УДК 517.9

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ABOUT THE OCSILLATION PROPERTIES OF SOME TWO-DIMENTIONAL LINEAR SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

©Саакян Г. Г.
канд. физ.-мат. наук
Арцахский государственный университет
г. Степанакерт, Армения, ter_saak_george@mail.ru
©Sahakyan G.
Ph.D., Artsakh State University
Stepanakert, Armenia, ter_saak_george@mail.ru

Аннотация. В статье [1] автор приводит критерий, позволяющий при определенных предположениях находить количество нулей компонент решений двумерных линейных систем дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases}$$

на конечном интервале в предположении, что до $p, r \in C^2[a,b]$. Цель настоящей работы — используя указанный критерий — рассмотреть на полупрямой осцилляционные свойства систем (1), коэффициенты которых являются степенными или экспотенциальными функциями.

Abstract. In the article [1] the author under certain assumptions gives a criterion to find the number of zeros the component of solutions of two–dimensional linear systems of differential equations

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases}$$

on the finite interval. The aim of this work is using the specified criteria to consider oscillations properties of systems (1), whose coefficients are exponential or expotentially functions.

Ключевые слова: двумерная линейная однородная система дифференциальных уравнений, осцилляция.

Keywords: two–dimentional linear homogenouse system of differential equations, oscillation.

Рассматривается двумерная линейная однородная система

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases} \tag{1}$$

в предположении, что до $p, r \in C[a,b]$.

Определение 1. Нетривиальное решение $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (1) назовем осциллирующим на $[a,b]$, если каждая из его компонент обращается в нуль в некоторой точке $[a,b]$, т.е. $y_i(t_i)=0,\ t_i \in [a,b],\ i=1,2.$

В случае, когда система (1) рассматривается на всей числовой прямой, будем пользоваться следующим определением (см., например, [2], [3]).

Определение 2. Нетривиальное решение системы (1) называется осциллирующим (см., например, [2]), если каждая из его компонент имеет последовательность нулей, стремящейся к бесконечности; в противном случае называется неосциллирующим.

Определение 3. Система (1) называется осциллирующей, если она имеет хотя бы одно осциллирующее решение, в противном случае система (1) называется неосциллирующей.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая теорема (см. [4]).

Теорема 1. *Пусть в системе* (1) $p, r \in C^2[a,b]$,

$$P(t) = -\frac{p(t)}{r(t)},$$

1. $p'(t) \le 0,\ r'(t) \ge 0,$ $\quad (p'(t) \ge 0,\ r'(t) \le 0),$
2. $P'(t) \ge 0$ $\quad (P'(t) \le 0),$
3. $(\ln P(t))'' \ge 0,$

Тогда, если уравнения

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}d\tau = \pi k,\ k \in Z, \tag{2a}$$

и

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}d\tau = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \tag{2b}$$

имеют корни на отрезке $[a,b]$, *причем* $n_1 = n_2 + 1$, *где* n_1 *— число корней уравнения* (2a), *а* n_2 *– уравнения* (2b), *то число нулей первой (второй) компоненты всякого нетривиального решения системы* (1.1) *на* $[a,b]$ *совпадет с числом корней уравнения* (2a) ((2b)) *или будет отличаться на единицу.*

Из уравнений (2a) и (2b) следует, что $n_1 - 1 \le n_2 \le n_1$. Тогда из утверждения теоремы будет следовать, что если имеют место условия теоремы, то осцилляционные свойства системы (1) напрямую зависят от поведения корней уравнения (2a) — чем больше их количество на рассматриваемом отрезке, тем сильнее осцилляция системы.

Перейдем теперь к рассмотрению осцилляционных свойств системы

$$\begin{cases} y_1' = t^m y_2, \\ y_2' = -t^n y_1, \end{cases} \tag{3}$$

в предположении, что $t \ge 0$. Рассмотрим систему (3) сначала на конечном отрезке $[a,b] \subset [0,\infty)$.

1. Пусть $m,n \ge 0,\ m \le n$. Имеем

1) $p,r \in C^2[a,b],\ p(t) > 0,\ r(t) < 0,$

2) $p'(t) = mt^{m-1} \ge 0,\ -r'(t) = nt^{n-1} \ge 0$,

3) $P'(t) = \left(-\dfrac{p(t)}{r(t)}\right)' = \left(t^{m-n}\right)' = (m-n)t^{m-n-1} \le 0$,

4) $\left(\ln P(t)\right)'' = \left(\ln t^{m-n}\right)'' = -\dfrac{m-n}{t^2} \ge 0$.

