УДК 004.4+519.1 *Математика*

О РЕГУЛЯРНЫХ БЛОЧНО-ИЕРАРХИЧЕСКИХ СЕТЯХ И ИХ СВОЙСТВАХ

С. Аветисян, А. Кочарян

В данной работе рассматриваются случайные регулярные блочно-иерархические сети, для которых разработаны эффективные алгоритмы вычисления топологических характеристик сети, в частности, распределения значений степени узлов, расстояний между узлами, числа циклов длины 3, коэффициента кластеризации. Данные алгоритмы для рассматриваемого класса сетей, в отличие от известных алгоритмов, более эффективны как по *быстродействию, так и по использованию оперативной памяти компьютера.*

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы сложилось новое направление, изучающее большие системы как сетевые структуры. Элементы большой системы интерпретируются как узлы сети, а взаимодействия элементов как связи между узлами. Многочисленные примеры применения сетевого подхода к описанию биологических систем (метаболизм клетки, архитектура мозга), различных экологических систем, коммуникационных систем (Интернет, WWW, сети компаний сотовой связи, сети электростанций), наконец, разнообразных социальных систем (сети научного сотрудничества, сети знакомств и т. п.), можно найти в широко цитируемом обзоре [1].

Рассматривая физические свойства биополимерных систем иерархической архитектуры, авторы работ [2], [3] ввели в рассмотрение новый тип сетей, которые назвали случайными блочно-иерархическими сетями. Этот тип сетей привлек большое внимание, поскольку, как оказалось, блочно-иерархические сети, будучи сгенерированными вполне случайным образом, обладают рядом характерных свойств реальных скоррелированных сетей. Изучение данного типа сетей представляет большой интерес, но нуждается в создании эффективных численных алгоритмов для анализа топологических характеристик сети, в частности, распределения значений степеней узлов, расстояний между узлами, числа связных подграфов, числа циклов заданной длины, коэффициента кластеризации и т д..

В статье дается формальное определение класса регулярных блочно-иерархических сетей, вводятся новые понятия, используемые в работе, и приводятся алгоритмы вычисления характеристик сети. Алгоритмы реализованы в созданной авторами системе, позволяющей за разумное время получить полный набор выше перечисленных характеристик для достаточно больших сетей с числом узлов порядка 10^7, что на 5 порядков превышает размер сетей, исследованных в работах [2],[3].

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Регулярная блочно-иерархическая сеть. Регулярная блочно-иерархическая сеть может быть представлена неориентированным графом $G = (V(G), E(G))$, где $V(G) = \{x_1, \dots, x_N\}$ - непустое конечное множество вершин или узлов, $E(G)$ - конечное множество неупорядоченных пар различных элементов из $V(G)$, ребер или связей. Вершина x_i является смежной вершине x_j, если $(x_i, x_j) \in E(G)$, $i, j = 1, \dots, N, i \neq j$. Обозначим через $|E|$ число элементов множества E. Для графа G матрица смежности A – это матрица $N \times N$, в которой элемент $t_{ij} = 1$, если $\left(x_i, x_j\right) \in E, u\ t_{ij} = 0$ в противном случае. Из определения графа G следует, что $t_{ij} = t_{ji}\ u\ t_{ii} = 0$, $i, j = 1, \dots, N$. Для определения блочно-иерархической сети используются операции объединения и соединения двух графов [4].

Пусть p и $\Gamma -$ натуральные числа, $p > 1$. Для заданных p и Г определяется класс регулярных блочно-иерархических сетей $\mathfrak{R}_{p,\Gamma}$. Число узлов сети $G_{p,\Gamma} \in \mathfrak{R}_{p,\Gamma}$ равно p^{Γ}. Сеть конструируется по уровням. На каждом новом уровне γ, $0 \leq \gamma \leq \Gamma$, формируются новые кластеры (подсети) посредством оъбединения уже построенных на предыдущем уровне кластеров и соединения некоторых из них, в результате чего образуются новые связи сети $G_{p,\Gamma}$. Обозначим через M_γ — множество кластеров уровня γ, а через $M_\gamma^{(i)}$ — i-тый кластер уровня γ, где $1 \leq i \leq n_\gamma$, $n_\gamma = p^{\Gamma-\gamma}$,

$$M_\gamma = \{M_\gamma^{(1)}, M_\gamma^{(2)}, \dots, M_\gamma^{(n_\gamma)}\}.$$

Введем индуктивное определение сети $G_{p,\Gamma} \in \mathfrak{R}_{p,\Gamma}$.

Пусть γ=0. Определим кластеры нулевого уровня:

$$M_0 = \{M_0^{(1)}, M_0^{(2)}, \quad \dots, M_0^{(n_0)}\}$$

Каждый кластер нулевого уровня представляет собой сеть $M_0^{(i)}$, где $V(M_0^{(i)}) = \{\mathrm{x}_i\}$, $E(M_0^{(i)}) = \varnothing$, $1 \leq i \leq n_0, n_0 = p^{\Gamma}$.

Пусть $\gamma > 0$. Предположим, что построены кластеры уровня $\gamma - 1$, т.е.

$$M_{\gamma-1} = \{M_{\gamma-1}^{(1)}, M_{\gamma-1}^{(2)}, \dots, M_{\gamma-1}^{(n_{\gamma-1})}\}, n_{\gamma-1} = p^{\Gamma-\gamma+1}$$

Построим кластеры уровня γ

$$M_\gamma = \{M_\gamma^{(1)}, M_\gamma^{(2)}, \dots, M_\gamma^{(n_\gamma)}\}, \text{ где } n_\gamma = p^{\Gamma-\gamma}$$

Для каждого $M_\gamma^{(i)}$ из множества $M_{\gamma-1}$ выбираются p различных кластеров,

$$M_{\gamma-1}^{(l+1)}, M_{\gamma-1}^{(l+2)}, \dots, M_{\gamma-1}^{(l+p)}, \quad \text{где } l = (i-1) * p\ , \quad (1)$$

которые назовем вложенными в кластер $M_\gamma^{(i)}$. Применяя операцию объединения к выбранным кластерам, получим кластер

$$M_{\gamma-1}^{(l+1)} \cup M_{\gamma-1}^{(l+2)} \cup \ldots \cup M_{\gamma-1}^{(l+p)}.$$

Далее применяется операция соединения к *некоторым парам из* выбранных кластеров. Получаем кластер $M_\gamma^{(i)}$, состоящий из p вложенных кластеров уровня $\gamma - 1$, где для *некоторых пар* применена операция соединения. При каждом соединении вложенных кластеров образуются $p^{\gamma-1} \times p^{\gamma-1}$ новых ребер (связей) в кластере $M_\gamma^{(i)}$.

