УДК 517.9

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ABOUT OSCILLATION PROPERTIES OF ONE CLASS OF HOMOGENOUS LINEAR SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

©Саакян Г. Г.
канд. физ.–мат. наук
Арцахский государственный университет
г. Степанакерт, Армения, ter_saak_george@mail.ru
©Saakyan G.
Ph.D., Artsakh state University
Stepanakert, Armenia, ter_saak_george@mail.ru

Аннотация. В работе доказывается, что осцилляция решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений порядка $2n$ $(n \geq 2)$ зависит от начальных условий. Рассматриваются также условия осцилляции для одного класса таких систем.

Abstract. It is proved in the work, that the oscillation of the solutions of the system of linear differential equations by order $n \geq 2$ depends of initial values. We also consider the oscillation conditions for a class of such systems.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, осцилляция, не осцилляция.

Keywords: systems of differential equations, oscillation, non-oscillation.

Рассматриваются линейные однородные системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\vec{y}\,' = Ay, \tag{1}$$

где $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_{2n}(t) \end{pmatrix}$, A — постоянная матрица $2n$-ого порядка.

Определение 1. Нетривиальное решение системы (1) называется осциллирующим [1], если каждая из его компонент имеет последовательность нулей, стремящейся к бесконечности; в противном случае называется не осциллирующим.

Известно [1], что при $n=1$ из осцилляции одного из частных решений системы (1) следует осцилляция и всех других возможных решений. И в этой связи оправдано следующее определение.

Определение 2. Система (1) при $n=1$ называется осциллирующей, если хотя бы одно из ее решений является осциллирующим.

Цель настоящей работы показать, что при $n\geq 2$ осцилляция решений рассматриваемых систем зависит от начальных условий, а также рассмотреть осцилляционные свойства одного класса систем. Для обоснования зависимости приведем соответствующие примеры.

1. Предположим, что матрица A имеет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом система (1) примет вид:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = y_1, \end{cases} \qquad (2)$$

Решив ее одним из известных методов, можно найти, что решение такой системы будет иметь вид:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1e^{t} + C_2e^{-t} + C_3\cos(t+C_4), \\ y_2(t) &= C_1e^{t} - C_2e^{-t} - C_3\sin(t+C_4), \\ y_3(t) &= C_1e^{t} + C_2e^{-t} - C_3\cos(t+C_4), \\ y_4(t) &= C_1e^{t} - C_2e^{-t} + C_3\sin(t+C_4), \end{aligned} \qquad (3)$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4— произвольные постоянные. Покажем теперь, что осцилляция решений системы (2) зависит от начальных условий. Для этого рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = y_1, \end{cases}$$

$$y_1(0)=1,\; y_2(0)=1,\; y_3(0)=-1,\; y_4(0)=-1.$$

Определим значения постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4, исходя из начальных условий. Подставив в компоненты решения (3) $t=0$, получим систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 \cos C_4 = 1, \\ C_1 - C_2 - C_3 \sin C_4 = 1, \\ C_1 + C_2 - C_3 \cos C_4 = -1, \\ C_1 - C_2 + C_3 \sin C_4 = -1, \end{cases}$$

откуда нетрудно найти, что:

$$C_1 = C_2 = 0, \ \ C_3 = \sqrt{2}, \ C_4 = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи Коши будет иметь вид:

$$y_1(t) = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$y_2(t) = -\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$y_3(t) = -\sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$y_4(t) = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$

откуда будет следовать, что данное решение системы осциллирует. Ниже, на Рисунке 1, приводится графическая интерпретация полученного решения на отрезке $[0,5]$ (здесь и всюду в дальнейшем на приведенных рисунках $y0$ соответствует компоненте y_1, $y1 - y_2$, $y2 - y_3$, $y3 - y_4$), построенная в среде MathCad.