Таким образом имеют место условия теоремы 1. И, следовательно, число нулей компонент решений системы (3) будет определяться числом корней уравнения (2a), которое при этом будет иметь вид

$$\int_a^t \tau^{\frac{m+n}{2}} d\tau = \left.\frac{\tau^{\frac{m+n}{2}+1}}{\frac{m+n}{2}+1}\right|_a^t = \frac{t^{\frac{m+n}{2}+1} - a^{\frac{m+n}{2}+1}}{\frac{m+n}{2}+1} = \pi k,\ k \in Z.$$

Откуда найдем,

$$t^{\frac{m+n+2}{2}} = \left(\frac{m+n+2}{2}\right)\pi k + a^{\frac{m+n+2}{2}},\ k \in Z.$$

Учитывая принадлежность корней отрезку $[a,b]$, и, обозначив $l = \dfrac{m+n+2}{2}$, будем иметь

$$a^l \le l\pi k + a^l \le b^l,\ k \in Z,$$

или

$$0 \le l\pi k \le b^l - a^l,\ k \in Z. \ (4)$$

Поскольку $l > 0$, то из неравенства (4), во-первых, будет следовать, что уравнения (2a) и (2b) будут иметь более одного корня, если

$$\frac{b^l - a^l}{l} \ge \frac{3\pi}{2}.$$

Во-вторых, можно сделать вывод, что при малых значениях a и b осцилляция будет слабой (маленькая плотность нулей), поскольку будет малой и разность $b^l - a^l$, и вследствии чего число значений k, удовлетворяющих неравенству (4), будет мало. С увеличением значений a и b разность $b^l - a^l$, очевидно, будет расти, а значит, осцилляция будет усиливаться. И, следовательно, согласно определению 3, система (3) будет осциллирующей на полупрямой $t \geq a$. На Рисунке 1 приводится график частного решения системы

$$\begin{cases} y_1' = t^4 y_2, \\ y_2' = -t^3 y_1, \end{cases} \tag{5}$$

на отрезке $[0,5]$ при начальных условиях $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1$ (здесь и всюду в дальнейшем на рисунках $y0$ соответствует компоненте y_1, а $y1$ соответствует компоненте y_2), построенный в среде Mathcad. Здесь $m = 4,\ n = 3$.

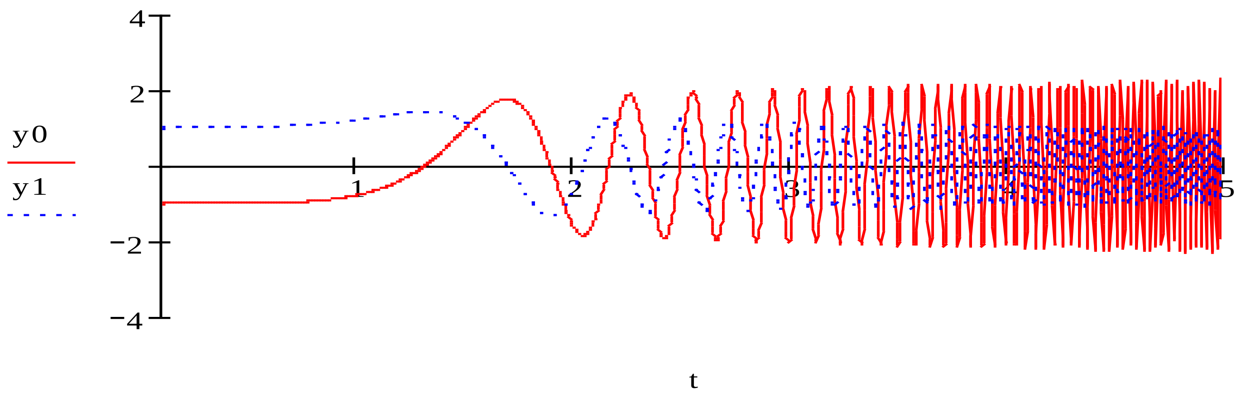

Рисунок 1. График частного решения системы (3) при $m = 4,\ n = 3$

Из Рисунка 1 видно, что с увеличением значений a и b плотность нулей растет — осцилляция усиливается.

