Саакян Г.Г.

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Исследование различных свойств решений двумерных однородных линейных систем дифференциальных уравнений до сих пор остается в поле зрения многих математиков. Особый ннтерес вызывают у исследователей поведение нулей компонент решений системы и связанные с ним вопросы осцилляции и неосцилляции системы ([10],[11],[14]-[28]).

В книге построена качественная теория для двумерных систем линейных однородных дифференциальных уравнений, являющаяся аналогом теории Штурма для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Книга состоит из четырех глав. В первой главе приводятся необходимые сведения из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, а также рассматриваются различные преобразования двумерных систем к каноническим видам, к равносильным уравнениям. Исследуются поведение и свойства нулей компонент решений систем. Во второй главе доказываются различные теоремы сравнения сначала для канонических, а затем и для общего вида рассматриваемых систем. С применением теорем сравнения определяется поведение нулей компонент решений систем при изменении ее коэффициентов, приводится оценка их количества на конечных интервалах. В третьей главе излагаются теоремы и некоторые достаточные критерии осцилляции и неосцилляции систем в случае конечного интервала. В четвертой главе, в качестве приложений теорем сравнений, доказываются теоремы осцилляции для краевых задач с одномерными системами Дирака 1-ого и 2-ого типов, а также рассматриваются осцилляционные свойства систем с степенными и экспотенциальными коэффицентами. В большинстве параграфов приводятся примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Предлагаемая книга доступна студентам, изучающим обыкновенные дифференциальные уравнения, и будет полезна преподавателям математики, а также специалистам, исследующим осцилляционные свойства двумерных систем линейных дифференциальных уравнений.

ГЛАВА 1

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ

1.1. Предварительные сведения и утверждения

Рассматривается следующая двумерная линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2, \\ y_2' = p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Предполагается, что коэффициенты $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1,2)$ являются действительными функциями, определенными и непрерывными на отрезке $[a,b]$.

Приведем сначала некоторые, необходимые для дальнейшего изложения, определения ([4],[9], [12],[13]).

Определение 1.1.1. Пара функций $y_1(t), y_2(t)$, определенная на интервале $a < t < b$, называется решением системы уравнений (1.1.1), если она, будучи подставленной в обе части этих уравнений, обращает их в тождество на $a < t < b$.

Функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ при этом будем называть соответственно *первой и второй компонентами решения* системы уравнений (1.1.1).

Если решение системы уравнений (1.1.1) зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2

$$y_1 = y_1(t, C_1, C_2), \quad y_2 = y_2(t, C_1, C_2) \tag{1.1.2}$$

так, что из (1.1.2) можно получить любое решение системы (1.1.1), то система функций (1.1.2) называется общим решением системы (1.1.1).

Определение 1.1.2. Нетривиальное решение $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (1.1.1) назовем осциллирующим на $[a,b]$, если каждая из его компонент обращается в нуль в некоторой точке $[a,b]$, т.е. $y_i(t_i) = 0,\ t_i \in [a,b],\ i = 1,2.$

Заметим, что систему (1.1.1) можно записать и в виде следующего векторного уравнения

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = P(t)\vec{y} \tag{1.1.3a}$$

где

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}. \tag{1.1.3b}$$

Определение 1.1.3. Решения системы (1.1.1) $\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \end{pmatrix}$ и $\vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} y_{21}(t) \\ y_{222}(t) \end{pmatrix}$ называются *линейно-незисимыми*, если из соотношения

$$C_1\vec{y}_1(t) + C_2\vec{y}_2(t) \equiv 0$$

на отрезке $[a,b]$ следует, что постоянные C_1 и C_2 равны нулю.

Определение 1.1.4. Система из двух линейно-независимых решений системы (1.1.1) называется *базисом* или *фундаментальным множеством решений системы* (1.1.1).

Если решения $\vec{y}_1(t)=\begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \end{pmatrix}$ и $\vec{y}_2(t)=\begin{pmatrix} y_{21}(t) \\ y_{222}(t) \end{pmatrix}$ являются линейно-независимыми решениями системы (1.1.1) на отрезке $[a,b]$, то матрица

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix} \qquad (1.1.4)$$

называется *фундаментальной матрицей* системы (1.1.1). Если при этом $\Phi(t_0)=E$, где E – единичная матрица 2-ого порядка, то фундаментальная матрица называется нормированной в точке $t=t_0$. Очевидно, что матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\Phi'(t)=P(t)\Phi(t)\,. \qquad (1.1.5)$$

Под *матричным дифференциальным уравнением, соответствующим системе* (1.1.1) на $[a,b]$ подразумевается задача отыскания матрицы $\Phi(t)$ порядка 2, столбцы которой являются решениями системы (1.1.1) на $[a,b]$. Эта задача обозначается так:

$$X'=P(t)X \quad (t\in[a,b])\,. \qquad (1.1.6)$$

Матрица $\Phi(t)$ называется решением задачи (1.1.6) на $[a,b]$, если $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1.5). Известно, что *для того, чтобы решение – матрица уравнения* (1.1.6) *была бы фундаментальной матрицей, необходимо и достаточно, чтобы* $\det\Phi(t)\neq 0$ *хотя бы для одного значения* $t\in[a,b]$.

Определение 1.1.5. Если $\vec{y}_1(t)=\begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \end{pmatrix}$ и $\vec{y}_2(t)=\begin{pmatrix} y_{21}(t) \\ y_{222}(t) \end{pmatrix}$ являются решениями системы (1.1.1) на отрезке $[a,b]$, то определитель

$$W(t)=\det\Phi(t)=\begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) \end{vmatrix} \qquad (1.1.7)$$

называется *вронскианом* этой системы решений.

Известно, что вронскиан системы решений отличен от нуля для любого $t\in[a,b]$ тогда и только тогда, когда эти решения линейно-независимы (матрица $\Phi(t)$ фундаментальная). Относительно вронскиана имеет место формула Лиувилля

$$W(t)=W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} sp\,P(\tau)d\tau} \qquad (1.1.8)$$

где t_0 – произвольная точка из отрезка $[a,b]$, $sp\;P(t)=p_{11}(t)+p_{22}(t)$ – след матрицы $P(t)$.

Далее, известно, что если система решений $\vec{y}_1(t)=\begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \end{pmatrix}$ и $\vec{y}_2(t)=\begin{pmatrix} y_{21}(t) \\ y_{222}(t) \end{pmatrix}$ является фундаментальной на отрезке $[a,b]$, то общее решение системы (1.1.1) можно представить в виде

$$\vec{y}(t,C_1,C_2)=C_1\vec{y}_1(t)+C_2\vec{y}_2(t) \tag{1.1.9}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Последнее означает, что множество решений системы (1.1.1) является двумерным векторным пространством над полем комплексных чисел.

Определение 1.1.6. Задачей Коши для системы (1.1.1) называется следующая задача

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2, \\ y_2' = p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2, \end{cases} \tag{1.1.10a}$$

$$y_1(t_0)=y_{10},\ y_2(t_0)=y_{20}, \tag{1.1.10b}$$

где y_{10}, y_{20} – произвольные числа, t_0 – произвольная точка из отрезка $[a,b]$. Относительно задачи Коши (1.1.10a), (1.1.10b) известно (теорема о существовании и единственности решения), что какова бы ни была точка t_0 из отрезка $[a,b]$ и какова бы ни была система начальных значений y_{10} и y_{20}, существует одна и только одна пара функций $\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, удовлетворяющая системе (1.1.10a) и принимающая в точке t_0 значения y_{10} и y_{20} соответственно; эти функции, кроме того, непрерывно зависят от t_0 на отрезке $[a,b]$.

Определение 1.1.7. Экспонентой квадратной матрицы P называется матрица

$$e^P = E + P + \frac{P^2}{2!} + \ldots + \frac{P^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{P^k}{k!}, \tag{1.1.11}$$

где $P^0 = E$.

Ряд, определяющий e^P, сходится для всех P, причем матрица e^P является невырожденной матрицей. Если матрицы A и B перестановочны, т.е. $AB = BA$, то имеет место соотношение

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B. \tag{1.1.12}$$

Известно, что если в уравнении (1.1.3a) матрица $P(t)$ – постоянна $(P(t)\equiv P)$, то фундаментальную матрицу системы (1.1.3a), нормированную в точке $t=0$, можно представить в виде

$$Y(t)=e^{Pt}. \tag{1.1.13}$$

Если рассматривается задача Коши

$$\frac{d\vec{y}}{dt}=P(t)\vec{y},$$

$$\vec{y}(t_0)=\vec{C}_0,$$

где $\vec{C}_0$ – произвольный двумерный вектор, и $Y(t)$ – фундаментальная матрица системы (1.1.3a), нормированная в точке $t=0$, то ее решение можно представить в виде

$$\vec{y}(t)=Y(t)\vec{C}_0. \tag{1.1.14}$$

1.2. О некоторых свойствах и преобразованиях системы

Рассматривается следующая двумерная линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2, \\ y_2' = p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

где $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1,2)$ – действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$. Имеет место

Лемма 1.2.1. *Компоненты всякого нетривиального решения системы* (1.2.1) *не могут иметь нуль в одной и той же точке.*

Доказательство. Пусть $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (1.2.1). Предположим, что существует точка $t_0 \in [a,b]$ так, что

$$y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0. \tag{1.2.2}$$

Тогда, если рассмотреть условие (1.2.2) вместе с системой (1.2.1), то мы получим задачу Коши. Очевидно, что $v(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ является решением задачи (1.2.1), (1.2.2). Согласно теореме о единственности решения задачи Коши для линейных систем мы найдем, что $y_1(t) \equiv y_2(t) \equiv 0$, что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 1.2.2. *Компоненты всякого нетривиального решения системы* (1.2.1) *при* $p_{12}(t) \cdot p_{21}(t) \neq 0$, *могут иметь на отрезке* $[a,b]$ *не более конечного числа нулей, причем все нули простые.*

Доказательство. Пусть $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (1.2.1). Предположим, что точка t_0 является кратным нулем для компоненты $y_1(t)$ и, следовательно, $y_1(t_0) = y_1'(t_0) = 0$. Тогда, так как $p(t_0) \neq 0$, то из первого уравнения системы (1.2.1) найдем, что $y_2(t_0) = 0$, что невозможно в силу леммы 1.2.1. Таким образом, нули компоненты $y_1(t)$ простые.

Предположим теперь, что $y_1(t)$ имеет на отрезке $[a,b]$ бесконечно много нулей – $t_1, t_2, ..., t_n, ...$. Тогда, по лемме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности $\{t_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \to t_0$, $t_0 \in [a,b]$. Не ограничивая общность рассуждений, можно считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$. Так как $y_1(t_n) = 0$, то в силу непрерывности $y_1(t)$ получим, что $y_1(t_0) = 0$. По теореме Ролля на каждом интервале (t_n, t_{n+1}) найдется точка $t_n^\bullet$ такая, что $y_1'(t_n^\bullet) = 0$. Далее, так как $t_n \to t_0$, то и $t_n^\bullet \to t_0$, и тогда из непрерывности $y_1'(t)$ будет следовать, что $y_1'(t_0) = 0$, что невозможно, так как всякий нуль $y_1(t)$ согласно вышепроведенным рассуждениям, простой.

Аналогично проводится доказательство и для нулей компоненты $y_2(t)$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь некоторые, полезные преобразования системы (1.2.1), необходимые для дальнейших рассуждений. Запишем систему (1.2.1) в виде векторного уравнения

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = P(t)\vec{y}\,, \tag{1.2.3a}$$

где

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix},\ \ \vec{y} = \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}. \tag{1.2.3b}$$

Обозначим через $H = H(t)$ гладкое ортогональное преобразование двумерного пространства. Известно ([1], [2]), что всякое ортогональное преобразование в двумерном пространстве имеет в фиксированном базисе матрицу вида

$$H = H(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{pmatrix}. \tag{1.2.4}$$

Положим

$$\vec{y}(t) = H(t)\vec{z}(t)\,. \tag{1.2.5}$$

Так как матрица $H(t)$ – невырожденная $(\det H(t) \neq 0)$, то существует $H^{-1}(t)$ – обратная к $H(t)$ матрица, причем нетрудно найти, что

$$H^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & \sin\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Подставив в уравнение (1.2.3a) вместо $\vec{y}$ его значение из (1.2.5), а затем умножив полученное уравнение слева на H^{-1}, получим

$$H^{-1}\frac{d}{dt}\left(H\vec{z}\,'\right) = H^{-1}PH\vec{z}$$

или

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \left(-H^{-1}\frac{d}{dt}H + H^{-1}PH\right)\vec{z}\,. \tag{1.2.6}$$

Обозначим

$$Q(t) = -H^{-1}(t)\frac{d}{dt}H(t) + H^{-1}(t)P(t)H(t).$$

Тогда уравнение (1.2.6) запишется в виде

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = Q(t)\vec{z}.$$

Далее, имеем

$$H^{-1}(t)\frac{d}{dt}H(t) = \varphi'(t)\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & \sin\varphi(t) \\ -\sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) & -\cos\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\varphi'(t) \\ \varphi'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

$$H^{-1}PH =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}\cos^2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi + \frac{1}{2}(p_{12}+p_{21})\sin 2\varphi & p_{12}\cos^2\varphi - p_{21}\sin^2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{21}\cos^2\varphi - p_{12}\sin^2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi - \frac{1}{2}(p_{12}+p_{21})\sin 2\varphi \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $Q(t)$ примет вид

$$Q(t)=\begin{pmatrix} q_{11}(t) & q_{12}(t) \\ q_{21}(t) & q_{22}(t) \end{pmatrix},$$

компоненты которой определятся из соотношений

$$q_{11}(t)=p_{11}(t)\cos^2\varphi(t)+p_{22}(t)\sin^2\varphi(t)+\tfrac{1}{2}(p_{12}(t)+p_{21}(t))\sin 2\varphi(t),$$

$$q_{12}(t)=\varphi'(t)+p_{12}(t)\cos^2\varphi(t)-p_{21}(t)\sin^2\varphi(t)+\tfrac{1}{2}(p_{22}(t)-p_{11}(t))\sin 2\varphi(t),$$

$$q_{21}(t)=-\varphi'(t)+p_{21}(t)\cos^2\varphi(t)-p_{12}(t)\sin^2\varphi(t)+\tfrac{1}{2}(p_{22}(t)-p_{11}(t))\sin 2\varphi(t),$$

$$q_{22}(t)=p_{11}(t)\sin^2\varphi(t)+p_{22}(t)\cos^2\varphi(t)-\tfrac{1}{2}(p_{12}(t)+p_{21}(t))\sin 2\varphi(t).$$

Покажем, что если имеет место условие $p_{12}(t)\neq -p_{21}(t)$, то можно выбрать $\varphi(t)$ так, чтобы для матрицы $Q(t)$ имело бы место условие: $q_{11}(t)\equiv q_{22}(t)$. Действительно, из (1.2.7) следует, что выполнение этого условия будет равносильным выполнению тождества

$$p_{11}(t)\cos^2\varphi(t)+p_{22}(t)\sin^2\varphi(t)+\tfrac{1}{2}(p_{12}(t)+p_{21}(t))\sin 2\varphi(t)\equiv$$
$$\equiv p_{11}(t)\sin^2\varphi(t)+p_{22}(t)\cos^2\varphi(t)-\tfrac{1}{2}(p_{12}(t)+p_{21}(t))\sin 2\varphi(t),$$

которое после упрощений примет вид

$$\left(p_{22}(t)-p_{11}(t)\right)\cos 2\varphi=\left(p_{12}(t)+p_{21}(t)\right)\sin 2\varphi,$$

Отсюда, если $p_{12}(t)\neq -p_{21}(t)$, то найдем

$$tg\,2\varphi\equiv\frac{p_{22}(t)-p_{11}(t)}{p_{12}(t)+p_{21}(t)},$$

откуда определится и соответствующее значение $\varphi(t)$, а именно

$$\varphi(t)\equiv arctg\frac{p_{22}(t)-p_{11}(t)}{p_{12}(t)+p_{21}(t)}. \tag{1.2.8}$$

Итак, если $p_{12}(t)\neq -p_{21}(t)$, то систему (1.2.1) преобразованием (1.2.5) можно привести к равносильной системе вида

$$\begin{cases} z_1'=p(t)z_1+q(t)z_2, \\ z_2'=r(t)z_1+p(t)z_2, \end{cases} \tag{1.2.9}$$

где $p(t)\equiv q_{11}(t)\equiv q_{22}(t)$, $q(t)\equiv q_{12}(t),\ r(t)\equiv q_{21}(t),\ q_{ij}(t)\ (i,j=1,2)$ определяются из соотношений (1.2.7), в которых функция $\varphi(t)$ определяется формулой (1.2.8).
Если же в соотношениях (1.2.7) принять

$$\varphi(t)\equiv\frac{1}{2}\int\left(p_{21}(t)-p_{12}(t)\right)dt, \tag{1.2.10}$$

то в матрице $Q(t)$ окажутся равными коэффициенты $q_{12}(t)$ и $q_{21}(t)$. И, следовательно, в этом случае система (1.2.1) приведется к виду

$$\begin{cases} z_1' = p(t)z_1 + q(t)z_2, \\ z_2' = q(t)z_1 + r(t)z_2, \end{cases} \tag{1.2.11}$$

где $p(t) \equiv q_{11}(t)$, $q(t) \equiv q_{12}(t) \equiv q_{21}(t)$, $r(t) \equiv q_{22}(t)$, $q_{ij}(t)$ $(i, j = 1,2)$ – определяются из соотношений (1.2.7), а функция $\varphi(t)$ – из соотношения (1.2.10). Таким образом, система (1.2.1) всегда может быть сведена к виду (1.2.11), а при условии $p_{12}(t) \neq -p_{21}(t)$, и к виду (1.2.9). Следовательно, для изучения некоторых свойств системы (1.2.1), достаточно ограничиться рассмотрением указанных свойств для систем типа (1.2.9) и (1.2.11). Системы (1.2.9) и (1.2.11), для удобства дальнейшего изложения, будем называть системами соответственно 1-ого и 2-ого типа.

Лемма 1.2.3. *Если в системе* (1.2.1) *коэффициенты* $p_{12}(t)$ *и* $p_{21}(t)$ *не являются тождественными нулями, то существует матрица*

$$R(t) = \begin{pmatrix} 0 & p_0(t) \\ r_0(t) & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.12}$$

такая, что уравнение (1.2.3a) *равносильно уравнению*

$$\vec{z}\,' = R(t)\vec{z}\,. \tag{1.2.13}$$

Доказательство. Представим матрицу $P(t)$ в виде

$$P(t) = P_0(t) + P_1(t),$$

где

$$P_0(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & 0 \\ 0 & p_{22}(t) \end{pmatrix}, \; P_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & p_{12}(t) \\ p_{22.}(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2.14}$$

Примем

$$Q(t) = e^{\int_{t_0}^{t} P_0(\tau)d\tau}, \tag{1.2.15}$$

где t_0 – произвольная точка из отрезка $[a,b]$. Учитывая определение экспоненты матрицы, найдем, что матрицы $Q(t)$ и $P_0(t)$ перестановочны, причем $Q'(t) = Q(t)P_0(t)$. Воспользуемся подстановкой

$$\vec{y}(t) = Q(t)\vec{z}(t)\,. \tag{1.2.16}$$

Тогда уравнение (1.2.3a) запишется в виде

$$Q'(t)\vec{z} + Q(t)\vec{z}\,' = P_0(t)Q(t)\vec{z} + P_1(t)Q(t)\vec{z}\,.$$

Так как матрица $Q(t)$ – невырожденная, то существует обратная к ней матрица $Q^{-1}(t)$. Умножив слева обе части последнего равенства на $Q^{-1}(t)$, и, учитывая, что $Q^{-1}(t)Q'(t) \equiv P_0(t)$, получим

$$\vec{z}\,' = Q^{-1}(t)P_1(t)Q(t)\vec{z} = R(t)\vec{z}\ ,$$

где

$$R(t) \equiv Q^{-1}(t)P_1(t)Q(t). \tag{1.2.17}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что матрица $R(t)$ имеет вид, указанный в лемме. Лемма доказана.

Из леммы 1.2.3 и соотношений (1.2.12)-(1.2.17) следует, что система (1.2.1) при условии, что коэффициенты $p_{12}(t)$ *и* $p_{21}(t)$ не являются тожественными нулями, равносильна системе

$$\begin{cases} z_1' = p_0(t)z_2, \\ z_2' = r_0(t)z_1, \end{cases} \tag{1.2.18}$$

в которой

$$p_0(t) = p_{12}(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t}(p_{22}(\tau)-p_{11}(\tau))d\tau}, \quad r_0(t) = p_{21}(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t}(p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau))d\tau}, \tag{1.2.19}$$

т.е. *всякому решению системы* (1.2.18) *соответствует одно и только одно решение системы* (1.2.1), *задаваемое формулами*

$$y_1(t) = z_1(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t}p_{11}(\tau)d\tau}, \tag{1.2.20a}$$

$$y_2(t) = z_1(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t}p_{22}(\tau)d\tau}, \tag{1.2.20b}$$

где $t_0 \in [a,b]$. *Верно и обратное.*

Для удобства дальнейшего изложения, систему (1.2.18) будем называть канонической для системы (1.2.1).

Из соотношений (1.2.20a) и (1.2.20b) вытекает

Следствие. *Нули и знаки компонент* $y_1(t)$ *и* $y_2(t)$ *любого нетривиального решения системы* (1.2.1) *совпадают с нулями и знаками компонент* $z_1(t)$ *и* $z_2(t)$ *соответствующего ему решения канонической системы* (1.2.18).

Замечание. Если рассматриваемая система (1.2.1) I-ого типа, т.е. имеет вид,

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_1 + q(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1 + p(t)y_2, \end{cases} \tag{1.2.21a}$$

то тогда соотношения (1.2.19) примут вид

$$p_0(t) = q(t),\ r_0(t) = r(t)\ , \tag{1.2.21b}$$

и, следовательно, будем иметь, что

$$p_0(t)r_0(t) \equiv q(t)r(t)\,, \tag{1.2.21c}$$

причем соответствующие компоненты решений систем (1.2.21a) и (1.2.18), как нетрудно проверить, будут удовлетворять соотношению

$$y_1(t)z_2(t) \equiv y_2(t)z_1(t)\,. \tag{1.2.21d}$$

Если же система (1.2.1) II-ого типа, т.е. имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_1 + q(t)y_2\,, \\ y_2' = q(t)y_1 + r(t)y_2\,, \end{cases} \tag{1.2.22a}$$

то тогда соотношения (1.2.19) примут вид

$$p_0(t) = q(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t}(r(\tau)-p(\tau))d\tau}\,, \quad r_0(t) = q(t)e^{\int\limits_{t_0}^{t}(p(\tau)-r(\tau))d\tau}\,, \tag{1.2.22b}$$

откуда найдем, что

$$p_0(t)r_0(t) \equiv q^2(t)\,. \tag{1.2.22c}$$

Каноническая система (1.2.18), к которой можно свести любую систему вида (1.2.1), в свою очередь, может быть преобразована к различным дифференциальным уравнениям. Имеет место

Лемма 1.2.4. *Всякому нетривиальному решению* $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},\ (y_1(t) \neq 0)$ *системы*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2\,, \\ y_2' = r(t)y_1\,, \end{cases} \tag{1.2.23}$$

соответствует решение $u(t)$ *следующего уравнения Риккати*

$$u' + p(t)u - r(t) = 0 \tag{1.2.24}$$

Верно и обратное.

Доказательство. Предположим, что $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – некоторое нетривиальное решение системы (1.2.23) и $y_1(t) \neq 0$. Тогда будем иметь систему тождеств

$$\begin{cases} y_1'(t) \equiv p(t)y_2(t), \\ y_2'(t) \equiv r(t)y_1(t), \end{cases} \tag{1.2.25}$$

Умножив первое тождество (1.2.25) на $y_2(t)$, а второе на $y_1(t)$, затем вычтя из первого второе, получим

$$y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t) \equiv p(t)y_2^2(t) - r(t)y_1^2(t).$$

Разделив полученное тождество на $y_1^2(t) \neq 0$, получим

$$\frac{y_1'(t)y_2(t)-y_2'(t)y_1(t)}{y_1^2(t)} \equiv p(t)\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)^2 - r(t),$$

или

$$\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)' + p(t)\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)^2 - r(t) \equiv 0.$$

Приняв

$$u(t) \equiv \frac{y_2(t)}{y_1(t)},$$

получим уравнение (1.2.24), что и требовалось доказать.

Докажем теперь обратное. Пусть $u(t)$ – некоторое нетривиальное решение уравнения (1.2.24). Примем

$$y_1(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)u(\tau)d\psi},$$

где C – отличная от нуля произвольная постоянная, а t_0 – некоторая точка из отрезка $[a,b]$. Очевидно, что $y_1(t) \neq 0$ и является общим решением следующего линейного однородного уравнения

$$y' = p(t)u(t)y,$$

и, следовательно, будем иметь

$$y_1'(t) \equiv p(t)u(t)y_1(t)\,. \tag{1.2.26}$$

Далее, если принять

$$y_2(t) \equiv u(t)y_1(t)\,, \tag{1.2.27}$$

то тождество (1.2.26) запишется в виде

$$y_1'(t) \equiv p(t)y_2(t)\,. \tag{1.2.28}$$

С другой стороны, $u(t)$, по предположению, является решением уравнения (1.2.24). Тогда, с учетом соотношения (1.2.27), будем иметь

$$\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)' + p(t)\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)^2 - r(t) \equiv 0$$

или

$$\frac{y_2'(t)y_1(t)-y_1'(t)y_2(t)}{y_1^2(t)} + p(t)\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)^2 - r(t) \equiv 0.$$

Далее, подставив в это тождество значение $y_1'(t)$ из соотношения (1.2.28), получим

$$\frac{y_2'(t)y_1(t)-y_2^2(t)}{y_1^2(t)} + p(t)\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)^2 - r(t) \equiv 0$$

или

$$y_2'(t) \equiv r(t)y_1(t).$$

Учитывая также и соотношение (1.2.28), получим что $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ является решением системы (1.2.23), что и требовалось доказать. Лемма доказана.