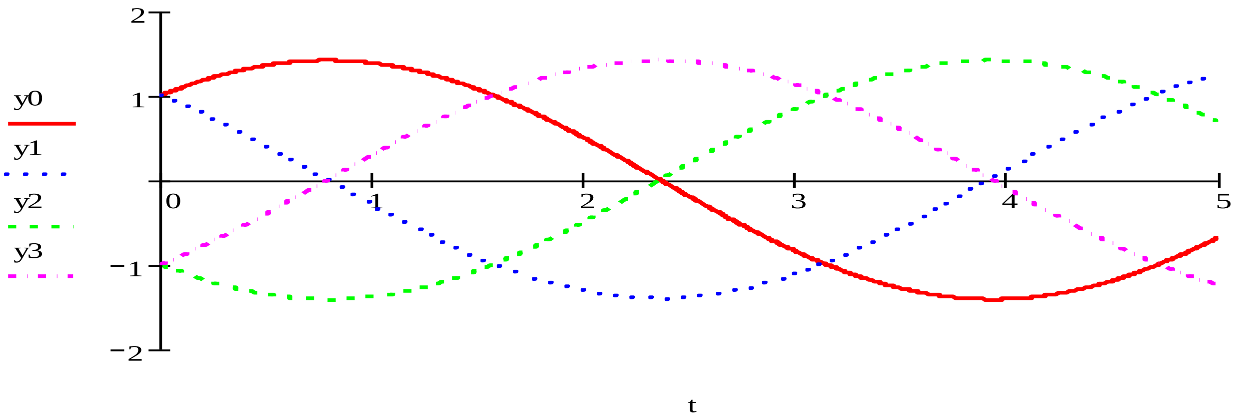

Рисунок 1.

Теперь найдем частное решение системы (2) при начальных условиях:

$$y_1(0) = 2, \ y_2(0) = 1, \ y_3(0) = 0, \ y_4(0) = -1.$$

В этом случае система для определения постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4 примет вид:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 \cos C_4 = 2, \\ C_1 - C_2 - C_3 \sin C_4 = 1, \\ C_1 + C_2 - C_3 \cos C_4 = 0, \\ C_1 - C_2 + C_3 \sin C_4 = -1, \end{cases}$$

откуда найдем, что:

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2},\ C_3 = 1,\ C_4 = \frac{\pi}{4}.$$

Соответствующее частное решение системы (2) будет равно

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) + \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$
$$y_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) - \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$
$$y_3(t) = \frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) - \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$
$$y_4(t) = \frac{1}{2}\left(e^t - e^{-t}\right) + \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$

Из структуры полученных компонент следует, что они не будут осциллировать ни на каком отрезке. Действительно, поскольку $e^t + e^{-t} \geq 2$, то равенство $\frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t}\right) + \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ невозможно ни при каком значении t. Ниже, на Рисунке 2, приводится графическая интерпретация полученного решения на отрезке $[0,5]$.

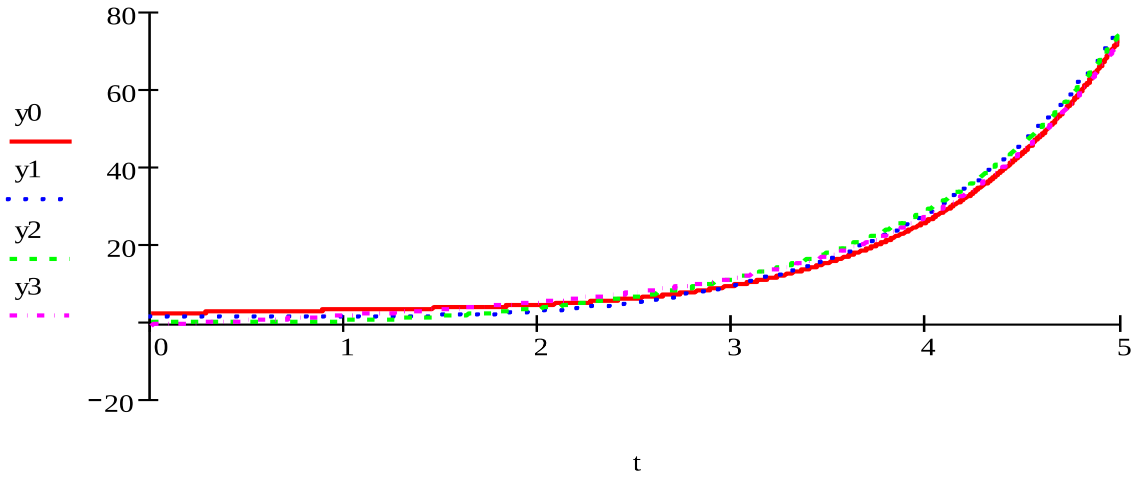

Рисунок 2.