На последнем уровне $\gamma = \Gamma$ образуется один кластер, представляющий сеть $G_{p,\Gamma} \in \mathfrak{R}_{p,\Gamma}$

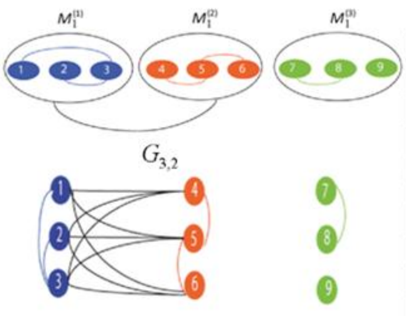
$$G_{p,\Gamma} = M_\Gamma^{(1)}, \text{ где } V(G_{p,\Gamma}) = V(M_\Gamma^{(1)}),\ E(G_{p,\Gamma}) = E(M_\Gamma^{(1)}).$$

Уровень Γ назовем уровнем иерархии, а p – индексом ветвления регулярной блочно-иерархической сети $G_{p,\Gamma}$.

Определение. Пусть $G_{p,\Gamma}$ - регулярная блочно-иерархическая сеть с узлами $\mathrm{V}(G_{p,\Gamma}) = \{\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{N}\}$, $N = p^\Gamma$ и M_γ- множество кластеров уровня γ, $0 \le \gamma \le \Gamma$. Сеть $G_{p,\Gamma}$ назовем *упорядоченной*, если для любой пары кластеров $M_\gamma^{(n)} \in M_\gamma$, $M_\gamma^{(m)} \in M_\gamma$, где $n < m$, следует, что если $\mathrm{x_i} \in V(M_\gamma^{(n)})$ и $\mathrm{x_j} \in V(M_\gamma^{(m)})$, то $\mathrm{i} < \mathrm{j}$. Множество узлов упорядоченной регулярной блочно-иерархической сети упорядочено по вложенности кластеров т.е. $\mathrm{V}\left(M_\gamma^{(n)}\right) = \{x_{l+1}, x_{l+2}, \dots , x_{l+s}\}$, $l = (n-1) * p^\gamma$, $s = p^\gamma$.

Из указанного выше построения следует, что регулярная блочно-иерархическая сеть $G_{p,\Gamma}$ посредством переименования узлов приводится к упорядоченной блочно-иерархической сети. В дальнейшем будем рассматривать регулярные упорядоченные блочно-иерархические сети, которые будем называть блочно-иерархическими сетями или просто сетями.

Матрица смежности блочно-иерархической сети. Матрица смежности $A_{p,\Gamma}$ сети $G_{p,\Gamma} = (\mathrm{V}(G_{p,\Gamma}), \mathrm{E}(G_{p,\Gamma}))$, представляя смежные вершины сети, представляет также соединения между кластерами M_γ. Действительно, пусть $M_\gamma^{(i)} \in M_\gamma$, $1 \le i \le p^{\Gamma-\gamma}$, некоторый кластер уровня $\gamma > 0$. Кластеру $M_\gamma^{(i)}$ соответствует $\frac{p(p-1)}{2}$ матричных блоков, расположенных вдоль главной диагонали, каждый из которых содержит по $p^{2(\gamma-1)}$ одинаковых матричных элементов. Каждый матричный блок представляет соединение между парой кластеров $M_{\gamma-1}^{(j)}$, $M_{\gamma-1}^{(j')}$, вложенных в кластер $M_\gamma^{(i)}$. Значения элементов матричного блока равны 1, если два кластера соединены, и равны 0 в противном случае. На рис.1 дан пример блочно- иерархической сети $\mathrm{G}_{3,2}$ и его матрицы смежности $\mathrm{A}_{3,2}$.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	1	0	0	0
4	1	1	1	0	1	0	0	0	0
5	1	1	1	1	0	1	0	0	0
6	1	1	1	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис.1.Блочно-иерархическая сеть $G_{3,2}$ и его матрица смежности $A_{3,2}$

Структура связей в блочно-иерархической сети. Как видно из построения, структура связей в блочно-иерархической сети иерархическая, и сеть $G_{p,\Gamma}$

можно описать в виде иерархии его кластеров. Иерархию кластеров представим в виде помеченного p-ичного дерева $T_{p,\Gamma}$, поддеревья которого представляют кластеры сети $G_{p,\Gamma}$ и каждая вершина дерева помечена двоичным числом, описывающим соединения между вложенными кластерами (вложенные поддеревья). Дерево $T_{p,\Gamma}$ удовлетворяет следующим условиям:

- Дерево $T_{p,\Gamma}$ является помеченным p-ичным деревом с Г уровнями. На каждом уровне γ, $0 \le \gamma \le \Gamma$ имеется $p^{\Gamma-\gamma}$ вершин $t_\gamma^{(n)}, 1 \le n \le p^{\Gamma-\gamma}$. Общее число вершин дерева $T_{p,\Gamma}$ равно числу кластеров сети $G_{p,\Gamma}$. Конечным вершинам дерева (листьям) соответствуют узлы сети $G_{p,\Gamma}$.
- Каждому кластеру $M_\gamma^{(n)}$ графа $G_{p,\Gamma}$ ставится в соответствие поддерево $T_\gamma^{(n)}$, корнем которого является вершина дерева $t_\gamma^{(n)}$. Вершина дерева $t_\gamma^{(n)}$ помечена последовательностью нулей и единиц длиной $\frac{p(p-1)}{2}$, которая описывает соединения между кластерами уровня γ*-1*, вложенными в кластер $M_\gamma^{(n)}$.
- Узлам кластера $M_\gamma^{(n)}$ сети $G_{p,\Gamma}$ соответствуют листья поддерева $T_\gamma^{(n)}$. Листья поддерева $T_\gamma^{(n)}$ будем обозначать через $leaves(T_\gamma^{(n)})$,

$$V\left(M_\gamma^{(n)}\right) = leaves(T_\gamma^{(n)}) = \{x_{l+1}, x_{l+2}, \dots\ , x_{l+s}\},\ l = (n-1) * p^\gamma,\ s = \ p^\gamma,$$

соответственно для сети $G_{p,\Gamma}$,

$$V(G_{p,\Gamma}) = V\left(M_\Gamma^{(1)}\right) = leaves(T_\Gamma^{(1)}) = \{x_1, x_2, \dots\ , x_N\},\quad N = p^\Gamma.$$

Дерево $T_{p,\Gamma}$ назовем деревом связи сети $G_{p,\Gamma}$.Структура хранения сети задается деревом связи. Для иллюстрации на рис.2 дано дерево связи $T_{5,2}$ сети $G_{5,2} \in \mathfrak{R}_{5,2}$.