2. Рассмотрим теперь систему (3) в предположении, что $m \leq n \leq 0, m + n < -2$. В этом случае мы будем иметь $l < 0$, и из неравенства (4) найдем, что

$$\frac{b^l - a^l}{\pi l} \leq k \leq 0,\ \ k \in Z,$$

или

$$\frac{b^{|l|} - a^{|l|}}{\pi |l| (ab)^{|l|}} \leq k \leq 0,\ \ k \in Z. \tag{6}$$

Отсюда будет следовать, что чем меньше значения a и b, тем большее количество значений k будет удовлетворять этому неравенству, причем, с приближением a и b к нулю, их число будет расти и стремиться к бесконечности. Таким образом мы получим, что при малых a и b осцилляция будет сильнее, чем при больших. С другой стороны, если зафиксировать a, а b взять достаточно большим, то неравенству (6) в этом случае не будет удовлетворять ни одно значение k. Отсюда следует, что система (3) не будет осциллирующей на полупрямой $t \ge a$. На Рисунке 2 приводятся графики частного решения системы

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{t^5} y_2, \\ y_2' = -\dfrac{1}{t^4} y_1, \end{cases}$$

соответственно на отрезках $[0{,}1;5]$ и $[100{,}150]$ при начальных условиях $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1$, наглядно демонстрирующие вышеприведенные рассуждения. В данном случае $m = -5,\ n = -4$.

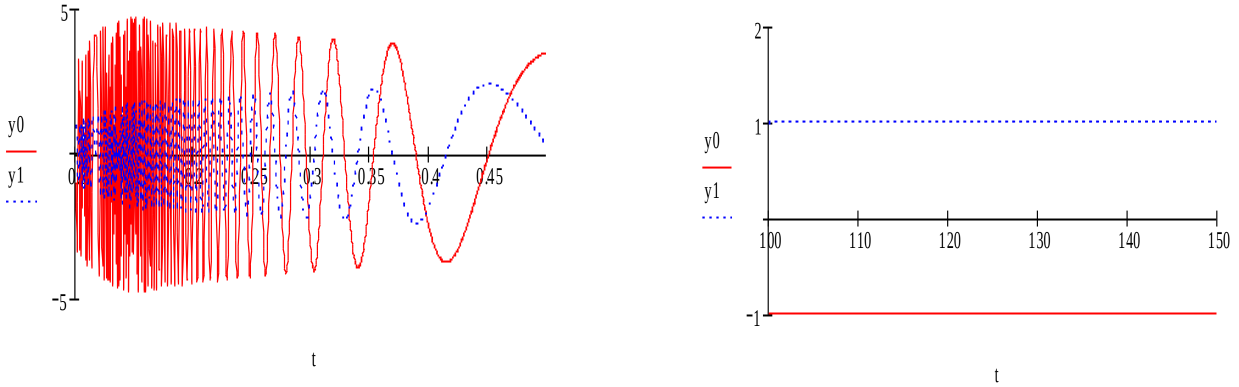

Рисунок 2. Графики частного решения системы (3) при $m = -5,\ n = -4$

3. Рассмотрим теперь случай $m \le n \le 0, -2 < m + n < 0$. При этом будем иметь $l > 0$, и, для определения числа корней вновь можем воспользоваться неравенством (4), откуда будет следовать, что при малых, близких к нулю значений a и b, осцилляция будет проявляться относительно сильнее, чем при больших a и b, причем при любом достаточно большем b найдутся значения k, удовлетворяющие неравенству (4). Таким образом приходим к выводу, что в рассматриваемом случае система (3) будет осцилллирующей.

На Рисунке 3 приводятся графики частного решения системы

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{\sqrt{t}} y_2, \\ y_2' = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{t}} y_1, \end{cases}$$

на отрезках $[0{,}1;50]$ и $[50;100]$ при начальных условиях $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1$, наглядно демонстрирующие вышеприведенные рассуждения. В данном случае $m = -1/2,\ n = -1/4$.