2. Приведем теперь пример системы, каждое решение которой осциллирует, и, следовательно, не зависит от начальных условий. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = -y_3. \end{cases} \tag{4}$$

Нетрудно найти, что общее решение этой системы будет иметь вид

$$y_1(t) = C_1\cos(t + C_2),$$
$$y_2(t) = C_1\sin(t + C_2),$$
$$y_3(t) = C_3\cos(t + C_4),$$
$$y_4(t) = C_3\sin(t + C_4),$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4— произвольные постоянные, причем, независимо от начальных условий, каждое такое нетривиальное решение будет осциллировать. Ниже, на Рисунке 3, приводится графическая интерпретация одного частного решения системы (4) на отрезке $[0,5]$.

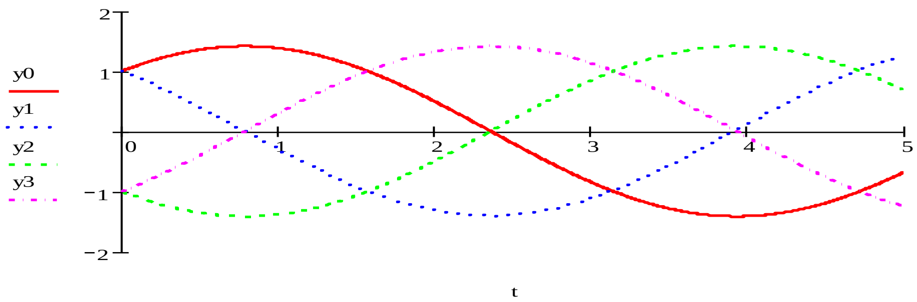

Рисунок 3.

3. Рассмотрим теперь систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_1, \\ y_2' = y_2, \\ y_3' = y_3, \\ y_4' = y_4. \end{cases} \tag{5}$$

Нетрудно найти, что решение этой системы будет иметь вид

$$y_1(t) = C_1 e^t,$$
$$y_2(t) = C_2 e^t,$$
$$y_3(t) = C_3 e^t,$$
$$y_4(t) = C_4 e^t,$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4— произвольные постоянные. Очевидно, что, независимо от начальных условий, каждое такое решение не будет осциллировать. И, следовательно, система (5) не осциллирующая. Ниже, на Рисунке 4, приводится графическая интерпретация одного частного решения системы (5) на отрезке $[0,5]$.