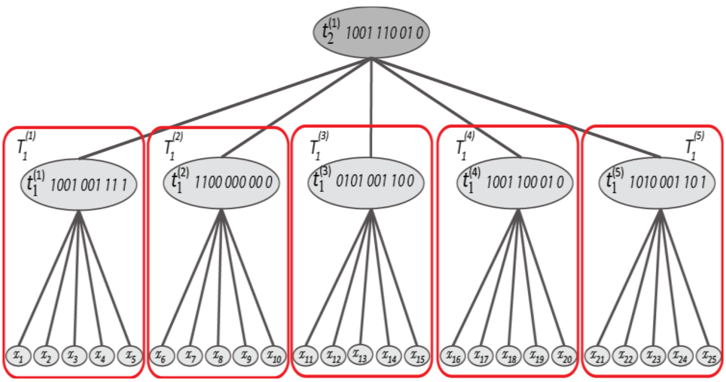


Рис.2. Дерево связи $T_{5,2}$ блочно-иерархической сети $G_{5,2}$.

Определения некоторых отношений между сетью и деревом связи. Пусть $T_{p,Г}$ - дерево связи блочно-иерархической сети $G_{p,Г}$. Через $S(T_{\gamma}^{(n)})$ обозначим множество поддеревьев уровня $\gamma-1$, вложенных в дерево $T_{\gamma}^{(n)}$,

$$S(T_{\gamma}^{(n)}) = \{T_{\gamma-1}^{(l+1)}, T_{\gamma-1}^{(l+2)}, \dots, T_{\gamma-1}^{(l+p)}\}, l=(n-1)*p \ , 1 \le n \le \ p^{\Gamma-\gamma}$$

Ниже для удобства символом $S_i(T_{\gamma}^{(n)})$, $1 \le i \le p$ обозначим элемент $T_{\gamma-1}^{(l+i)}$. Таким образом, в этих обозначениях имеем:

$$S(T_{\gamma}^{(n)}) = \left\{S_1(T_{\gamma}^{(n)}), S_2(T_{\gamma}^{(n)}), \dots, S_p(T_{\gamma}^{(n)})\right\}.$$

Пусть $\Theta = \{T_{\gamma}^{(n_1)}, T_{\gamma}^{(n_2)}, \dots, T_{\gamma}^{(n_m)}\}$ множество поддеревьев уровня γ, тогда через $S(\Theta)$ обозначим следующее множество поддеревьев

$$S(\Theta) = S\left(T_{\gamma}^{(n_1)}\right) \cup S\left(T_{\gamma}^{(n_2)}\right) \cup \dots \cup S\left(T_{\gamma}^{(n_m)}\right)$$

Условимся обозначать $(\underbrace{S \dots (S(S}_{\mu}(T_{\gamma}^{(n)}))) \dots)$ через $S^{\mu}\left(T_{\gamma}^{(n)}\right)$, $1 \le \mu \le \gamma$, что по существу представляет спуск по дереву на μ уровней:

$$S^{\mu}\left(T_{\gamma}^{(n)}\right) = \{T_{\gamma-\mu}^{(l+1)}, \dots, T_{\gamma-\mu}^{(l+p^{\mu})}\}, \qquad l=(n-1)*p^{\mu} \ .$$

Из определения следует, что $S\left(T_{\gamma}^{(n)}\right) = S^1\left(T_{\gamma}^{(n)}\right)$. Будем понимать под $S^0\left(T_{\gamma}^{(n)}\right) = T_{\gamma}^{(n)}$.

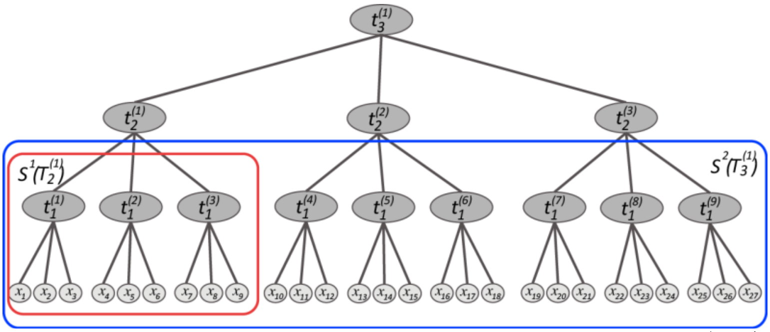


Рис3. Дерево связи сети $G_{3,3}$. Множество поддеревьев $S^1(T_2^{(1)})$ и $S^2\left(T_3^{(1)}\right)$.

Введем понятие соединенности поддеревьев множества $S(T_{\gamma}^{(n)})$. Пусть $S_i(T_{\gamma}^{(n)}), S_j(T_{\gamma}^{(n)}) \in S(T_{\gamma}^{(n)})$. Поддеревья $S_i(T_{\gamma}^{(n)})$ *и* $S_j(T_{\gamma}^{(n)})$ назовем *непосредственно соединенными,* если соответствующие им кластеры $M_{\gamma-1}^{(l+i)}$ и $M_{\gamma-1}^{(l+j)}$, $l=(n-1)*p$ соединены. Определим функцию $\psi_{\gamma,n}(i,j)$ непосредственной соединенности двух вложенных поддеревьев $S_i(T_{\gamma}^{(n)}), S_j(T_{\gamma}^{(n)})$ следующим образом:

$$\psi_{\gamma,n}(i,j) = \begin{cases} 1, & \textbf{если поддеревья } S_i(T_\gamma^{(n)}) \text{ и } S_j(T_\gamma^{(n)}) \textbf{ непосредственно } \text{соединены} \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

Обозначим через $Links\left(T_\gamma^{(n)}\right)$ число **непосредственных** соединений между всеми поддеревьями множества $S(T_\gamma^{(n)})$

$$Links\left(T_\gamma^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^{p} \psi_{\gamma,n}(i,j) \le p * (p-1)/2 .$$

Через $Links_i\left(T_\gamma^{(n)}\right)$ обозначим число **непосредственных** соединений между поддеревом $S_i(T_\gamma^{(n)})$ и остальными поддеревьями

$$Links_i\left(T_\gamma^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^{p} \psi_{\gamma,n}(i,j) \le p-1.$$

а через $\overline{Links_i\left(T_\gamma^{(n)}\right)}$ функцию наличия хотя бы одного соединения поддерева $S_i(T_\gamma^{(n)})$ с остальными поддеревьями

$$\overline{Links_i\left(T_\gamma^{(n)}\right)} = \begin{cases} 1, & \textit{если } Links_i\left(T_\gamma^{(n)}\right) = 0 \\ 0, & \textit{если } Links_i\left(T_\gamma^{(n)}\right) > 0 \end{cases}$$

2. АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕГУЛЯРНЫХ БЛОЧНО - ИЕРАРХИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Топологические свойства сети характеризуются статистикой появления в сети связных подграфов, циклов определенной длины, вершин с заданной степенью и т.д. [5]. Статистический анализ проводится на ансамблях случайных сетей, содержащих большое количество реализаций сети, что приводит к необходимости иметь быстрые алгоритмы счета на больших сетях с миллионами узлов. Процесс счета состоит в генерации ансамбля случайных сетей, определения перечисленных выше распределений для каждой реализации из ансамбля и получения усредненных распределений по ансамблю.

