*ՀՏԴ 371.31:51* *Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա*

# Ի.Ֆ. ՇԱՐԻԳԻՆԻ «ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ 12» ԴԱՍԱԳՐՔԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻՑ ՄԵԿԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

*Ռ. Առաքելյան*

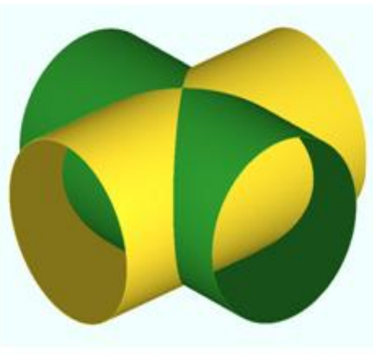
Գործող Ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսքի Ի. Ֆ. Շարիգինի «Երկրաչափություն 12» դասագրքի կարևորագույն և հետաքրքիր թեմաներից մեկը մարմինների ծավալների հաշվումն է, Կավալյերիի (Բոնավենտուրա Կավալյերի՝ XVII դարի իտալացի գիտնական) սկզբունքի կիրառությամբ, որն ունի ինչպես տեսական, այնպես էլ լայն գործնական նշանակություն: Ընթերցողի ուշադրությանն ենք ներկայացնում դասագրքի դժվարավուն խնդիրներից մեկի լուծումը մի քանի եղանակներով:

Խնդիր 12. (դ) $r$ հիմքի շառավիղ ունեցող երկու գլանների առանցքները հատվում են և փոխուղղահայաց են: Գտեք նրանց ընդհանուր մասի ծավալը: (Գլանի ծնորդները բավականաչափ երկար են):

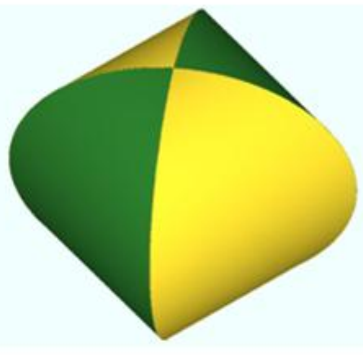
Հիշեցնենք Կավալյերիի սկզբունքը մարմնի ծավալի հաշվման համար:

Եթե երկու մարմիններ տարածության մեջ կարելի է դասավորել այնպես, որ տված հարթությանը զուգահեռ ցանկացած հարթություն հատում է այդ մարմիններն այնպիսի պատկերներով, որոնց մակերեսների հարաբերությունը հաստատուն է, ապա այդ հաստատունին հավասար կլինի նաև այդ մարմինների ծավալների հարաբերությունը:

Բերված խնդրի լուծումը դյուրին չէ աշակերտների համար մի քանի պատճառներով: Նախ դժվար է գծագրել հարթության վրա եռաչափ տարածական հատվող գլանները, ինչպես նաև նրանց ընդհանուր մասը, (Նկ.1, Նկ.2): Հաջորդ քայլում պետք է կատարել երկրաչափական մարմնի



Նկ. 1 Հատվող գլաններ



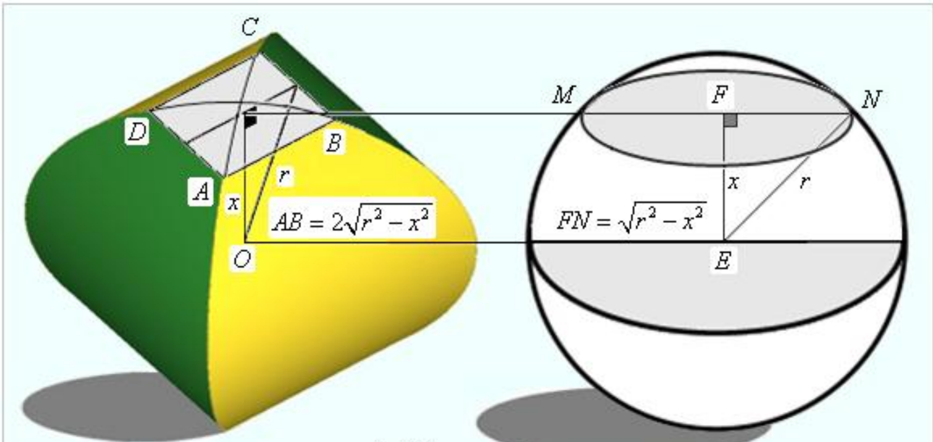
Նկ. 2 Գլանների ընդհանուր մասը՝ «քարձ»