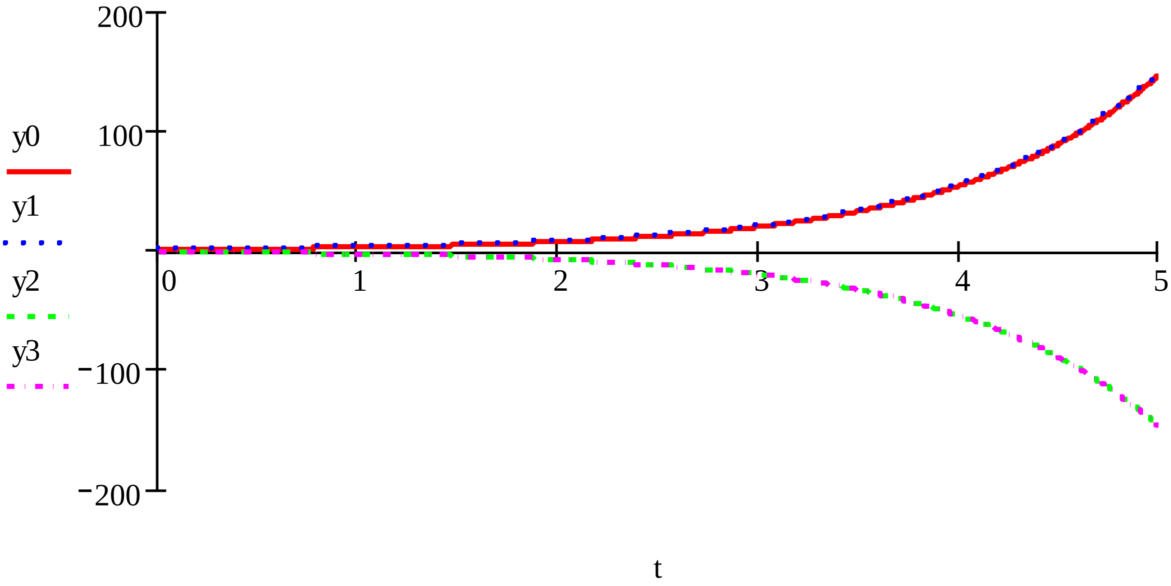

Рисунок 4.

Таким образом, мы приходим к выводу, что при $n \geq 2$ обоснованным является следующее определение.

Определение 3. Система (1) при $n \geq 2$ называется осциллирующей, если ее каждое решение является осциллирующим.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая теорема [3, стр. 120].

Теорема 1. Пусть в уравнении

$$y^{(n)} + q(t)y = 0 \qquad (6)$$

функция $q(t)$ *при* $t \geq a$ *положительна и непрерывна, и пусть*

$$\int_a^\infty q(t)dt$$

расходится. Тогда при четном n *каждое ненулевое решение уравнения* (6) *бесконечное число раз меняет знак. При нечетном* n *ненулевое решение или имеет бесконечное много нулей или стремится к нулю при* $t \to \infty$.

Рассмотрим теперь систему (1) в предположении, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы A имеется ровно один элемент, равный единице или минус единице. Например, таковыми являются матрицы, соответствующие системам (2), (4) и (5). Рассмотрим сначала случай, когда указанные элементы равны единице. Тогда, просуммировав строки таких систем, мы найдем, что:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} y_i ,$$

откуда будет следовать, что для таких систем

$$\sum_{i=1}^{n} y_i(t) = Ce^t ,$$

где C – произвольная постоянная. Дифференцируя одно из уравнений рассматриваемых систем последовательно $2n-1$ раз, и каждый раз, после дифференцирования, подставляя значение правой части из остальных уравнений, придем к уравнению:

$$y_i^{(2n)} - y_i = 0 \tag{7}$$

для некоторого $i = 1,2,...,2n$, характеристическое уравнение которого будет иметь вид:

$$\lambda^{2n} = 1,$$

откуда найдем:

$$\lambda_\kappa = \cos\frac{\pi k}{n} + i \cdot \sin\frac{\pi k}{n}, \quad 0 \le k \le 2n-1 .$$

Заметим, что при $k = 0$ и $k = n$ мы получим 1 и −1, являющимися действительными корнями характеристического уравнения, остальные же корни, как нам известно, можно попарно разделить на пары сопряженных комплексных чисел. В связи с этим действительное решение уравнения (7) можно записать в виде:

$$y_i(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{a_1t}\cos(b_1t + C_4) + ... + C_{2n-1}e^{a_{n-1}t}\cos(b_{n-1}t + C_{2n}) .$$

Далее, из системы, путем дифференцирования по t, поочередно определятся остальные неизвестные. Очевидно, что в результате таких действий компоненту $y_k(t)$ решения системы можно записать в следующем общем виде:

$$y_\kappa(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{k,i}\varphi_i(t, b_i, C_{k,i+1}), \quad k = 1,2,...,2n. \tag{8a}$$

где:

$$\varphi_i(t, b_i, C_{i+1}) = e^{a_it}\sin(b_it + C_{i+1}) \text{ или } \varphi_i(t, k_i, C_{i+1}) = e^{a_it}\cos(b_it + C_{i+1}) . \tag{8b}$$

Из соотношений (8a) и (8b) следует, что такие решения могут осциллировать лишь при некоторых определенных значениях постоянных, и, следовательно, подобные системы не могут быть осциллирующими согласно определению 2. В качестве примера рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = y_5, \\ y_5' = y_6, \\ y_6' = y_1. \end{cases} \tag{9}$$