В разработанной нами системе структура хранения блочно-иерархической сети задается деревом связи, и генерация случайной сети $G_{p,к}$ с p^k узлами сводится к генерации $(p^k-1)/(p-1)$ последовательностей двоичных цифр длиной $p(p-1)/2$. Все разрабатываемые алгоритмы используют данную структуру хранения. Вычисление характеристик сети осуществляется по дереву связи, что дает большую эффективность как по использованию памяти, так и по времени счета. В данной главе описаны *алгоритмы* вычисления степени узла сети, минимального расстояния между двумя узлами сети, числа связей сети, числа связных подграфов заданной длины, числа циклов длины 3, числа циклов длины 4, коэффициента кластеризации сети [1]. Для сравнения с классическими алгоритмами приведены их сложностные оценки. Учитывая, что p-индекс ветвления, определяется заранее, как правило, ограничено числом 9 а число вершин увеличивается за счет увеличения уровней графа, можно во всех приведенных оценках считать p константой.

2.1. Вычисление степени узла блочно-иерархической сети.

Пусть $G_{p,\Gamma}$ - блочно-иерархическая сеть, $x \in V(G_{p,\Gamma})$ и $T_{p,\Gamma}$ - дерево связи сети $G_{p,\Gamma}$. Рассмотрим множество $\left\{T_\gamma^{(1)}, T_\gamma^{(2)}, \dots, T_\gamma^{(n_\gamma)}\right\}$, $n_\gamma = p^{\Gamma-\gamma}$ деревьев уровня γ. Пусть функция $\nu(x,\gamma)$ определяет номер дерева уровня γ**,** листом которого является x. В этом случае $T_\gamma^{(\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma))}$ обозначает дерево уровня γ, содержащее лист x, $x \in leaves(T_\gamma^{(\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma))})$, а $t_\gamma^{(\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma))}$ - его корень. Далее условимся $t_\gamma^{(\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma))}$ обозначать через $t_\gamma^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma)}$, а $T_\gamma^{(\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma))}$ обозначать через $T_\gamma^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma)}$, т.е. опуская внешние скобки.

Рассмотрим последовательность вершин в дереве $T_{p,\Gamma}$ ведущих от листа x к его корню $t_\Gamma^{(1)}$.

$$x = t_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\mathbf{0})},\ t_1^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\mathbf{1})}, \dots, t_\gamma^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma)}, \dots, t_\Gamma^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\Gamma)} = t_\Gamma^{(1)}, \tag{1}$$

Последовательности вершин (1) соответствует последовательность поддеревьев

$$T_0^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\mathbf{0})},\ T_1^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\mathbf{1})}, \dots, T_\gamma^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma)}, \dots, T_\Gamma^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\Gamma)} = T_\Gamma^{\mathbf{1}}$$

Легко видеть, что $T_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\mathbf{0})}$ есть дерево, состоящее из одной вершины x, а дерево $T_\Gamma^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\Gamma)}$ есть $T_{p,\Gamma}$. *Следом* $Trace(x, M_\gamma^{(n)})$ *узла* x в кластере $M_\gamma^{(n)}$, где $x \in V(M_\gamma^{(n)})$ назовем последовательность

$$T_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\mathbf{0})},\ T_1^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\mathbf{1})}, \dots, T_\gamma^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma)}$$

где $T_\gamma^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma)}$ – поддерево, соответствуюшее кластеру $M_\gamma^{(n)}$. На рисунке 4 показан след вершины x_7 кластера $M_2^{(1)}$ сети $G_{3,2}$

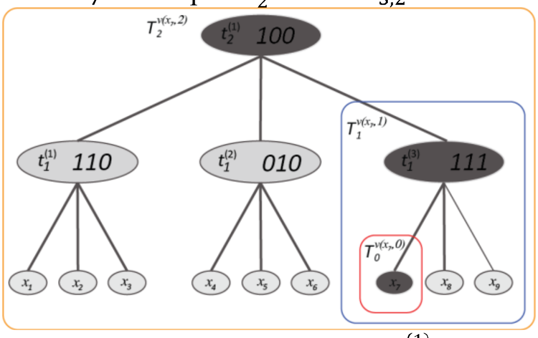


Рис.4 . След вершины x_7 для кластера $M_2^{(1)}$ сети $G_{3,2}$.

Утверждение 1. Пусть $M_{\gamma}^{(n)}$ - кластер уровня γ, $1 \leq n \leq p^{\Gamma-\gamma}$, $x \in V(M_{\gamma}^{(n)})$ и $Trace\left(x, M_{\gamma}^{(n)}\right) = T_0^{\nu(x,0)}$, $T_1^{\nu(x,1)}$, … , $T_{\gamma-1}^{\nu(x,\gamma-1)}$, $T_{\gamma}^{\nu(x,\gamma)}$. Тогда

$$d\left(x, M_{\gamma}^{\nu(x,\gamma)}\right) = \sum_{i=1}^{\gamma}\left(Links_{\nu(x,i-1)}\left(T_i^{\nu(x,i)}\right) * p^{i-1}\right),$$

где $d\left(x, M_{\gamma}^{\nu(x,\gamma)}\right)$ - степень узла x в кластере $M_{\gamma}^{\nu(x,\gamma)}$.

Доказательство, следует из рассмотрения следа узла x в кластере $M_{\gamma}^{\nu(x,\gamma)}$.

Для сети $G_{p,\Gamma}$ будем иметь:

$$d(x, G_{p,\Gamma}) = d\left(x, M_{\Gamma}^{1)}\right) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma}\left(Links_{\nu(x,\gamma-1)}\left(T_{\gamma}^{\nu(x,\gamma)}\right) * p^{\gamma-1}\right)$$

Оценка сложности алгоритма. Для вычисления $Links_{\nu\nu(x,i-1}\left(T_{\gamma}^{\nu(x,\gamma)}\right)$ понадобится выполнить $p-1$ шагов. Из этого следует, что для вычисления $d(x, G_{p,\Gamma})$ нужно выполнить $(p-1) * \Gamma = (p-1) * log_p N$ шагов. Таким образом временная сложность алгоритма равна $O(log_p N)$. При стандартном представлении сетей сложность алгоритма $O(N)$.

2.2. Расстояние между двумя узлами блочно-иерархической сети.