Покажем теперь, что путем введения вспомогательной комплекснозначной функции от действительного переменного, каноническую систему (1.2.23) также можно свести к равносильному дифференциальному уравнению первого порядка. Имеет место

Лемма 1.2.5. *Система* (1.2.23) *равносильна уравнению*

$$z' + p_0(t)z + r_0(t)\bar{z} = 0, \qquad (1.2.29)$$

где

$$p_0(t) = i\frac{r(t) - p(t)}{2}, \quad r_0(t) = -i\frac{r(t) + p(t)}{2}, \qquad (1.2.30)$$

$z(t) = y_1(t) + iy_2(t), \quad i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица,

а именно, всякому действительному решению системы (1.2.23) $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ *соответствует решение уравнения* (1.2.29*)* $z(t) = y_1(t) + iy_2(t)$, *и, наоборот, всякому решению уравнения* (1.2.29) $z(t)$ *соответствует действительное решение системы* (1.2.23), *выражаемой формулой*

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z(t) \\ \operatorname{Im} z(t) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное решение системы (1.2.23). Тогда будем иметь систему тождеств

$$\begin{cases} y_1'(t) \equiv p(t)y_2(t), \\ y_2'(t) \equiv r(t)y_1(t). \end{cases}$$

Умножив второе тождество на i, затем сложив оба тождества, будем иметь

$$y_1'(t) + iy_2'(t) - p(t)y_2(t) - ir(t)y_1(t) \equiv 0.$$

Последнее тождество можно преобразовать к виду

$$\left(y_1(t) + iy_2(t)\right)' + \frac{i}{2}\left(p(t) - r(t)\left(y_1(t) + iy_2(t)\right)\right) - \frac{i}{2}\left(p(t) + r(t)\left(y_1(t) - iy_2(t)\right)\right) \equiv 0. \qquad (1.2.31)$$

Если теперь принять в тождестве (1.2.31)

$$p_0(t) = i\frac{r(t) - p(t)}{2}, \quad r_0(t) = -i\frac{r(t) + p(t)}{2}, \; z(t) = y_1(t) + iy_2(t),$$

и учесть, что $\bar{z}(t) = y_1(t) - iy_2(t)$, то получим, что $z(t)$ является решением уравнения (1.2.29). Обратное, пусть $z(t)$ – решение уравнения (1.2.29), и $y_1(t) = \operatorname{Re} z(t),\; y_2(t) = \operatorname{Im}\, z(t).$ Тогда, подставив в тождество

$$z'(t) + p_0(t)z(t) + r_0(t)\bar{z}(t) \equiv 0$$

значения $z(t)$, $p_0(t)$ и $r_0(t)$ из соотношений (1.2.30), получим

$$y_1'(t)+iy_2'(t)-p(t)y_2(t)-ir(t)y_1(t)\equiv 0\,,$$

откуда найдем, что

$$\begin{cases} y_1'(t)\equiv p(t)y_2(t), \\ y_2'(t)\equiv r(t)y_1(t). \end{cases}$$

Последнее означает, что $\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – решение системы (1.2.23). Лемма доказана.

1.3. О свойствах решений систем с знакопостоянными коэффициентами

Рассмотрим каноническую систему

$$\begin{cases} y_1'=p(t)y_2, \\ y_2'=r(t)y_1, \end{cases} \tag{1.3.1}$$

где $p(t), r(t)$ – действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$. Поскольку рассматриваемая система является частным случаем системы 1.2.1, то из лемм 1.2.1 и 1.2.2 будут следовать следующие утверждения:

Утверждение 1.3.1. *Компоненты всякого нетривиального решения системы* (1.3.1) *не могут иметь нуль в одной и той же точке.*

Утверждение 1.3.2. *Компоненты всякого нетривиального решения системы* (1.3.1) *при* $p(t)r(t)\neq 0$, *могут иметь на отрезке* $[a,b]$ *не более конечного числа нулей, причем все нули простые.*

Непосредственной подстановкой можно убедиться и в том, что имеют место

Утверждение 1.3.3. *Если пара* $(u_1(t),u_2(t))$ *является решением системы* (1.3.1), *то пара* $\left(\frac{u_1(t)}{c},u_2(t)\right)$ *является решеним системы*

$$\begin{cases} y_1'=\dfrac{p(t)}{c}y_2, \\ y_2'=cr(t)y_1, \end{cases}$$

где c – *заданная постоянная.*

Утверждение 1.3.4. *Если пара* $(u_1(t),u_2(t))$ *является решением системы* (1.3.1), *то пара* $(u_1(ct),u_2(ct))$ *является решеним системы*

$$\begin{cases} y_1'=cp(ct)y_2, \\ y_2'=cr(ct)y_1, \end{cases}$$

где c – *заданная постоянная.*

Утверждение 1.3.5. *Если пара* $(u_1(t),u_2(t))$ *является решением системы* (1.3.1), *то пара* $(u_1(\varphi(t)),u_2(\varphi(t)))$ *является решеним системы*

$$\begin{cases} y_1'=\varphi'(t)p(\varphi(t))y_2, \\ y_2'=\varphi'(t)r(\varphi(t))y_1, \end{cases}$$

где $\varphi\in C[a,b]$, $\varphi(t)\in D(p(t))\cap D(r(t))$ - *заданная функция.*

Далее, для рассматриваемой системы (1.3.1) имеет место

Теорема 1.3.1. *Если в системе* (1.3.1) $p(t)$ *è* $r(t)$ *знакопостоянны на отрезке* $[a,b]$, *то нуль одной компоненты всякого нетривиального решения системы* (1.3.1) *на интервале* (a,b) *является точкой экстремума для другой компоненты этого же решения.*

Доказательство. Пусть $\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (1.3.1), а t_0 – нуль второй компоненты $(y_2(t_0)=0,\, t_0\in(a,b))$. Заметим, что $y_2(t)$ не может иметь один и тот же знак и слева и справа от t_0, так как в этом случае точка t_0 окажется точкой экстремума для $y_2(t)$, и мы получим, что $y_2'(t_0)=0$. Но тогда из второго уравнения системы (1.3.1) найдем, что $y_1(t_0)=0$, а это невозможно в силу утверждения 1.3.1. Значит, $y_2(t)$ имеет по разные стороны от t_0 разные знаки, и, так как функция $p(t)$ знакопостоянна на отрезке $[a,b]$, то из первого уравнения системы (1.3.1) будет следовать, что $y_1'(t)$ при переходе через точку t_0 меняет свой знак, причем, $y_1'(t_0)=p(t_0)y_2(t_0)=0$, а значит, точка t_0 является точкой экстремума для $y_1(t)$. Аналогично доказывается, что нуль первой компоненты всякого нетривиального решения системы (1.3.1) является точкой экстремума для второй. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает следующее экстремальное свойство компонент решений рассматриваемой канонической системы. А именно, если рассмотреть следующую задачу Коши

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases}$$

$$y_1(t_0)=0,\ \ y_2(t_0)=c,$$

где $p(t), r(t)$ – действительные знакопостоянные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$, c – некоторая постоянная, то согласно теореме 1.3.1, значение с будет экстремальным для компоненты $y_2(t)$. Очевидно, что характер экстремальности (минимум или максимум) будет зависеть как от знаков коэффициентов, так и от знака постоянной c. Нетрудно доказать, что в случае $cp(t)r(t)>0$ мы будем иметь максимум, а при $cp(t)r(t)<0$ – минимум. В частности, при $p(t)>0, r(t)>0, c<0$ или $p(t)>0, r(t)<0, c>0$, или $p(t)<0, r(t)>0, c>0$, или $p(t)<0, r(t)<0, c<0$ значение c будет минимальным для компоненты $y_2(t)$,в остальных случаях -максимальным. Действительно, допустим, что имеет место случай $p(t)<0, r(t)<0, c>0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Так как точка t_0 в силу условий задачи является нулем компоненты $y_1(t)$, то согласно теореме 1.3.1, t_0 будет являться точкой экстремума для компоненты $y_2(t)$. С другой стороны, поскольку $c>0$, то в силу непрерывности $y_2(t)$ ее значение в некоторой окрестности точки t_0 также будет положительным. Но тогда из первого уравнения системы будет следовать, что в некоторой окрестности точки t_0 $y_1'(t)<0$, а значит в этой окрестности компонента $y_1(t)$ убывает. Следовательно, слева от точки t_0 $y_1(t)$ будет принимать положительные, а справа – отрицательные значения. В этом случае, из второго уравнения системы будет следовать, что слева от точки t_0 $y_2'(t)>0$, а справа – $y_2'(t)<0$. А это значит, что t_0 является точкой максимума для компоненты $y_2(t)$.

Аналогично, рассматривая задачу Коши

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases}$$
$$y_1(t_0)=c,\ y_2(t_0)=0,$$

при тех же предположениях относительно коэффициентов $p(t)$ и $r(t)$, мы найдем, что значение c будет экстремальным для компоненты $y_1(t)$. Как и в рассмотренном выше случае при $cp(t)r(t)>0$ мы будем иметь максимум для компоненты $y_1(t)$ а при $cp(t)r(t)<0$ – минимум. Таким образом, из теоремы 1.3.1 вытекает

Следствие. *Если рассматривается задача Коши для системы уравнений*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases}$$

причем начальные условия имеют вид

$$y_1(t_0)=0,\ y_2(t_0)=c,\ \left(y_1(t_0)=c,\ y_2(t_0)=0\right),$$

и при $t\in(a,b)$ *имеет место условие*

$$cp(t)r(t)\neq 0,$$

то значение c *является экстремальным для компоненты* $y_2(t)$ *(соответственно* $y_1(t)$*).*

Теорема 1.3.2. *Между всякими соседними нулями любой из компонент всякого нетривиального решения системы* (1.3.1) *при* $p(t)r(t)\neq 0$, *находится ровно один нуль другой компоненты того же решения (нули компонент перемежаются).*

Доказательство. Пусть $y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ - произвольное нетривиальное решение системы (1.3.1). Не теряя общности рассуждений, предположим, что t_1 и t_2 – соседние нули $y_2(t)$, т. е. $y_2(t_1)=y_2(t_2)=0$ и $y_2(t)\neq 0$ при $t\in(t_1,t_2)$ (аналогично проводится доказательство и в случае $y_1(t_1)=y_1(t_2)=0$). Заметим, что относительно функции $y_2(t)$ на отрезке $[t_1,t_2]$ имеют место условия теоремы Ролля. Тогда, применив ее, найдем, что существует по крайней мере одна такая точка $t_0\in(t_1,t_2)$, что $y_2'(t_0)=0$. Но тогда, так как в силу условия теоремы $r(t)\neq 0$, то из второго уравнения системы (1.3.1) получим, что $y_1(t_0)=0$. Следовательно, $y_1(t)$ имеет по крайней мере один нуль на интервале (t_1,t_2). Теперь предположим, что $y_1(t)$ имеет на интервале (t_1,t_2) более одного нуля, и пусть t_3 и t_4 ($t_1<t_3<t_4<t_2$) – два его соседних нуля. Тогда, вновь воспользовавшись теоремой Ролля, найдем, что $y_2(t)$ имеет на интервале (t_3,t_4), а, следовательно, и на интервале (t_1,t_2), хотя бы один нуль, что противоречит предположению о том,

что t_1 и t_2 - соседние нули $y_2(t)$. Следовательно, $y_1(t)$ имеет на интервале (t_1, t_2) ровно один нуль. Теорема доказана.

Приведем примеры, иллюстрирующие утверждения теорем 1.3.1 и 1.3.2.

Пример 1. Пусть в системе (1.3.1) $p(t) = -m^2,\ r(t) = -n^2,\quad m, n \in R,\ mn \neq 0$. В данном случае $p(t)r(t) \neq 0$ на любом отрезке $[a,b]$, и система (1.3.1) будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} y_1' = -m^2 y_2, \\ y_2' = \quad n^2 y_1. \end{cases}$$

Дифференцируя по t второе уравнение, и, учитывая первое, найдем

$$y_2'' - n^2 y_1' = y_2'' + m^2 n^2 y_2 = 0 .$$

Характеристическое уравнение для полученного линейного однородного уравнения второго порядка будет иметь вид

$$\lambda^2 + m^2 n^2 = 0 ,$$

откуда найдем

$$\lambda_{1,2} = \pm imn .$$

И, следовательно, общее решение рассматриваемой системы можно представить в виде

$$y_1(t) = A\cos(mnt + \varphi),$$
$$y_2(t) = \frac{An}{m}\sin(mnt + \varphi) .$$

где A и φ – произвольные постоянные. Из структуры полученных решений следует, что нуль любой компоненты всякого нетривиального решения рассматриваемой системы является точкой экстремума для другой компоненты, причем нули компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$ перемежаются.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y_1' = -q(t)\, y_2, \\ y_2' = \quad q(t)\, y_1. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

где $q(t)$ – действительная, непрерывная и знакопостоянная на некотором отрезке $[a,b]$ функция. В рассматриваемом случае $p(t) \equiv -r(t) \equiv -q(t)$ и, следовательно, коэффициенты системы на отрезке $[a,b]$ будут иметь разные знаки. Для решения системы (1.3.2) воспользуемся преобразованием $z(t) = y_1(t) + iy_2(t)$, описанным в лемме 1.2.5. Система в этом случае сведется к уравнению

$$z' = iq(t)z.$$

Решая это уравнение методом разделения переменных, и, используя формулу Эйлера $\left(e^{-iz} = \cos z + i\sin z\right)$, найдем

$$z(t) = Ce^{i\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau} = C\left[\cos\left(\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau\right) + i\sin\left(\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau\right)\right].$$

Следовательно, общее действительное решение рассматриваемой системы можно записать в виде

$$y_1(t) = C\cos\left(\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau\right),$$

$$y_2(t) = C\sin\left(\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau\right),$$

где C – произвольная постояная, $t_0 \in [a,b]$. Из полученных соотношений для компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$ также следует, что нуль любой компоненты всякого нетривиального решения рассматриваемой системы является точкой экстремума для другой компоненты, причем нули $y_1(t)$ и $y_2(t)$ перемежаются.

Теорема 1.3.3. *Если в системе* (1.3.1) $p(t)r(t)>0$ *на отрезке* $[a,b]$, *то наличие нуля на отрезке* $[a,b]$ *у одной из компонент произвольного нетривиального решения системы* (1.3.1) *исключает существование других нулей у компонент этого же решения на отрезке* $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t)\end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (1.3.1). Тогда будем иметь систему тождеств

$$\begin{cases} y_1'(t) \equiv p(t)y_2(t), \\ y_2'(t) \equiv r(t)y_1(t). \end{cases}$$

Умножив первое тождество этой системы на $y_2(t)$, а второе – на $y_1(t)$, затем сложив полученные, найдем

$$\left(y_1y_2\right)' = -p(t)y_1^2 - r(t)y_2^2. \tag{1.3.3}$$

Так как, согласно условию теоремы, $p(t)$ и $r(t)$ на отрезке $[a,b]$ имеют одинаковые знаки, то в полученном тождестве правая часть, а значит, и левая, будут иметь при $t\in[a,b]$ один и тот же знак. А это означает, что функция $y_1(t)\cdot y_2(t)$ при $t\in[a,b]$ будет либо строго возрастающей (при $p(t)<0$ и $r(t)<0$), либо строго убывающей ($p(t)>0$ и $r(t)>0$). Отсюда следует, что функция $y_1(t)\cdot y_2(t)$ может иметь нуль на отрезке $[a,b]$ только в одной точке, причем наличие общего нуля у обеих компонент, согласно утверждению 1.3.1, невозможно. Теорема доказана.

Замечание. Из соотношения (1.3.3) следует, что если в системе (1.3.1) $p(t)>0$ и $r(t)>0$ ($p(t)>0$ и $r(t)>0$), то функция $y_1(t)\cdot y_2(t)$ при $t\in[a,b]$ будет возрастающей (убывающей) на отрезке $[a,b]$, и, следовательно, для любого $t\in(a,b]$ будем иметь

$$y_1(t)\cdot y_2(t) > y_1(a)\cdot y_2(a), \quad \left(y_1(t)\cdot y_2(t) < y_1(a)\cdot y_2(a)\right).$$

Проиллюстрируем утверждение теоремы 1.3.3 на следующих примерах.

Пример 3. Предположим, что в системе (1.3.1) $p(x)=m^2,\ r(x)=n^2, m,n\in R,\ mn\neq 0$. В рассматриваемом случае $p(t)r(t)>0$. Систему (1.3.1) при этом можно записать в виде

$$\begin{cases} y_1' - m^2 y_2 = 0, \\ y_2' - n^2 y_1 = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя по t первое уравнение, и, учитывая второе, найдем

$$y_1'' - m^2 y_2' = y_1'' - m^2 n^2 y_1 = 0.$$

Характеристическое уравнение для полученного линейного однородного уравнения второго порядка будет иметь вид

$$\lambda^2 - m^2 n^2 = 0,$$

откуда найдем

$$\lambda_{1,2} = \pm mn,$$

и, следовательно, общее решение рассматриваемой системы можно записать в виде

$$y_1(t) = C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt},$$
$$y_2(t) = \frac{m}{n}\left(C_1 e^{mnt} - C_2 e^{-mnt}\right),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Очевидно, что первая компонента будет иметь нуль при условии, что $C_2/C_1<0$, а вторая – при выполнении условия $C_2/C_1>0$, исключающего предыдущий. Следовательно, в рассматриваемом случае каждая из компонент всякого нетривиального решения системы может иметь нуль на всей оси, и тем более на любом отрезке $[a,b]$, не более, чем в одной точке, причем этот нуль будет единственным для обеих компонент.

Пример 4. Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \dfrac{2}{t^2} y_1. \end{cases} \tag{1.3.4}$$

В данном случае $p(t)\equiv 1>0$ и $r(t)=\dfrac{2}{t^2}>0$ при $t\neq 0$, и, следовательно, $p(t)r(t)>0$ при $t\neq 0$. Умножив первое уравнение на $(-y_2)$, а второе на y_1, затем сложив полученные, будем иметь

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 - \frac{2}{t^2} y_1^2 + y_2^2 = 0.$$

Разделив полученное уравнение на y_1^2, получим

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' - \frac{2}{t^2} + \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 = 0.$$

Обозначим

$$y(t) = \frac{y_2(t)}{y_1(t)},$$

тогда уравнение (1.3.5) запишется в виде

$$y' + y^2 - \frac{2}{t^2} = 0. \qquad (1.3.7)$$

Полученное уравнение является уравнением Риккати ([13, стр. 30]). Будем искать его частное решение в виде

$$y_0(t) = \frac{C_0}{t}, \qquad (1.3.8)$$

где C_0 – некоторая постоянная. Для определения значения постоянной C_0, подставим y_0 вместо y в уравнение (1.3.7). Получим

$$-\frac{C_0}{t^2} + \frac{C_0^2}{t^2} - \frac{2}{t^2} = 0,$$

или

$$C_0^2 - C_0 - 2 = 0,$$

откуда найдем $C_0 = -1$ или $C_0 = 2$. Примем в соотношении (1.3.8) $C_0 = -1$ и воспользуемся подстановкой

$$y = -\frac{1}{t} + \frac{1}{z}. \qquad (1.3.9)$$

Тогда уравнение (1.3.7) примет вид

$$\frac{1}{t^2} - \frac{z'}{z^2} + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{tz} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{t^2} = 0$$

или

$$z' + \frac{2}{t} z = 1. \qquad (1.3.10)$$

Нетрудно найти, что общее решение соответствующего (1.3.10) однородного уравнения

$$z' + \frac{2}{t} z = 0$$

можно представить в виде

$$z_0(t) = \frac{C}{t^2},$$

где C – произвольная постоянная. Для определения частного решения неоднородного уравнения (1.3.10), воспользуемся методом вариации постоянной, а именно, будем искать частное решение (1.3.10) в виде

$$z(t) = \frac{C(t)}{t^2}. \qquad (1.3.11)$$

Подставив это значение в уравнение (1.3.10), получим

$$\frac{C'(t)t^2 - 2C(t)t}{t^4} + \frac{2}{t^3} C(t) = 1$$

или

$$C'(t) = t^2.$$

Отсюда найдем, что

$$C(t) = \frac{t^3}{3} + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Тогда, учитывая (1.3.11), будем иметь

$$z(t) = \frac{\frac{t^3}{3} + C_1}{t^2} = \frac{t}{3} + \frac{C_1}{t^2}.$$

Воспользовавшись соотношением (1.3.9), найдем

$$y(t) = -\frac{1}{t} + \frac{3t^2}{t^3 + C_2},$$

или, согласно (1.3.6),

$$\frac{y_2(t)}{y_1(t)} = -\frac{1}{t} + \frac{3t^2}{t^3 + C_2},$$

где C_2 – произвольная постоянная. Так как, согласно первому уравнению системы (1.3.4), $y_1' = y_2$, то для определения $y_1(t)$ из последнего соотношения получим уравнение

$$y_1' = y_1\left(-\frac{1}{t} + \frac{3t^2}{t^3 + C_2}\right).$$

Решая его методом разделения переменных, и, учитывая то, что $y_2(t) = y_1'(t)$, получим

$$y_1(t) = C_3 t^2 + \frac{C_4}{t}, \qquad (1.3.12a)$$

$$y_2(t) = 2C_3 t - \frac{C_4}{t^2}, \qquad (1.3.12b)$$

где C_3 и C_4 – произвольные постоянные.

Из соотношений (1.3.12a) и (1.3.12b) следует, что нули компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$ будут находиться по разные стороны от нуля. И, следовательно, наличие нуля у одной из компонент в одной части числовой прямой (справа или слева от нуля, т. е. там, где $p(t)r(t) > 0$, исключает существование нуля у другой компоненты в этой же части.

Пример 5. Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} y_1' = q(t)\, y_2, \\ y_2' = q(t)\, y_1, \end{cases}$$

где $q(t)$ – действительная, непрерывная и знакопостоянная на некотором отрезке $[a,b]$ функция. В данном случае $p(t) \equiv r(t) \equiv q(t)$, и, следовательно, $p(t)r(t) > 0$ для любого $t \in [a,b]$. Сложением и вычитанием уравнений системы получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} (y_2 - y_1)' = -q(t)(y_2 - y_1), \\ (y_2 + y_1)' = \ \ q(t)(y_2 - y_1). \end{cases}$$

Решая каждое из уравнений полученной системы методом разделения переменных, нетрудно найти, что

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = Ae^{-\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau}, \\ y_2 + y_1 = Be^{-\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau}, \end{cases}$$

где A и B – произвольные постоянные, t_0 – произвольная точка из отрезка $[a,b]$. Отсюда легко найти, что общее решение рассматриваемой системы можно представить в виде:

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau} + C_2 e^{-\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau}, \\ y_2(t) = C_1 e^{\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau} - C_2 e^{-\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau}, \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Из полученных соотношений для компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$ следует, что первая из них может иметь нуль только при выполнении условия – $C_2 / C_1 > 0$, тогда как вторая – при $C_2 / C_1 < 0$. Следовательно, наличие нуля у одной из компонент исключает существование нуля у другой.

1.4. О свойствах решений систем с знакопеременными коэффициентами

Рассмотрим вновь систему (1.3.1) в предположении, что ее коэффициенты имеют нули на рассматриваемом отрезке. Имеет место

Лемма 1.4.1. *Простой нуль $t_0 \in (a,b)$ функции $p(t)$ является либо точкой экстремума для первой компоненты, либо нулем для второй компоненты всякого нетривиального решения системы* (1.3.1).

Доказательство. Пусть $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (1.3.1). Предположим, что точка $t_0 \in (a,b)$ является простым нулем для $p(t)$, т. е.

$$p(t_0) = 0, \ p'(t_0) \neq 0. \tag{1.4.1}$$

Тогда из первого уравнения системы (1.3.1) будет следовать, что $y_1'(t_0) = 0$. Возможны два случая:

a) $y_1'(t)$ меняет свой знак при переходе через точку t_0 и, следовательно, точка t_0 является точкой экстремума для $y_1(t)$.

b) $y_1'(t)$ не меняет свой знак при переходе через точку t_0. Тогда, так как $p(t)$ меняет свой знак при переходе через точку t_0, то из первого уравнения системы (1.3.1) будет следовать, что $y_2(t)$ также меняет свой знак при переходе через точку t_0, а значит $y_2(t_0) = 0$. Лемма доказана.

Аналогичным образом доказывается и

Лемма 1.4.2. *Простой нуль $t_0 \in (a,b)$ функции $r(t)$ является либо точкой экстремума для второй компоненты, либо нулем для первой компоненты всякого нетривиального решения системы* (1.3.1).

Следствие 1. *Простой нуль $t_0 \in (a,b)$ одной из функций $p(t)$ и $r(t)$ является либо точкой экстремума либо нулем для одной из компонент всякого нетривиального решения системы* (1.3.1).

Следствие 2. *Если точка $t_0 \in (a,b)$ является простым нулем одновременно для функций $p(t)$ и $r(t)$, то она является либо точкой экстремума одновременно для обеих компонент, либо нулем и точкой экстремума для одной из компонент всякого нетривиального решения системы* (1.3.1).

Действительно, из лемм 1.4.1 и 1.4.2 следует, что возможны следующие случаи:

1. точка t_0 является одновременно точкой экстремума для обеих компонент;

2. точка t_0 является точкой экстремума и одновременно нулем для одной из компонент;

3. точка t_0 является одновременно нулем для обеих компонент.

Однако, следует заметить, что в силу утверждения 1.3.1, третий случай невозможен.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие утверждения лемм 1.4.1 и 1.4.2.

Пример 6. Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} y_1' - ty_2 = 0, \\ y_2' - ty_1 = 0. \end{cases}$$

В данном случае $p(t) \equiv r(t) \equiv t$ и система является частным случаем системы, рассмотренной в примере 5. Следовательно, общее решение рассматриваемой системы можно записать в виде:

$$y_1(t) = C_1 e^{\frac{t^2}{2}} + C_2 e^{-\frac{t^2}{2}},$$
$$y_2(t) = C_1 e^{\frac{t^2}{2}} - C_2 e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Нетрудно убедиться в том, что точка $t = 0,$ являющаяся нулем для функций $p(t)$ и $r(t)$, является также точкой экстремума для каждой из компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Действительно, имеем

$$y_1'(t) = t\left(C_1 e^{\frac{t^2}{2}} - C_2 e^{-\frac{t^2}{2}}\right), \ y_1'(0) = 0,$$
$$y_2'(t) = t\left(C_1 e^{\frac{t^2}{2}} + C_2 e^{-\frac{t^2}{2}}\right), \ y_2'(0) = 0.$$

А, значит, $t = 0$ является критической точкой для каждой из компонент. С другой стороны, очевидно, что производные $y_1'(t)$ и $y_2'(t)$ при переходе через точку $t = 0$ меняют свои знаки. Следовательно, точка $t = 0$ является точкой экстремума для каждой из компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

Пример 7. Рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} y_1' + \sin t \cdot y_2 = 0, \\ y_2' - \cos t \cdot y_1 = 0. \end{cases}$$

Как было показано в примере 2, общее решение этой системы можно записать в виде

$$y_1(t) = A\sin(\cos t + \varphi),$$
$$y_2(t) = A\cos(\cos t + \varphi),$$

где A, φ – произвольные постоянные. В данном случае $p(t) \equiv -r(t) \equiv -\sin t$, и, следовательно, точки $t_n = \pi n \ (n \in Z)$ являются простыми нулями одновременно для каждого из коэффициентов $p(t)$ и $r(t)$. Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться в в том, что каждый из этих нулей будет являться либо точкой экстремума для каждой из компонент решений, либо нулем и точкой экстремума для одной из компонент.

