$[x]$ ԵՎ $\{x\}$ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ*

Աիդա Դավթյան

Աշխատանքը նվիրված է իրական թվի ամբողջ և կոտորակային մասեր պարունակող որոշ հավասարումների լուծման ալգորիթմի մշակմանը և նրա հիման վրա կոնկրետ հավասարումների լուծմանը: Այս թեմայի ուսումնասիրությունը ուշադրության արժանի է հատկապես ավագ դպրոցի բնագիտամաթեմատիկական հոսք ընտրած սովորողների համար: Նմանատիպ վարժություններ կարելի է լուծել արտադասարանական խմբակային պարապմունքների ժամանակ:

Կարևոր հանգամանք է, որ սովորողները, իրական թվի ամբողջ և կոտորակային մասերի մասին սահմանումներն ուսանելուց բացի, ծանոթ լինեն $f(x)=[x]$ ֆունկցիայի որոշ հատկություններին.

1. $\forall x \in R;\ n \in Z$ *համար*

$$[x+n]=[x]+[n]=[x]+n$$

2. Եթե $a,b \in R;\ [a]=[b]$ *ապա* $|a-b|<1$

3. $\forall x \in R;\ n \in N$ *համար* $[nx] \geq [n]x$ *և* $\left[\frac{[x]}{n}\right] \geq \left[\frac{x}{n}\right]$

4. $\forall n \in N,$ *համար* $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]=n$

Արտադասարանական խմբակների և նախասիրական պարապմունքների դասաժամերին սովորողների ուշադրությունը կարելի է բևեռել 10-րդ դասարանի գործող [1] դասագրքի թիվ 347 գ և թիվ 372 է, ը վարժությունների, ինչպես նաև 12-րդ դասարանի գործող [2] դասագրքի թիվ 862 և թիվ 863* վարժությունների և Գ.Միքայելյանի [3] գրքի թիվ 231 և թիվ 240 վարժությունների լուծումներին:*

Հավասարումներ լուծելիս հարմար է օգտվել

$$x=[x]+\{x\} \qquad (1)$$

նույնությունից: Այստեղից `

$$[x]=x-\{x\} \qquad (2)$$

$$\{x\}=x-[x] \qquad (3)$$

Բերենք մի շարք հավասարումների լուծումները [2] դասագրքից.

---

* Հոդվածն ընդունվել է 20.09.2014:
Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել ԱրՊՀ մաթեմատիկայի ամբիոնը:

862*. ա) $3\{x\}+2[x]=5$

Օգտվելով (2) նույնությունից և տեղադրելով $[x]$- ի արժեքը տրված հավասարման մեջ՝ կունենանք՝

$3\{x\}+2x-2\{x\}=5$

որտեղից՝

$\{x\}=5-2x$

Քանի որ $0\le\{x\}<1$, ինչը հետևում է (3)-ից, կստանանք $0\le 5-2x<1$, որտեղից հետևում է, որ $x\in(2;2{,}5]$: Հետևաբար՝ $[x]=2$: Տեղադրելով $[x]=2$ արժեքը $3\{x\}+2[x]=5$ հավասարման մեջ՝ կստանանք $3\{x\}+4=5$, որտեղից ՝ $\{x\}=1/3$: (1) նույնությունից ստանում ենք $x=2\frac{1}{3}$:

բ) $2\{x\}+\left[x+\frac{1}{3}\right]=5$

Օգտվելով (1) և (2) նույնություններից՝ կունենանք՝

$\{x\}=\frac{1}{2}\left(5-\left[x+\frac{1}{3}\right]\right)$,

Որտեղից՝

$0\le\frac{1}{2}\left(5-\left[x+\frac{1}{3}\right]\right)<1$

Լուծելով ստացված անհավասարումը՝ կստանանք

$3<\left[x+\frac{1}{3}\right]\le 5$, որտեղից հետևում է

$\left[x+\frac{1}{3}\right]=4$ կամ $\left[x+\frac{1}{3}\right]=5$

Ստացված արժեքները տեղադրելով սկզբնական հավասարման մեջ՝ կունենանք $\{x\}=\frac{1}{2}$ կամ $\{x\}=0$: Օգտվելով (1) նույնությունից, ստանում ենք $x=4{,}5$ կամ $x=5$:

գ) $[x]=\sqrt{9-x^2}$

Օգտվելով (1) և (2) նույնություններից՝ կունենանք $0\le x-\sqrt{9-x^2}<1$: Լուծելով կրկնակի անհավասարումը, ստանում ենք՝

$x\in\left[0,\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$, որտեղից ՝ $[x]=0,1,2$

Դիտարկենք այս դեպքերից յուրաքանչյուրն առանձին:

1) Դիցուք $[x]=0$

Այս դեպքում $\sqrt{9-x^2}=0$*, որի արմատները են* $x=\pm 3$ *, որոնք չեն բավարարում* $[x]=0$ *պայմանին:*