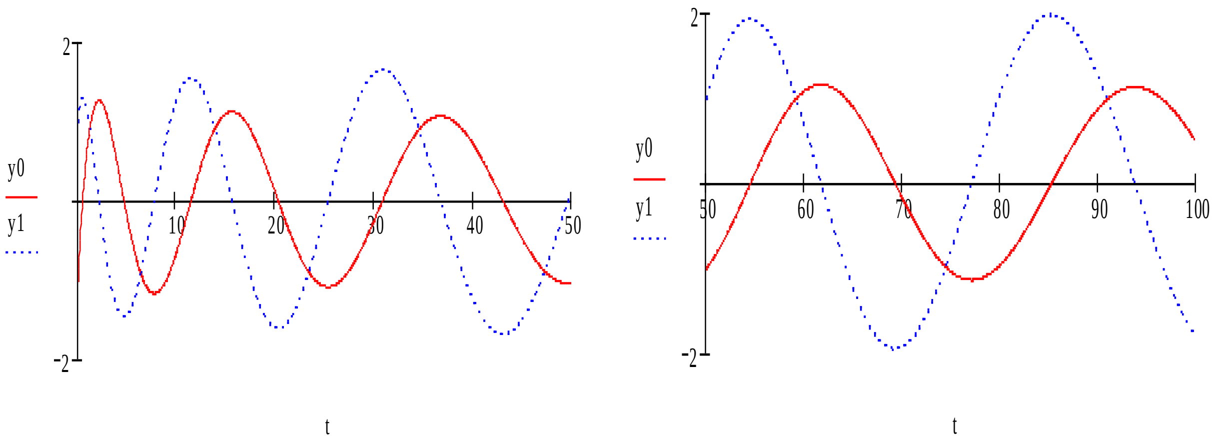

Рисунок 3. Графики частного решения системы (3) при $m=-1/2,\ n=-1/4$

4. Рассмотрим теперь систему (3) в предположении, что $m \le n \le 0, m+n=-2$. Уравнение (2а) при этом примет вид

$$\int_a^t \tau^{\frac{m+n}{2}}\, d\tau = \int_a^t \frac{d\tau}{\tau} = \ln \tau\Big|_a^t = \ln t - \ln a = \pi k,\ k \in Z,$$

откуда, учитывая принадлежность корней отрезку $[a,b]$, найдем

$$\ln a \le \ln a + \pi k \le \ln b, \quad k \in Z\ ,$$

или

$$0 \le \pi k \le \ln\frac{b}{a}, \quad k \in Z\,. \qquad (7)$$

Из этого соотношения следует, что осцилляция на отрезке $[a,b]$ возможна лишь при условии, что $\ln\frac{b}{a} \ge \pi$ или $\frac{b}{a} \ge e^{\pi}$. В частности, если зафиксировать значение a, а b устремить в бесконечность, то найдется бесконечное число значений значений k, удовлетворяющих неравенству (7). Откуда будет следовать, что решения, а значит, и системы такого вида будут осциллировать на всей полупрямой $t > 0$. На Рисунке 4 приводится график частного решения системы

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{t\sqrt{t}}\, y_2, \\ y_2' = -\dfrac{1}{\sqrt{t}}\, y_1\ , \end{cases}$$

на отрезке $[20,800]$ при начальных условиях $y_1(0)=1\ y_2(0)=-1$ ($m=-3/2,\ n=-1/2$)

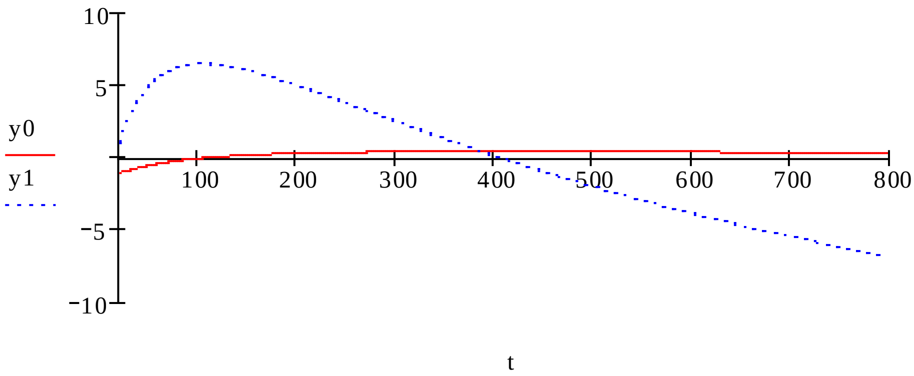

Рисунок 4. График частного решения системы (3) при $m = -3/2,\ n = -1/2$

Обобщая вышеизложенное, приходим к выводу, что имеет место следующая

Теорема 2. *Если в системе*

$$\begin{cases} y_1' = t^m y_2, \\ y_2' = -t^n y_1, \end{cases}$$

$m \le n$ и выполняется одно из условий: $m \ge 0,\ n \ge 0$ или $m \le 0, n \le 0$ и $m + n \ge -2$, то система осциллирует на всей полупрямой $t > 0$. В случае $m < 0, n < 0$ и $m + n < -2$ система неосциллирует.