Пусть $G_{p,\Gamma}$ - блочно-иерархическая сеть, $T_{p,\Gamma}$ - дерево связи сети $G_{p,\Gamma}$ и $S(T_{\gamma}^{(n)}) = \left\{S_1(T_{\gamma}^{(n)}), S_2(T_{\gamma}^{(n)}), \dots, S_p(T_{\gamma}^{(n)})\right\}$. Выберем последовательность **непосредственно** соединенных поддеревьев из множества $S(T_{\gamma}^{(n)})$:

$S_{i_0}(T_{\gamma}^{(n)}), S_{i_1}(T_{\gamma}^{(n)}), \dots, S_{i_r}(T_{\gamma}^{(n)})$, где $1 \leq i_j, i_l \leq \mathrm{p}$, $i_j \neq i_l$, $\psi_{\gamma,n}(i_j, i_{j+1}) = 1$. Поддеревья $S_{i_0}(T_{\gamma}^{(n)})$, $S_{i_r}(T_{\gamma}^{(n)})$ назовем *соединенными,* а r - длиной соединения между поддеревьями $S_{i_0}(T_{\gamma}^{(n)})$, $S_{i_r}(T_{\gamma}^{(n)})$. Длина соединения между **непосредственно** соединенными поддеревьями равна 1.

Определение. Пусть $G_{p,\Gamma}$ - блочно-иерархическая сеть, $x, y \in V(G_{p,\Gamma})$, $x \neq y$, и
$Trace(x, G_{p,\Gamma}) = T_0^{\nu(x,0)}$, $T_1^{\nu(x,1)}$, … , $T_{\Gamma}^{\nu(x,\Gamma)}$, $Trace(y, G_{p,\Gamma}) = T_0^{\nu(y,0)}$, $T_1^{\nu(y,1)}$, … , $T_{\Gamma}^{\nu(y,\Gamma)}$. Поддерево $T_i^{\nu(x,i)} = T_i^{\nu(y,i)}$ назовем *наименьшим поддеревом*, включающим вершины x и y, если

$\{x, y\} \subset leaves(T_i^{\nu(x,i)})$, и если $j < i$, то $\{x, y\} \not\subset leaves(T_j^{\nu(x,j)})$, $j, i = 1, \dots, \Gamma$

На рис.4 наименьшим поддеревом, включающим вершины x_1 *и* x_7, является поддерево $T_2^{(1)}$.

Утверждение 2. Пусть $d(x,y)$ - расстояние между двумя связанными вершинами x и y сети $G_{p,\Gamma}$. Тогда $d(x,y) \in \{1,2\}$, если p=2 и $d(x,y) \in \{1,2,\dots\ ,p-1\}$, если $p \geq 3$.

Доказательство. Построим дерево связи $T_{p,\Gamma}$, соответствующее блочно-иерархической сети $G_{p,\Gamma}$. Пусть $T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}$ - наименьшее поддерево, включающее узлы x и y, и $Trace(x, G_{p,\Gamma})$, $Trace(y, G_{p,\Gamma})$ следы узлов x *и* y соответственно:

$$Trace(x, G_{p,\Gamma}) = T_0^{\nu(x,0)},\ T_1^{\nu(x,1)},\dots,\ T_{\gamma-1}^{\nu(x,\gamma-1)}, T_\gamma^{\nu(x,\gamma)},\ \dots,\ T_\Gamma^{\nu(x,\Gamma)},$$

$$Trace(y, G_{p,\Gamma}) = T_0^{\nu(y,0)},\ T_1^{\nu(y,1)},\ \dots,\ T_{\gamma-1}^{\nu(y,\gamma-1)}, T_\gamma^{\nu(y,\gamma)},\ \dots\ ,T_\Gamma^{\nu(y,\Gamma)},$$

Для $\gamma' \geq \gamma$, $T_{\gamma'}^{\nu(x,\gamma')} = T_{\gamma'}^{\nu(y,\gamma')}$ и поддеревья $T_{\gamma-1}^{\nu(x,\gamma-1)}$ *и* $T_{\gamma-1}^{\nu(y,\gamma-1)}$ будут вложенными в $T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}$. Тогда:

1. $d(x,y) = 1$, если поддеревья $T_{\gamma-1}^{\nu(x,\gamma-1)}$, $T_{\gamma-1}^{\nu(y,\gamma-1)}$ непосредственно соединены.
2. $d(x,y) = 2$, если на уровне $\gamma' > \gamma$ появляется хотя бы одно непосредственное соединение у поддерева $T_{\gamma'}^{\nu(x,\gamma')}$, т.е. $Links_{\nu(x,\gamma')}\left(T_{\gamma'}^{\nu(x,\gamma')}\right) \geq 1$, а значит и $Links_{\nu(y,\gamma')}\left(T_{\gamma'}^{\nu(y,\gamma')}\right) \geq 1$. Появление непосредственного соединения на уровне γ' приводит к появлению узлов сети, с которыми связаны и x и y, т.е. расстояние между x *и* y равно 2.
3. $d(x,y) = r$, если минимальная длина соединения между поддеревьями $T_{\gamma-1}^{\nu(x,\gamma-1)}$ *и* $T_{\gamma-1}^{\nu(y,\gamma-1)}$ равна $r, r < p$. *Для* $p = 2$ *имеем* $r \leq 1$. Эта величина определяется по вектору связи узла $t_\gamma^{\nu(x,\gamma)}$.

Утверждение 2 доказано.

Оценка сложности алгоритма. Временная сложность алгоритма $O\big(p^2 * log(p) + \Gamma * (p-1)\big) = O\left(p^2 * log(p) + log_p N * (p-1)\right) = O(log_p N)$. При стандартном представлении сети, сложность $O(N^2 * log\,(N))$ (алгоритм Дейкстры с использованием фибоначчиевой кучи).

2.3. Число связей в блочно-иерархической сети.

Утверждение 3. Пусть $G_{p,\Gamma}$ - блочно-иерархическая сеть, $E(M_\gamma^{(n)})$ – множество связей кластера $M_\gamma^{(n)}$, $1 \leq n \leq p^{\Gamma-\gamma}$, и $T_{p,\Gamma}$ - дерево связи сети $G_{p,\Gamma}$. Тогда

$$\left|E(M_\gamma^{(n)})\right| = \sum_{i=0}^{\gamma-1}\left(Links\left(S^i\left(T_\gamma^{(n)}\right)\right) * p^{2(\gamma-i-1)}\right) \qquad (2).$$

Доказательство: Рассмотрим поддерево $T_\gamma^{(n)},\ 1 \le \gamma \le \Gamma$ дерева связи $T_{p,\Gamma}$, соответствующее кластеру $M_\gamma^{(n)}$. Доказательство проведем индукцией по уровням $\gamma, 1 \le \gamma \le\ \Gamma$.