Лемма 1.4.3. *Если* $p,r\in C^2[a,b]$ *и точка* $t_0\in(a,b)$ *является кратным нулем для функции* $p(t)$ ($r(t)$)*, то она является точкой перегиба для первой (второй) компоненты всякого нетривиального решения системы* (1.3.1).

Доказательство. Пусть $y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (1.3.1). Предположим, что точка $t_0\in(a,b)$ является кратным нулем для $p(t)$, и, следовательно,

$$p(t_0)=p'(t_0)=0. \tag{1.4.2}$$

Тогда из первого уравнения системы (1.3.1) найдем, что

$$y_1'(t_0)=0. \tag{1.4.3}$$

Продифференцировав по t первое уравнение системы (1.3.1), получим

$$y_1''-p'(t)y_2-p(t)y_2'=0.$$

Подставив в это уравнение вместо t значение t_0, и, учитывая (1.4.2), найдем, что

$$y_1''(t_0)=0. \tag{1.4.4}$$

Из соотношений (1.4.3) и (1.4.4) следует, что точка t_0 является точкой перегиба для $y_1(t)$. Аналогично доказывается лемма и в случае кратного корня $r(t)$.

Следствие. *Если* $p,r\in C^2[a,b]$ *и точка* $t_0\in(a,b)$ *является одновременно кратным нулем для функций* $p(t)$ *и* $r(t)$*, то она является точкой перегиба для каждой из компонент всякого нетривиального решения системы* (1.3.1).

Рассмотрим для наглядной иллюстрации утверждения леммы 1.4.3, а также следствия из леммы 1.4.3, следующий пример.

Пример 8. Рассматривается система

$$\begin{cases} y_1'-t^2y_2=0,\\ y_2'+t^2y_1=0.\end{cases}$$

В данном случае $p(t)\equiv -r(t)\equiv t^2$ и $p,r\in C^2[a,b]$. Заметим, что точка $t_0=0$ является кратным нулем одновременно для $p(t)$ и $r(t)$. Общее решение рассматриваемой системы (см. пример 2) можно записать в виде:

$$y_1(t)=A\sin\left(\frac{t^3}{3}+\varphi\right),$$

$$y_2(t)=A\cos\left(\frac{t^3}{3}+\varphi\right),$$

где A и φ – произвольные постоянные. Поскольку

$$y_1'(t)=At^2\cos\left(\frac{t^3}{3}+\varphi\right),\ \ y_2'(t)=-At^2\sin\left(\frac{t^3}{3}+\varphi\right),$$

то $y_1'(0)=y_2'(0)=0,\ y_1''(0)=y_2''(0)=0,$ а, значит, точка $t_0=0$ является точкой перегиба для каждой из компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

В конце этого параграфа рассмотрим вопросы, связанные с четностью и нечетностью компонент решений системы (1.3.1) в предположении, что коэффициенты системы $p(t)$ и $r(t)$ определены и непрерывны на всей числовой прямой. Тогда, по известному свойству линейных однородных систем, компоненты всякого решения системы также будут определены на всей числовой прямой. Предположим, что пара $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ является решением системы (1.3.1).Тогда будем иметь систему тождеств

$$\begin{cases} y_1'(t) \equiv p(t)\,y_2(t), \\ y_2'(t) \equiv r(t)\,y_1(t). \end{cases} \tag{1.4.5}$$

Подставим в эту систему $-t$ вместо t. Получим

$$\begin{cases} y_1'(-t) \equiv p(-t)\,y_2(-t), \\ y_2'(-t) \equiv r(-t)\,y_1(-t). \end{cases} \tag{1.4.6}$$

Поскольку для любой функции $f(t)$, определенной и дифференцируемой на всей числовой прямой

$$\left[f(-t)\right]' = -f'(t),$$

то систему (1.4.6) можно записать в виде

$$\begin{cases} \left[y_1(-t)\right]' \equiv -p(-t)\,y_2(-t), \\ \left[y_2(-t)\right]' \equiv -r(-t)\,y_1(-t). \end{cases}$$

Если предположить, что функции $p(t)$ и $r(t)$ являются нечетными, то последнюю систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \left[y_1(-t)\right]' \equiv p(t)\,y_2(-t), \\ \left[y_2(-t)\right]' \equiv r(t)\,y_1(-t). \end{cases}$$

Из этой системы в этом случае будет следовать, что если пара $\left(y_1(t), y_2(t)\right)$ является решением системы (1.3.1), то пара $\left(y_1(-t), y_2(-t)\right)$ также является решением системы (1.3.1).

Предположим теперь, что компоненты всякого решения системы являются четными функциями, т.е. для любого действительного значения t имеем $y_1(-t) \equiv y_1(t),\ y_2(-t) \equiv y_2(t)$. Тогда, вновь подставив в систему (1.3.1) $-t$ вместо t, и, учитывая сделанные предположения, получим

$$\begin{cases} \left[y_1(t)\right]' \equiv -p(t)\,y_2(t), \\ \left[y_2(t)\right]' \equiv -r(t)\,y_1(t). \end{cases}$$

Сравнив эту систему с системой (1.4.5), найдем, что для любого действительного значения t

$$p(-t) \equiv -p(t),\ \ r(-t) \equiv -r(t)\,.$$

Последнее означает, что коэффициенты системы (1.3.1) являются нечетными функциями. Из вышесказанного следует, что компоненты решения системы (1.3.1) будут четными функциями в том и только том случае, когда коэффициенты системы (1.3.1) $p(t)$ и $r(t)$ – нечетные функции. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим следующий пример. Пусть рассматривается система

$$\begin{cases} y_1' = ty_2, \\ y_2' \equiv ty_1, \end{cases}$$

в которой $p(t) \equiv r(t) \equiv t$, и, следовательно, $p(t)$ и $r(t)$ – нечетные функции. Общее решение этой системы можно представить (см. пример 6) в виде

$$y_1(t) = C_1 e^{\frac{t^2}{2}} + C_2 e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad y_2(t) = C_1 e^{\frac{t^2}{2}} - C_2 e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Очевидно, что компоненты полученного решения являются четными функциями.

Предположим теперь, что коэффициенты системы (1.3.1) являются четными функциями. Тогда, повторив вышеприведенные рассуждения, мы придем к системе

$$\begin{cases} [-y_1(-t)]' \equiv p(t)y_2(-t), \\ [y_2(-t)]' \equiv r(t)[-y_1(-t)], \end{cases}$$

которую можно записать и в виде

$$\begin{cases} [y_1(-t)]' \equiv p(t)[-y_2(-t)], \\ [y_2(-t)]' \equiv r(t)[-y_1(-t)]. \end{cases}$$

Из последних двух систем будет следовать, что если пара $(y_1(t), y_2(t))$ является решением системы (1.3.1), то пары $(-y_1(-t), y_2(-t),)$ и $(y_1(-t), -y_2(-t),)$ также будут являться решениями системы (1.3.1). Таким образом, мы получили, что *если коэффициенты системы* (1.3.1) *являются четными функциями, а пара функций* $(y_1(t), y_2(t))$ *является решением системы* (1.3.1.), *то пары* $(-y_1(-t), y_2(-t),)$ *и* $(y_1(-t), -y_2(-t),)$ *также являются решениями системы* (1.3.1).

Продемонстрируем сказанное на следующем примере. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} y_1' = t^2 y_2, \\ y_2' \equiv t^2 y_1. \end{cases}$$

В данном случае $p(t) \equiv r(t) \equiv t^2$, и, следовательно, $p(t)$ и $r(t)$ – четные функции, определенные на всей числовой прямой. Общее решение этой системы (см. пример 6) можно записать в виде

$$y_1(t) = C_1 e^{\frac{t^3}{2}} + C_2 e^{-\frac{t^3}{2}}, \quad y_2(t) = C_1 e^{\frac{t^3}{2}} - C_2 e^{-\frac{t^3}{2}},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться в том, что пары

$$z_1(t) = y_1(-t) = C_1 e^{-\frac{t^3}{2}} + C_2 e^{\frac{t^3}{2}}, \quad z_2(t) = -y_2(-t) = -C_1 e^{-\frac{t^3}{2}} + C_2 e^{\frac{t^3}{2}},$$

и

$$u_1(t) = -y_1(-t) = -C_1 e^{-\frac{t^3}{2}} - C_2 e^{\frac{t^3}{2}}, \quad z_2(t) = y_2(-t) = -C_1 e^{-\frac{t^3}{2}} - C_2 e^{\frac{t^3}{2}},$$

также являются решениями системы (1.4.7).

1.5. О некоторых свойствах одной канонической системы

Этот параграф посвящен рассмотрению некоторых интересных свойств, присущих каноническим системам вида (1.3.1) в случае, когда $p(t) \equiv Cr(t)$, где $C = const$.

Рассмотрим каноническую систему (1.3.1), записав ее в векторном виде

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = P(t)\vec{y}, \qquad (1.5.1)$$

где

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & p(t) \\ r(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

В §1.3 было показано, что если матрица $P(t) \equiv P$ – постоянная и имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ n^2 & 0 \end{pmatrix}$$

где m,n – произвольные вещественные числа, не равные нулю, то общее решение уравнения (1.5.1) можно записать в виде

$$y_1(t) = A\cos(mnt + \varphi),$$

$$y_2(t) = \frac{An}{m}\cos(mnt + \varphi),$$

где A и φ – произвольные постоянные. В случае, когда

$$P = \begin{pmatrix} 0 & m^2 \\ n^2 & 0 \end{pmatrix}$$

общее решение уравнения (1.5.1) (см. пример 3) можно записать в виде

$$y_1(t) = C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt},$$

$$y_2(t) = \frac{n}{m}\left(C_1 e^{mnt} - C_2 e^{-mnt}\right),$$

где где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Заметим, что для компонент решения уравнения (1.5.1), определяемых формулами (1.5.2a) и (1.5.2b), имеет место соотношение

$$y_1^2 + \frac{m^2}{n^2} y_2^2 = y_1^2 - \frac{p(t)}{r(t)} y_2^2 = A^2,$$

а для компонент решения системы (1.5.1), определяемых формулами (1.5.3a) и (1.5.3b)

$$y_1^2 - \frac{m^2}{n^2} y_2^2 = y_1^2 - \frac{p(t)}{r(t)} y_2^2 = 4C_1C_2.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F(t) = y_1^2(t) - \frac{p(t)}{r(t)} y_2^2(t),$$

где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ - компоненты решения системы (1.5.1). Имеет место

Лемма 1.5.1. *Для того, чтобы значение функции* $F(t)$ *не зависело бы от* t *для всякого решения системы* (1.5.1), *необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение*

$$p(t) \equiv Cr(t),$$

где C *– некоторая постоянная.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное решение уравнения (1.5.1), тогда будем иметь

$$\begin{cases} y_1'(t) \equiv p(t)\, y_2(t), \\ y_2'(t) \equiv r(t)\, y_1(t). \end{cases}$$

С учетом этих тождеств, найдем

$$F'(t) \equiv 2y_1(t)y_1'(t) - \left(\frac{p(t)}{r(t)}\right)' y_2^2(t) - 2\frac{p(t)}{r(t)} y_2(t)y_2'(t) \equiv$$

$$\equiv 2p(t)y_1(t)y_2(t) - \left(\frac{p(t)}{r(t)}\right)' y_2^2(t) - 2p(t)y_1(t)y_2(t) \equiv \left(\frac{p(t)}{r(t)}\right)' y_2^2(t). \qquad (1.5.4)$$

Если теперь предположить, что функция $F(t)$ не зависит t, то тогда будем иметь, что $F'(t)=0$. Из соотношения (1.5.4) будет следовать, что

$$\left(\frac{p(t)}{r(t)}\right)' = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{p(t)}{r(t)} = C,$$

C – некоторая постоянная.

Достаточность следует непосредственно из соотношения (1.5.4). Лемма доказана.

Пусть $Y(t)$ – фундаментальная матрица системы (1.5.1), нормированная в точке $t=0$. Известно, что если матрица $P(t)$ – постоянна ($p(t)\equiv p,\ r(t)\equiv r$), то $Y(t)$ можно определить формулой

$$Y(t) = e^{Pt},$$

которую, очевидно, можно записать и в виде

$$Y(t) = e^{\int_0^t P dx}. \qquad (1.5.5)$$

Оказывается, что такой же формулой можно выразить и фундаментальную матрицу системы (1.5.1), нормированную при $t=0$, и в том случае, когда $p(t)\equiv Cr(t)$, где $C = const \neq 0$, а точнее имеет место

Теорема 1.5.1. *Матрица, определенная формулой*

$$Y(t) = e^{\int_0^t P(x)dx}$$

будет фундаментальной для системы (1.5.1) *в том и только том случае, когда* $p(t)\equiv Cr(t)$, где $C = const \neq 0$.

Доказательство. Предположим, что $Y(t) = e^{\int_0^t P(x)dx}$ является фундаментальной матрицей для системы (1.5.1). Тогда, согласно (1.1.5), будем иметь

$$Y'(t) \equiv P(t)Y(t)$$

или

$$e^{\int_0^t P(x)dx} \cdot P(t) - P(t)e^{\int_0^t P(x)dx} \equiv 0.$$

Выполнение полученного тождества будет равносильным перестановочности матриц $e^{\int_0^t P(x)dx}$ и $P(t)$. Учитывая определение экспоненты матрицы, будем иметь

$$e^{\int_0^t P(x)dx} = E + \int_0^t P(x)dx + \frac{\left(\int_0^t P(x)dx\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(\int_0^t P(x)dx\right)^n}{n!} + \ldots,$$

откуда найдем, что перестановочность матриц $e^{\int_0^t P(x)dx}$ и $P(t)$ в свою очередь равносильна перестановочности матриц $\int_0^t P(x)dx$ и $P(t)$, т. е.

$$P(t) \cdot \int_0^t P(x)dx \equiv \int_0^t P(x)dx \cdot P(t),$$

или в раскрытом виде

$$\begin{pmatrix} p(t)\int_0^t r(x)dx & 0 \\ 0 & r(t)\int_0^t p(x)dx \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r(t)\int_0^t p(x)dx & 0 \\ 0 & p(t)\int_0^t r(x)dx \end{pmatrix}.$$

Отсюда будет следовать, что перестановочность матриц $\int_0^t P(x)dx$ и $P(t)$ равносильна выполнению тождества

$$r(t)\int_0^t p(x)dx \equiv p(t)\int_0^t r(x)dx. \qquad (1.5.6)$$

Продифференцировав это тождество по t, получим

$$r'(t)\int_0^t p(x)dx \equiv p'(t)\int_0^t r(x)dx.$$

Умножив обе части полученного тождества на $r(t)$, затем, учитывая тождество (1.5.6), найдем

$$r'(t)p(t)\int_0^t r(x)dx \equiv p'(t)r(t)\int_0^t r(x)dx.$$

Отсюда будем иметь

$$\left(r'(t)p(t) - p'(t)r(t)\right)\int_0^t r(x)dx \equiv 0,$$

откуда будет следовать, что или

$$r'(t)p(t) - p'(t)r(t) \equiv 0, \qquad (1.5.7)$$

или

$$\int_0^t r(x)dx \equiv 0,$$

причем, поскольку $r(t)$ отлично от тождественного нуля, то второе тождество невозможно. Проинтегрировав тождество (1.5.7) в пределах от 0 до t, получим, что $p(t) \equiv Cr(t)$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

1.6. О нулях решений двумерной линейной однородной системы

Рассматривается вновь двумерная линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2, \\ y_2' = p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2, \end{cases} \tag{1.6.1}$$

где $p_{ij}(t)\ (i, j = 1,2)$ являются действительными функциями, определенными и непрерывными на отрезке $[a,b]$. Имеет место

Теорема 1.6.1. *Если в системе* (1.6.1) $p_{12}(t)$ *и* $p_{21}(t)$ *имеют одинаковые знаки при* $t \in [a,b]$, *то наличие нуля на отрезке* $[a,b]$ *у одной из компонент нетривиального решения системы* (1.6.1) *исключает существование других нулей у компонент на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (1.6.1). Согласно лемме 1.2.3, систему (1.6.1) можно привести к равносильной системе

$$\begin{cases} z_1' = p_0(t)z_2, \\ z_2' = r_0(t)z_1, \end{cases} \tag{1.6.2}$$

в которой

$$p_0(t) = p_{12}(t)e^{\int_{t_0}^{t}[p_{22}(\tau) - p_{11}(\tau)]d\tau}, \quad r_0(t) = p_{21}(t)e^{\int_{t_0}^{t}[p_{11}(\tau) - p_{22}(\tau)]d\tau}. \tag{1.6.3}$$

Из последних соотношений и условий теоремы следует, что в системе (1.6.2) коэффициенты $p_0(t)$ и $r_0(t)$ имеют одинаковые знаки. Тогда, применив теорему 1.3.3, получим, что наличие нуля у одной из компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$, а следовательно, согласно следствию из леммы 1.2.3, и компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$ соответственно, исключает существование других нулей у компонент на рассматриваемом отрезке. Теорема доказана.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий утверждение теоремы 1.6.1.

Пример 9. Пусть в системе (1.6.1) $p_{11}(t) = p_{22}(t) = -t,\ \ p_{12}(t) = m^2,\ p_{21}(t) = n^2$, где m и n – произвольные вещественные числа, не равные нулю. В данном случае, на любом отрезке $[a,b]$, не содержащем нуль, $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ имеют одинаковые знаки. Система (1.6.1) при этом может быть записана в виде

$$\begin{cases} y_1' = -ty_1 + m^2 y_2, \\ y_2' = \ \ n^2 y_1 - ty_2. \end{cases}$$

Приведя рассматриваемую систему к равносильной системе вида (1.6.2), получим следующую систему

$$\begin{cases} z_1' = m^2 z_2, \\ z_2' = n^2 z_1. \end{cases}$$

Общее решение полученной системы (см. пример 3) можно представить в виде

$$z_1(t) = C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt},$$

$$z_2(t) = \frac{n}{m}\left(C_1 e^{mnt} - C_2 e^{-mnt}\right),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Тогда, вновь учитывая соотношения (1.2.20a) и (1.2.20b), получим

$$y_1(t) = \left(C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt}\right) e^{-\int_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)d\tau} = \left(C_3 e^{mnt} + C_4 e^{-mnt}\right) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$y_2(t) = \frac{n}{m}\left(C_1 e^{mnt} - C_2 e^{-mnt}\right) e^{-\int_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)d\tau} = \left(C_3 e^{mnt} - C_4 e^{-mnt}\right) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где C_3 и C_4 – произвольные постоянные. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в том, что если какая-то из компонент полученного решения имеет нуль справа или слева от нуля, то другая компонента в этой же части числовой оси не имеет нуля.

Теорема 1.6.2. *Если в системе* $p_{12}(t)$ *и* $p_{21}(t)$ *сохраняют свои знаки при* $t \in [a,b]$, *то между всякими соседними нулями любой из компонент решения системы* (1.6.1) *находится ровно один нуль другой компоненты того же решения (нули перемежаются).*

Доказательство. Пусть $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (1.6.1). Вновь, воспользовавшись леммой 1.2.3, преобразуем систему (1.6.1) к равносильной системе (1.6.2). Из соотношений (1.6.3) следует, что если $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ сохраняют свои знаки при $t \in [a,b]$, т.е. не имеют нулей на отрезке $[a,b]$, то тогда в системе (1.6.2) $p_0(t) r_0(t) \neq 0$. По отношению к системе (1.6.2) имеют место условия теоремы 1.3.2. Применив ее, получим, что между всякими соседними нулями любой из компонент решения системы (1.6.2), а, следовательно, согласно следствию из леммы 1.2.3, и системы (1.6.1), находится ровно один нуль другой компоненты того же решения. Теорема доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению системы (1.6.1) в предположении, что коэффициенты системы имеют нули. Имеет место

Теорема 1.6.3. *Если* t_0 – *нуль первой (второй) компоненты нетривиального решения системы* (1.6.1) *является нулем и для* $p_{22}(t)$ *(* $p_{11}(t)$ *),* $p_{12}(t)$ *и* $p_{21}(t)$ *знакопостоянны при* $t \in [a,b]$, *то* t_0 *является критической точкой для второй (первой) компоненты этого же решения.*

Доказательство. Пусть $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (1.6.1). Предположим теперь, что t_0 является нулем для $y_2(t)$ и $p_{11}(t)$, т.е.

$$y_2(t_0) = p_{11}(t_0) = 0 \tag{1.6.4}$$

(аналогично проводится доказательство и в случае нуля первой компоненты). Приведем систему (1.6.1) к равносильной системе (1.6.2). Согласно следствию из леммы 1.2.3 будем иметь

$$z_2(t_0)=0.$$

Так как $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ знакопостоянны при $t\in[a,b]$, то из соотношений (1.6.3) будет следовать знакопостоянство функций $p_0(t)$ и $r_0(t)$. Имеют место условия теоремы 1.3.1, согласно которой точка t_0 будет являться точкой экстремума для $z_1(t)$, и, следовательно, $z_1'(t_0)=0$. Тогда, учитывая (1.2.20a) и условия теоремы, будем иметь, что

$$y_1'(t_0)=\left.\left(z_1(t)e^{-\int_{t_0}^{t}p_{11}(\tau)d\tau}\right)'\right|_{t=t_0}=z_1'(t_0)-p_{11}(t_0)z_1(t_0)=0,$$

что и требовалось доказать.

1.7. О качественном поведении решений канонической системы

Рассмотрим вновь каноническую систему

$$\begin{cases} y_1'=p(t)y_2, \\ y_2'=r(t)y_1. \end{cases} \tag{1.7.1}$$

Как нам известно, общее решение системы (1.7.1) содержит две произвольные постоянные, так что возникает двупараметрическое семейство решений. Качественное поведение этого семейства будет определяться тем, как ведут себя $y_1(t)$ и $y_2(t)$ с увеличением t, а точнее, как изменяется положение точки $(y_1(t),y_2(t))$ на фазовой плоскости ([8]). Поэтому фазовый портрет будет двумерным, а качественное поведение определится семейством кривых с указанными направлениями движения по этим кривым при возрастании t. Такие кривые, как известно, называются траекториями или орбитами.

Качественное исследование системы уравнений (1.7.1) на плоскости мы начнем с изучения ее неподвижных точек в предположении, что $p(t)=Cr(t)$, где C – произвольная постоянная, причем $p(t)$ или $r(t)$ – знакопостоянны. Неподвижным точкам соответствуют решения вида $\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\end{pmatrix}$, которые возникают в случае, когда

$$p(t)c_1=0,\quad r(t)c_2=0.$$

Последние соотношения будут иметь место при $c_1=c_2=0$. А, значит, рассматриваемая система будет иметь неподвижную точку в начале координат. Предположим сначала, что $C>0$, а это означает, что коэффициенты $p(t)$ и имеют одинаковые знаки. Как было показано в §1.5 в этом случае компоненты всякого решения системы (1.7.1) будут удовлетворять соотношению

$$y_1^2(t) - Cy_2^2(t) = const, \qquad (1.7.2)$$

из которого следует, что фазовый портрет для системы (1.7.1) в рассматриваемом случае будет представлять собой семейство гипербол с неподвижной точкой в начале координат. При условии, что $p(t) > 0$ и $r(t) > 0$, из уравнений системы (1.7.1) будет следовать, что компоненты $y_1(t)$ и $y_2(t)$ возрастают в первой и третьей четвертях ($y_1 \cdot y_2 > 0$) с ростом t. Во второй четверти ($y_1 < 0, y_2 > 0$) компонента $y_1(t)$ будет убывать, а компонента $y_2(t)$ возрастать; в четвертой четверти – наоборот. При $C < 0$ из соотношения (1.7.2) будет следовать, что фазовый портрет в этом случае представляет собой семейство эллипсов с неподвижной точке в начале координат. Из уравнений системы (1.7.1) в свою очередь, будет следовать, что при возрастании одной из компонент, другая будет убывать. Длина полуосей каждого эллипса будет равна максимуму соответствующей компоненты (при этом другая компонента будет обращаться в нуль).

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая и ограничимся следующими двумя возможностями: $p(t) > 0,\ r(t) > 0$ и $p(t) > 0,\ r(t) < 0$ (случаи $p(t) < 0,\ r(t) < 0$ и $p(t) < 0,\ r(t) > 0$ рассматриваются аналогично). Итак, предположим, что в системе (1.7.1) $p(t) > 0,\ r(t) > 0$. Умножив первое из уравнений системы (1.7.1) на $y_1(t)$, а второе на $y_2(t)$, затем сложив полученные, будем иметь

$$\left(y_1^2 + y_2^2\right)' = 2[p(t) + r(t)]y_1 y_2. \qquad (1.7.3)$$

Так как $p(t) + r(t) > 0$, то из соотношения (1.7.3) будет следовать, что функция $y_1^2(t) + y_2^2(t)$ в первой и третьей четвертях возрастает, а во второй и четвертой четвертях – убывает. И, следовательно, на осях координат функция $y_1^2(t) + y_2^2(t)$ будет принимать свое экстремальное значение тогда, когда одна из компонент будет обращаться в нуль, причем, в этом случае другая компонента будет отлична от нуля (см.следствие 1.3.1). Отсюда следует, что в первой и третьей четвертях при возрастании |t| точки траектории будут удаляться от начала координат, тогда как во второй и четвертой четвертях – чем больше значение $|t|$, тем ближе к началу координат будут располагаться точки траектории. В свою очередь, из уравнений системы (1.7.1) будет следовать, что в первой четверти обе компоненты возрастают, а в третьей – убывают, во второй – первая возрастает, вторая – убывает, а в четвертой – наоборот.

Рассмотрим теперь случай, когда в системе (1.7.1) $p(t) > 0,\ r(t) < 0$. Вновь умножив первое из равенств системы (1.7.1) на $y_1(t)$, а второе на $y_2(t)$,затем вычитывая полученные, будем иметь

$$\left(y_1^2 - y_2^2\right)' = 2[p(t) - r(t)]y_1 y_2. \qquad (1.7.4)$$

Из этого соотношения будет следовать, что в первой и третьей четвертях ($y_1 \cdot y_2 > 0$) функция $y_1^2(t) - y_2^2(t)$ возрастает, а во второй и четвертой – убывает, причем, как и в случае $p(t) > 0,\ r(t) > 0$, свое экстремальное значение она будет принимать на осях координат. Из уравнений системы в этом случае будет следовать, что во второй четверти обе компоненты возрастают, а в четвертой – убывают, в первой четверти первая компонента возрастает, вторая убывает, а в четвертой четверти – наоборот.