Перейдем теперь к рассмотрению осцилляционных свойств систем

$$\begin{cases} y_1' = e^{mt} y_2, \\ y_2' = -e^{nt} y_1. \end{cases} \tag{8}$$

Как и выше, рассмотрим систему (8) сначала на конечном отрезке $[a,b] \subset (0,\infty)$.

1. Предположим, что $m = -n$. В этом случае, уравнение (2а) примет вид

$$\int_a^t d\tau = t - a = \pi k,\ \ k \in Z.$$

Число значений k, удовлетворяющих этому соотношению, определится из условия

$$0 \le \pi k \le b - a,\ \ k \in Z.$$

Отсюда будет следовать, что на любом отрезке длиной большей или равной $\frac{3}{2}\pi$, решение системы будет осциллировать. А, значит, любое нетривиальное решение системы будет осциллировать на всей полупрямой, и, следовательно, система (8) в рассматриваемом случае является осцилллирующей на полупрямой $t \ge 0$. На Рисунке 5 приводится график частного решения системы

$$\begin{cases} y_1' = e^{0.1t} y_2, \\ y_2' = -e^{-0.1t} y_1, \end{cases}$$

на отрезке $[0,20]$ при начальных условиях $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1$.

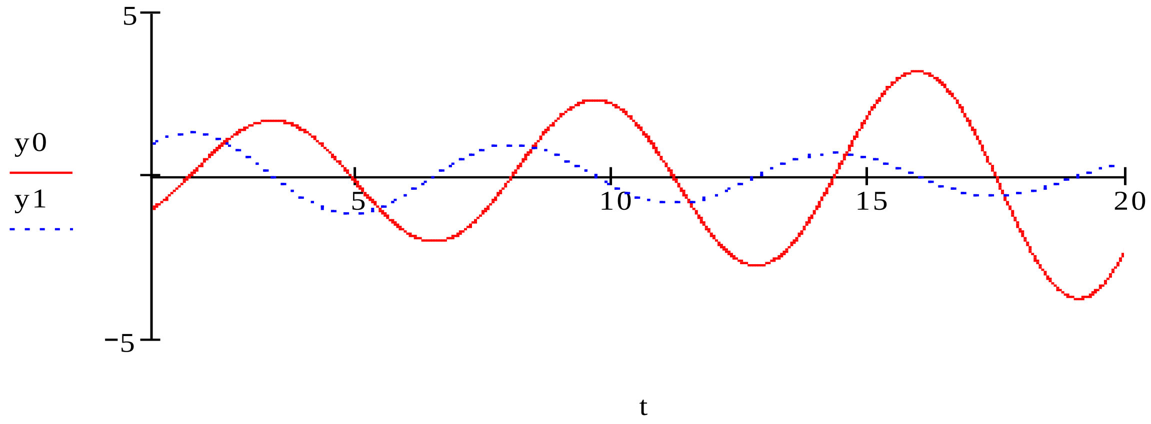

Рисунок 5. График частного решения системы (8) при $m = 0.1,\ n = -0.1$

2. Пусть $m \ge 0,\ \ n \ge 0$. Имеем

5) $p, r \in C^2[a,b],\ \ p(t) > 0,\ r(t) < 0,$

6) $p'(t) = me^{mt} \ge 0,\ \ -r'(t) = ne^{nt} \ge 0,$

7) $P'(t) = \left(-\dfrac{p(t)}{r(t)}\right)' = \left(e^{(m-n)t}\right)' = (m-n)e^{(m-n)t},$

8) $\left(\ln P(t)\right)'' = \left(\ln\ e^{(m-n)t}\right)'' = 0.$

Таким образом имеют место условия теоремы 1. И, следовательно, число нулей компонент решений системы (1) будет определяться числом корней уравнения (2а), которое при этом будет иметь вид

$$\int_a^t e^{\frac{m+n}{2}\tau} d\tau = \frac{2}{m+n} e^{\frac{m+n}{2}\tau}\Bigg|_a^t = \frac{2}{m+n}\left(e^{\frac{m+n}{2}t} - e^{\frac{m+n}{2}a}\right) = \pi k,\ k \in Z.$$

