = y'(x) = 0$, либо

$$P'(y) = -\alpha(x)\alpha'(x)P^2(y) - \frac{\beta(y)\beta'(y)}{B(x,y)}P(y) - \frac{2\alpha(x)\alpha(x)}{B(x,y)} \qquad (4)$$

Первое уравнение имеет решение $y(x) = c = const.$ Ясно, что $y(x) = c$ геодезические линии в метрике (1). Дифференциальное уравнение (4) общее уравнение Риккати (см [3]). Оно, как известно, при произвольных коэффициентах, не интегрируется в конечном виде. Однако при некоторых подходящих коэффициентах дифференциальное уравнение типа (4) интегрируется в конечном виде (см [3]). Ищем решение уравнения (4) в виде

$$P(y) = g(x,y)\,tgf(x,y). \qquad (5)$$

Так как (5) решение уравнения (4), то

$$g'_y(x,y)\,tgf(x,y) + \frac{g(x,y)f'_y(x,y)}{\cos^2 f(x,y)} = -\alpha(x)\alpha'(x)g^2(x,y)\,tg^2 f(x,y) -$$
$$- \frac{\beta(y)\beta'(y)}{B(x,y)}g(x,y)\,tgf(x,y) - \frac{2\alpha(x)\alpha'(x)}{B(x,y)}$$

Используя известное тригонометрическое тождество, из последнего получаем относительно функций $g(x,y)$ и $f(x,y)$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} g(x,y)f'_y(x,y) &= -g^2(x,y)\alpha(x)\alpha'(x), \\ g'_y(x,y) &= -\frac{\beta(y)\beta'(y)}{B(x,y)}g(x,y) \\ \alpha(x)\alpha'(x)g^2(x,y) &= \frac{2\alpha(x)\alpha'(x)}{B(x,y)} \end{aligned} \qquad (6)$$

Система (6) имеет следующее решение:

$$g(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha^2(x) + \beta^2(y)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{B(x,y)}},$$

$$f(x,y) = -\int \frac{\sqrt{2}\alpha(x)\alpha'(x)}{\sqrt{B(x,y)}}dy - C_1(x).$$

Следовательно,

$$P(y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{B(x,y)}}\, tg\left(\int \frac{\sqrt{2}\alpha(x)\alpha'(x)}{\sqrt{B(x,y)}}dy + C_1(x)\right)$$

будет решением уравнения (4).

Так как $P(y) \neq 0$ есть решение уравнения (4), то из равенства

$$x = \int \frac{dy}{P(y)} + C_2$$

получается и решение исходного уравнения.

Литература

1. Мусаелян Р.Ц., Погружение в E^3 некоторого класса метрик переменной отрицательной кривизны. Информационные Технологии и Управление, 3-1, Ереван, 2006.
2. Погорелов А.В., Лекции по дифференциальной геометрии. Харьков, 1967.
3. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва, 1971.

Մի մետրիկայի գեոդեզիական գծերի մասին

Ռ.Մուսայելյան

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է $ds^2 = dx^2 + (\alpha^2(x) + \beta^2(y))dy^2$ մետրիկան և նրանում գեոդեզիկական գծերը։ Գեոդեզիկական գծերի դիֆերենցիալ հավասարումը ընդհանուր դեպքում չի ինտեգրվում։ Նշված չափում հաջողվում է ինտեգրել համապատասխան դիֆերենցիալ հավասարումը։

About Geodesic Lines on some Metrics

R.Musaelyan

Summary

The article deals with $ds^2 = dx^2 + (\alpha(x) + \beta(y))^2 dy^2$ metrics on the whole plane of variable, geodesic lines in the given metrics.

Having a specific surface, we introduce an equation of geodesic lines. The equation of geodesic lines is integrated in a finite form in a particular case.