1.8. О некоторых системах, интегрируемых в квадратурах

Прежде чем перейти к рассмотрению некоторых аналитических методов решения линейных однородных систем, покажем, что если нам известно какое-то частное решение канонической системы, то общее решение может быть найдено аналитически. Действительно, предположим, что пара $(u_1(t), u_2(t))$ является некоторым нетривиальным частным решением системы

$$\begin{cases} y_1' = p(t)\,y_2, \\ y_2' = \ r(t)\,y_1. \end{cases} \tag{1.8.1}$$

Тогда имеют место тождества

$$\begin{cases} u_1'(t) \equiv p(t)u_2(t), \\ u_2'(t) \equiv \ r(t)u_1(t). \end{cases}$$

откуда найдем, что

$$p(t) \equiv \frac{u_1'(t)}{u_2(t)}, \quad r(t) = \frac{u_2'(t)}{u_1(t)}.$$

Рассматриваемую систему (1.8.1) тогда можно записать в виде

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{u_1'(t)}{u_2(t)}\,y_2, \\ y_2' = \ \dfrac{u_2'(t)}{u_1(t)}\,y_1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_1'u_2(t) = u_1'(t)\,y_2, \\ u_2'(t)\,y_1 \ = \ y_2'u_1(t). \end{cases}$$

Сложив равенства этой системы, получим

$$\big(y_2(t)u_1(t) - y_1(t)u_2(t)\big)' = 0,$$

откуда найдем

$$y_2(t)u_1(t) - y_1(t)u_2(t) = C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Из этого соотношения будем иметь

$$y_2(t) = \frac{C_1 + y_1(t)u_2(t)}{u_1(t)}.$$

Подставив это значение во второе уравнение системы (1.8.2), получим уравнение

$$y_1' = \frac{u_1'(t)}{u_2(t)} \cdot \frac{C_1 + y_1(t)u_2(t)}{u_1(t)},$$

которое можно записать и виде

$$y_1' - \frac{u_1'(t)}{u_2(t)} y_1 = \frac{C_1 u_1'(t)}{u_1(t) u_2(t)}. \tag{1.8.4}$$

Полученное уравнение относительно $y_1(t)$ является неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Для ее решения можно воспользоваться, например, методом вариации постоянной. Нетрудно найти, что общее решение соответствующего однородного уравнения, а именно уравнения

$$y_1' - \frac{u_1'(t)}{u_2(t)} y_1 = 0$$

можно записать в виде

$$y_1(t) = C u_1(t),$$

где C – произвольная постоянная. Будем искать решение неоднородного уравнения (1.8.4) в виде

$$y_1(t) = C(t) u_1(t). \tag{1.8.5}$$

Подставив это значение $y_1(t)$ в уравнение (1.8.4) и, упростив, получим относительно $C(t)$ уравнение с разделяющимися переменными:

$$C'(t) = \frac{C_1 u_1'(t)}{u_1^2(t) u_2(t)},$$

откуда найдем, что

$$C(t) = C_1 \int_{t_0}^{t} \frac{u_1'(\tau)}{u_1^2(\tau) u_2(\tau)} d\tau + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, t_0 – произвольная точка из отрезка $[a,b]$. Тогда, учитывая (1.8.5) и (1.8.3), найдем, что общее решение системы (1.8.1) можно представить в виде

$$y_1(t) = \left(C_1 \int_{t_0}^{t} \frac{u_1'(\tau)}{u_1^2(\tau) u_2(\tau)} d\tau + C_2 \right) u_1(t), \tag{1.8.6a}$$

$$y_2(t) = \frac{C_1}{u_1(t)} + \left(C_1 \int_{t_0}^{t} \frac{u_1'(\tau)}{u_1^2(\tau) u_2(\tau)} d\tau + C_2 \right) u_2(t), \tag{1.8.6b}$$

Таким образом, если известно какое-то частное решение $(u_1(t), u_2(t))$ системы (1.8.1), то общее решение этой системы можно определить формулами (1.8.6a) и (1.8.6b). Заметим, что полученные для общего решения системы (1.8.1) формулы можно записать и в виде

$$y_1(t) = \left(-C_1 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{u_2(\tau)} d\left(\frac{1}{u_1(\tau)} \right) + C_2 \right) u_1(t),$$

$$y_2(t) = \frac{C_1}{u_1(t)} + \left(-C_1 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{u_2(\tau)} d\left(\frac{1}{u_1(\tau)} \right) + C_2 \right) u_2(t),$$

или

$$y_1(t) = \left(C_1 h(t) + C_2 \right) u_1(t),$$

$$y_2(t) = \frac{C_1}{u_1(t)} + \left(C_1 h(t) + C_2 \right) u_2(t),$$

где

$$h(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{1}{u_2(\tau)} d\left(\frac{1}{u_1(\tau)}\right).$$

Непосредственный и традиционный метод интегрирования линейных однородных систем дифференциальных уравнений сводится к образованию путем сложения, вычитания и деления данных уравнений интегрируемых комбинаций, что и было использовано нами при решении некоторых, ранее рассмотренных примеров. Рассмотрим еще один пример системы ([3]), решаемой указанным выше методом.

Пример 9. Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_1 + q(t)y_2, \\ y_2' = a[p(y) - ar(t)]y_1 + a[q(t) + r(t)]y_2, \end{cases}$$

где $p(t), q(t)$ и $r(t)$ – действительные функция, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$. Умножив первое уравнение системы на $-a$, и сложив со вторым, получим

$$y_2' - ay_1' = ar(t)(y_2 - ay_1).$$

Приняв $z(t) = y_2(t) - ay_1(t)$, и проинтегрировав последнее равенство, будем иметь

$$y_2(t) - ay_1(t) = C_1 e^{a\int r(t)dt}.$$

Выразив из последнего соотношения $y_2(t)$ через $y_1(t)$, затем подставив найденное значение в первое уравнение системы, получим, как нетрудно проверить, линейное уравнение первого порядка относительно $y_1(t)$. Последнее, как нам известно, решается аналитически.

Одним из методов решения систем линейных диффренциальных уравнений первого порядка является и метод исключения, приводящий систему к линейному уравнению второго порядка, а именно, если рассматривается система

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2, \\ y_2' = p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2, \end{cases}$$

то, выразив, например, $y_2(t)$ из первого уравнения, затем подставив полученное значение во второе уравнение, мы получим линейное уравнение второго порядка

$$p_{12}y_1'' - (p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{12}')y_1' + (p_{11}p_{12}p_{22} - p_{12}^2p_{21} + p_{11}p_{12}' - p_{11}'p_{12})y_1 = 0.$$

Это уравнение интегрируемо (см. [3]), например, при выполнении следующих условий

1) $p_{11}p_{12}p_{22} - p_{12}^2p_{21} + p_{11}p_{12}' - p_{11}'p_{12} = 0,$
2) $p_{11}p_{12}p_{22} - p_{12}^2p_{21} + p_{11}p_{12}' - p_{11}'p_{12} = ap_{12},\ \ p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{12}' = bp_{12},$

где a и b – произвольные постоянные. В первом случае уравнение имеет частное решение $y(t) = C = const$. Во втором случае уравнение становится линейным с постоянными коэффициентами.

Известны и другие методы аналитического решения определенных двумерных линейных как однородных, так и неоднородных систем дифференциальных уравнений ([3]). Отметим, что используя описанное в лемме 1.2.3 преобразование, нам также удается найти аналитическое решение для достаточно широкого класса систем вида (1.8.1), при условии, что известноаналитическое решение канонической системы, к которой она сводится. В частности, становится возможным нахождение аналитических решений системы (1.8.1) в случае, когда $p_{11}(t) \equiv p_{22}(t)$ и известно решение канонической системы (1.2.1) при $p_0(t) \equiv p_{12}(t)$ и $r_0(t) \equiv p_{21}(t)$. Поясним вышесказанное на следующих примерах.

Пример 10. Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} y_1' = -ty_1 + y_2, \\ y_2' = \dfrac{2}{t^2} y_1 - ty_2. \end{cases}$$

В данном случае, сравнив ее системой (1.8.1), имеем

$$p_{11}(t) = p_{22}(t) = -t, \quad p_{12}(t) = 1, p_{21}(t) = \frac{2}{t^2}.$$

Преобразовав ее к каноническому виду, согласно соотношениям (1.2.19), будем иметь

$$p_0(t) = p_{12}(t) = 1, \quad r_0(t) = p_{21}(t) = \frac{2}{t^2}.$$

Следовательно, рассматриваемая система, согласно лемме 1.2.3, будет равносильна следующей системе

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = \dfrac{2}{t^2} z_1. \end{cases}$$

Общее решение системы (1.8.8) (см. стр. 23) можно записать в виде

$$u_1(t) = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t},$$

$$u_2(t) = 2C_1 t - \frac{C_2}{t^2},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Учитывая связь между компонентами решений рассматриваемой системы и равносильной ей системы, выражаемая формулами (1.2.20a) и (1.2.20b), найдем, что

$$y_1(t) = \left(C_3 t^2 + \frac{C_4}{t} \right) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$y_2(t) = \left(2C_3 t - \frac{C_4}{t^2} \right) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где C_3 и C_4 – произвольные постоянные.

Пример 11. Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} y_1' = f(t) y_1 - m^2 y_2, \\ y_2' = n^2 y_1 + f(t) y_2, \end{cases}$$

где m и n – произвольные вещественные числа, не равные нулю, $f(t)$ – действительная функция, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$. В данной системе

$$p_{11}(t) = p_{22}(t) = f(t), \;\; p_{12}(t) = -m^2, \, p_{21}(t) = n^2.$$

Воспользовавшись соотношениями (1.2.19), найдем, что коэффициенты соответствующей канонической системы будут равны:

$$p_0(t) = p_{12}(t) = -m^2, \;\; r_0(t) = p_{21}(t) = n^2 .$$

Тогда рассматриваемую систему можно привести к следующей равносильной канонической системе

$$\begin{cases} z_1' = -\, m^2 \, z_2, \\ z_2' = \quad n^2 z_1. \end{cases}$$

Общее решение полученной системы можно представить в виде

$$z_1(t) = A\cos(mnt + \varphi),$$

$$z_2(t) = \frac{An}{m}\sin(mnt + \varphi),$$

где A, φ – произвольные постоянные. Учитывая вновь соотношения (1.2.20a) и (1.2.20b), получим формулы для компонент решений рассматриваемой системы:

$$y_1(t) = A\cos(mnt + \varphi)\cdot e^{\int f(t)dt},$$

$$y_2(t) = \frac{An}{m}\sin(mnt + \varphi)\cdot e^{\int f(t)dt}.$$

Пример 12. Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} y_1' = \; f(t)y_1 + m^2 y_2, \\ y_2' = n^2 y_1 + f(t)y_2, \end{cases}$$

где m и n – произвольные вещественные числа, не равные нулю, $f(t)$ – действительная функция, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$. В рассматриваемом случае

$$p_{11}(t) = p_{22}(t) = f(t), \;\; p_{12}(t) = m^2, \, p_{21}(t) = n^2.$$

Воспользовавшись вновь соотношениями (1.2.19), для коэффициентов соответствующей канонической системы будем иметь:

$$p_0(t) = p_{12}(t) = m^2, \;\; r_0(t) = p_{21}(t) = n^2.$$

Соответствующая рассматриваемой системе равносильная каноническая система представится в виде

$$\begin{cases} z_1' = m^2 \, z_2, \\ z_2' = n^2 z_1. \end{cases}$$

Общее решение этой системы можно записать в виде

$$z_1(t) = \frac{m}{n}\left(C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt}\right),$$

$$z_2(t) = C_1 e^{mnt} - C_2 e^{-mnt},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Учитывая вновь соотношения (1.2.20a) и (1.2.20b), получим следующие формулы для компонент решений рассматриваемой системы:

$$y_1(t)=\frac{m}{n}\left(C_1e^{mnt}+C_2e^{-mnt}\right)\cdot e^{\int f(t)dt},$$

$$y_2(t)=\left(C_1e^{mnt}-C_2e^{-mnt}\right)\cdot e^{\int f(t)dt}.$$

Пример 13. Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} y_1'= \ p(t)y_1+q(t)y_2, \\ y_2'=q(t)y_1+p(t)y_2, \end{cases}$$

где $p(t),q(t)$ – действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$. Согласно лемме 1.2.3, система (1.8.9) преобразуется в следующую равносильную каноническую систему

$$\begin{cases} z_1'=q(t)\,z_2, \\ z_2'=q(t)z_1, \end{cases}$$

общее решение которой (см. стр. 24) можно записать в виде

$$z_1(t)=C_1e^{\int q(t)dt}-C_2e^{-\int q(t)dt},$$

$$z_2(t)=C_1e^{\int q(t)dt}+C_2e^{-\int q(t)dt},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Тогда, воспользовавшись формулами (1.2.20a) и (1.2.20b), получим, что общее решение системы (1.8.9) можно представить в виде

$$y_1(t)=\left(C_1e^{\int q(t)dt}-C_2e^{-\int q(t)dt}\right)\cdot e^{\int p(t)dt},$$

$$y_2(t)=\left(C_1e^{\int q(t)dt}+C_2e^{-\int q(t)dt}\right)\cdot e^{\int p(t)dt},$$

Пример 14. Рассматривается следующая система

$$\begin{cases} y_1'= \quad p(t)y_1+q(t)y_2, \\ y_2'=-q(t)y_1+p(t)y_2, \end{cases} \tag{1.8.10}$$

Проведя такие же рассуждения, что и при решении предыдущего примера, а также учитывая решение примера 2 (стр. 19), нетрудно найти, что общее решение системы (1.8.10) можно представить в виде

$$y_1(t)=A\sin\left(\int q(t)dt+\varphi\right)\cdot e^{\int p(t)dt},$$

$$y_2(t)=A\cos\left(\int q(t)dt+\varphi\right)\cdot e^{\int p(t)dt},$$

где A,φ – произвольные постоянные.

Пример 15. Рассматривается следующая линейная однородная система

$$\begin{cases} y_1'-q(t)y_1+p(t)y_2=0, \\ y_2'+p(t)y_1+q(t)y_2=0, \end{cases}$$

где $p(t),q(t)$ – действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$. Покажем, что система (4.7.11) при $y_2\neq 0$, и

$$p(t)=Ct^{2\alpha},\ q(t)=\frac{\alpha}{t},\ \alpha=\frac{k}{1-2k},\ k=0,\pm1,\pm2...$$

где C – произвольная постоянная, интегрируема в квадратурах. Действительно, умножив первое уравнение (1.8.11) на $y_2(t)$, а второе – на $y_1(t)$, затем, вычтя полученные, будем иметь

$$y_1'y_2-y_2'y_1=p(t)y_1^2-2q(t)y_1y_2-p(t)y_2^2.$$

Разделив обе части полученного соотношения на $y_2^2(t)$, и обозначив

$$z(t)=\frac{y_1(t)}{y_2(t)}, \tag{1.8.12}$$

получим следующее уравнение

$$z'=p(t)z^2-3q(t)z-p(t). \tag{1.8.13}$$

Заметим, что из второго уравнения системы (1.8.11) нетрудно получить, что

$$(\ln y_2)'=-p(t)z-q(t)\,. \tag{1.8.14}$$

Уравнение (1.8.13) является уравнением Риккати. И если оно интегрируемо в элементарных функциях, то, определив $z(t)$, можно будет затем из соотношений (1.8.12) и (1.8.14) определить аналитический вид компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$. Подстановка

$$z(t)=e^{-2\int q(t)dt}\cdot u(t) \tag{1.8.15}$$

приведет уравнение (1.8.13) к виду

$$u'=p(t)e^{-2\int q(t)dt}\cdot u^2-p(t)e^{2\int q(t)dt}\cdot u(t). \tag{1.8.16}$$

Так как, согласно условиям теоремы $p(t)=Ct^{2\alpha},\ q(t)=\dfrac{\alpha}{t},$ то подставив в уравнение (1.8.16) вместо $p(t)$ и $q(t)$ соответствующие им значения, и, упростив, будем иметь

$$u'-Cu^2=-Ct^{4\alpha}\,. \tag{1.8.17}$$

Полученное уравнение является частным случаем специального уравнения Риккати ([13, стр. 32]), записываемого обычно в виде

$$u'+u^2=bt^{\beta}\,. \tag{1.8.18}$$

Сравнив уравнение (1.8.18) с (1.8.17), найдем, что в рассматриваемом случае мы имеем $a=b=-C,\ \beta=4\alpha$. Известно ([3]), что при $\beta=\dfrac{4k}{1-2k},\ k=0,\pm1,\pm2...$ уравнение (1.8.18) интегрируемо в элементарных функциях. Следовательно, уравнение (1.8.16) при $\alpha=\dfrac{k}{1-2k},\ k=0,\pm1,\pm2...$ а, значит, и система (1.8.11) также будет интегрируема в квадратурах, что и требовалось показать.

Пример 16. Рассмотрим, в каких случаях, компоненты частного решения канонической системы, определенной на некотором отрезке, не содержащим точку 0, будут представлять собой степенные функции. Предположим, что решением канонической системы является пара (t^n, t^m), $m, n \in N$. Подставив эти значения в систему, получим

$$\begin{cases} nt^{n-1} = p(t)\, t^m, \\ mt^{m-1} = r(t) t^n, \end{cases}$$

откуда найдем $p(t) \equiv nt^{n-m-1}$, $r(t) = mt^{m-n-1}$. Заметим, что в этом случае $p(t)\, r(t) = mnt^{-2}$. Таким образом получили, что пара (t^n, t^m) является частным решеним канонической системы тогда, когда система имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = \ nt^{n-m-1} y_2, \\ y_2' = mt^{m-n-1} y_1, \end{cases}$$

где m и n - заданные значения степеней. В, частности, если принять $m = n-1$, то получим систему

$$\begin{cases} y_1' = \ ny_2, \\ y_2' = (n-1)t^{-2} y_1. \end{cases}$$

Пользуясь формулами для определения общего решения, в случае, когда известно частное решение, нетрудно найти, что общее решение системы (1.8.19) можно записать в виде

$$y_1(t) = -\frac{C_1 n}{(1-2n)t^{n-1}} + C_2 t^n, \ \ y_2(t) = -\frac{C_1 (n-1)}{(1-2n)t^{n-1}} + C_2 t^{n-1},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Г Л А В А 2

О ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ

2.1. Об одной характеристической функции для сравнения систем

Сравниваются следующие канонические системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_1(t)y_2, \\ y_2' = r_1(t)y_1, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

и

$$\begin{cases} z_1' = p_2(t)z_2, \\ z_2' = r_2(t)z_1, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

где $p_i(t), r_i(t)$ $(i=1,2)$ - действительные, непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции.

Предположим, что $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_1(t) \end{pmatrix}$ - произвольное нетривиальное решение системы (2.1.1), а $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix}$ – системы (2.1.2). Тогда будем иметь систему тождеств

$$\begin{cases} u_1'(t) \equiv p_1(t)u_2(t), \\ u_2'(t) \equiv r_1(t)u_1(t), \end{cases} \tag{2.1.3}$$

и

$$\begin{cases} v_1'(t) \equiv p_2(t)v_2(t), \\ v_2'(t) \equiv r_2(t)v_1(t), \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Умножив первые тождества систем (2.1.3) и (2.1.4) соответственно на v_2 и $(-u_2)$, а вторые – на $(-v_1)$ и u_1, затем сложив полученные, будем иметь

$$[u_1(t)v_2(t) - u_2(t)v_1(t)]' = [r_2(t) - r_1(t)]u_1(t)v_1(t) + [p_1(t) - p_2(t)]u_2(t)v_2(t). \tag{2.1.5}$$

Введем в рассмотрение следующую функцию

$$W(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1(t) & v_1(t) \\ u_2(t) & v_2(t) \end{vmatrix} = u_1(t)v_2(t) - u_2(t)v_1(t). \tag{2.1.6}$$

Тогда тождество (2.1.5) можно записать и виде

$$W'(\vec{u},\vec{v}) = [r_2(t) - r_1(t)]u_1(t)v_1(t) + [p_1(t) - p_2(t)]u_2(t)v_2(t). \tag{2.1.7}$$

Заметим, что функцию $W(\vec{u},\vec{v})$ можно представить и в виде следующего скалярного произведения

$$W(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u}, S\vec{v}), \tag{2.1.8}$$

где $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Имеет место

Теорема 2.1.1. $W(\vec{u},\vec{v}) = const$ *для любых решений* $\vec{u}(t)$ и $\vec{v}(t)$ *соответственно систем* (2.1.1) *и* (2.1.2) *тогда и только тогда, когда эти системы совпадают.*

Доказательство. Пусть $\vec{u}(t)$ и $\vec{v}(t)$ - решения одной и той же системы. Тогда, так как в этом случае $p_2(t) \equiv p_1(t)$ и $r_2(t) \equiv r_1(t)$, то из тождества (2.1.7) будет следовать, что $W'(\vec{u},\vec{v})$, и, следовательно, $W(\vec{u},\vec{v}) = const$. Обратно, пусть $W(\vec{u},\vec{v}) = const$. Тогда из тождества (2.1.7) найдем, что

$$[r_2(t) - r_1(t)]u_1(t)v_1(t) + [p_1(t) - p_2(t)]u_2(t)v_2(t) \equiv 0\,. \qquad (2.1.9)$$

Так как это тождество верно для любых решений $\vec{u}(t)$ и $\vec{v}(t)$ систем (2.1.1) и (2.1.2), то взяв произвольную точку $t_0 \in (a,b)$, выберем те нетривиальные решения $\vec{u}(t)$ и $\vec{v}(t)$ систем (2.1.1) и (2.1.2), которые удовлетвотряют условиям

$$u_1(t_0) = v_1(t_0) = 0,\ u_2(t_0) = v_2(t_0) \qquad (2.1.10)$$

(такие решения всегда найдутся в силу теоремы существования задачи Коши для систем рассматриваемого вида). Из утверждения 1.3.1 будет следовать, что $u_2(t_0) = v_2(t_0) \neq 0$. Подставив в тождество (2.1.9) t_0 вместо t, и, учитывая (2.1.10), получим

$$[p_1(t_0) - p_2(t_0)]u_2^2(t_0) = 0,$$

откуда найдем, что

$$p_1(t_0) - p_2(t_0)\,.$$

В силу прозвольности t_0, из последнего соотношения будет следовать, что $p_2(t) \equiv p_1(t)$. Аналогично доказывается и тождество $r_2(t) \equiv r_1(t)$. Теорема доказана. Из теоремы 2.1.1, в частности, следует, что если $\vec{u}(t)$ и $\vec{v}(t)$ – произвольные решения одной и той же системы рассматриваемого вида, то

$$u_1(t)v_2(t) - u_2(t)v_1(t) = const.$$

Заметим, что в этом случае величина $W(\vec{u},\vec{v})$ совпадет с вронскианом системы (1.1.1.)

Определенная выше функция $W(\vec{u},\vec{v})$ позволяет получить и тождество, связывающее решения линейной неоднородной и соответствующей однородной систем уравнений первого порядка. Действительно, рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2 + f(t), \\ y_2' = r(t)y_1 + g(t), \end{cases} \qquad (2.1.11)$$

где $p(t), r(t), f(t)$ и $g(t)$ – действительные, непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, и предположим, что $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольные нетривиальные решения системы (2.1.11). Тогда будем иметь систему тождеств

$$\begin{cases} u_1' \equiv p(t)u_2 + f(t), \\ u_2' \equiv r(t)u_1 + g(t), \end{cases} \qquad (2.1.12a)$$

и

$$\begin{cases} v_1' \equiv p(t)v_2 + f(t), \\ v_2' \equiv r(t)v_1 + g(t), \end{cases} \tag{2.1.12b}$$

Умножив первые тождества систем (2.1.12a) и (2.1.12b) соответственно на v_2 и $(-u_2)$, а вторые – на $(-v_1)$ и u_1, а затем сложив полученные, будем иметь

$$(u_1v_2 - u_2v_1)' = -g(t)(v_1 - u_1) + f(t)(v_2 - u_2)$$

или с учетом (2.1.6)

$$W'(\vec{u}, \vec{v}) = -g(t)(v_1(t) - u_1(t)) + f(t)(v_2(t) - u_2(t)). \tag{2.1.13}$$

Далее, известно ([4]), что функции

$$z_1(t) = v_1(t) - u_1(t),$$
$$z_2(t) = v_2(t) - u_2(t),$$

будут являться решением соответствующей системе (2.1.11) однородной системы, а именно системы:

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1. \end{cases}$$

Воспользовавшись известным свойством определителей, будем иметь

$$W(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1(t) & v_1(t) \\ u_2(t) & v_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1(t) & v_1(t) - u_1(t) \\ u_2(t) & v_2(t) - u_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1(t) & z_1(t) \\ u_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix} = W(\vec{u}, \vec{z}). \tag{2.1.15}$$

Тогда, учитывая соотношение (2.1.13), получим следующее тождество, связывающее решения неоднородной (2.1.11) и соответствующей однородной (2.1.14) систем уравнений

$$W'(\vec{u}, \vec{z}) = -g(t)z_1 + f(t)z_2, \tag{2.1.16a}$$

или

$$[u_1(t)z_2(t) - u_2(t)z_1(t)]' = -g(t)z_1 + f(t)z_2. \tag{2.1.16b}$$

Очевидно, что если общие решения двух систем одни и те же, то эти системы совпадают (соответствующие коэффициенты равны). Возникает естественный вопрос: при каких условиях возможно совпадение одной из компонент решений этих систем. На этот вопрос дает ответ следующая теорема.