Пусть $\gamma = 1$. Рассмотрим поддерево $T_1^{(n)}$, соответствующее кластеру $M_1^{(n)}$. Кластер $M_1^{(n)}$ содержит p узлов, которым соответствуют p листьев поддерева $T_1^{(n)}$. Покажем, что

$$|E(M_1^{(n)})| = Links\left(T_1^{(n)}\right).$$

Действительно, выражение (2) для $\gamma = 1$ принимает следующий вид

$$\left|E(M_1^{(n)})\right| = \sum_{i=0}^{\gamma-1}\left(Links\left(S^i\left(T_\gamma^{(n)}\right)\right) * p^{2(\gamma-i-1)}\right) = Links\left(S^0\left(T_1^{(n)}\right)\right)$$
$$= Links(T_1^{(n)})$$

Пусть $\gamma > 1$ и утверждение 3 верно для кластеров уровня γ, т.е.

$$\left|E(M_\gamma^{(n)})\right| = \sum_{i=0}^{\gamma-1}\left(Links\left(S^i\left(T_\gamma^{(n)}\right)\right) * p^{2(\gamma-i-1)}\right).$$

Докажем справедливость утверждения для кластеров уровня $\gamma + 1$. Пусть $M_{\gamma+1}^{(n)}$ - кластер уровня $\gamma + 1$ и ему соответствует поддерево $T_{\gamma+1}^{(n)}$. Новые связи на уровне $\gamma + 1$ появляются при непосредственном соединении вложенных поддеревьев. При этом, если $S_i(T_{\gamma+1}^{(n)})$ и $S_j(T_{\gamma+1}^{(n)})$ соединены, т.е. $\psi_{\gamma+1,n}(i,j) = 1$, то дополнительно образуется $p^{2\gamma}$ новых связей.

Пусть кластер $M_{\gamma+1}^{(n)}$ содержит p вложенных кластеров $M_\gamma^{(l+1)}, M_\gamma^{(l+2)}, \dots, M_\gamma^{(l+p)}$, которым соответствуют деревья $T_\gamma^{(l+1)}, T_\gamma^{(l+2)}, \dots, T_\gamma^{(l+p)}$, тогда

$$|E(M_{\gamma+1}^{(n)})| = \sum_{j=l+1}^{l+p} |E(M_\gamma^{(j)})| + Links\left(T_{\gamma+1}^{(n)}\right) * p^{2\gamma} =$$

$$= \sum_{j=l+1}^{l+p}\left(\sum_{i=0}^{\gamma-1}\left(Links\left(S^i\left(T_\gamma^{(j)}\right)\right) * p^{2(\gamma-i-1)}\right)\right) + Links\left(T_{\gamma+1}^{(n)}\right) * p^{2\gamma} =$$

$$\sum_{T_\gamma^{(j)} \in S\left(T_{\gamma+1}^{(n)}\right)}\left(\sum_{i=0}^{\gamma-1}\left(Links\left(S^i\left(T_\gamma^{(j)}\right)\right) * p^{2(\gamma-i-1)}\right)\right) + Links\left(T_{\gamma+1}^{(n)}\right) * p^{2\gamma} =$$

$$\sum_{i=1}^{\gamma}\left(Links\left(S^i\left(T_{\gamma+1}^{(n)}\right)\right) * p^{2(\gamma-i)}\right) + Links\left(T_{\gamma+1}^{(n)}\right) * p^{2\gamma}$$
$$= \sum_{i=0}^{\gamma}\left(Links\left(S^i\left(T_{\gamma+1}^{(n)}\right)\right) * p^{2(\gamma-i)}\right),$$

следовательно

$$\left|E(M_\gamma^{(n)})\right| = \sum_{i=0}^{\gamma-1}\left(Links\left(S^i\left(T_\gamma^{(n)}\right)\right) * p^{2(\gamma-i-1)}\right)$$

Утверждение 3 доказано.
Для сети $G_{p,\Gamma}$ будем иметь

$$\left|E(\ G_{p,\Gamma})\right| = \left|E(M_\Gamma^{(1)})\right| = \sum_{i=0}^{\Gamma-1}\left(Links\left(S^i\left(T_\Gamma^{(1)}\right)\right) * p^{2(\Gamma-i-1)}\right).$$

Оценка сложности алгоритма. Для определения $Links\left(S^i\left(T_\Gamma^{(1)}\right)\right)$ надо сделать $p(p-1)/2$ шагов для каждой вершины поддерева $T_\Gamma^{(1)}$. Следовательно временная сложность алгоритма $O\left(\frac{p*(p-1)}{2} * \frac{p^\Gamma-1}{p-1}\right) = O\left(p^\Gamma * p\right) = O(N * p) = O(N)$. При стандартном представлении сети сложность $O(N^2)$.

2.4. Число циклов длиной 3 в блочно-иерархической сети.

Пусть $T_{p,\Gamma}$ - дерево связи блочно-иерархической сети $G_{p,\Gamma}$. Рассмотрим последовательность соединенных поддеревьев из множества $S(T_\gamma^{(n)})$,

$S_{i_0}(T_\gamma^{(n)}), S_{i_1}(T_\gamma^{(n)}), \dots ,S_{i_r}(T_\gamma^{(n)})$, где $i_j \neq i_l,\ \ \psi_{\gamma,n}(i_j, i_{j+1}) = 1,\ 1 \le i_j, i_l \le \mathrm{p}$. (3)

Последовательность (3) назовем *циклической последовательностью поддеревьев*, а r-длиной цикла, если $S_{i_0}(T_\gamma^{(n)}) = S_{i_r}(T_\gamma^{(n)})$.

Утверждение 4. Пусть $G_{p,\Gamma}$ - блочно-иерархическая сеть и $T_{p,\Gamma}$ - дерево связи сети $G_{p,\Gamma}$, $TreeCycles\left(T_\gamma^{(n)}, 3\right)$ - число циклов длиной 3 между поддеревьями $S_1(T_\gamma^{(n)}), S_2(T_\gamma^{(n)}), \dots , S_p(T_\gamma^{(n)})$ вложенными в дерево $T_\gamma^{(n)}$. Тогда

$$TreeCycles\left(T_\gamma^{(n)}, 3\right) = \sum_{i=1}^{p-2}\sum_{j=i+1}^{p-1}\sum_{k=j+1}^{p}\left(\psi_{\gamma,n}(i,j) * \psi_{\gamma,n}(j,k) * \psi_{\gamma,n}(k,i)\right),$$

Число циклов определяется по битовой последовательности вектора связи узла $t_\gamma^{(n)}$.

Теорема 1. Пусть $T_{p,k}$ - дерево связи блочно-иерархической сети $G_{p,k}$, и $Cycles(M_\gamma^{(n)},3)$ число циклов длиной 3 между узлами кластера $M_\gamma^{(n)}$. Тогда

$$Cycles(M_\gamma^{(n)},3) = \left(\sum_{\substack{i,j=1\dots p\\ i<j}} \left(\psi_{\gamma,n}(i,j) * \left(\left|E\left(M_{\gamma-1}^{(l+i)}\right)\right| + \left|E\left(M_{\gamma-1}^{(l+j)}\right)\right|\right)\right) * p^{\gamma-1}\right) + {} + TreeCycles\left(T_\gamma^{(n)},3\right) * p^{3*(\gamma-1)} + \sum_{e=1}^{p} Cycles(M_{\gamma-1}^{(l+e)},3)\,, \qquad (3)$$

где $l=(n-1)*p^\gamma$.