Откуда найдем

$$e^{\frac{m+n}{2}t} = \left(\frac{m+n}{2}\right)\pi k + e^{\frac{m+n}{2}a},\ k \in Z.$$

Учитывая принадлежность корней отрезку $[a,b]$, и, обозначив $l = \dfrac{m+n}{2}$, будем иметь

$$e^{al} \le l\pi k + e^{lt} \le e^{bl},\ \ k \in Z,$$

или

$$0 \le l\pi k \le e^{bl} - e^{al}, \; k \in Z. \tag{9}$$

Из соотношения (9), во-первых, следует, что уравнения (2a) и (2b) будут иметь корни, если

$$\frac{e^{bl} - e^{al}}{l} \ge \frac{3}{2}\pi .$$

Во-вторых, можно сделать вывод, что при малых значениях a и b осцилляция будет слабой (маленькая плотность нулей), поскольку будет малой и разность $e^{bl} - e^{al}$, и вследствии чего число значений k, удовлетворяющих неравенству (9), будет мало. С увеличением значений a и b разность $e^{bl} - e^{al}$, очевидно, будет расти, а, значит, осцилляция будет усиливаться. И, следовательно, согласно определению 3, система (1) будет осциллирующей на всей полупрямой $t > 0$. На Рисунке 6 приводится график частного решения системы

$$\begin{cases} y_1' = e^{t} y_2, \\ y_2' = -e^{2t} y_1, \end{cases}$$

на отрезке $[0,3]$ при начальных условиях $y_1(0) = -1,\; y_2(0) = 1$.

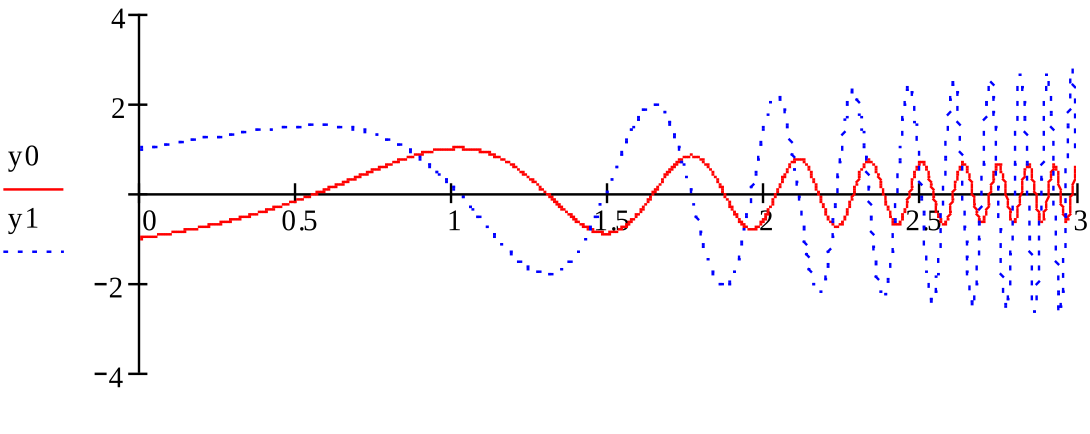

Рисунок 6. График частного решения системы (8) при $m = 1,\; n = 2$

Из Рисунка 6 видно, что с увеличением значений a и b плотность нулей растет — осцилляция усиливается.

3. Рассмотрим теперь систему (8) в предположении, что $m < 0,\; n < 0$. Нетрудно проверить, что и в этом случае имеют место условия теоремы 1. И, поскольку $l < 0$, то из соотношений (4) найдем, что

$$\frac{e^{bl} - e^{al}}{\pi l} \le k \le 0, \; k \in Z.$$

Из этого неравенства следует, что такие значения k найдутся, если l будет достаточно малым, причем при достаточно больших a и b таких значений не будет (затухание осцилляции). Отсюда следует, что система (8) не будет осциллирующей на всей полупрямой $t>0$. На Рисунке 7 приводятся графики частных решений систем

$$\begin{cases} y_1' = e^{-0.1t} y_2, \\ y_2' = -e^{-0.11t} y_1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_1' = e^{-t} y_2, \\ y_2' = -e^{-2t} y_1, \end{cases}$$

соответственно на отрезках $[0,10]$ и $[10,120]$ при начальных условиях $y_1(0)=-1,\ y_2(0)=1$, наглядно демонстрирующие вышеприведенные рассуждения. В первом случае $m=-0.1,\ n=-0.11$, а во втором — $m=-1,\ n=-2$.