2) Դիցուք $[x]=1$

Այս դեպքում ևս $\sqrt{9-x^2}=1$ *հավասարման արմատները չեն բավարարում* $[x]=1$ *պայմանին:*

գ) Դիտարկենք $[x]=2$ *դեպքը:*

Ստանում ենք $\sqrt{9-x^2}=2$ *հավասարումը, որի միայն* $x=\sqrt{5}$ *արմատն է, որ բավարարում է* $[x]=2$ *պայմանին:*

դ) Դիտարկենք մեկ այլ հավասարում.

$$[x]\cdot\left(x^2+x+1\right)=4$$

Այստեղից՝

$$[x]=\frac{4}{x^2+x+1} \tag{4}$$

Քանի որ $[x]\in Z$ *, ապա որպեսզի տեղի ունենա (4) հավասարությունը, պետք է* x*-ը հանդիսանա*

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x+1=-1 \\ x^2+x+1=1 \\ x^2+x+1=-2 \\ x^2+x+1=2 \\ x^2+x+1=-4 \\ x^2+x+1=4 \end{array}\right. \tag{5}$$

հավասարումների համախմբի լուծումը:

Ստուգում ենք համախմբի յուրաքանչյուր լուծման համապատասխանությունը $[x]$ *- ի հետ ըստ (4)– ի և ստանում հավասարման արմատը՝* $x=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$

863. ա)* $3\lg^2 x+2[x]=6$ *(6)*

(6) հավասարումը ներկայացնենք այլ տեսքով՝

$$\lg^2 x=\frac{6-2[x]}{3}$$

Հաշվի առնելով, որ լոգարիթմական ֆունկցիայի որոշման տիրույթը դրական թվերի բազմությունն է և հավասարման ձախ մասը ոչ բացասական թիվ է, կունենանք

$$\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{6-2[x]}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ [x] \leq 3 \end{cases}$$

որտեղից հետևում է, որ $[x] \in \{0;1;2;3\}$*: Անմիջական ստուգման միջոցով ստանում ենք, որ ստացած արժեքներից միայն* $[x] = 0$ *արժեքն է բավարարում (6) հավասարմանը: Կունենանք*

$$\begin{cases} \lg^2 x = 2 \\ [x] = 0 \end{cases},$$

որտեղից `$x = 10^{-\sqrt{2}}$

բ) $3|\sin x| + 2[x] = 6$ *(7)*

Հավասարումից ստանում ենք` $|\sin x| = \dfrac{6-2[x]}{3}$ *:*

$0 \leq \sin x \leq 1$ *անհավասարումից հետևում է* $0 \leq \dfrac{6-2[x]}{3} \leq 1$, *որտեղից`* $1{,}5 \leq [x] \leq 3$, *այսինքն `* $[x] = 2$ *կամ* $[x] = 3$

Երբ $[x] = 2$, *ապա* $|\sin x| = \dfrac{2}{3}$, *որի լուծումներից (7) հավասարմանը բավարա-րում է միայն* $x = \pi - \arcsin\dfrac{2}{3}$ *արժեքը:*

Երբ $[x] = 3$ *, ապա ստանում ենք* $|\sin x| = 0$ *, որի լուծումներն են* $x = \pi k, k \in Z$ *:*

Այս լուծումներից (7) հավասարմանը բավարարում է $x = \pi$ *արժեքը:*

Պատ. `$x = \pi; \pi - \arcsin\dfrac{2}{3}$

Դիտարկենք ևս մի քանի հավասարումներ [4]:

Լուծել հավասարումը

231. $\left[\dfrac{5+6x}{8}\right] = \dfrac{15x-7}{5}$ *(8)*

Օգտվելով (1) նույնությունից` կունենանք `

$$\left\{\frac{5+6x}{8}\right\} = \frac{5+6x}{8} - \left[\frac{5+6x}{8}\right]$$

իսկ տրված (8) հավասարումից $\left[\frac{5+6x}{8}\right]$ *- ի փոխարեն տեղադրելով* $\frac{15x-7}{5}$ *՝ կունենանք*

$$\left\{\frac{5+6x}{8}\right\}=\frac{5+6x}{8}-\frac{15x-7}{5} \text{ կամ } \left\{\frac{5+6x}{8}\right\}=\frac{81-90x}{40}$$

Քանի որ $0\le\{x\}<1$, *ուստի* $0\le\frac{81-90x}{40}<1$, *որտեղից՝*

$$\frac{41}{90}<x\le\frac{9}{10} \qquad (9)$$

Հաշվի առնելով ստացված միջակայքը՝ դժվար չէ ստանալ

$$-\frac{1}{30}<\frac{15x-7}{5}\le\frac{13}{10}$$

անհավասարությունը: (8) հավասարումից հետևում է, որ $\frac{15x-7}{5}$ *- ը ամբողջ թիվ է, հետևաբար՝*

$$\left[\begin{array}{l}\frac{15x-7}{5}=0\\ \frac{15x-7}{5}=1\end{array}\right.,$$