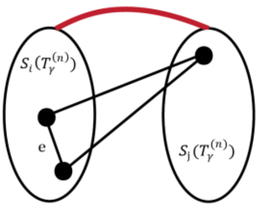
Доказательство. Доказательство проведем индукцией по уровням иерархии $\gamma, 1 \le \gamma \le \Gamma$.

Пусть $\gamma = 1$. Число циклов между узлами кластера $M_1^{(n)}$ состоит только из циклов между p узлами и определяется по вектору связи вершины $t_1^{(n)}$, т.е.

$$Cycles(M_1^{(n)},3) = TreeCycles\left(T_1^{(n)},3\right),$$

что действительно соответствует выражению 3.

Пусть $\gamma > 1$ и выражение 3 верно для кластеров уровня $\gamma - 1$. Докажем справедливость утверждения для кластеров уровня γ. Рассмотрим какие новые циклы появляются при переходе от уровня $\gamma - 1$ к уровню γ. Новые циклы в кластере могут появиться при соединении его вложенных кластеров, что соответствует соединению поддеревьев множества $S(T_\gamma^{(n)})$. Пусть два поддерева $S_i(T_\gamma^{(n)})$ и $S_j(T_\gamma^{(n)})$ непосредственно соединены, и кластер $M_{\gamma-1}^{(l+i)}$, соответствующий поддереву $S_i(T_\gamma^{(n)})$, содержит ребро e. Тогда каждая вершина из $S_j(T_\gamma^{(n)})$ образуют с e цикл, т.е добавляется $p^{\gamma-1}$ новых циклов.

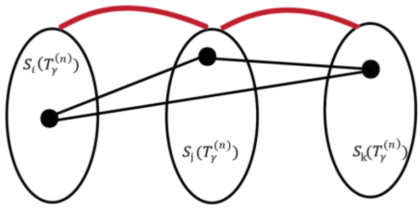


Если $E(M_{\gamma-1}^{(l+j)})$ - множество связей в кластере, соответствующем поддереву $S_j(T_\gamma^{(n)})$, а $E(M_{\gamma-1}^{(l+i)})$ - множество связей в кластере, соответствующем поддереву $S_i(T_\gamma^{(n)})$, то на уровне γ добавляется

$$\sum_{\substack{i,j=1\dots p\\ i<j}} \left(\psi_{\gamma,n}(i,j) * \left(\left|E\left(M_{\gamma-1}^{(l+i)}\right)\right| + \left|E\left(M_{\gamma-1}^{(l+j)}\right)\right|\right)\right) * p^{\gamma-1}$$

новых циклов.

Рассмотрим второй случай, когда новые циклы появляются за счет циклических соединений между поддеревьями $S(T_\gamma^{(n)})$. Пусть поддеревья $S_i(T_\gamma^{(n)})$ и $S_j(T_\gamma^{(n)})$ непосредственно соединены, $\psi_{\gamma,n}(i,j) = 1$. Если существует поддерево $S_k(T_\gamma^{(n)})$ такое, что $\psi_{\gamma,n}(i,k) = 1$ и $\psi_{\gamma,n}(i,k) = 1$, то добавляется $p^{3*(\gamma-1)}$ циклов. Число таких поддеревьев $S_k(T_\gamma^{(n)})$ равно $TreeCycles\left(T_\gamma^{(n)}, 3\right)$ и число циклов будет равно $TreeCycles\left(T_\gamma^{(n)}, 3\right) * p^{3*(\gamma-1)}$.



Следовательно,

$$Cycles(\mathrm{M}_\gamma^{(n)}, 3) = \left(\sum_{\substack{i,j=1\ldots p \\ i<j}} \left(\psi_{\gamma,n}(i,j) * \left(\left|\mathrm{E}\left(M_{\gamma-1}^{(l+i)}\right)\right| + \left|\mathrm{E}\left(M_{\gamma-1}^{(l+j)}\right)\right|\right)\right) * p^{\gamma-1} \right) + \\ + TreeCycles\left(T_\gamma^{(n)}, 3\right) * p^{3*(\gamma-1)} + \sum_{e=1}^{p} Cycles(\mathrm{M}_{\gamma-1}^{(l+e)}, 3)$$

где $l = (n-1) * p^\gamma$.

Теорема 1 доказана.

Для сети $G_{p,\Gamma}$ будем иметь $Cycles(\mathrm{G}_{\mathrm{p},\Gamma}, 3) = Cycles\left(M_\Gamma^{(1)}, 3\right)$.

Оценка сложности алгоритма. Сложность алгоритма $O(p^{\gamma+2} + N * p) = O(N * p^2 + N * p)$=$O(N)$. При стандартном представлении сетей сложность алгоритма $O(N^3)$.

2.5 Коэффициент кластеризации блочно-иерархической сети.

Кластеризация характеризует степень взаимодействия между собой ближайших соседей данного узла. Коэффициент кластеризации узла x - это отношение между количеством связей, действительно существующих между соседями узла x, и максимальным количеством связей, которые могут существовать между соседями узла x [1]. Рассмотрим узел $x \in G_{p,\Gamma}$, имеющий k связей, которые соединяют его с k соседями. Между k соседями может существовать максимум $k(k-1)/2$ ребер. Число реально существующих связей между узлами его k соседей соответствует числу циклов длиной 3, соединяющих их с узлом x [5]. Таким образом для вычисления кластеризации узла необходимо посчитать число циклов длиной 3, содержащих узел x (число треугольников, исходящих из узла x).

Определение. Пусть $G_{p,\Gamma}$ - блочно-иерархическая сеть, $T_{p,\Gamma}$- дерево связи сети $G_{p,\Gamma}$ и

$$S\left(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}\right) = \{ S_1(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}), S_2(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}), \dots, S_p(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)})\}. \quad (4)$$

Обозначим через $S_{\nu(x,\gamma)}\left(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}\right)$ – поддерево, вложенное в дерево $T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}$, содержащее лист x. Выберем последовательность **непосредственно** соединенных поддеревьев из множества $S(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)})$, образующих цикл, где начальным и конечным поддеревьями цикла является поддерево $S_{\nu(x,\gamma)}\left(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}\right)$, содержащее узел x.

$$S_{\nu(x,\gamma)}(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}), S_{i_1}(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}), \dots, S_{i_r}(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}), S_{\nu(x,\gamma)}(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}), \text{ где } 1 \le i_j, i_l \le p,\ i_j \ne i_l,\ \psi_{\gamma,n}(i_j, i_{j+1}) = 1$$

Такую последовательность назовем *циклом, с поддеревом* $S_{\nu(x,\gamma)}(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)})$, $(r+1)$ - длина цикла.