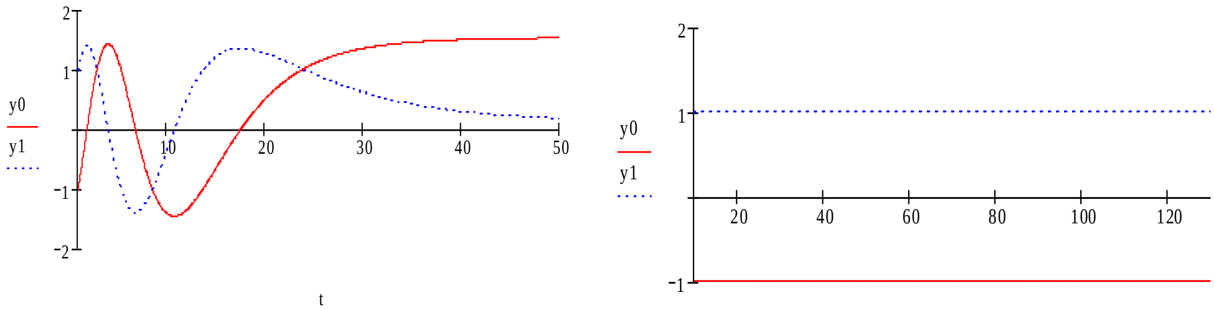

Рисунок 7. Графики частного решения системы (8) при $m=-1,\ n=-2$

Обобщая вышеизложенное, приходим к выводу, что имеет место следующая

Теорема 3. *Если в системе*

$$\begin{cases} y_1' = e^{mt} y_2, \\ y_2' = -e^{nt} y_1, \end{cases}$$

$m \ge 0,\ n \ge 0$, *то система осциллирует на всей полупрямой* $t \ge 0$. *В случае* $m<0,\ n<0$ *система неосциллирует.*

Список литературы:

1. Саакян Г. Г. О некоторых свойствах решений канонической системы Дирака // Ученые записки ЕрГУ. 2007. №2. С. 3-11.

2. Lomtatidze A., Partsvania N. Oscillation and nonoscillation criteria two-dimentional systems of first linear ordinary differential equations // Georgian Math. J. 1999. V. 6. №3. P. 285-298.

3. Polak L. Oscillation and nonoscillation criteria for two-dimentional systems of linear ordinary diuffrential equations // Georgian Math. J. 2004. V. 11. №1. P. 137-154.

4. Саакян Г. Г. О некоторых теоремах сравнения для двумерных линейных систем дифференциальных уравнений и их приложениях // Бюллетень науки и практики 2017. №3.

С. 14-27. Режим доступа: http://www.bulletennauki.com/sahakyan (дата обращения 15.09.2017). DOI: 10.5281/zenodo.399058.

References:

1. Sahakyan, G. G. (2007). O nekotorykh svoistvakh reshenii kanonicheskoi sistemy Diraka. *Uchenye Zapiski ESU*, (2), 3-11

2. Lomtatidze, A., & Partsvania, N. (1999). Oscillation and nonoscillation criteria two-dimentional systems of first linear ordinary differential equations. *Georgian Math. J.*, 6, (3), 285-298

3. Polak, L. (2004). Oscillation and nonoscillation criteria for two-dimentional systems of linear ordinary differential equations. *Georgian Math. J.*, 11, (1), 137-154

4. Sahakyan, G. (2017). About some comparison theorems for two-dimentional linear systems of differential equations and their applications. *Bulletin of Science and Practice,* (3), 14-27. doi:10.5281/zenodo.399058

Работа поступила
в редакцию 19.09.2017 г.

Принята к публикации
23.09.2017 г.

Ссылка для цитирования:

Саакян Г. Г. Об осцилляционных свойствах некоторых двумерных линейных систем дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2017. №10 (23). С. 10-20. Режим доступа: http://www.bulletennauki.com/sahakyan-g (дата обращения 15.10.2017).

Cite as (APA):

Sahakyan, G. (2017). About the ocsillation properties of some two-dimentional linear system of differential equations. *Bulletin of Science and Practice*, (10), 10-20