Продифференцировав, например, первое из уравнений этой системы 5 раз, и каждый раз, поочередно подставляя значение правой части из остальных уравнений, придем к уравнению:

$$y_1^{(VI)} = y_1. \tag{10}$$

Характеристическое уравнение для (10) будет иметь вид:

$$\lambda^6 = 1,$$

откуда нетрудно найти, что:

$$\lambda_{1,2} = \pm 1,\ \lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,\ \ \lambda_{5,6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

и, следовательно, общее решение уравнения (9) можно записать в виде:

$$y_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_4\right) + C_5 e^{\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_6\right),$$

где C_i $(i = 1,2,...,6)$ — произвольные постоянные. Из уравнений (9), путем дифференцирования, последовательно найдем

$$y_2(t) = y_1'(t) = C_1 e \ \ - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_4 + \frac{\pi}{6}\right) - C_5 e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_6 - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$y_3(t) = y_2'(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_4 - \frac{\pi}{6}\right) - C_5 e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_6 + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$y_4(t) = y_3'(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_4\right) - C_5 e^{\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_6\right),$$

$$y_5(t) = y_4'(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_4 + \frac{\pi}{6}\right) + C_5 e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_6 - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$y_6(t) = y_5'(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - C_3 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_4 - \frac{\pi}{6}\right) + C_5 e^{\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + C_6 + \frac{\pi}{6}\right).$$

откуда будет следовать, что $\sum_{i=1}^{6} y_i(t) = Ce^t$, где $C = 6C_1$. Как видно из структуры полученных решений, компоненты решений в общем случае не будут осциллировать. А, значит, система (8) не осциллирующая.

Предположим теперь, что среди элементов матрицы имеются числа, равные (−1). Тогда нетрудно показать, что если четность таких элементов не совпадает с четностью n, то, можно проделать вышеописанные действия, в результате которых мы вновь придем к характеристическому уравнению (6). Следовательно, и в этом случае, исходя и вышеизложенных соображений, система не будет осциллирующей.

Картина существенно меняется в случае, когда четность числа элементов, равных (−1) совпадает с четностью n. Тогда, вновь, перейдя от системы (1) к уравнению (7), мы получим уравнение вида

$$y_i^{(2n)} + y_i = 0. \qquad (10a)$$

Если обозначить $y = y_i$, то уравнение запишется в виде

$$y^{(2n)} + y = 0. \qquad (10b)$$

Сравнив с уравнением (6), мы найдем, что в данном случае $q(t) = 1 > 0$ для любого t, и интеграл $\int_a^\infty q(t)dt = \int_a^\infty dt$ для любого a расходится. Согласно теореме 1, каждое нетривиальное решение уравнения (10a), а, следовательно, и (10b), будет иметь бесконечное число нулей. Заметим, что если непрерывная функция имеет бесконечное число нулей, то и ее производная будет иметь бесконечное число нулей. И, поскольку остальные компоненты решения системы определятся путем поочередного дифференцирования полученной до этого компоненты решения, то в результате получим, что все компоненты всякого нетривиального решения будут иметь бесконечное число нулей. И, следовательно, такая система будет осциллирующей. Наглядным примером может служить вышерассмотренная система (4). Обобщая вышеизложенное, приходим к выводу, что верна.

Теорема 2. Если в каждой строке и в каждом столбце матрицы A системы (1) имеется ровно один элемент, равный единице или минус единице, то если четность элементов, равных (−1), не совпадает с четностью n, то система (1) будет осциллирующей, в противном случае — не осциллирующей.

Список литературы:

1. Lomtatidze A., Partsvania N. Oscillation and nonoscillation criteria two–dimentional systems of first linear ordinary differential equations // Georgian Math. J. 1999. V. 6. №3. P. 285–298.
2. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2007.
3. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

References:

1. Lomtatidze A., Partsvania N. Oscillation and nonoscillation criteria two–dimentional systems of first linear ordinary differential equations, Georgian Math. J., 1999, v. 6, no. 3, pp. 285–298.
2. Trikomi F. Differentsialnye uravneniya. Moscow, Editorial URSS, 2007.
3. Kamke E. Spravochnik po differentsialnym uravneniyam. Moscow, Nauka, 1976, 576 c.

Работа поступила в редакцию 06.12.2016 г.

Принята к публикации 09.12.2016 г.