Теорема 2.1.2. Для того, чтобы $u(t)$ – одна из компонент нетривиального решения системы (2.1.1) являлась одной из компонент решения системы (2.1.2) необходимо и достаточно, чтобы имело место одно из следующих тождеств

$$u'(t)\left(\ln\frac{p_2(t)}{p_2(t)}\right)' + [p_2(t)r_2(t) - p_1(t)r_1(t)]u(t) \equiv 0, \tag{2.1.17a}$$

$$u'(t)\left(\ln\frac{r_2(t)}{p_2(t)}\right)' + [p_2(t)r_2(t) - p_1(t)r_1(t)]u(t) \equiv 0, \tag{2.1.17b}$$

$$u'(t)\left(\ln\frac{p_2(t)}{r_1(t)}\right)' + [p_2(t)r_2(t) - p_1(t)r_1(t)]u(t) \equiv 0, \tag{2.1.17c}$$

$$u'(t)\left(\ln\frac{r_2(t)}{r_1(t)}\right)' + [p_2(t)r_2(t) - p_1(t)r_1(t)]u(t) \equiv 0, \tag{2.1.17d}$$

Доказательство. Предположим, что $u(t) \equiv u_1(t)$ является первой компонентой нетривиальных решений систем (2.1.1) и (2.1.2) (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда будем иметь систему тождеств

$$\begin{cases} u_1'(t) \equiv p_1(t)u_2(t), \\ u_2'(t) \equiv r_1(t)u_1(t), \end{cases} \tag{2.1.18a}$$

и

$$\begin{cases} u_1'(t) \equiv p_2(t)v_2(t), \\ v_2'(t) \equiv r_2(t)u_1(t), \end{cases} \tag{2.1.18b}$$

Из этих тождеств будет следовать, что

$$\begin{cases} p_1(t)u_2(t) \equiv p_2(t)v_2(t) \\ u_2'(t)r_2(t) \equiv v_2'(t)r_1(t). \end{cases} \tag{2.1.19}$$

Дифференцируя по t первое из этих тождеств, будем иметь

$$p_1'(t)u_2(t) + p_1(t)u_2'(t) \equiv p_2'(t)v_2(t) + p_2(t)v_2'(t)$$

или с учетом тождеств (2.1.18a) и (2.1.18b)

$$p_1'(t)\left(\frac{p_2(t)v_2(t)}{p_1(t)}\right)u_2(t) + p_1(t)\left(\frac{v_2'(t)r_1(t)}{r_2(t)}\right) \equiv p_2'(t)v_2(t) + p_2(t)v_2'(t).$$

Подставив значения $u_2(t)$ и $u_2'(t)$ из тождеств (2.1.19), получим

$$v_2(t)\left(\frac{p_1'(t)p_2(t)}{p_1(t)} - p_2'(t)\right) + \left(\frac{p_1(t)r_1(t)}{r_2(t)} - p_2(t)\right)v_2'(t) \equiv 0$$

или

$$u_1'(t) \cdot \frac{p_2'(t)p_2(t) - p_1'(t)p_2(t)}{p_1(t)p_2(t)} + [p_2(t)r_2(t) - p_1(t)r_1(t)]u_1(t) \equiv 0,$$

Полученное тождество можно записать и в виде

$$u'(t)\left(\ln\frac{p_2(t)}{p_2(t)}\right)' + [p_2(t)r_2(t) - p_1(t)r_1(t)]u(t) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать. Обратное, предположим, что $v_1(t) \equiv u_1(t)$ удовлетворяет системе (2.1.2) и имеет место тождество (2.1.17a). Покажем, что в этом случае $u_1(t)$ является и первой компонентой решения системы (2.1.1). Действительно, имеем

$$\begin{cases} u_1'(t) \equiv p_2(t)v_2(t), \\ v_2'(t) \equiv r_2(t)u_1(t), \end{cases} \tag{2.1.20}$$

Запишем тождество (2.1.17a) в виде

$$u_1'(t) \cdot \frac{p_2'(t)p_2(t) - p_1'(t)p_2(t)}{p_1(t)p_2(t)} + [p_2(t)r_2(t) - p_1(t)r_1(t)]u_1(t) \equiv 0.$$

Подставив в это тождество значения $u_1(t)$ и $u_1'(t)$ из тождеств (2.1.20), получим

$$u_1'(t)\cdot\frac{p_1'(t)}{p_1(t)}+p_1(t)r_1(t)u_1(t)\equiv p_2'(t)v_2(t)+p_2(t)\dot v_2(t)\equiv\left[p_2(t)v_2(t)\right]'=u_1'(t). \qquad (2.1.21)$$

Определим $u_2(t)$ из тождества

$$u_1'(t)\equiv p_1(t)u_2(t). \qquad (2.1.22)$$

Тогда тождество (2.1.21) можно записать в виде

$$p_1'(t)u_2(t)+p_1(t)r_1(t)u_1(t)\equiv p_1'(t)u_2(t)+p_1(t)u_2'(t).$$

Откуда, учитывая, что $p_1(t)\neq 0$, получим

$$u_2'(t)\equiv p_2(t)u_1(t).$$

Учитывая также соотношение (2.1.21), мы получим то, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Заметим, что если для систем (2.1.1) и (2.1.2), в частности, имеет место условие $p_2(t)r_2(t)\equiv p_1(t)r_1(t)$ то из тождеств (2.1.17a)-(2.1.17d), с учетом условия $u'(t)\neq 0$, будет следовать, что либо $p_2(t)\equiv Cp_1(t)$ и при этом $r_1(t)\equiv Cr_2(t)$, либо $p_2(t)\equiv Cr_1(t)$ и при этом $r_2(t)\equiv Cp_1(t)$, где C – некоторая постоянная. Таким образом из теоремы 2.1.2 вытекает

Следствие. *Если для систем* (2.1.1) *и* (2.1.2) *имеет место условие*

$$p_2(t)r_2(t)\equiv p_1(t)r_1(t)$$

и ненулевая функция $u(t)$ *является одновременно одной из компонент решения как системы* (2.1.1), *так и системы* (2.1.2), *то для коэффициентов этих систем имеет место одно из соотношений:*

$$p_2(t)\equiv Cp_1(t),\quad r_1(t)\equiv Cr_2(t),\quad \text{или}\quad p_2(t)\equiv Cr_1(t),\quad r_2(t)\equiv Cp_1(t)$$

где C *– некоторая постоянная.*

2.2. О теоремах сравнений для канонических систем.

Рассматриваются следующие канонические системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'=p_1(t)y_2, \\ y_2'=r_1(t)y_1, \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

и

$$\begin{cases} z_1'=p_2(t)z_2, \\ z_2'=r_2(t)z_1, \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

где $p_i(t), r_i(t)$ $(i=1,2)$ – действительные, непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции.

Лемма 2.2.1. *Пусть* $\vec u(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}$ *и* $\vec v(t)=\begin{pmatrix}v_1(t)\\ v_2(t)\end{pmatrix}$ *– соответственно нетривиальные решения систем* (2.2.1) *и* (2.2.2) *и пусть*

$$p_1(t)p_2(t)>0,\quad r_1(t)r_2(t)>0, \qquad (2.2.3a)$$

$$p_i(t)r_i(t)<0,\quad i=1,2; \qquad (2.2.3b)$$

$$|p_2(t)| > |p_1(t)|, \quad |r_2(t)| > |r_1(t)|. \tag{2.2.3c}$$

Тогда между соседними нулями любой компоненты $\vec{u}(t)$ *находится хотя бы один нуль одной из компонент* $\vec{v}(t)$.

Доказательство. $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – соответственно нетривиальные решения систем (2.2.1) и (2.2.2), и имеют место условия (2.2.3a)-(2.2.3c), причем $p_i(t) > 0,\ r_i(t) < 0$ (доказательство в случае $p_i(t) < 0,\ r_i(t) > 0$ проводится аналогично). Тогда будем иметь систему тождеств

$$\begin{cases} u_1'(t) \equiv p_1(t)u_2(t), \\ u_2'(t) \equiv r_1(t)u_1(t), \end{cases} \tag{2.2.4a}$$

и

$$\begin{cases} v_1'(t) \equiv p_2(t)v_2(t), \\ v_2'(t) \equiv r_2(t)v_1(t), \end{cases} \tag{2.2.4b}$$

и полученное из них в предыдущем параграфе тождество (2.1.5), а именно

$$[u_1(t)v_2(t) - u_2(t)v_1(t)]' = [r_2(t) - r_1(t)]u_1(t)v_1(t) + [p_1(t) - p_2(t)]u_2(t)v_2(t). \tag{2.2.5}$$

Предположим теперь, что t_1 и t_3 – соседние нули одной из компонент $\vec{u}(t)$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что они являются нулями $u_1(t)$, т.е. $u_1(t_1) = u_1(t_3) = 0$ и $u_1(t) \neq 0$ при $t \in (t_1, t_3)$. Согласно теореме 1.3.2 существует, причем лишь одна точка $t_2 \in (t_1, t_3)$, являющаяся нулем для компоненты $u_2(t)$. Так как $u_1(t)$ не имеет нулей на интервале (t_1, t_3), то она будет сохранять свой знак на (t_1, t_3). Предположим, что на (t_1, t_3)

$$u_1(t) > 0 \tag{2.2.6}$$

(доказательство в случае $u_1(t) < 0$ проводится аналогично). Так как, согласно утверждению 1.3.3, t_1 не является кратным нулем, то из соотношения

$$\frac{u_1(t) - u_1(t_1)}{t - t_1} > 0$$

будет следовать, что

$$u_1'(t_1) > 0.$$

Тогда, так как $p_1(t_1) > 0$, то из первого тождества (2.2.4a) найдем, что

$$u_2(t_1) > 0, \tag{2.2.7}$$

и, так как $u_2(t_2) = 0$, то получим, что при $t \in (t_1, t_2)$

$$u_2(t) > 0 \tag{2.2.8}$$

и

$$u_2(t) < 0 \tag{2.2.9}$$

при $t \in (t_2, t_3)$. Допустим теперь, что ни одна из компонент $\vec{v}(t)$ не имеет нулей на интервале (t_1, t_3). Тогда $v_1(t)$ и $v_2(t)$ должны быть знакопостоянны на (t_1, t_3). Предположим, что на (t_1, t_3)

$$v_1(t) > 0,\ v_2(t) > 0. \tag{2.2.10}$$

Тогда, по непрерывности $v_1(t)$ и $v_2(t)$, будем иметь

$$v_1(t_1) \ge 0,\ v_2(t_1) \ge 0. \qquad (2.2.11)$$

Проинтегрировав тождество (2.2.5) в пределах от t_1 до t_2, и, учитывая, что $u_1(t_1) = u_2(t_2) = 0$, получим

$$u_1(t_2)v_2(t_2) - u_2(t_1)v_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [r_2(t) - r_1(t)]u_1(t)v_1(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} [p_1(t) - p_2(t)]u_2(t)v_2(t)dt.$$

В полученном равенстве левая часть, согласно (2.2.6)-(2.2.9), будет неотрицательной, тогда как в силу (2.2.3c), (2.2.6), (2.2.8) и (2.2.10), правая часть отрицательна. Получили противоречие. К аналогичному противоречию мы придем и предположив, что $v_1(t) < 0,\ v_2(t) < 0.$

Предположим теперь, что на (t_1, t_3)

$$v_1(t) < 0,\ v_2(t) > 0. \qquad (2.2.12)$$

(аналогично рассматривается и случай, когда $v_1(t) > 0,\ v_2(t) < 0$). Проинтегрируем вновь тождество (2.2.5), но в пределах от t_2 до t_3, и, учитывая, что $u_1(t_3) = u_2(t_2) = 0$, получим

$$-u_2(t_3)v_1(t_3) - u_1(t_2)v_2(t_2) = \int_{t_2}^{t_3} [r_2(t) - r_1(t)]u_1(t)v_1(t)dt + \int_{t_2}^{t_3} [p_1(t) - p_2(t)]u_2(t)v_2(t)dt.$$

В этом равенстве левая часть, согласно (2.2.6), (2.2.9) и (2.2.12), будет неположительной, тогда как в силу (2.2.3c), (2.2.6), (2.2.9) и (2.2.12), правая часть положительна. Полученное противоречие и завершает доказательство.

Замечание. Непосредственно из доказательства леммы следует, что условия (2.2.3c) можно заменить на слабые условия, а именно, на: $|p_2(t)| \ge |p_1(t)|,\ |r_2(t)| \ge |r_1(t)|$, если $p_2(t) \not\equiv p_1(t)$ или $r_2(t) \not\equiv r_1(t)$.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – *соответственно нетривиальные решения систем* (2.2.1) и (2.2.2), *удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям:*

$$u_1(a) = v_1(a),\quad u_2(a) = v_2(a), \qquad (2.2.13a)$$

и пусть

$$p_1(t)p_2(t) > 0,\quad r_1(t)r_2(t) > 0, \qquad (2.2.13b)$$

$$p_i(t)r_i(t) < 0,\quad i = 1,2; \qquad (2.2.13c)$$

$$|p_2(t)| > |p_1(t)|,\quad |r_2(t)| > |r_1(t)|. \qquad (2.2.13d)$$

Тогда, если одна из компонент $\vec{u}(t)$ *имеет* ℓ *нулей на отрезке* $[a,b]$, *то одна из компонент* $\vec{v}(t)$ *имеет на том же отрезке не менее* ℓ *нулей, причем* k*-ый нуль компоненты* $\vec{v}(t)$ *не больше* k *ого нуля компоненты* $\vec{u}(t)$.

Доказательство. Предположим, что по отношению к системам (2.2.1) и (2.2.2) имеют место условия (2.2.13a)-(2.2.13d), причем $p_i(t) > 0,\ r_i(t) < 0$ (аналогично рассматривается случай $p_i(t) < 0,\ r_i(t) > 0$). Пусть $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и

$\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – соответственно нетривиальные решения систем (2.2.1) и (2.2.2). Тогда верны тождества (2.2.4a), (2.2.4b) и (2.2.5). Предположим теперь, что t_1 -наиболее близкий к a нуль одной из компонент $\vec{u}(t)$, отличный от a (в случае совпадения t_1 с a доказательство очевидно). Такой нуль всегда существует, так как нули компонент $\vec{u}(t)$, согласно утверждению 1.3.2, простые и изолированные. Не теряя общности рассуждений, предположим, что t_1 - нуль $u_2(t)$. Так как компонента $u_2(t)$ по предположению не имеет нулей на (a,t_1), то она будет сохранять свой знак на (a,t_1)

$$u_2(t)>0 \tag{2.2.14}$$

(доказательство в случае $u_2(t)<0$ проводится аналогично). Отсюда будет следовать, что $u_2(a)>0$ (если предположить, что $u_2(a)=0$, то по теореме Ролля найдется точка $t_0\in(a,t_1)$ такая, что $u_2'(t_0)=0$, но тогда из второго тождества системы (2.2.4a) найдем, что $u_1(t_0)=0$, что противоречит предположению относительно выбора точки t_1). И, так как $u_2(t_1)=0$, то отсюда, как и при доказательстве леммы 2.1.1, будет следовать, что $u_2'(t)<0$ при $t\in(a,t_1)$. Очевидно, что для доказательства теоремы, в силу леммы 2.2.1, достаточно показать, что одна из компонент $\vec{v}(t)$ имеет на интервале (a,t_1) по крайней мере один нуль. Предположим обратное, т. е. $v_1(t)v_2(t)\neq 0$ при $t\in(a,t_1)$. Тогда $v_1(t)$ и $v_2(t)$ будут сохранять свои знаки на (a,t_1). И, так как $v_2(a)=u_2(a)>0$, то, следовательно, будем иметь

$$v_2(t)>0, \tag{2.2.15}$$

и, в частности,

$$v_2(t_1)\geq 0. \tag{2.2.16}$$

Так как при $t\in(a,t_1)$ $u_2'(t)<0$ и $r_1(t)<0$, то из второго тождества системы (2.2.4a) будет следовать, что на интервале (a,t_1)

$$u_1(t)>0. \tag{2.2.17}$$

Тогда, так как $u_1(a)\neq 0$, то получим, что

$$u_1(a)>0,\ u_1(t_1)>0 \tag{2.2.18}$$

(так как $u_2(t_1)=0$, то в силу утверждения 1.3.1, $u_1(t_1)$ не может равняться нулю). Так как $v_1(t)$ сохраняет свой знак на $(a,t_1]$ и $v_1(a)=u_1(a)>0$, то на интервале (a,t_1)

$$v_1(t)>0. \tag{2.2.19}$$

Проинтегрировав тождество (2.2.5) в пределах от a до t_1, и, учитывая условие (2.2.13a), а также то, что $u_2(t_1)=0$, будем иметь

$$u_1(t_1)v_2(t_1)=\int_a^{t_1}[r_2(t)-r_1(t)]u_1(t)v_1(t)dt+\int_a^{t_1}[p_1(t)-p_2(t)]u_2(t)v_2(t)dt.$$

В последнем равенстве левая часть, согласно (2.2.16) и (2.2.18), будет неотрицательной, тогда как, в силу (2.2.13d), (2.2.14), (2.2.15), (2.2.17) и (2.2.19), правая часть - отрицательна. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что условия (2.2.13d) можно заменить на слабые условия, а именно, на: $|p_2(t)| \ge |p_1(t)|,\ |r_2(t)| \ge |r_1(t)|$, если $p_2(t) \not\equiv p_1(t)$ или $r_2(t) \not\equiv r_1(t)$.

Следствие. *Если* $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – *произвольное решение системы*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases}$$

в которой $p(t)r(t) < 0$ *при* $t \in [a,b]$, *а* t_1 *и* t_2 – *соседние нули одной из компонент* $\vec{y}(t)$, *то для любого решения* $\vec{u}(t)$ *этой системы, линейно независимого от* $\vec{y}(t)$, *соответствующая компонента* $\vec{u}(t)$ *имеет на интервале* (t_1, t_2) *ровно один* нуль.

Доказательство. Пусть $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ и $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольные линейно-независимые решения рассматривемой системы, а t_1 и t_2 – соседние нули компоненты $y_2(t)$(аналогично проводится доказательство и в случае компоненты $y_1(t)$). Примем в системах (2.2.1) и (2.2.2)

$$p_1(t) \equiv p_2(t) \equiv p(t), \quad r_1(t) \equiv r_2(t) \equiv r(t).$$

Очевидно, что имеют место условия теоремы 2.2.1, согласно которой одна из компонент $\vec{u}(t)$, например, $u_2(t)$ должна иметь на отрезке $[t_1,t_2]$ хотя бы один нуль. Далее, так как решения $\vec{y}(t)$ и $\vec{u}(t)$ линейно независимы, то их вронскиан в любой точке $[a,b]$, отличен от нуля (см. §1.1). Пусть W(t) – вронскиан, соответствующий решениям $\vec{y}(t)$ и $\vec{u}(t)$.Тогда, учитывая то, что $y_2(t_1) = y_2(t_2) = 0$, будем иметь

$$W(t_1) = \begin{vmatrix} y_1(t_1) & u_1(t_1) \\ y_2(t_1) & u_2(t_1) \end{vmatrix} = y_1(t_1)u_2(t_1) \ne 0,$$

$$W(t_2) = \begin{vmatrix} y_1(t_2) & u_1(t_2) \\ y_2(t_2) & u_2(t_2) \end{vmatrix} = y_1(t_2)u_2(t_2) \ne 0.$$

Из этих соотношений следует, что $u_2(t_1)u_2(t_2) \ne 0$, и, следовательно, нуль (нули)компоненты $u_2(t)$ находятся на интервале (t_1, t_2). Предположим теперь, что $u_2(t)$имеет на этом интервале более одного нуля и пусть t_3 и t_4 – соседние нули $u_2(t)$($t_1 < t_3 < t_4 < t_2$). Согласно теореме 2.2.1, $y_2(t)$ должна иметь хотя бы один нуль на отрезке $[t_3,t_4]$. Однако это противоречит выбору t_1 и t_2. Значит, $u_2(t)$ имеет в интервале (t_1, t_2) всего лишь один нуль.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – *соответственно нетривиальные решения систем* (2.2.1) и (2.2.2), *удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям:*

$$u_1(a) = v_1(a), \quad u_2(a) = v_2(a), \tag{2.2.20a}$$

и пусть

$$p_1(t)p_2(t)>0,\quad r_1(t)r_2(t)>0, \tag{2.2.20b}$$

$$p_i(t)r_i(t)>0,\quad i=1,2; \tag{2.2.20c}$$

$$|p_2(t)|>|p_1(t)|,\quad |r_2(t)|<|r_1(t)|. \tag{2.2.20d}$$

Тогда, если одна из компонент $\vec{u}(t)$ *имеет нуль на отрезке* $[a,b]$, *то одна из компонент* $\vec{v}(t)$ *имеет на том же отрезке нуль, единственный для обеих компонент, причем нуль компоненты* $\vec{v}(t)$ *не больше нуля компоненты* $\vec{u}(t)$.

Доказательство. Пусть $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}v_1(t)\\v_2(t)\end{pmatrix}$ – соответственно нетривиальные решения систем (2.2.1) и (2.2.2) и имеют место условия (2.2.20a)-(2.2.20d). Предположим, что $p_i(t)>0,\ r_i(t)<0$ (случай $p_i(t)<0,\ r_i(t)>0$ рассматривается аналогично). Заметим сначала, что если нуль одной из компонент совпадает с точкой a, то доказательство в силу условия (2.2.20a) очевидно. Поэтому предположим, что t_1 – нуль одной из компонент $\vec{u}(t)$ в интервале $(a,b]$. Не теряя общности, можно считать, что t_1 – нуль $u_2(t)$. Согласно теореме 1.2.3 ни одна из компонент $\vec{u}(t)$ не может иметь на $[a,b]$ других нулей, кроме t_1. Отсюда будет следовать, что $u_2(t)$ не имеет нулей на (a,t_1), и, следовательно сохраняет свой знак на (a,t_1). Предположим, что на (a,t_1) $u_2(t)>0$. Допустим теперь, что утверждение теоремы не имеет места, т.е. $v_1(t)v_2(t)\neq 0$ при $t\in(a,t_1)$, и, следовательно, каждая из компонент $v_1(t)$ и $v_2(t)$ будет сохранять свой знак на (a,t_1). Не теряя общности рассуждений, предположим, что $v_2(t)>0$ при $t\in(a,t_1)$. Далее, проведя рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 2.2.1, и, вновь проинтегрировав тождество (2.1.5) от a до t_1, и, учитывая условие (2.2.20), а также то, что $u_2(t_1)=0$, получим

$$u_1(t_1)v_2(t_1)=\int_a^{t_1}[r_2(t)-r_1(t)]u_1(t)v_1(t)dt+\int_a^{t_1}[p_1(t)-p_2(t)]u_2(t)v_2(t)dt.$$

В этом равенстве левая часть будет неотрицательна, тогда как правая – отрицательна. Полученное противоречие и доказывает теорему (единственность нуля у компоненты $\vec{v}(t)$ следует из теоремы 1.2.3).

Заметим, что как и в случае теоремы 2.2.1, так и в теореме 2.2.2 условия (2.2.20d) можно заменить на слабые условия, а именно, на: $|p_2(t)|\geq|p_1(t)|,\ |r_2(t)|\geq|r_1(t)|$, если $p_2(t)\not\equiv p_1(t)$ или $r_2(t)\not\equiv r_1(t)$.

Теорема 2.2.3 (о численном сравнении). *Пусть* $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}v_1(t)\\v_2(t)\end{pmatrix}$ – *соответственно нетривиальные решения систем* (2.2.1) *и* (2.2.2), *удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям:*

$$u_1(a)=v_1(a),\quad u_2(a)=v_2(a), \tag{2.2.21}$$

и пусть

$$p_1(t)>p_2(t),\quad r_2(t)>r_1(t). \tag{2.2.22}$$

Тогда, в любой окрестности справа от a*, в которой* $u_1(t)v_1(t)\neq 0$ *и* $u_2(t)v_2(t)\neq 0$,

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)}>\frac{v_1(t)}{v_2(t)}.$$

Доказательство. Предположим, что $a<t\leq b$ и проинтегрируем тождество (2.2.5) в пределах от a до t. Учитывая условие (2.2.21), получим

$$-u_2(t)v_1(t)-u_1(t)v_2(t)=\int_a^t[r_2(t)-r_1(t)]u_1(t)v_1(t)dt+\int_a^t[p_1(t)-p_2(t)]u_2(t)v_2(t)dt. \quad (2.2.23)$$

Заметим, что функции $u_1(t)v_1(t)$ и $u_2(t)v_2(t)$, будучи непрерывными, и не обращающимися в нуль на интервале (a,t), будут сохранять свои знаки, И так как

$$u_1(a)v_1(a)=u_1^2(a)\geq 0,\quad u_2(a)v_2(a)=u_2^2(a)\geq 0,$$

а $u_1(t)v_1(t)\neq 0$ и $u_2(t)v_2(t)\neq 0$, то каждое из выражений $u_1(t)v_1(t)$ и $u_2(t)v_2(t)$ будет строго положительным. Тогда правая часть тождества (2.2.23) будет положительной, и, следовательно, таковой будет и левая часть, т.е.

$$u_1(t)v_2(t)-u_2(t)v_1(t)>0,$$

откуда, учитывая, что $u_2(t)v_2(t)>0$, найдем, что

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)}>\frac{v_1(t)}{v_2(t)}.$$

Теорема доказана.

В заключении отметим, что неравенства $p_1(t)>p_2(t),\ r_2(t)>r_1(t).$можно заменить более слабыми неравенствами, а именно: $p_1(t)\geq p_2(t),\ r_2(t)\geq r_1(t)$, если только $p_1(t)$ и $p_2(t)$, а также $r_1(t)$ и $r_2(t)$ не равны тождественно ни в какой окрестности точки a справа от a, так как и в этих случаях интеграл в правой части соотношения (2.2.23) будет положительным.

Рассмотрим теперь одну теорему сравнения,которую можно получить с помощью известной теоремы Штурма. Для этого нам понадобятся ([13,стр. 204-206]) следующие

Лемма 2.2.2. *Если* $p_0,\ p_0',r_0\in C[a,b]$*, то уравнение*

$$z''+p_0(t)z'+r_0(t)z=0 \quad (2.2.24a)$$

равносильно уравнению

$$y''+q(t)y=0 \quad (2.2.24b)$$

в котором

$$q(t)=-\frac{p_0^2(t)}{4}-\frac{p_0'(t)}{2}+r_0(t), \quad (2.2.24c)$$

т. е. всякому решению $z(t)$ *уравнения* (2.2.24a) *соответствует одно и только одно решение* $y(t)$ *уравнения* (2.2.24b), *задаваемое формулой*

$$y(t)=z(t)e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}p_0(\tau)d\tau}. \quad (2.2.24d)$$

Заметим, что из соотношения (2.2.24d) следует, что *нули функций* $y(t)$ *и* $z(t)$ *на отрезке* $[a,b]$ *будут совпадать.*

Теорема Штурма о сравнении [3, стр. 134]. *Пусть даны два дифференциальных уравнения*

$$y'' + q_1(t)y = 0$$

и

$$y'' + q_2(t)y = 0,$$

причем $q_2(t) \ge q_1(t)$. *Тогда между двумя последовательными нулями решения первого уравнения обязательно лежит по крайней мере один нуль любого решения второго уравнения.*

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_1' = p(t)u_2, \\ u_2' = r(t)u_1, \end{cases} \tag{2.2.25}$$

предположив, что $p,\ r \in C^2[a,b]$. Дифференцируя по t первое уравнение системы (2.2.25), получим

$$u_1'' - p'(t)u_2 - p(t)u_2' = 0. \tag{2.2.26}$$

Далее, выразив u_2 и u_2' из уравнений (2.2.25), а затем подставив найденные значения в уравнение (2.2.26), получим следующее уравнение

$$u_1'' - \frac{p'(t)}{p(t)}u_1' - p(t)r(t)u_1 = 0. \tag{2.2.27}$$

Обозначим

$$k(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{p'(t)}{p(t)}, \tag{2.2.28}$$

тогда, согласно лемме 2.2.2, уравнение (2.2.27) можно привести к следующему равносильному уравнению

$$y'' + q(t)y = 0, \tag{2.2.29}$$

в котором, с учетом (2.2.24c) и (2.2.28), будем иметь

$$q(t) = -k^2(t) - k'(t) - p(t)r(t), \tag{2.2.30}$$

причем, согласно (2.2.24d), компонента $u_1(t)$ решения системы уравнений (2.2.25) будет связана с решением $y(t)$ уравнения (2.2.27) соотношением

$$y(t) = u_1(t)e^{\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau},$$

где $t_0 \in [a,b]$. Из последнего соотношения следует, что *нули функций* $u_1(t)$ *и* $y(t)$ *на отрезке* $[a,b]$ *совпадают.*

Рассмотрим вновь системы (2.2.1) и (2.2.2), предполагая, что

$$p_i(t) > 0,\ r_i(t) < 0 \ \ (i = 1,2).$$

Имеет место

Теорема 2.2.5. *Пусть в системах* (2.2.1) и (2.2.2) $p_i,\ r_i \in C^2[a,b]\ \ (i=1,2),$ *и*

$$P(t) = \frac{p_2(t)}{p_1(t)}.$$

Если имеют место условия:

1. $p_i'(t) \le 0,\ \ r_i'(t) \ge 0 \qquad (p_i'(t) \ge 0,\ \ r_i'(t) \le 0)\ \ i = 1,2$,
2. $P'(t) \ge 0 \qquad (P'(t) \le 0)$,
3. $(\ln P(t))'' \ge 0$,
4. $p_1(t)\cdot r_1(t) \equiv p_2(t)\cdot r_2(t),$

$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ - *соответственно нетривиальные решения систем*

(2.2.1) *и* (2.2.2), *то*

a) *между всякими нулями* $u_1(t)$ *находится хотя бы один нуль* $v_1(t)$,

b) *между всякими нулями* $v_2(t)$ *находится хотя бы один нуль* $u_2(t)$.