*Утверждение 5***.** Через $TreeCycles_{\nu(x,\gamma)}\left(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}, 3\right)$ обозначим число циклов длиной 3 с поддеревом $S_{\nu(x,\gamma)}\left(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}\right)$. Число циклов длиной 3 с поддеревом $S_{\nu(x,\gamma)}\left(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}\right)$ удовлетворяет следующему выражению:

$$TreeCycles_{\nu(x,\gamma)}\left(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}, 3\right) = \sum_{j=1}^{p-2} \sum_{k=j+1}^{p} \left(\psi_{\gamma,n}(\nu(x,\gamma-1), j) * \psi_{\gamma,n}(j,k) * \psi_{\gamma,n}(k, \nu(x,\gamma-1))\right)$$

Число циклов определяется по битовой последовательности вектора связи вершины $t_\gamma^{\nu(x,\gamma)}$.

*Утверждение 6***.** Пусть $T_{p,\Gamma}$ - дерево связи блочно-иерархической сети $G_{p,\Gamma}$. Тогда число циклов длиной 3, содержащих узел x, в кластере $M_\gamma^{\nu(x,\gamma)}$ удовлетворяет следующему равенству

$$Cycles_{\nu(x,\gamma)}(M_\gamma^{\nu(x,\gamma)}, 3) = \sum_{j=1\dots p} \psi_{\gamma,n}(\nu(x,\gamma-1), j) * \left|E\left(M_{\gamma-1}^{(l+j)}\right)\right| + \sum_{j=1\dots p} \psi_{\gamma,n}(\nu(x,\gamma-1), j) * d\left(M_{\gamma-1}^{\nu(x,\gamma)}, x\right) * p^{\gamma-1} + TreeCycles_{\nu(x,\gamma)}\left(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}, 3\right) * p^{2*(\gamma-1)} + Cycles_{\nu(x,\gamma-1)}(M_{\gamma-1}^{\nu(x,\gamma-1)}, 3), \quad (7)$$

где $d\left(x, M_\gamma^{\nu(x,\gamma)}\right)$- степень узла x в кластере $M_\gamma^{\nu(x,\gamma)}$и $|E\left(M_\gamma^{(l)}\right)|$-число связей в кластере $M_\gamma^{(l)}$.

Доказательство аналогично доказательству *Теоремы 1.* Рассмотрим лишь отличия. Циклы появляются при переходе от уровня $\gamma-1$ к уровню γ при соединении поддерева $S_{\nu(x,\gamma)}(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)})$ с остальными поддеревьями $S_i(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}) \in S(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)})$. Пусть два поддерева $S_{\nu(x,\gamma)}(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)})$ и $S_j(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)})$ непосредственно соединены, и кластер $M_{\gamma-1}^{(l+i)}$, соответствующий поддереву $S_i(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)})$, содержит ребро r. Тогда узел x из $S_{\nu(x,\gamma)}(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)})$ образует с r цикл, т.е добавляется столько циклов, сколько ребер в соединенном кластере $S_j(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)}$т.е.

$$\sum_{j=1\ldots p} \psi_{\gamma,n}(x,j) * \left|E\left(M_{\gamma-1}^{(l+j)}\right)\right|$$

С другой стороны, в кластере соответствующем $S_{\nu(x,\gamma)}(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)})$, все соседи x образуют с каждым узлом кластера $S_j(T_\gamma^{\nu(x,\gamma)})$ цикл, что добавляет для каждого соседа вершины x, $p^{\gamma-1}$ новых циклов, т.е.

$$\sum_{j=1\ldots p} \psi_{\gamma,n}(x,j) * d\left(x, M_{\gamma-1}^{\nu(x,\gamma)}\right) * p^{\gamma-1},$$

где $d\left(x, M_{\gamma-1}^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma)},\right)$- степень узла x в кластере $M_{\gamma-1}^{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\gamma)}$.

Утверждение 6 доказано.

Для сети $G_{p,\Gamma}$ будем иметь: $Cycles_x(G_{p,\Gamma},3) = Cycles_x(M_\Gamma^{(1)},3)$

Оценка сложности алгоритма. Сложность алгоритма $O(p^3 * \Gamma) = O(p^3 * log_p N) = O(log_p N)$. При стандартном представлении сетей сложность алгоритма $O(N^2)$.

Обозначим через $C(x, G_{p,\Gamma})$ коэффициент кластеризации узла x в блочно-иерархической сети. Тогда

$$C(x, G_{p,\Gamma}) = \frac{2Cycles_x(G_{p,\Gamma},3)}{d(x,G_{p,\Gamma})\left(d(x,G_{p,\Gamma})-1\right)},$$

Литература

1. Albert R., Barab´asi *A-L* Statistical mechanics of complex networks. Rev. Mod. Phys. 74: 47–97. *(2002)*.
2. V.A. Avetisov, A.V. Chertovich, S.K. Nechaev, O.A. Vasilyev. On spectra of random hierarchical networks, Stat. Mech:Theory and Exper, 07 07008 (2009).
3. В.А. Аветисов, А.Х. Бикулов, О. А. Васильев, С. К. Нечаев, А. В Чертович, О некоторых физических приложений случайных иерархических матриц. ЖЭТФ 136(3) 566 (2009); V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, O. A. Vasilyev, S. K. Nechev, and A. V. Chertovich, JETP, 109(3) 485 (2009).
4. Р.Уилсон, Введение в теорию графов, изд. Мир, Москва, 1977, Rpbin J.Wilson “Introduction to Graph Theory” 1972.
5. И.А. Евин Введение в теорию сложных сетей. Компьютерные исследования и моделирование, 2010, т. 2 № 2, с. 121–141, *2010*.

Ռեգուլյար բլոկ-հիերարխիկ ցանցերի և դրանց հատկանիշների մասին

Ս. Ավետիսյան, Ա.Քոչարյան

Ամփոփում

Տվյալ աշխատանքում դիտարկվում են պատահական ռեգուլյար բլոկ-հիերարխիկ ցանցեր, որոնց համար մշակված են ցանցի տոպոլոգիական բնութագրիչների հաշվարկման արդյունավետ ալգորիթմներ, մասնավորապես, հանգույցների աստիճանների, հանգույցների միջև հեռավորությունների, տրված երկարությամբ ցիկլերի քանակների, կլաստերիզացիայի գործակիցների բաշխումներ: Տվյալ ալգորիթմները դիտարկվող դասի ցանցերի համար, ի տարբերություն հայտնի ալգորիթմների, ավելի արդյունավետ են ինչպես արագագործության, այնպես էլ համակարգչի օպերատիվ հիշողության օգտագործման տեսանկյունից:

A Study on Regular Block-hierarchical Networks and their Properties

S.Avetisyan, A.Kocharyan

Summary

This work has been done on the study of random regular block-hierarchical networks, for which effective calculating algorithms of networks topological properties have been developed, in particular, the distribution of values of the degree of nodes, the distance between nodes, the number of cycles of a given length of clustering coefficient. These algorithms for the studied class of networks, compared to the famous ones, are more effective regarding the speed and the use of computer memory.