ըրտեղից $\left[\begin{array}{l}x=\frac{7}{15}\\ x=\frac{4}{5}\end{array}\right.$,

որոնք պատկանում են $\left(\frac{41}{90};\frac{9}{10}\right)$ *միջակայքին: Պատ.՝* $\frac{7}{15};\frac{4}{5}$

240. Դիտարկենք

$\sqrt{x+[x]}+\sqrt{x-[x]}=1$ *(10)*

իռացիոնալ հավասարումը: Այն ներկայացնենք ՝

$$\sqrt{x+[x]}=1-\sqrt{x-[x]}$$

տեսքով: Ստացված հավասարման աջ և ձախ մասերը քառակուսի բարձրաց-նելուց և պարզագույն ձևափոխություններից հետո կստանանք.

$$\begin{cases}[x]^2=\frac{4x-1}{4}\\ [x]\le\frac{1}{2}\end{cases}$$

Որտեղից՝ $x \geq \frac{1}{4}$*:*

Ունենք $[x] \leq \frac{1}{2}$*, հետևաբար* $[x] = 0$*, այսինքն* $\frac{4x-1}{4} = 0$ *;*

Այստեղից $x = \frac{1}{4}$*, որն էլ բավարարում է (10) հավասարմանը: Պատ.՝* $\frac{1}{4}$

Այսպիսով՝ թվի $[x]$ *և* $\{x\}$ *պարունակող առաջադրանքները լուծելիս բավական է օգտվել (1) նույնությունից և, հաշվի առնելով (2) կրկնակի անհավասարումը, ընտրել [x] -ը, որը բավարարում է տրված հավասարմանը:*

Վերջում նշենք, որ թվի $[x]$ *և* $\{x\}$ *պարունակող առաջադրանքների հետաքրքիր գրաֆիկական լուծումներ կարելի է գտնել Ռ.Լ.Առաքելյանի [4] մեթոդական ձեռնարկում:*

ԾԱՆՈԹԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 10–րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար): Եր., 2011, 206 էջ:
2. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Ավագ դպրոցի 12–րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտամաթեմատիկական հոսքի համար): Եր., 2011, 208 էջ:
3. Միքայելյան Գ.Մ., Տարրական մաթեմատիկայի մեթոդները հանրահաշվում: Եր., 2006, 664 էջ:
4. Առաքելյան Ռ.Լ. Մաթեմատիկական խնդիրների լուծումների գրաֆիկական մեկնաբանությունները: Ստեփ., 2008, 125 էջ:

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

$[x]$ և $\{x\}$ պարունակող հավասարումների լուծման մասին

Աիդա Դավթյան

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում $f(x) = [x]$ և $f(x) = \{x\}$ ֆունկցիաների մասին շատ քիչ է խոսվում, ուսումնական ծրագրերում ընդգրկված չէ թվի ամբողջ և կոտորակային մասեր պարունակող առաջադրանքների կատարման ալգորիթմը: Սակայն այդպիսի առաջադրանքներ հաճախ են հանդիպում առարկայական օլիմպիադաների տեքստերում, որը և որոշակի դժվարություն է առաջացնում թե ուսուցիչների, թե սովորողների մոտ: Աշխատանքում դիտարկված են իրական թվի ամբողջ և կոտորակային մասեր պարունակող որոշ հավասարումների լուծման ալգորիթմը:

Բանալի բառեր՝ *թվի ամբողջ մաս, թվի կոտորակային մաս, ֆունկցիա, հավասարում, լուծման ալգորիթմ, լուծման վերլուծություն:*

РЕЗЮМЕ

Решение задач, содержащих целую и дробную часть числа

Аида Давидян

В программе школьного курса математики включены отдельные вопросы, связанные с понятием целой и дробной части действительного числа. Алгоритм решения задач, содержащих [x] и {x} не изучаются в школе учениками, но часто встречаются на олимпиадах по математике. Цель статьи помочь учащимся познакомиться с алгоритмом решения некоторых таких задач, которые приводят к стандартному способу решения.
Ключевые слова: *целая часть числа, дробная часть числа, функция, уравнение, алгоритм решения, анализ решений.*

SUMMARY

The solution of the tasks containing integral and fractional part of the number.

Aida Davidyan

Some questions related to the notion of integral and fractional parts of a real number are included in the mathematics program at school. The solution algorithm containing [x] and {x} is not studied deeply at school by pupils, but is often encountered at the olympics on mathematics. The aim of the article is to help pupils get acquainted with the algorithm solving of some tasks, which lead to the standard method of solution.

Keywords: *the integral part of the number, the fractional part of the number, the properties of [x], algorithm solutions, analiz of the solutions.*