Доказательство. Пусть $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – соответственно нетривиальные решения систем (2.2.1) и (2.2.2), и имеют место условия:

$$p_i'(t) \le 0,\ \ r_i'(t) \ge 0\ \ (i = 1,2),\ \ P'(t) \ge 0$$

(аналогично проводится доказательство и в другом случае). Повторив вышеприведеные рассуждения к каждой из систем (2.2.1) и (2.2.2), и, обозначив

$$k_i(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{p_i'(t)}{p_i(t)},\ i = 1,2. \qquad (2.2.31)$$

$$q_i(t) = -k_i^2(t) - k_i' - p_i(t)r_i(t),\ \ i = 1,2, \qquad (2.2.32)$$

получим соответствующие им уравнения:

$$y'' + q_1(t)y = 0 \qquad (2.2.33)$$

и

$$z'' + q_2(t)z = 0\,. \qquad (2.2.34)$$

Соотношения, связывающие первые компоненты решений систем (2.2.1) и (2.2.2) с решениями соответствующих им уравнений (2.2.33) и (2.2.34), будут иметь вид:

$$y(t) = u_1(t)e^{\int_{t_0}^{t} k_1(\tau)d\tau} \qquad (2.2.35a)$$

и

$$z(t) = v_1(t)e^{\int_{t_1}^{t} k_2(\tau)d\tau}\,, \qquad (2.2.35b)$$

где $t_0, t_1 \in [a,b]$. В силу наших предположений будем иметь

$$k_i(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} \ge 0,\ i = 1,2. \qquad (2.2.36)$$

Пусть $P(t) = \frac{p_2(t)}{p_1(t)}$. Поскольку $P(t) > 0$ и $P'(t) \ge 0$, то будем иметь

$$\frac{P'(t)}{P(t)} \ge 0\,.$$

Подставив вместо $P(t)$ в это неравенство $\frac{p_2(t)}{p_1(t)}$ и, упростив, получим

$$\left(\frac{p_2(t)}{p_1(t)}\right)' \cdot \frac{p_1(t)}{p_2(t)} \ge 0$$

или

$$\frac{p_1'(t)}{p_1(t)} \le \frac{p_2'(t)}{p_2(t)}\,. \qquad (2.2.37)$$

Учитывая (2.2.36) и (2.2.37), получим, что для любого $t \in [a,b]$

$$k_1(t) \ge k_2(t) \ge 0. \qquad (2.2.38)$$

Следовательно, для любого $t \in [a,b]$ будет верно неравенство

$$k_1^2(t) \ge k_2^2(t)\,. \qquad (2.2.39a)$$

Далее, так как в силу условий теоремы $\left(\ln P(t)\right)'' \ge 0$, то найдем, что

$$\left(\frac{P'(t)}{P(t)}\right)' \ge 0\,.$$

Подставив вместо $P(t)$ в это неравенство $\frac{p_2(t)}{p_1(t)}$ и, упростив, получим

$$\left(\frac{p_2'(t)}{p_2(t)} - \frac{p_1'(t)}{p_1(t)}\right)' \ge 0$$

или, с учетом (2.2.31)

$$k_1'(t) \ge k_2'(t)\,. \qquad (2.2.39b)$$

И, наконец, так как по условию теоремы $p_1(t) \cdot r_1(t) \equiv p_2(t) \cdot r_2(t)$ при $t \in [a,b]$, то учитывая неравенства (2.2.39a) и (2.2.39b), получим

$$q_2(t) - q_1(t) = \left(k_1^2(t) - k_2^2(t)\right) + \left(k_1'(t) - k_2'(t)\right) + p_1(t) r_1(t) - p_2(t) r_2(t) \ge 0$$

или

$$q_2(t) \ge q_1(t)\,.$$

Из условий теоремы и обозначений (2.2.31) и (2.2.32) будет также следовать, что $q_1, q_2 \in C[a,b]$. Таким образом получим, что для уравнений (2.2.33) и (2.2.34) имеют место условия теоремы Штурма о сравнении, согласно которой между нулями всякого решения $y(t)$ уравнения (2.2.33), а значит, согласно (2.2.35a), и $u_1(t)$, найдется хотя бы один нуль всякого решения уравнения (2.2.34) $z(t)$, а значит, согласно (2.2.35b), и $v_1(t)$. Для доказательства утверждения b) достаточно повторить вышепроведенные рассуждения применительно к системам (2.2.31) и (2.2.32), записав их в виде

$$\begin{cases} (-z_2)' = -r_2(t)z_1, \\ z_1' = -p_2(t)(-z_2), \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (-y_2)' = -r_1(t)y_1, \\ y_1' = -p_1(t)(-y_2). \end{cases}$$

Теорема доказана.

Замечание. Учитывая процесс доказательства теоремы 2.2.5, можно условия 1-3 заменить на одно, более слабое условие вида: для любого $t \in (a,b)$

$$k_1'(t) + k_1^2(t) \ge k_2'(t) + k_2^2(t),$$

где $k_i(t)$ $(i = 1,2)$ определяются из соотношений (2.2.31).

Обозначим через n_i – число нулей i-ой компоненты нетривиального решения системы (2.2.1), а через m_i $(i = 1,2)$ – число нулей i-ой компоненты нетривиального решения системы (2.2.2). Имеет место

Теорема 2.2.6. *Пусть в системах* (2.2.1) и (2.2.2) $p_i,\ r_i \in C^2[a,b]$ $(i = 1,2)$,

$$P(t) = \frac{p_2(t)}{p_1(t)}.$$

и имеют место условия:

1. $p_i'(t) \le 0,\ \ r_i'(t) \ge 0$ $\qquad (p_i'(t) \ge 0,\ \ r_i'(t) \le 0)$ $\ i = 1,2$,
2. $P'(t) \ge 0$ $\qquad (P'(t) \le 0)$,
3. $(\ln P(t))'' \ge 0$,
4. $p_1(t) \cdot r_1(t) \equiv p_2(t) \cdot r_2(t).$

Тогда, если компоненты нетривиального решения системы (2.2.1) *имеют нули, причем* $n_1 = n_2 + 1$, *то их число совпадет с числом нулей соответствующей компоненты любого нетривиального решения системы* (2.2.2) *или будет отличаться на единицу.*

Доказательство. По условию теоремы $n_i > 0$ $(i = 1,2)$. Из теоремы 2.2.5, будет следовать, что имеют место неравенства

$$m_1 \ge n_1 - 1,\ \ n_2 \ge m_2 - 1. \qquad (2.2.41a)$$

Предположим теперь, что $n_1 = n_2 + 1$. Согласно теореме 1.3.2 будет верным следующее условие:

$$m_1 = m_2 \quad \text{или} \quad |m_1 - m_2| = 1. \qquad (2.2.41b)$$

Если $m_1 = m_2$, то с учетом (2.2.41a) будем иметь

$$n_1 = n_2 + 1 \ge m_2 = m_1 \ge n_1 - 1 = n_2,$$

откуда и из (2.2.41a) будет следовать, что

$$n_1 - 1 \le m_1 \le n_1,\ \ n_2 \le m_2 \le n_2 + 1.$$

Если же $|m_1 - m_2| = 1$, то легко найти, что в случае $m_1 - m_2 = 1$ будем иметь

$$n_1 - 1 \le m_1 \le n_1 + 1,\ \ n_2 - 1 \le m_2 \le n_2 + 1.$$

а при $m_2 - m_1 = 1$ получим

$$m_1 = n_1 - 1, \quad m_2 = n_2 + 1.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Из процесса доказательства теоремы 2.2.6 следует, что если имеют место условия теоремы 2.2.6 и $n_1 = n_2 + 1$, то возможны следующие варианты:

1. $m_1 = n_1, \ m_2 = n_2.$
2. $m_1 = n_1, \ m_2 = n_2 + 1.$
3. $m_1 = n_1 - 1, \ m_2 = n_2.$
4. $m_1 = n_1 - 1, \ m_2 = n_2 - 1.$
5. $m_1 = n_1 + 1, \ m_2 = n_2 + 1.$
6. $m_1 = n_1 - 1, \ m_2 = n_2 + 1.$

Замечание 2. Повторив изложенные в теореме 2.2.6 рассуждения, нетрудно показать, что при $n_1 = n_2 - 1$ возможны два случая:

1. $m_1 = n_1, \ m_2 = n_2 - 2.$
2. $m_1 = n_1 + 2, \ m_2 = n_2,$

а в случае $n_1 = n_2$, возможными будут следующие случаи:

1. $m_1 = n_1, \ m_2 = n_2.$
2. $m_1 = n_1, \ m_2 = n_2 - 1 \ \ (m_1 = n_1 - 1, \, m_2 = n_2).$
3. $m_1 = n_1, \ m_2 = n_2 + 1 \ \ (m_1 = n_1, \, m_2 = n_2 + 1).$
4. $m_1 = n_1 - 1, \ m_2 = n_2 - 1.$
5. $m_1 = n_1 + 1, \ m_2 = n_2 + 1.$
6. $m_1 = n_1 1, \ m_2 = n_2 - 2.$

Рассмотрим параллельно с системой

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases} \tag{2.2.42a}$$

систему

$$\begin{cases} z_1' = e^{f(t)}p(t)z_2, \\ z_2' = e^{-f(t)}(t)r(t)z_{1.}. \end{cases} \tag{2.2.42b}$$

Из теоремы 2.2.6 будет следовать

Теорема 2.2.7. *Пусть имеют место условия:*

1. $p, r, f \in C^2[a,b], \ (i = 1,2), \ p(t) > 0, \ r(t) < 0,$
2. $p'(t) \le 0, \ r'(t) \ge 0, \qquad \left(p'(t) \ge 0, \ r'(t) \le 0\right),$
3. $f'(t) \ge 0$, $\qquad \left(f'(t) \le 0\right),$
4. $\dfrac{p'(t)}{p(t)} \le -\dfrac{f'(t)}{f(t)}, \qquad \left(\dfrac{r'(t)}{r(t)} \ge -\dfrac{f'(t)}{f(t)}\right),$
5. $f''(t) \ge 0$.

Тогда, если компоненты нетривиального решения системы (2.2.42a) *имеют нули, причем* $n_1 = n_2 + 1$, *то их число совпадет с числом нулей соответствующей компоненты всякого нетривиального решения системы* (2.2.42b) *или будет отличаться на единицу.*

Доказательство. Предположим, что

$$p'(t) \le 0,\ \ r'(t) \ge 0 \tag{2.2.43}$$

и функция $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Предположим, что

$$f'(t) \ge 0,\ \ \frac{p'(t)}{p(t)} \le -\frac{f'(t)}{f(t)},\ \ f''(t) \ge 0 \tag{2.2.44}$$

(аналогично рассматривается случай в скобках). Примем

$$p_1(t) = p(t),\ r_1(t) = r(t),\ p_2(t) = e^{f(t)}p(t),\ r_2(t) = e^{-f(t)}r(t).$$

Тогда, с учетом условий (2.2.43) и (2.2.44), будем иметь

1. $p_i(t) > 0,\ r_i(t) < 0 \quad (i = 1,2)$,
2. $p_1'(t) \le 0,\ p_2'(t) = e^{f(t)}f'(t)p(t) + e^{f(t)}p'(t) = e^{f(t)}\big(f'(t)p(t) + p'(t)\big) \le 0$,
3. $r_1'(t) \ge 0,\ r_2'(t) = -e^{-f(t)}f'(t)r(t) + e^{-f(t)}r''(t) = e^{-f(t)}\big(-f'(t)r(t) + r'(t)\big) \ge 0$,
4. $P'(t) = \left(\dfrac{p_2(t)}{p_1(t)}\right)' = e^{f(t)}f'(t) \ge 0$,
5. $\big(\ln P(t)\big)'' = f''(t) \ge 0$,
6. $p_1(t)\cdot r_1(t) \equiv\ p_2(t)\cdot r_2(t)$.

Таким образом имеют место все условия теоремы 2.2.6. Применив ее, получим, то, что требовалось доказать.

Замечание. Выполнение условия

$$\frac{p'(t)}{p(t)} \le -\frac{f'(t)}{f(t)}, \tag{2.2.45}$$

можно опеспечить, например, следующим образом. В силу непрерывности $\dfrac{p'(t)}{p(t)}$, и, следовательно, его ограниченности на отрезке $[a,b]$, найдется число C, такое, что

$$C = \max_{a\le t\le b}\frac{p'(t)}{p(t)}.$$

Заметим, что в силу условий теоремы $C \le 0$ и условие $0 \le f(t) \le -C$ обеспечит выполнение и неравенства (2.2.45). Очевидно, что такой выбор функции $f(t)$ всегда возможен. Например, этому условию, а также условиям 3,5 теоремы будут удовлетворять линейные функции $f(x) = kx + m,$ где k – любое неотрицательное число, удовлетворяющее условию $k \le -C$, а m – произвольное число. Аналогичным образом можно обеспечить выполнение условия 3-5 в случае $\dfrac{r'(t)}{r(t)} \ge -\dfrac{f'(t)}{f(t)}$. Для этого достаточно, например, определить $f(x) = kx + m,$

где k – любое неположительное число, удовлетворяющее условию $k \geq -C$, m – произвольное число, и

$$C = \min_{a \leq t \leq b} \frac{r'(t)}{r(t)}.$$

Из теоремы 2.2.7, в частности, следует, что для определения числа нулей компонент решений некоторых систем типа (2.2.42a) при условии, что

1. $p, r \in C^2[a,b],\ p(t) > 0,\ r(t) < 0,$
2. функции $p(t), -r(t)$ – монотонные одного характера,

можно построить новую систему (2.2.42b) так, чтобы при этом выполнялись условия 3-5 теоремы 2.2.7 и можно было бы аналитически найти число нулей компонент решений системы (2.2.42b), которое, согласно утверждению теоремы 2.2.7, позволит оценить количество нулей компонент решений системы (2.2.42a). Проиллюстрируем сказанное на следующем примере. Рассматривается система

$$\begin{cases} y_1' = t^3 y_2, \\ y_2' = -t y_1, \end{cases} \tag{2.2.46a}$$

Требуется оценить количесвто первой компоненты нетривиального решения системы на отрезке $[1.5, 4]$. Выберем в качестве функции $f(t)$ функцию $-\ln t$. Нетрудно проверить, что при этом имеют место условия теоремы 2.2.7, и, следовательно, количество нулей компонент решений этой системы будет определяться количеством нулей компонент решений системы

$$\begin{cases} z_1' = t^2 z_2, \\ z_2' = -t^2 z_1, \end{cases} \tag{2.2.46b}$$

Система (2.2.46b) интегрируется к квадратурах и ее частное решение можно представить в виде

$$z_1(t) = \sin\left(\frac{t^3}{3}\right),\ \ z_2(t) = \cos\left(\frac{t^3}{3}\right).$$

Для определения нулей первой компоненты $z_1(t)$ будем иметь

$$\frac{t^3}{3} = \pi k,\ k \in Z,$$

откуда найдем

$$t = \sqrt[3]{3\pi k}\ .$$

Учитывая условие $1.5 \leq t \leq 4$, найдем

$$\frac{1.5^3}{3\pi} \leq \kappa \leq \frac{4^3}{3\pi}\ .$$

Отсюда легко найти, что n_1 – количество нулей первой компоненты системы (2.2.46b) будет равно 7-и, при этом, n_2 – количество нулей второй компоненты, также будет равно 6-и. Таким образом, $n_1 = n_2 + 1$ и имеют место условия теоремы 2.2.7, и, следовательно, количество нулей первой компоненты решения системы (2.2.46a) на отрезке [1.5,4] будет равно одному из чисел 6,7 или 8.

Покажем теперь, что при определенных условиях, для систем (2.2.42a) удается свести определение числа нулей компонент решений к определению числа корней определенного уравнения. Имеет место

Теорема 2.2.8. *Пусть*

$$P(t)=\sqrt{-\frac{p(t)}{r(t)}}.$$

и коэффициенты системы (2.2.42a) *удовлетворяют условиям:*

1. $p, r \in C^2[a,b],\quad p(r)>0,\ r(t)<0,$
2. $p'(t)\le 0,\quad r'(t)\ge 0 \qquad (p'(t)\ge 0,\quad r'(t)\le 0)$,
3. $P'(t)\ge 0 \qquad (P'(t)\le 0)$,
4. $(\ln P(t))'' \ge 0$.

Тогда, если уравнения

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}\,d\tau=\pi k,\ k\in Z \tag{2.2.46c}$$

и

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}\,d\tau=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z \tag{2.2.46d}$$

имеют корни на отрезке $[a,b]$, *причем* $n_1=n_2+1$, *где* n_1 *и* n_2 – *число корней соответственно для уравнений* (2.2.46c) *и* (2.2.46d), *то число нулей первой (второй) компоненты нетривиального решения системы* (2.2.42a), *принадлежащих отрезку* $[a,b]$, *совпадет с числом корней* уравнения (2.2.46c) ((2.2.46d)) *или будет отличаться на единицу.*

Доказательство. Не теряя общности рассуждений, предположим, что

$$p'(t)\le 0,\quad r'(t)\ge 0.$$

Примем:

$$p_1(t)=\sqrt{-p(t)r(t)},\ \ r_1(t)=-p_1(t),\ p_2(t)=p(t),\ r_2(t)=r(t).$$

Заметим, что

$$p_i(t)>0,\ \ r_i(t)<0\ \ (i=1,2).$$

Тогда, с учетом условий теоремы и сделанных преположений, будем иметь:

1. $p_i'(t)\ge 0,\ \ r_i'(t)\le 0\ \ (i=1,2),$
2. $P'(t)=\left(\dfrac{p_2(t)}{p_1(t)}\right)'=\left(\sqrt{-\dfrac{p(t)}{r(t)}}\right)'\ge 0,$
3. $p_1(t)r_1(t)\equiv p_2(t)r_2(t).$

Учитывая также условие 4 теоремы, получим, что имеют место условия теоремы 2.2.7, согласно которой число нулей любой из компонент решения системы (2.2.42a) будет или равно числу нулей соответствующей компоненты решения системы

$$\begin{cases} z_1'=\sqrt{-p(t)r(t)}\,z_2,\\ z_2'=-\sqrt{-p(t)r(t)}\,z_1, \end{cases}$$

или отличаться на единицу. Нетрудно найти, что одно из частных решений полученной системы можно представить в виде

$$z_1(t)=\sin\left(\int_a^t\sqrt{-p(\tau)r(\tau)}\,d\tau\right),\quad z_2(t)=\cos\left(\int_a^t\sqrt{-p(\tau)r(\tau)}\,d\tau\right).$$

Тогда число нулей компоненты $z_1(t)$ будет равно числу корней уравнения

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}d\tau = \pi k,\ k \in Z,$$

принадлежащих отрезку $[a,b]$, а число корней компоненты $z_2(t)$ – числу корней уравнения

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}d\tau = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

Применив теорему 2.2.6, получим то, что и требовалось доказать.

Заметим, что если обозначить

$$M = \int_a^b \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}d\tau,$$

то n_1 и n_2, обозначающие число корней соответственно уравнений (2.2.46c) и (2.2.46d), определятся формулами:

$$n_1 = \left[\frac{M}{\pi}\right] + 1,\quad n_1 = \left[\frac{M}{\pi} - \frac{1}{2}\right] + 1,$$

где $\left[\frac{M}{\pi}\right]$ означает целую часть числа $\frac{M}{\pi}$.

Рассмотрим применение теоремы 2.2.8 на конкретном примере. Предположим, что требуется найти количество нулей первой компоненты решения следующей системы на отрезке [2, 6]. В данном случае

$$p(t) = t(t+1) > 0,\ r(t) = -\frac{t}{t+1} < 0\ .$$

Воспользовавщись вышеприведенными формулами, последовательно найдем:

$$M = \int_2^6 \tau d\tau \approx 5.096,\quad n_1 = 5,\ n_2 = 4.$$

Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться в том, что имеют место условия теоремы 2.2.7, согласно которой, например, m_1 – число нулей первой компоненты решения рассматриваемой системы будет равно одному из чисел: 4,5 или 6.

Используя представленный в следующей лемме вид решений системы (1.3.1), можно получить и приводимую ниже теорему сравнения. Имеют место следующие утверждения:

Лемма 2.2.3. *Решение системы* (1.3.1) *можно представить в виде*

$$y_1(t) = q(t)\sin\theta(t), \tag{2.2.47a}$$

$$y_2(t) = q(t)\cos\theta(t), \tag{2.2.47b}$$

где $\theta(t)$ *- решение уравнения*

$$\theta' = p(t)\cos^2\theta - r(t)\sin^2\theta \tag{2.2.47c}$$

с начальным условием $\theta(a)$, *удовлетворяющим условию* $0 \le \theta(a) < \pi$, *и*

$$q(t) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t [p(\tau) + r(\tau)]\sin 2\theta(\tau)d\tau\right\}. \tag{2.2.47d}$$

Доказательство. Заметим сначала, что

$$q'(t) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t [p(\tau) + r(\tau)]\sin 2\theta(\tau)d\tau\right\} + [p(\tau) + r(\tau)]\sin\theta(\tau)\cos\theta(\tau) =$$
$$= q(t) + [p(\tau) + r(\tau)]\sin\theta(\tau)\cos\theta(\tau).$$

Тогда будем иметь

$$y_1'(t) = p(t)y_2(t) \equiv [q(t)\sin\theta(t)]' - p(t)q(t)\cos\theta(t) \equiv$$

$$\equiv [q'(t)\sin\theta(t) + q(t)\cos\theta(t)\cdot\theta'(t)] - p(t)q(t)\cos\theta(t) \equiv$$

$$\equiv q(t)[p(t) + r(t)]\sin^2\theta(t)\cos\theta(t) + q(t)\cos\theta(t)[p(t)\cos^2 0\theta(t) - r(t)\sin^2 0\theta(t) - r(t)\sin^2] -$$

$$- p(t)q(t)\cos\theta(t) \equiv 0.$$

Аналогично доказывается, что указанное в лемме общее решение удовлетворяет и второму уравнению системы (1.3.1). Лемма доказана.

Следствие. *При* $p(t) > 0$ *и* $r(t) < 0$ *компоненты всякого нетривиального решения* $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ *системы* (1.3.1) *на любом отрезке* $[c,d] \subseteq [a,b]$, *не содержащем нули компонент, удовлетворяют соотношению*

$$\frac{y_1(t)}{y_2(t)} > \frac{y_1(c)}{y_2(c)},$$

а при $p(t) < 0$ *и* $r(t) > 0$ *соотношению*

$$\frac{y_1(t)}{y_2(t)} < \frac{y_1(c)}{y_2(c)}.$$

Доказательство. Предположим, что в системе (1.3.1) $p(t) < 0$, $r(t) > 0$ (аналогично проводится доказательство и в случае $p(t) > 0$, $r(t) < 0$). Тогда из соотношения (2.2.47с) будет следовать, что $\theta'(t) < 0$, а значит на отрезке $[c,d]$ функция $\theta(t)$ убывает. И, следовательно, при $t \in [c,d]$ будем иметь

$$\theta(t) < \theta(c). \qquad (2.2.48)$$

С другой стороны, из соотношений (2.2.47a) и (2.2.47b) будет следовать, что

$$\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = tg\,\theta(t).$$

Отсюда, учитывая (2.2.48), а также то, что функция $tg\,t$ – возрастающая, при $t \in [c,d]$ будем иметь требуемое соотношение:

$$\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = tg\,\theta(t) < tg\,\theta(c) = \frac{y_1(c)}{y_2(c)}.$$

Рассмотрим каноническую систему (1.3.1) в предположении, что $p(t), r(t)$ - действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$. Пусть $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – нетривиальное решение системы (1.3.1). Тогда согласно лемме 2.2.3, компоненты этого решения можно записать в виде

$$y_1(t) = q(t)\sin\theta(t), \;\; y_2(t) = q(t)\cos\theta(t), \qquad (2.2.49)$$

причем $q(t)$ и $\theta(t)$ будут удовлетворять следующим уравнениям

$$q' = \frac{1}{2}\left[p(t) + r(t)\right]\sin 2\theta(t), \qquad (2.2.50)$$

$$\theta' = p(t)\cos^2\theta(t) - r(t)\sin^2\theta(t). \qquad (2.2.51)$$

Решению $\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$ системы (2.2.50)-(2.2.51) соответствует решение $r = \rho(t), \;\theta = \omega(t)$ уравнений (2.2.50), (4.8.51), причем из равенств (2.2.49) следует, что

$$\rho^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2, \quad \omega = arcgt\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right).$$

Так как функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ одновременно в нуль не обращаются, то $\rho^2(t) > 0$ на (a,b). Значит, не нарушая общности, можно считать, что $\rho(t) > 0$, Тогда, если принять

$$\psi(t) = \varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t) = \frac{1}{2}\rho^2(t)\sin 2\theta(t),$$

то, очевидно, что функция $\psi(t)$ будет обращаться в нуль только тогда, когда обрашается в нуль одна из компонент $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ и когда $\omega(t)$ есть целое число, кратное $\pi/2$.

Заметим, что так как функции $\cos^2\theta(t)$ и $\sin^2\theta(t)$ равномерно ограничены, то уравнение (2.2.51) имеет решение на каждом интервале. Так как правая часть уравнения (2.2.51) дифференцируема по $\theta(t)$, то решение единственно в обычном смысле.

Из (2.2.49) следует, что

$$y_1(t)\cos\theta(t) - y_2(t)\sin\theta(t) = 0. \qquad (2.2.52)$$

В краевых задачах общий вид условия (2.2.52) в конечной точке $t = a$ будет иметь вид:

$$y_1(t)\cos\alpha - y_2(t)\sin\alpha = 0. \qquad (2.2.53)$$

Из (2.2.46) ясно, что такое условие эквивалентно более простому условию_ $\theta(a) = \alpha \pmod{\pi}$.