ընտրությունը, որը թույլ կտա կիրառել Կավալյերիի սկզբունքը խնդիրը լուծելու համար: Այսինքն, պետք է ընտրել մի մարմին, որի հատույթի մակերեսն ու ծավալի հաշվումը հայտնի է, ընտրել այդ մարմնի դիրքն այնպես, որ «բարձի» նկատմամբ կիրառվի Կավալյերիի սկզբունքը: Որպես այդպիսի մարմին ընտրենք $r$ շառավղով գունդը:

Տեղադրենք $r$ շառավղով գունդ, որի կենտրոնը պատկանում է գլանների առանցքների $\alpha$ հարթությանը՝ և կառուցենք օբյեկտների՝ «բարձ»-ի և գնդի կենտրոնից $x$ հեռավորության վրա $\alpha$ հարթությանը զուգահեռ հարթություն: Հատույթներում կստանանք՝ «բարձ»-ի համար քառանկյունի $ABCD$ -ն, իսկ գնդի համար՝ $MN$ տրամագծով շրջան, (Նկ. 3):

$ABCD$ հատույթը զուգահեռագիծ է, որովհետև այդ քառանկյան հակադիր կողմերը միևնույն գլանի ծնիչներ են, որոնք զուգահեռ են իրար: Իսկ գլանների շառավիղների հավասարությունից և գլանների առանցքների փոխուղղահայացությունից հետևում է, որ $ABCD$ զուգահեռագիծը քառակուսի է:

Դիտարկելով $x$ և $r$ կողմերով ուղղանկյուն եռանկյունները (Նկ. 3) կստանանք, քառակուսու և շրջանի մակերեսների համար հետևյալ արժեքները՝




Նկ. 3

$$S_{\text{քառ.}} = \left(2\sqrt{r^2-x^2}\right)^2; \quad S_{\text{շրջ.}} = \pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 :$$

Կավալյերիի սկզբունքի համաձայն՝

$$\frac{V_{\text{բարձ}}}{V_{\text{գունդ}}} = \frac{S_{\text{քառ.}}}{S_{\text{շրջ.}}} = \frac{\left(2\sqrt{r^2-x^2}\right)^2}{\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2} = \frac{4}{\pi};$$

$$V_{\text{բարձ}} = \frac{4}{\pi}\cdot V_{\text{գունդ}} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi r^3 = \frac{16}{3}r^3 :$$

Հաջորդ եղանակով լուծելու համար մեզ անհրաժեշտ է Նյուտոն - Սիմպսոնի բանաձևը:

Նյուտոն - Սիմպսոնի բանաձևի ամենակարճ արտածումը հենված է մարմնի ծավալի հաշվման ինտեգրալային բանաձևին՝

$$V = \int_a^b S(x)dx, \qquad (1)$$

որտեղ $S(x)$-ը մարմինը $Ox$ կոորդինատային առանցքին ուղղահայաց հատումից ստացված հատույթի մակերեսն է: $S(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է թվային $a,b$ հատվածի վրա:

Թեորեմ: Եթե մարմնի զուգահեռ հատույթի $S(x)$ մակերեսը բավարարում է

$$S(x) = ax^2 + bx + c, \quad 0 \le x \le h,$$

պայմանին, որտեղ $x$-ը հատույթի հեռավորությունն է սկզբնական հարթությունից, իսկ $a$-ն, $b$-ն և $c$-ն հաստատուն թվեր են, ապա մարմնի $V$ ծավալը հավասար է

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S), \qquad (2),$$

որտեղ $S_1 = S(0),\ S_2 = S(h),\ S = S(h/2)$:

Ապացույց: Ըստ (1) բանաձևի

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h (ax^2 + bx + c)dx = \frac{1}{3}ah^3 + \frac{1}{2}bh^2 + ch = \frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c):$$

Քանի որ,

$$S_1 = S(0) = c,\ S_2 = S(h) = ah^2 + bh + c,$$

$$S = S(\frac{h}{2}) = \frac{1}{4}\cdot ah^2 + \frac{1}{2}\cdot bh + c,\ 4S = ah^2 + 2bh + 4c, \quad \text{ապա,}$$

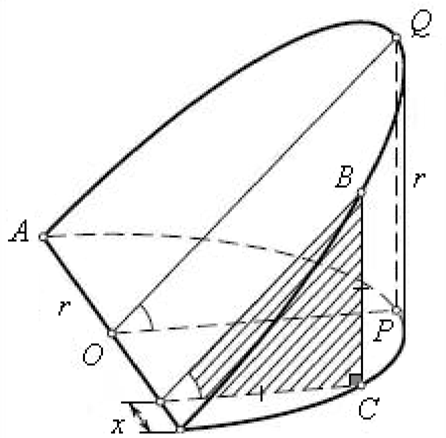
$$S_1 + S_2 + 4S = 2ah^2 + 3bh + 6c:$$

Բանաձևի կիրառության անհրաժեշտ պայմանը $S(x)$-ի քառակուսենլիությունն է:

Այդ հրաշալի բանաձևը կրում է անգլիացի երկու մաթեմատիկոսների՝ Իսահակ Նյուտոնի (1643 -1727) և Թոմաս Սիմպսոնի (1710 -1761) անունները:

Խնդիր: 12. (դ)- ի լուծման II եղանակ:

Լուծում: Գլանների հատումից առաջացած մարմինը բաղկացած է չորս հավասար մասերից, որոնցից յուրաքանչյուրը կարելի է կիսել: Ստացված ութ մասերից մեկը պատկերված է Նկ. 4-ում: Նրա զուգահեռ հատույթները զուգահեռ $OPQ$ եռանկյան հարթությանը հանդիսանում են հավասարաէջ ուղղանկյուն եռանկյուններ: Եթե $x$-ը հատող հարթության հեռավորությունն է



Նկ. 4

գլանի տրամագծի ծայրակետից, ապա $S(x)$ հատույթի մակերեսը հավասար է $OPQ$ եռանկյան մակերեսին՝

$$\frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}x(2r - x);$$

Հավասարության աջ մասը քառակուսային ֆունկցիա է, Նյուտոն-Սիմպսոնի բանաձևի համաձայն

$$h = 2r,\ 0 \le x \le 2r,\ S = \frac{1}{2}r^2;$$

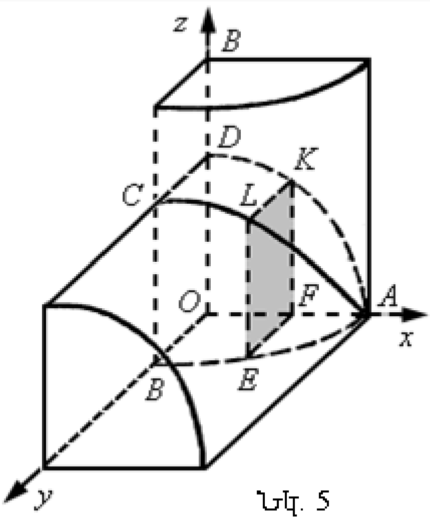
ուստի որոնելի ծավալը հավասար է

$$V = 8\cdot\frac{2r}{6}\cdot\left(0 + 0 + 4\cdot\frac{1}{2}r^2\right) = \frac{16}{3}\cdot r^3 :$$

Խնդիր: 12. (դ)- ի լուծման III եղանակ:

Լ ու ծ ու մ:

Գլանների առանցքները ընտրենք որպես կոորդինատային համակարգի $Oy$ և $Oz$ առանցքներ (Նկ. 5):

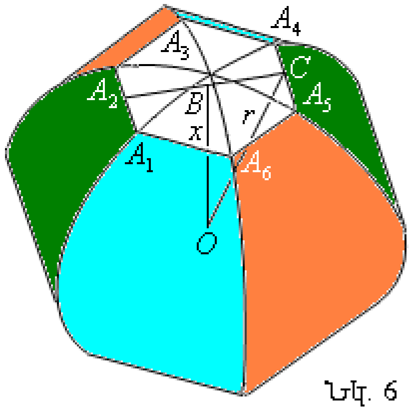


Նկ. 5

$OABCD$ մարմինը կազմում է մեզ հետաքրքրող մարմնի՝ «բարձի» մեկ ութերորդ մասը: Հատենք այդ մարմինը $Ox$ առանցքին ուղղահայաց հարթությամբ, $O$ կետից $x$ հեռավորության վրա: Հատույթում կստանանք $EFKL$ քառակուսի $EF = \sqrt{r^2 - x^2}$ երկարությամբ կողմով: Այդ պատճառով $S(x) = r^2 - x^2$: Հաշվենք մարմնի ծավալը (1) բանաձևով.

$$V = 8\int_0^r (r^2 - x^2)dx = 8\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^r = 8\left(r^3 -\right.$$

Խնդիր 12 *. $r$ հիմքի շառավիղ ունեցող երեք գլանների առանցքները հատվում են, գտնվում են միևնույն հարթության մեջ և հարևան առանցքների կազմած անկյունը հավասար է $\pi/3$- ի: Գտեք նրանց ընդհանուր մասի ծավալը:



Նկ. 6

Հենվելով լուծված խնդրի դատողություններին կասենք, որ երեք գլանների ընդհանուր մասը կունենա Նկ. 6-ի տեսքը՝ այսինքն այս դեպքում «բարձը» կունենա 6 «նիստ», այդ պատճառով նրա հարթ հատույթում ստացված բազմանկյունը կհանդիսանա կանոնավոր վեցանկյուն, որի մակերեսը դժվար չէ արտահայտել $BC$-ով և «բարձի» ծավալը հաշվելու համար կիրառել Կավալյերիի սկզբունքը:

$$\frac{V\ 3_{\text{բարձ}}}{V_{\text{գունդ}}} = \frac{S_6}{S_{\text{շրջ.}}} = \frac{6\ \sqrt{r^2 - x^2}\ ^2 \cdot \sqrt{3}/3}{\pi\ \sqrt{r^2 - x^2}\ ^2} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi};$$

$$V\ 3_{\text{բարձ}} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cdot V_{\text{գունդ}} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{8}{\sqrt{3}} r^3 :$$

Խնդիր 12 **. $r$ հիմքի շառավիղ ունեցող $n$ գլանների առանցքները հատվում են, գտնվում են միևնույն հարթության մեջ և հարևան առանցքների կազմած անկյունը հավասար է $\pi/n$ -ի: Գտնք նրանց ընդհանուր մասի ծավալը:

Լ ու ծ ու մ: Կիրառելով անալոգիա, օգտագործելով կանոնավոր $2n$-անկյան մակերեսի բանաձևը և Կավալյերիի սկզբունքը կգրենք՝

$$V\ n_{\text{բարձ}} = \frac{2n \cdot tg\ \ \pi/2n}{\pi} \cdot V_{\text{գունդ}} = \frac{2n \cdot tg\ \ \pi/2n}{\pi} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{8n \cdot tg\ \ \pi/2n}{3} r^3 :$$

Ձևափոխելով $V\ n_{\text{բարձ}} = \dfrac{2n \cdot tg\dfrac{\pi}{2n}}{\pi} \cdot V_{\text{գունդ}}$ արտահայտությունը կգրենք՝

$$\frac{V\ n_{\text{բարձ}}}{V_{\text{գունդ}}} = \frac{tg\ \ \pi/2n}{\pi/2n} :$$

Այժմ ենթադրենք գլանների թիվն աճում է, օգտվելով $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{tg\ \ \pi/2x}{\pi/2x} = 1$

սահմանի արժեքից կգրենք, որ առանցքների թվի մեծացումից «քարձ»-երի ծավալները նվազելով ձգտում են $r$ շառավղով գնդի ծավալին: Այսինքն՝

$$\frac{16}{3}r^3 = V\ 2_{\text{քարձ}} > V\ 3_{\text{քարձ}} > \ldots > V\ n_{\text{քարձ}} > \frac{4}{3}\cdot\pi r^3 :$$

Ամենամեծ ծավալն ունի $V\ 2_{\text{քարձ}}$- ն, նրա մոտավոր արժեքը հավասար է՝

$$V\ 2_{\text{քարձ}} \approx 1{,}2732\cdot V_{\text{գունդ}};\quad V\ 3_{\text{քարձ}} \approx 1{,}1\cdot V_{\text{գունդ}};\quad V\ 4_{\text{քարձ}} \approx 1{,}05\cdot V_{\text{գունդ}} :$$

Իսկ օրինակ $V\ 28_{\text{քարձ}} \approx 1{,}0010\cdot V_{\text{գունդ}}$ :

*Գրականություն*


1. Ի.Ֆ. Շարիգին, Երկրաչափություն -12, Եր.,«Անտարես», 2011:
2. Понарин Я.П., Элементарная геометрия, том 2, Москва, Издательство МЦНМО, 2006.
3. Носуля С.Н., Шеломовский В.В., Тематические комплекты по геометрии, М., 2011.


Способы решения одной задачи из учебника И.Ф. Шарыгина «Геометрия 12»

Р.Аракелян

*Резюме*

В данной статье рассматривается решение одной из сложных задач из учебника И.Ф. Шарыгина для старшей школы «Геометрия 12» несколькими способами: нахождением объема тела по принципу Кавальери, с помощью формулы Ньютона-Симпсона и путем вычисления интеграла. Статья может служить в качестве методической помощи для учителей и учеников школ.

The Ways of Solution of a Task from the Textbook «Geometry 12» by I.F.Sharygin

R.Arakelyan

*Summary*

In this article one of the difficult tasks from a textbook for high school "Geometry 12" by I.F.Sharygin was solved in several ways: finding of volume of a body by Cavalieri's principle; by means of Newton-Simpson's formula and by integral calculation. The article can be used as the methodical guide for school teachers and pupils.