Сравним теперь поведение решений двух систем вида (1.3.1). Рассмотрим системы уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_i(t)y_2, \\ y_2' = r_i(t)y_1. \end{cases} \qquad (2.2.54)$$

Имеет место

Теорема 2.2.9. *Пусть функции* p_i *и* r_i *непрерывны на отрезке* $[a,b]$ *и пусть*

$$p_2(t) \ge p_1(t), \quad r_2(t) \le r_1(t) \qquad (2.2.55)$$

на $[a,b]$. $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_1(t) \end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix}$ *– нетривиальные решения системы* (2.2.55) *соответственно при* $i=1$ *и* $i=2$ *и* $\omega_2(a) \ge \omega_1(a)$. *Тогда*

$$\omega_2(t) \geq \omega_1(t) \qquad (a \leq t \leq b). \tag{2.2.56}$$

Кроме того, если $r_2(t) > r_1(t)$ *на* (a,b), *то*

$$\omega_2(t) > \omega_1(t) \qquad (a \leq t \leq b). \tag{2.2.57}$$

Доказательство. Учитывая определение функции $\omega(t)$ имеем

$$\omega_1'(t) = p_1 \cos^2 \omega_1 - r_1 \sin^2 \omega_1, \quad \omega_2'(t) = p_2 \cos^2 \omega_2 - r_2 \sin^2 \omega_2. \tag{2.2.58}$$

Откуда найдем

$$(\omega_2 - \omega_1)' = (r_1 + p_1)(\sin^2 \omega_1 - \sin^2 \omega_2) + h, \tag{2.2.59}$$

где

$$h = (p_2 - p_1)\cos^2 \omega_2 + (r_1 - r_2)\sin^2 \omega_2.$$

В силу условий теоремы, очевидно, что $h \geq 0$. Примем $u = \omega_2 - \omega_1$, тогда из условия (2.2.56) будет следовать, что $u(a) > 0$. Далее, из (2.2.59) получим

$$u' = fu + h, \tag{2.2.60}$$

где

$$f = -(r_1 + p_1)(\sin \omega_2 - \sin \omega_1)\left(\frac{\sin \omega_2 + \sin \omega_1}{\omega_2 - \omega_1}\right).$$

Очевидно, что функция f непрерывна и равномерно ограничена. Так как $h \geq 0$, то из (2.2.60) будет следовать

$$u' - fu \geq 0. \tag{2.2.61}$$

Примем

$$F(t) = \int_t^b f(s)ds,$$

и умножим неравенство (2.2.61) на e^F. Получим

$$e^F u' + F' e^F u \geq 0.$$

Интегрируя в пределах от a до t, найдем

$$e^{F(t)} u(t) \geq e^{F(a)} u(a) \geq 0. \tag{2.2.62}$$

Отсюда будет следовать,что $u(t) \geq 0$. И, следовательно, неравенство (2.2.56) доказано.

Предположим теперь, что неравенство (2.2.57) не имеет места.Тогда должно существовать такое $c > a$, что

$$\omega_2(t) = \omega_1(t) \qquad (a \leq t \leq c). \tag{2.2.63}$$

В самом деле, если предположить противное, то, согласно (2.2.56), должна существовать последовательностсь точек $\{t_j\}$, сходящаяся к a такая, что $\omega_2(t_j) > \omega_1(t_j)$. Воспользовавшись неравенством (2.2.62), и, заменив в нем a на t_j получим, что для $t > t_j$ имеет место неравенство $\omega_2(t) > \omega_1(t)$. Так как точки t_j можно брать сколь угодно близкими к a, то отсюда будет следовать неравенство (2.2.63). Следовательно, действительно для некоторого $c > a$ имеет место равенство (2.2.63). В этом случае получим, что для $t \in [a,c]$ имеет место равенство

$$(p_2 - p_1)\cos^2 \omega + (r_1 - r_2)\sin^2 \omega = 0.$$

где $\omega = \omega_1 = \omega_2$. Однало при $r_2 > r_1$ и $p_2 \ge p_1$ это равенство возможно лишь в том случае, когда

$$\omega_1 = \omega_2 \pmod \pi,$$

и когда $p_2 \equiv p_1$ на интервале (a,c). Однако равенства (2.2.59) в случае $\omega_1 = \omega_2 \pmod \pi$, и условиях теоремы, очевидно, невозможны. Это противоречие и доказывает (2.2.57), когда $r_2 > r_1$.

2.3. О теоремах сравнения для линейных однородных систем

Перейдем теперь к доказательству теорем сравнения для двумерных линейных однородных систем дифференциальных уравнений. Итак, рассматриваются следующие системы уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2, \\ y_2' = p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2, \end{cases} \tag{2.3.1a}$$

и

$$\begin{cases} y_1' = q_{11}(t)y_1 + q_{12}(t)y_2, \\ y_2' = q_{21}(t)y_1 + q_{22}(t)y_2, \end{cases} \tag{2.3.1b}$$

где $p_{ij}(t), q_{ij}(t)$ $(i, j = 1,2)$ – действительные, непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции. Воспользовавшись леммой 1.2.3, преобразуем системы (2.3.1a) и (2.3.1b) к соответствующим равносильным системам

$$\begin{cases} z_1' = p_1(t)z_2, \\ z_2' = r_1(t)z_1, \end{cases} \tag{2.3.2a}$$

и

$$\begin{cases} z_1' = p_2(t)z_2, \\ z_2' = r_2(t)z_1, \end{cases} \tag{2.3.2b}$$

где

$$p_1(t) = p_{12}(t)e^{\int_{t_0}^{t}[p_{22}(\tau)-p_{11}(\tau)]d\tau}, \quad r_1(t) = p_{21}(t)e^{\int_{t_0}^{t}[p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau)]d\tau}, \tag{2.3.3a}$$

$$p_2(t) = q_{12}(t)e^{\int_{t_0}^{t}[q_{22}(\tau)-q_{11}(\tau)]d\tau}, \quad r_2(t) = q_{21}(t)e^{\int_{t_0}^{t}[q_{11}(\tau)-q_{22}(\tau)]d\tau}. \tag{2.3.3b}$$

Имеет место

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – *соответственно нетривиальные решения систем* (2.3.1a) и (2.3.1b), *удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям:*

$$u_1(a) = v_1(a), \quad u_2(a) = v_2(a), \tag{2.3.4}$$

и пусть

1. $p_{22}(t) - p_{11}(t) \ge q_{22}(t) - q_{11}(t)$,
2. $p_{12}(t)p_{21}(t) > 0, \; q_{12}(t)q_{21}(t) > 0$,
3. $p_{12}(t)q_{12}(t) > 0, \; p_{21}(t)q_{21}(t) > 0$,
4. $|q_{12}(t)| > |p_{12}(t)|, \; |q_{21}(t)| < |p_{21}(t)|$.

Тогда, если одна из компонент $\vec{u}(t)$ *имеет нуль на отрезке* $[a,b]$, *то одна из компонент* $\vec{v}(t)$ *имеет в том же* $[a,b]$ *нуль, единственный для обеих компонент, причем нуль компоненты* $\vec{v}(t)$ *не больше нуля компоненты* $\vec{u}(t)$.

Доказательство. Предположим, что для систем (2.3.1a) и (2.3.1b) имеют место условия (1)-(4). Пусть $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (2.3.1a), а $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – системы (2.3.1b), удовлетворяющие условиям (2.3.4). Рассмотрим параллельно с системами (2.3.1a) и (2.3.1b) равносильные им системы (2.3.2a) и (2.3.2b). Выберем в формулах (2.3.3a) и (2.3.3b) в качестве $t_0 - a$, и пусть $\vec{u}_0(t)=\begin{pmatrix} u_{10}(t) \\ u_{20}(t) \end{pmatrix}$ и $\vec{v}_0(t)=\begin{pmatrix} v_{10}(t) \\ v_{20}(t) \end{pmatrix}$ – соответствующие решениям $\vec{u}(t)$ и $\vec{v}(t)$ решения систем (2.3.2a) и (2.3.2b). Тогда, с учетом формул (1.1.4a) и (1.1.4b), будем иметь, что

$$u_{10}(a)=v_{10}(a), \quad u_{20}(a)=v_{20}(a).$$

Далее, из условий теоремы и из соотношений (2.3.3a) и (2.3.3b) будет следовать, что

$$p_1(t)p_2(t)>0, \quad r_1(t)r_2(t)>0,$$
$$p_1(t)r_1(t)>0, \quad p_2(t)r_2(t)>0,$$

причем

$$|p_2(t)|=|q_{12}(t)|e^{\int_{t_0}^{t}[q_{22}(\tau)-q_{11}(\tau)]d\tau}>|p_{12}(t)|e^{\int_{t_0}^{t}[p_{22}(\tau)-p_{11}(\tau)]d\tau}=|p_1(t)|,$$
$$|r_2(t)|=|q_{21}(t)|e^{\int_{t_0}^{t}[q_{11}(\tau)-q_{22}(\tau)]d\tau}>|p_{21}(t)|e^{\int_{t_0}^{t}[p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau)]d\tau}=|r_1(t)|.$$

Заметим теперь, что по отношению к системам (2.3.2a) и (2.3.2b) имеют место условия теоремы 2.2.2. Применив ее, получим, что если одна из компонент $\vec{u}_0(t)$ имеет нуль на отрезке $[a,b]$, то одна из компонент $\vec{v}_0(t)$ имеет в том же $[a,b]$ нуль, единственный для обеих компонент, причем нуль компоненты $\vec{v}_0(t)$ не больше нуля компоненты vec $\vec{u}_0(t)$. Учитывая следствие из леммы 1.2.3, получим, что вышесказанное верно и для компонент $\vec{u}(t)$ и $\vec{v}(t)$. Теорема доказана.

Заметим, что если системы (2.3.1a) и (2.3.1b) являются системами I-ого типа, то, очевидно, что для них имеет место условие 1 теоремы 2.3.1. И, следовательно, из теоремы 2.3.1 будет следовать

Следствие. *Пусть* $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – *соответственно нетривиальные решения систем I-ого типа*: (2.3.1a) *и* (2.3.1b), *удовлетворяющие в точке* a *одним и тем же начальным условиям:*

$$u_1(a)=v_1(a), \quad u_2(a)=v_2(a),$$

и пусть

1. $p_{12}(t)p_{21}(t)>0, \; q_{12}(t)q_{21}(t)>0,$

2. $p_{ij}(t)q_{ij}(t) > 0,$

3. $|q_{12}(t)| > |p_{12}(t)|,\ |q_{21}(t)| < |p_{21}(t)|.$

Тогда, если одна из компонент $\vec{u}(t)$ *имеет нуль на отрезке* $[a,b]$, *то одна из компонент* $\vec{v}(t)$ *имеет в том же* $[a,b]$ *нуль, единственный для обеих компонент, причем нуль компоненты* $\vec{v}(t)$ *не больше нуля компоненты* $\vec{u}(t)$.

Для иллюстрации полученных результатов, сравним следующие системы I-ого типа:

$$\begin{cases} y_1' = f(t)y_1 - y_2, \\ y_2' = -y_1 + f(t)y_2, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y_1' = q(t)y_1 - 4y_2, \\ y_2' = -y_1 + q(t)y_2, \end{cases}$$

где $f(t)$ и $q(t)$ – некоторые действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[0,1]$. В рассматриваемом случае

$$p_{11}(t) \equiv p_{22}(t) \equiv f(t), \quad q_{11}(t) \equiv q_{22}(t) \equiv q(t),$$

$$p_{12}(t)p_{21}(t) = 1 > 0,\ q_{12}(t)q_{21}(t) = 4 > 0,\ p_{12}(t)q_{12}(t) = 4 > 0,\ p_{21}(t)q_{21}(t) = 1 > 0,$$

причем

$$|q_{12}(t)| = 4 > 1 = |p_{12}(t)|,\ |q_{21}(t)| = 1 \le 1 = |p_{21}(t)|.$$

Если потребовать выполнения условия $u_1(0) = v_1(0),\ u_2(0) = v_2(0),$ то получим, что имеют место условия следствия из теоремы 2.3.1, а значит верно и его утверждение. Убедимся в этом непосредственно. Воспользовавшись формулами для решения подобных систем (см. пример 4), найдем, что если $\vec{u}(t)$ – общее решение первой системы, а $\vec{v}(t)$ – общее решение второй системы, то будем иметь

$$u_1(t) = \left(-C_1e^t + C_2e^{-t}\right)\cdot e^{\int f(t)dt}, \quad u_2(t) = \left(C_1e^t + C_2e^{-t}\right)\cdot e^{\int f(t)dt},$$

$$v_1(t) = 2\left(-B_1e^t + B_2e^{-t}\right)\cdot e^{\int q(t)dt}, \quad v_2(t) = \left(B_1e^t + B_2e^{-t}\right)\cdot e^{\int q(t)dt}.$$

где C_1, C_2, B_1 и B_2 – произвольные постоянные. Потребуем, чтобы имело место также условие

$$u_1(0) = v_1(0), \quad u_2(0) = v_2(0).$$

Получим

$$\begin{cases} -C_1 + C_2 = -2B_1 + 2B_2, \\ C_1 + C_2 = B_1 + B_2, \end{cases}$$

откуда найдем

$$B_1 = \frac{C_1}{2},\ B_2 = \frac{C_2}{2}.$$

Далее, предположим, что первая компонента $\vec{u}(t)$ имеет нуль в точке $t_0 \in [0,1]$. Из формулы для компоненты $u_1(t)$ найдем, что $t_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{C_2}{C_1}$, причем, очевидно, что наличие этого нуля на отрезке $[0,1]$ возможно лишь при $1 \le \frac{C_2}{C_1} \le e^2$. Это условие обеспечит существование нуля на отрезке $[0,1]$ и у первой компоненты $\vec{v}(t)$ в точке $t_0' = \frac{1}{4}\ln\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{4}\ln\frac{C_2}{C_1}$, так как из этого соотношения будет следовать, что $0 \le t_0' \le \frac{1}{2}$, причем нуль t_0' компоненты $v_1(t)$ будет не больше нуля t_0 компоненты $u_1(t)$, поскольку $\frac{1}{4}\ln\frac{C_2}{C_1} \le \frac{1}{2}\ln\frac{C_2}{C_1}$.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – *соответственно нетривиальные решения систем* (2.3.1a) и (2.3.1b), *удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям:*

$$u_1(a) = v_1(a), \;\; u_2(a) = v_2(a), \qquad (2.3.5)$$

и пусть

1. $p_{11}(t) - p_{22}(t) \ge q_{11}(t) - q_{22}(t),$
2. $p_{12}(t)p_{21}(t) < 0, \;\; q_{12}(t)q_{21}(t) < 0,$
3. $p_{12}(t)q_{12}(t) > 0, \;\; p_{21}(t)q_{21}(t) > 0,$
4. $|q_{12}(t)| > |p_{12}(t)|, \;\; |q_{21}(t)| > |p_{21}(t)|.$

Тогда, если одна из компонент $\vec{u}(t)$ *имеет* l *нулей на отрезке* $[a,b]$, *то одна из компонент* $\vec{v}(t)$ *имеет в том же* $[a,b]$ *не менее* l *нулей, причем* k*-ый нуль компоненты* $\vec{u}(t)$ *не больше* k*-ого нуля компоненты* $\vec{u}(t)$.

Доказательство. Предположим, что для систем (2.3.1a) и (2.3.1b) имеют место условия 1-4. Пусть $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (2.3.1a), а $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – системы (2.3.1b), для которых имеет место условие (2.3.5). Рассмотрим вновь параллельно с системами (2.3.1a) и (2.3.1b) равносильные им системы (2.3.2a) и (2.3.2b) и пусть $\vec{u}_0(t) = \begin{pmatrix} u_{10}(t) \\ u_{20}(t) \end{pmatrix}$ и $\vec{v}_0(t) = \begin{pmatrix} v_{10}(t) \\ v_{20}(t) \end{pmatrix}$ – соответствующие решения систем (2.3.2a) и (2.3.2b) при $t_0 = a$. Тогда будем иметь

$$u_{10}(a) = v_{10}(a), \quad u_{20}(a) = v_{20}(a).$$

В этом случае, из соотношений (2.3.3a) и (2.3.3b) и из условий теоремы, будет следовать, что

$$p_1(t)p_2(t) \equiv p_{12}(t)q_{12}(t) > 0, \;\; r_1(t)r_2(t) \equiv p_{21}(t)q_{21}(t) > 0,$$
$$p_1(t)r_1(t) \equiv p_{12}(t)p_{21}(t) < 0, \;\; p_2(t)r_2(t) \equiv q_{12}(t)q_{21}(t) < 0,$$
$$|p_2(t)| = |q_{12}(t)| e^{\int_{t_0}^{t}[q_{22}(\tau) - q_{11}(\tau)]d\tau} > |p_{12}(t)| e^{\int_{t_0}^{t}[p_{22}(\tau) - p_{11}(\tau)]d\tau} = |p_1(t)|,$$
$$|r_2(t)| = |q_{21}(t)| e^{\int_{t_0}^{t}[q_{11}(\tau) - q_{22}(\tau)]d\tau} > |p_{21}(t)| e^{\int_{t_0}^{t}[p_{11}(\tau) - p_{22}(\tau)]d\tau} = |r_1(t)|.$$

По отношению к системам (2.3.2a) и (2.3.2b) имеют место условия теоремы 2.1.1. Применив ее, получим, что если одна из компонент $\vec{u}_0(t)$ имеет l нулей на отрезке $[a,b]$, то одна из компонент $\vec{v}_0(t)$ имеет в том же отрезке $[a,b]$ не менее l нулей, причем k-ый нуль компоненты $\vec{v}_0(t)$ не больше k-ого нуля компоненты $\vec{u}_0(t)$. И, вновь, учитывая следствие из леммы 1.3.1, получим, что вышесказанное верно и для компонент $\vec{u}(t)$ и $\vec{v}(t)$. Теорема доказана.

Поскольку условие 1 теоремы 2.3.2 будет иметь место для систем 1-ого типа, то из теоремы 2.3.2 будет вытекать

Следствие. *Пусть* $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}v_1(t)\\v_2(t)\end{pmatrix}$ *–соответственно нетривиальные решения систем I-ого типа:* (2.3.1a) и (2.3.1b), *удовлетворяющие в точке одним и тем же начальным условиям* :

$$u_1(a)=v_1(a),\ \ u_2(a)=v_2(a),$$

и пусть

1. $p_{12}(t)p_{21}(t)<0,\ q_{12}(t)q_{21}(t)<0,$
2. $p_{12}(t)q_{12}(t)>0,\ p_{21}(t)q_{21}(t)>0,$
3. $|q_{12}(t)|>|p_{12}(t)|,\ |q_{21}(t)|>|p_{21}(t)|.$

Тогда, если одна из компонент $\vec{u}(t)$ *имеет* l *нулей на отрезке* $[a,b]$, *то одна из компонент* $\vec{v}(t)$ *имеет в том же* $[a,b]$ *не менее* l *нулей, причем* k*-ый нуль компоненты* $\vec{v}(t)$ *не больше* k*-ого нуля компоненты* $\vec{u}(t)$.

Проиллюстрируем утверждение теоремы 2.3.2, сравнив следующие системы 1-ого типа:

$$\begin{cases} y_1'=f(t)y_1-y_2,\\ y_2'=y_1+f(t)y_2,\end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y_1'=q(t)y_1-2y_2,\\ y_2'=2y_1+q(t)y_2,\end{cases}$$

где $f(t)$ и $q(t)$ – некоторые действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[0,\pi]$. В данном случае

$$p_{11}(t)\equiv p_{22}(t)\equiv f(t),\quad q_{11}(t)\equiv q_{22}(t)\equiv q(t),$$

$$p_{12}(t)p_{21}(t)=-1<0,\ q_{12}(t)q_{21}(t)=-4<0,\ \ p_{12}(t)q_{12}(t)=2>0,\ \ p_{21}(t)q_{21}(t)=2>0,$$

причем

$$|q_{12}(t)|=2>1=|p_{12}(t)|,\ \ |q_{21}(t)|=2>1=|p_{21}(t)|.$$

Далее, обратившись к примеру 12, найдем, что если $\vec{u}(t)$ – общее решение первой системы, а $\vec{v}(t)$ – общее решение второй системы, то будем иметь

$$u_1(t)=A\cos(t+\varphi)\cdot e^{\int f(t)dt},\ \ u_2(t)=A\sin(t+\varphi)\cdot e^{\int f(t)dt},$$
$$v_1(t)=B\cos(2t+\psi)\cdot e^{\int q(t)dt},\ \ v_2(t)=B\sin(2t+\psi)\cdot e^{\int q(t)dt},$$

где A, φ, B и ψ – произвольные постоянные. Потребуем, чтобы имело место также условие

$$u_1(0) = v_1(0), \quad u_2(0) = v_2(0).$$

Получим

$$\begin{cases} A\cos\varphi = B\cos\psi, \\ A\sin\varphi = B\sin\psi, \end{cases}$$

откуда найдем, что $tg\varphi = tg\psi$ или $\psi = \varphi + \pi n,\ n \in Z.$ Предположим теперь, что первая компонента $\vec{u}(t)$ имеет m нулей в точках $t_{0,k} \in [0,\pi],\ k = 1,2,...,m.$ Учитывая формулу, определяющую компоненту $\vec{u}(t)$, получим, что $t_{0,k} = -\varphi + \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,$ при условии, что $0 \le -\varphi + \frac{\pi}{2} + \pi k \le \pi$. Очевидно, что это условие будет гарантировать существование как минимум m нулей на отрезке $[0,\pi]$ и у первой компоненты $\vec{v}(t)$ в точках $t'_{0,n} = -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z,$ причем k -ый нуль $t'_{0,k}$ компоненты $v_1(t)$ будет не больше k-ого нуля $t_{0,k}$ компоненты $u_1(t)$.

Г Л А В А 3

О ТЕОРЕМАХ ОСЦИЛЛЯЦИИ

3.1. Об осцилляции решений линейной однородной системы

Доказанные в главе 2 теоремы сравнения позволяют нам, например, зная некоторые свойства решений аналогичных систем с постоянными коэффициентами, перенести их соответствующим образом на решения подобных систем с переменными коэффициентами, и, в частности, определить условия, при которых решения систем будут осциллировать.

Рассмотрим каноническую систему

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

где $p(t), r(t)$ – действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a,b]$.

Определение 3.1.1. ([20]) Нетривиальное решение $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (3.1.1) назовем осциллирующим на $[a,b]$, если каждая из его компонент обращается в нуль в некоторой точке $[a,b]$, т.е. $y_i(t_i) = 0,\ t_i \in [a,b],\ i = 1,2.$

Определение 3.1.2. Система (3.1.1) называется осциллирующей, если она имеет хотя бы одно осциллирующее решение, в противном случае система (3.1.1) называется неосциллирующей.

Теорема 3.1.1. *Если в системе* (3.1.1) $p(t)r(t) > 0$ *на отрезке* $[a,b]$, *то система* (3.1.1) *не может быть осциллирующей на отрезке* $[a,b]$.

Доказательство. Предположим, что в системе (3.1.1) $p(t)r(t) > 0$. Тогда имеют место условия теоремы 1.3.1, согласно которой наличие нуля на отрезке $[a,b]$ у одной из компонент произвольного нетривиального решения системы (3.1.1) исключает существование других нулей у компонент этого же решения на отрезке $[a,b]$. А, значит, согласно определению 3.1.1 система не может иметь осциллирующее решение, а, следовательно, не может быть осциллирующей. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 3.1.1 следует, что если система (3.1.1) рассматривается на бесконечном интервале, то выполнение указанного в теореме условия, а именно, $p(t)r(t) > 0$ на рассматриваемом интервале, будет гарантировать неосциллируемость системы (3.1.1) и в случае бесконечного интервала.

В случае, когда коэффициенты системы имеют разные знаки, имеет место

Теорема 3.1.2. *Если в системе* (3.1.1) *на отрезке* $[a,b]$ $p(t)r(t) < 0$ *и длина отрезка* $[a,b]$ *больше или равна* $\frac{\pi}{mn}$, *где*

$$m^2 = \min_{a \le t \le b} |p(t)|,\ \ n^2 = \min_{a \le t \le b} |r(t)|,\ \ m > 0, n > 0, \tag{3.1.2}$$

то система (3.1.1) *будет на этом отрезке осциллирующей.*

Доказательство. Предположим, что в системе (3.1.1) $p(t)>0$ и $r(t)<0$ (аналогично рассматривается и случай $p(t)<0$, $r(t)>0$) и рассмотрим параллельно с системой (3.1.1) систему

$$\begin{cases} y_1' = -m^2 y_2, \\ y_2' = n^2 y_1, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

в которой m и n определяются из соотношений (3.1.2) (в силу непрерывности $p(t)$ и $r(t)$, и, следовательно, их ограниченности на отрезке $[a,b]$, такие числа m и n всегда будут существовать). В §1.3 было показано, что $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ – общее решение системы (3.1.3) можно представить в виде

$$u_1(t) = A\cos(mnt+\varphi),$$

$$u_2(t) = A\frac{n}{m}\sin(mnt+\varphi),$$

где A и φ – произвольные постоянные. Предположим, что $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – некоторое произвольное решение системы (3.1.1) и пусть

$$y_1(a) = y_{10},\ y_2(a) = y_{20}.$$

Из общего решения системы (3.1.3) выделим решение $\vec{u}(t)$, компоненты которого удовлетворяли бы условиям

$$u_1(a) = y_{10},\ u_2(a) = y_{20}.$$

Согласно теореме о существовании и единственности задачи Коши для линейных однородных систем, такой выбор всегда возможен. Так как длина отрезка $[a,b]$ больше или равна $\frac{\pi}{mn}$, то каждая из компонент этого решения будет иметь на отрезке $[a,b]$ как минимум один нуль. Примем

$$p_1(t) = -m^2,\ r(t) = n^2,\ p_2(t) = p(t),\ r_2(t) = r(t).$$

Тогда, очевидно, что имеют место следующие неравенства

$$p_1(t)p_2(t) > 0,\ r_1(t)r_2(t) > 0,$$

$$p_i(t)r_i(t) < 0,\ i = 1,2,$$

$$|p_2(t)| > |p_1(t)|,\ |r_2(t)| > |r_1(t)|.$$

Заметим теперь, что по отношению к системам (3.1.1) и (3.1.3) имеют место условия теоремы 2.1.1, и так как обе компоненты выделенного выше решения $\vec{u}(t)$ системы (3.1.3) имеют на отрезке $[a,b]$ как минимум по одному нулю, то, применив теорему 2.1.1, получим то, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует, в частности, что при если имеют место условия теоремы, то количество нулей компонент решения системы будет как минимум равно $2\left[\frac{mn}{\pi}(b-a)\right]-1$. Откуда будет следовать, что оно пропорционально mn, а значит, чем больше по модулю минимальные значения коэффициентов системы $p(t)$ и $r(t)$ на отрезке $[a,b]$, тем большее количество нулей компонент мы будем иметь на этом отрезке.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий содержание теоремы.

Пример 17. Рассматривается следующая задача Коши

$$\begin{cases} y_1' = ty_2, \\ y_2' = -ty_1, \end{cases} \qquad (3.1.4)$$

$$y_1(2) = 1.5, \ y_2(t) = 2 \qquad (3.1.5)$$

на отрезке $[2,6]$. В данном случае $y_{10} = 1.5, \ y_{20} = 2, \ p(t) = t$ и $r(t) - t$. Далее, имеем

$$\min_{2 \le t \le 6} |p(t)| = \min_{2 \le t \le 6} |r(t)| = 2,$$

и, следовательно, согласно (3.1.2)

$$m = n = \sqrt{2}.$$

Заметим теперь, что для рассматриваемой системы (3.1.13) имеют место условия теоремы 3.1.1, а именно

1. на отрезке $[2,6]$ $p(t) > 0$ и $r(t) < 0$;
2. длина отрезка $[2,6]$ больше, чем $\dfrac{\pi}{mn} = \dfrac{\pi}{2}$.

Следовательно, каждая из компонент решения задачи (3.1.4)-(3.1.5), согласно теореме 3.1.1, имеет на отрезке $[2,6]$ нуль, т. е. система является осциллирующей. Убедимся в этом, проведя и непосредственные вычисления. Данная система является частным случаем системы, рассмотренной в примере 2 (см. §1.3). И, следовательно, общее решение системы (3.1.4) можно представить в виде

$$y_1(t) = A\sin\left(\int t dt + \varphi\right) = A\sin\left(\frac{t^2}{2} + \varphi\right),$$

$$y_2(t) = A\cos\left(\int t dt + \varphi\right) = A\cos\left(\frac{t^2}{2} + \varphi\right),$$

где A и φ – произвольные постоянные. Для определения значений постоянных, воспользуемся условиями (3.1.5). Получим относительно A и φ следующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A\sin(2 + \varphi) = 1.5, \\ A\sin(2 + \varphi) = 2, \end{cases}$$

решив которую найдем, что

$$A = 2.5, \varphi \approx -1.36.$$

Для полученных значений A и φ, как нетрудно убедиться, каждая из компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$ решений задачи (3.1.4)-(3.1.5) действительно будет обращаться в нуль на отрезке $[2,6]$.

Воспользуемся теперь доказанной теоремой для рассмотрения осциллирующих свойств компонент решений двумерной линейной однородной системы дифференциальных уравнений общего вида, а именно:

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2, \\ y_2' = p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2, \end{cases}$$

где $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1,2)$ – действительные функции, определенные и непрерывные на некотором интервале $[a,b]$. Заметим прежде всего, что в случае $p_{12}(t) \equiv p_{21}(t) \equiv 0$ переменные в системе (3.1.6) разделяются и легко найти, что общее решение в этом случае можно записать в виде

$$y_1(t)=C_1e^{\int p_{11}(t)dt},\ \ y_2(t)=C_2e^{\int p_{11}(t)dt},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Из этих соотношений следует, что компоненты всякого нетривиального решения системы (3.1.6) не могут одновременно иметь нули, и, следовательно, система (3.1.6) не будет осциллирующей. Предположим теперь, что в системе (3.1.6) один из коэффициентов $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ является тождественным нулем. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что таковым является $p_{12}(t)$. Система (3.1.6) при этом примет вид

$$\begin{cases} y_1'=p_{11}(t)y_1, \\ y_2'=p_{21}(t)y_1+p_{22}(t)y_2, \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы найдем

$$y_1(t)=C_1e^{\int p_{11}(t)dt},$$

где C_1 – произвольная постоянная. Подставив это значение во второе уравнение системы, мы получим относительно $y_2(t)$ линейное неоднородное уравнение второго порядка. Решив ее, например, методом вариации постоянной, нетрудно найти, что

$$y_2(t)=\left(C_1\int p_{21}(t)e^{\int(p_{11}(t)-p_{22}(t))dt}+C_2\right)e^{\int p_{22}(t)dt},$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Очевидно, что и в этом случае система не может быть осциллирующей.

В связи с вышеизложенным, мы будем в дальнейшем предполагать, что коэффициенты системы (3.1.15) отличны от тождественного нуля. Имеет место

Теорема 3.1.3. *Если в системе* (3.1.6) $p_{12}(t)p_{21}(t)>0$ *на отрезке* $[a,b]$, *то система* (3.1.6) *не может быть осциллирующей на отрезке* $[a,b]$.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 1.6.1.

Теорема 3.1.4. *Если в системе* (3.1.6) *на отрезке* $[a,b]$ $p_{11}(t)\equiv p_{22}(t)\equiv q(t)$ *и* $p_{12}(t)p_{21}(t)<0$, *а длина отрезка* $[a,b]$ *больше или равна* $\frac{\pi}{mn}$, *где*

$$m^2=\min_{a\le t\le b}|p_{12}(t)|,\ \ n^2=\min_{a\le t\le b}|p_{21}(t)|,\ m>0,n>0,$$

то система (3.1.6) *будет на этом отрезке осциллирующей.*

Доказательство. Пользуясь леммой 1.2.3, приведем систему (3.1.6) к равносильному каноническому виду

$$\begin{cases} z_1'=p(t)z_2, \\ z_2'=r(t)z_1, \end{cases} \tag{3.1.10}$$

в которой, согласно соотношениям (1.2.19), будем иметь

$$p(t)\equiv p_{12}(t),\ r(t)=p_{21}(t), \tag{3.1.11}$$

причем, каждому решению $\vec{z}(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ системы (3.1.10) соответствует одно и только одно решение $\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (3.1.6), определяемое формулами

$$y_1(t)=z_1(t)e^{\int_{t_0}^{t}q(\tau)d\tau}, \tag{3.1.12a}$$

$$y_2(t) = z_2(t)e^{\int_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau}, \qquad (3.1.12b)$$

где $t_0 \in [a,b]$. Выберем в качестве t_0 значение a. Тогда, согласно соотношениям (3.1.12a) и (3.1.12b), будем иметь, что

$$y_1(a) = z_1(a),\ y_2(a) = z_2(a).$$

По отношению к системе (3.1.10) имеют место условия теоремы 3.1.1, а именно

1. $p(t)r(t) \equiv p_{12}(t)p_{21}(t) < 0$ при $t \in [a,b]$,
2. длина отрезка $[a,b]$ больше или равна $\frac{\pi}{mn}$,

где

$$m^2 = \min_{a\le t\le b}|p(t)| = \min_{a\le t\le b}|p_{12}(t)|,\ n^2 = \min_{a\le t\le b}|r(t)| = \min_{a\le t\le b}|p_{21}(t)|,\ m>0, n>0,$$

тогда, применив ее, получим, что система (3.1.10) будет на отрезке $[a,b]$ осциллирующей. И так как, согласно следствию из леммы 1.2.3, нули компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$ совпадают соответственно с нулями компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$, то получим, что система (3.1.6) также будет осциллирующей на отрезке $[a,b]$. Теорема доказана.

Теорема 3.1.5. *Если в системе* (3.1.6) *на отрезке* $[a,b]$ $p_{11}(t) \equiv -p_{22}(t) \equiv q(t)$ *и* $p_{12}(t)p_{21}(t) < 0$, *а длина отрезка* $[a,b]$ *больше или равна* $\frac{\pi}{mn}$, *где*

$$m^2 = \min_{a\le t\le b}\left\{|p_{12}(t)|e^{-2\int_a^t q(\tau)d\tau}\right\},\ n^2 = \min_{a\le t\le b}\left\{|p_{21}(t)|e^{2\int_a^t q(\tau)d\tau}\right\},,\ m>0, n>0,$$

то система (3.1.6) *будет на этом отрезке осциллирующей.*

Доказательство. Предположим, что в системе (3.1.6) $p_{11}(t) \equiv -p_{22}(t) \equiv q(t)$. Тогда, вновь воспользовавшись леммой 1.2.3, приведем систему (3.1.6) к виду (3.1.10), в которой

$$p(t) \equiv p_{12}(t)e^{-2\int_a^t q(\tau)d\tau},\ r(t) = p_{21}(t)e^{-2\int_a^t q(\tau)d\tau}. \qquad (3.1.11)$$

Отсюда будем иметь, что

$$p(t)r(t) \equiv p_{12}(t)p_{21}(t) < 0,$$

и, следовательно, в системе (3.1.10) коэффициенты имеют противоположные знаки. Выбрав вновь в качесте t_0 значение a найдем, что

$$y_1(a) = z_1(a),\ y_2(a) = z_2(a).$$

По отношению к системе (3.1.10) имеют место условия теоремы 3.1.1, а именно

1. $p(t)r(t) \equiv p_{12}(t)p_{21}(t) < 0$ при $t \in [a,b]$,

2. длина отрезка $[a,b]$ больше или равна $\frac{\pi}{mn}$,

где

$$m^2 = \min_{a\le t\le b} |p(t)|, \;\; n^2 = \min_{a\le t\le b} |r(t)|, \;\; m>0, n>0,$$

Тогда, применив ее, получим, что система (3.1.10) на отрезке $[a,b]$ осциллирует. И так как, согласно следствию из леммы 1.2.3, нули компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$ совпадают соответственно с нулями компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$, то получим, что система (3.1.6) также будет осциллирующей на отрезке $[a,b]$. Теорема доказана.

3.2. О некоторых критериях осцилляции системы в случае конечного интервала

Рассмотрим каноническую систему, записав ее в векторном виде

$$\vec{y}' = P(t)\vec{y}\,, \tag{3.2.1}$$

где $P(t)=\begin{pmatrix} 0 & p(t) \\ r(t) & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, функции $p(t)$ и $r(t)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$.

Пусть $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение двухкомпонентных непрерывных вектор-функций. Определим для $\vec{y}(t)$ норму по формуле

$$\|\vec{y}\| = \sqrt{y_1^2(t)+y_2^2(t)},$$

а для произвольной матрицы $P(t)$

$$\|P\| = \sup_{\|\vec{y}\|=1} \|P\vec{y}\|.$$

Из определений (3.1.1) и (3.1.2) будет следовать, что если система (3.2.1) осциллирующая, то найдется такое нетривиальное решение $\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (3.2.1) и точки $t_1,t_2\in[a,b]$ так, что будет выполняться условие

$$\left(\vec{y}(t_1),\vec{y}(t_2)\right) = y_1(t_1)y_1(t_2) + y_1(t_2)y_2(t_2) = 0.$$

Если система (3.2.1) неосциллирующая, то тогда для любого нетривиального решения $\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (3.2.1) и произвольных точек $t_1,t_2\in[a,b]$ будет выполняться условие

$$\left(\vec{y}(t_1),\vec{y}(t_2)\right) = y_1(t_1)y_1(t_2) + y_1(t_2)y_2(t_2) \ne 0.$$

Определение 3.2.1. Система (3.2.1) называется подортогональной на отрезке $[a,b]$ ([24]), если для любого нетривиального решения $\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ и произвольных $t_1,t_2\in[a,b]$ выполняется условие

$$\left(\vec{y}(t_1),\vec{y}(t_2)\right) > 0.$$

Заметим, что из подортогональности системы (3.2.1) следует неосцилляция системы. Действительно, если компоненты $\vec{y}(t)$ исчезают на t_1 и t_2 $\left(y_1(t_1)=y_2(t_2)=0\right)$, то $\left(\vec{y}(t_1),\vec{y}(t_2)\right)=0.$ Имеет место

Лемма 3.2.1. *Пусть* $C(t)$ *некоторая ортогональная матрица, определенная на отрезке* $[a,b]$. *Тогда, если система* (3.2.1) *подортогональна на отрезке* $[a,b]$, *то таковой является и система*

$$\vec{z}'=\left(C'+CP\right)C^{-1}\vec{z}. \tag{3.2.2}$$

Верно и обратное.

Доказательство. Предположим, что $C(t)$ - некоторая ортогональная матрица, и, следовательно $C^*(t)C(t)=E$, где E – единичная матрица. Заметим прежде всего, что если $\vec{y}(t)$ – решение системы (3.2.1), то $\vec{z}(t)=C(t)\vec{y}(t)$ – решение системы (3.2.2):

$$\vec{z}'=(C\vec{y})'=C'\vec{y}+C\vec{y}'=C'\vec{y}+CP\vec{y}=\left(C'+CP\right)C^{-1}\vec{z}.$$

Верно и обратное, а именно, если $\vec{z}(t)$ – решение системы (3.2.2), то $\vec{y}(t)=C^{-1}(t)\vec{z}(t)$ – решение системы (3.2.1). Действительно, поскольку $(C^{-1})'=C^{-1}C'C^{-1}$, то будем иметь

$$\vec{y}'=\left(C^{-1}\vec{z}\right)'=(C^{-1})'\vec{z}+C^{-1}\vec{z}'=-C^{-1}C'C^{-1}\cdot C\vec{y}+C^{-1}(C'+CP)C^{-1}\cdot C\vec{y}=P\vec{y}.$$

С другой стороны

$$\left(\vec{z}(t_1),\vec{z}(t_2)\right)=\left(C\vec{y}(t_1),C\vec{y}(t_2)\right)=\left(C\vec{y}(t_1),C^*C\vec{y}(t_2)\right)=\left(\vec{y}(t_1),\vec{y}(t_2)\right), \tag{3.2.3}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Следствие. *Пусть* $C(t)$ *некоторая постоянная ортогональная матрица, определенная на отрезке* $[a,b]$. *Тогда, если система* (3.2.1) *подортогональна на отрезке* $[a,b]$, *то таковой является и система*

$$\vec{z}'=CPC^{-1}\vec{z}. \tag{3.2.4}$$

Верно и обратное.

Из доказанной леммы 3.2.1, в частности следует, что неосцилляция системы (3.2.1) не меняется, если матрицу $P(t)$ заменить на матрицу $\left(C'+CP\right)C^{-1}$. И, таким образом, создается связь между неосцилляцией системы (3.2.1) и подортогональностью системы (3.2.2): если система (3.2.2) подортогональна для ортогональных матриц C на некотором интервале, то система (3.2.1) также подортогональна на этом же интервале, и, следовательно, не осциллирует. С другой стороны, осцилляция одной из систем (3.2.1) и (3.2.2) приводит к осцилляции другой. Действительно, предположим, что система (3.2.1) имеет нетривиальное решение $\vec{y}(t)$ такое, что $\left(\vec{y}(t_1),\vec{y}(t_2)\right)=0,\ t_1,t_2\in[a,b]$. Тогда, из соотношения (3.2.3) получим

$$\left(\vec{z}(t_1),\vec{z}(t_2)\right)=0,$$

откуда будет следовать, что система (3.2.2) имеет решение $\vec{z}=C\vec{y}$, компоненты которой исчезают соответственно на t_1 и t_2, и, следовательно, система (3.2.2) осциллирует. Верно, и обратное. Таким образом верна

Теорема 3.2.1. *Системы* (3.2.1) *и* (3.2.2*) одновременно являются либо осциллирующими либо неосциллирующими.*

Заметим, что подортогональную систему можно охарактеризовать и в терминах фундаментального решения матричного уравнения

$$Y' = P(t)Y, \tag{3.2.5}$$

соответствующего системе (3.2.1). Так как общее решение системы (3.2.1) можно представить в виде

$$\vec{y}(t) = Y(t) \cdot \vec{C},$$

где $\vec{C}$ – произвольный постоянный вектор, то условие

$$\left(\vec{z}(t_1), \vec{z}(t_2)\right) > 0$$

будет эквивалентно условию

$$\left(Y(t_1)\vec{C}, Y(t_2)\vec{C}\right) = \left(\vec{C}, Y^*(t_1)Y(t_2)\vec{C}\right) > 0,$$

т.е. матрица $Y^*(t_1)Y(t_2)$ положительно определена для любых $t_1, t_2 \in [a,b]$. В частности, если в качестве фундаментальной матрицы $Y(t)$ системы (3.2.1) выбрать нормированную при $t = t_1$ фундаментальную матрицу $Y_{t_1}(t_1) = E$, то вышеизложенное условие примет вид

$$\left(\vec{C}, Y_{t_1}(t_2)\vec{C}\right) > 0.$$

С помощью этого условия можно получить следующее утверждение.

Лемма 3.2.2. *Если система* (3.2.1) *подортогональна на некотором интервале, то таковой на этом интервале является и сопряженная система*

$$\vec{z}' = -P^*\vec{z}. \tag{3.2.6}$$

Доказательство. Действительно, пусть $Z_{t_1}(t)$ – фундаментальное решение, сответствующее системе (3.2.5), нормированное при $t = t_1$ ($Z_{t_1}(t_1) = E$). Тогда будем иметь

$$(Z_{t_1}^* Y_{t_1})' = (Z_{t_1}^*)' Y_{t_1} + Z_{t_1}^* (Y_{t_1})' = -Z_{t_1}^* P Y_{t_1} + Z_{t_1}^* P Y_{t_1} = 0.$$

Откуда найдем, что $Z_{t_1}^* Y_{t_1} = E$, и, следовательно $Z_{t_1}^* = Y_{t_1}^{-1}$.. Тогда, если $\vec{C}$ –произвольный постоянный вектор, то приняв

$$\vec{C} = Y_{t_1}^{-1}(t_2)\vec{C}_1 = Z_{t_1}(t_2)\vec{C}_1,$$

получим

$$\left(\vec{C}_1, Z_{t_1}(t_2)\vec{C}_1\right) = \left(\vec{C}_1, \vec{C}\right) = \left(Y_{t_1}(t_2)\vec{C}_1, \vec{C}\right) = \left(\vec{C}_1, Y_{t_1}(t_2)\vec{C}\right) > 0.$$

Так как t_1, t_2 и постоянный вектор $\vec{C}_1$ –произвольные, то получим то, что и требовалось доказать.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $\vec{y}$ *- нетривиальное решение системы* (3.2.1),

$$\vec{u}(t) = \frac{\vec{y}(t)}{\|\vec{y}\|} \tag{3.2.7}$$

и $\vec{v}$ *- соответствующее ей решение системы* (3.2.2), *где* C – *произвольная постоянная ортогональная матрица. Тогда имеет место соотношение*

$$\left|\arcsin(\vec{u}(b), \vec{v}(b)) - \arcsin(\vec{u}(a), \vec{v}(a))\right| \le 2\int_a^b \|P\| dt. \tag{3.2.8}$$

Доказательство. Пусть $\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – произвольное нетривиальное решение системы (3.2.1)и $\vec{u}(t)=\dfrac{\vec{y}(t)}{\|\vec{y}\|}$. Прежде всего заметим, что

$$(\|\vec{y}\|)'=\left(\sqrt{y_1^2(t)+y_1^2(t)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{y_1^2(t)+y_1^2(t)}}\left(y_1^2(t)+y_1^2(t)\right)'=\frac{(\vec{y},\vec{y})}{\|\vec{y}\|}.$$

Тогда, продифференцировав $\vec{u}(t)$ по t, мы будем иметь

$$\vec{u}'=\left(\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\right)'=\frac{\vec{y}'\|\vec{y}\|-\vec{y}\|\vec{y}\|'}{\|\vec{y}\|^2}=\frac{\vec{y}'}{\|\vec{y}\|}-\frac{\vec{y}(\vec{y},\vec{y})}{\|\vec{y}\|^3}.$$

Подставив в это соотношения значение $\vec{y}'$ из (3.2.7), получим

$$\vec{u}'=\frac{P\vec{y}}{\|\vec{y}\|}-\frac{\vec{y}(\vec{y},P\vec{y})^3}{\|\vec{y}\|}=P\vec{u}-\vec{u}(\vec{u},P\vec{u}).$$

Далее, согласно лемме 3.2.1 и условиям теоремы, $\vec{v}(t)=C\vec{u}(t)$. Тогда будем иметь

$$(\vec{u},\vec{v})'=(\vec{u},C\vec{u})'=(\vec{u}',C\vec{u})+(\vec{u},C\vec{u}')=(\vec{u}',C\vec{u})+(\vec{u}',C^*\vec{u}).$$

Подставив в это равенство значения $\vec{u}'$ из соотношения (3.2.9), получим

$$\begin{aligned}(\vec{u},C\vec{u})'&=\left(P\vec{u}-\vec{u}(\vec{u},P\vec{u}),C\vec{u}\right)+\left(P\vec{u}-\vec{u}(\vec{u},P\vec{u}),C^*\vec{u}\right)=\\&=\left(P\vec{u},C\vec{u}\right)-\left(\vec{u}(\vec{u},P\vec{u}),C\vec{u}\right)+\left(P\vec{u},C^*\vec{u}\right)-\left(\vec{u}(\vec{u},P\vec{u}),C^*\vec{u}\right)=\\&=\left(C\vec{u}-(\vec{u},C\vec{u})\vec{u},P\vec{u}\right)-\left(C^*\vec{u}-(\vec{u},C\vec{u})\vec{u},P\vec{u}\right).\end{aligned}$$

Применив неравенство Щварца-Буняковского, и, учитывая, что $\|\vec{u}\|=1|$, будем иметь

$$\begin{aligned}&\left|(\vec{u},C\vec{u})'\right|\le\left|\left(C\vec{u}-(\vec{u},C\vec{u})\vec{u},P\vec{u}\right)\right|+\left|\left(C^*\vec{u}-(\vec{u},C\vec{u})\vec{u},P\vec{u}\right)\right|\le\\&\le\left\|\left(C\vec{u}-(\vec{u},C\vec{u})\vec{u}\right)\right\|\cdot\|P\vec{u}\|+\left\|\left(C^*\vec{u}-(\vec{u},C\vec{u})\vec{u}\right)\right\|\cdot\|P\vec{u}\|\le\left(\left\|\left(C\vec{u}-(\vec{u},C\vec{u})\vec{u}\right)\right\|+\left\|\left(C^*\vec{u}-(\vec{u},C\vec{u})\vec{u}\right)\right\|\right)\cdot\|P\|.\end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку матрица C – ортогональная, и, следовательно, $CC^*=E$, мы найдем

$$\left\|\left(C\vec{u}-(\vec{u},C\vec{u})\vec{u}\right)\right\|^2=\|C\vec{u}\|^2-(\vec{u},C\vec{u})^2=1-(\vec{u},C\vec{u})^2,$$

и

$$\left\|\left(C^*\vec{u}-(\vec{u},C\vec{u})\vec{u}\right)\right\|^2=\left\|C^*\vec{u}\right\|^2-(\vec{u},C\vec{u})^2=1-(\vec{u},C\vec{u})^2.$$

Учитывая последние два равенства, из неравенства (3.2.10) получим

$$\left|(\vec{u},C\vec{u})'\right|\le\left(1-(\vec{u},C\vec{u})^2\right)^{1/2}\le2\|P\|.$$

откуда будем иметь

$$\frac{(\vec{u},C\vec{u})'}{\left(1-(\vec{u},C\vec{u})^2\right)^{1/2}}\le2\|P\|.$$

Проинтегрировав последнее неравенство от a до b, и, учитывая, что $\vec{v}(t)=C\vec{u}(t)$, и $\|P\|>0$, получим

$$\int_a^b\frac{(\vec{u},\vec{v})'}{\left(1-(\vec{u},\vec{v})^2\right)^{1/2}}dt\le2\int_a^b\|P\|dt.$$

или

$$\left|\arcsin(\vec{u}(b),\vec{v}(b)) - \arcsin(\vec{u}(a),\vec{v}(a))\right| \le 2,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Для того, чтобы система* (3.2.1) *была осциллирующей, необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$\frac{\pi}{2} \le \int_a^b \|P\| dt. \qquad (3.2.11)$$

Действительно, предположим, что система (3.2.1) осциллирует, т.е. существуют $t_1, t_2 \in [a,b]$ так, что $y_i(t_i) = 0,\ i = 1,2.$ Тогда для соответствующего нормированного решения $\vec{u}$, согласно соотношению (3.2.7), будем иметь $u_i(t_i) = 0,\ i = 1,2.$ Очевидно, что мы можем считать $u_1(t_2) = 1,\ u_2(t_1) = -1$. Примем $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и заметим, что $CC^* = E$. Тогда для компонент решения $\vec{v}(t) = C\vec{u}(t)$ найдем

$$v_1(t_2) = u_1(t_2) = 1,\ \ v_2(t_1) = -u_2(t_1) = 1.$$

Приняв $a = t_1, b = t_2$ и, подставив соответствующие значения в соотношение (3.2.8), получим

$$\arcsin(\vec{u},\vec{v})\Big|_{t_1}^{t_2} = 2\arcsin 1 = \pi \le 2\int_{t_1}^{t_2} \|P\| dt \le \int_a^{tb} \|P\| dt$$

или

$$\frac{\pi}{2} \le \int_a^b \|P\| dt.$$

Покажем теперь, что константа $\frac{\pi}{2}$ в соотношении (3.2.11) не может быть улучшена. Для этого в качестве матрицы P рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Нетрудно проверить, что в этом случае пара $y_1(t) = \sin t,\ y_2(t) = \cos t$ является решением системы (3.2.1), причем $(\vec{y}(0), \vec{y}(\pi/2) = 0$, а, значит, система (3.2.1) осциллирующая. С другой стороны, нетрудно найти, что в данном случае $\|P\| = 1$, и, следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} \|P\| dt = \frac{\pi}{2}.$$

Это показывает, что соотношение (3.2.11) является наилучшим условием подобного рода.

Теорема 3.2.3. *Если в системе* (3.2.1) $p(t) > 0$ *и* $r(t) < 0$ *(соответственно* $p(t) < 0$ *и* $r(t) > 0$*, то при выполнении одного из условий*

1. $p(t) + r(t) \le 0$ и $\int_a^b p(t)dt \ge \pi$ (*соответственно* $\int_a^b r(t)dt \ge \pi$)

или

$p(t) + r(t) \ge 0$ и $\int_a^b r(t)dt \ge \pi$ (*соответственно* $\int_a^b p(t)dt \ge \pi$)

система (3.2.1) *осциллирует на отрезке* $[a,b]$, *а при выполнении одного из условий*

2. $p(t)+r(t)\le 0$ и $\int_a^b r(t)dt<\pi/2$ (*соответственно* $\int_a^b p(t)dt<\pi/2$)

или

$p(t)+r(t)\ge 0$ и $\int_a^b p(t)dt<\pi/2$ } (*соответственно* $\int_a^b r(t)dt<\pi/2$)

система (3.2.1) *неосциллирует на отрезке* $[a,b]$.

Доказательство. Согласно лемме 2.2.3, решение системы (3.2.1) можно представить в виде

$$y_1(t)=q(t)\sin\theta(t),\quad y_2(t)=q(t)\cos\theta(t), \tag{3.2.12}$$

где $\theta(t)$ - решение уравнения

$$\theta'=p(t)\cos^2\theta-r(t)\sin^2\theta \tag{3.2.13}$$

$\theta(a)=\theta_0,\ 0\le\theta_0<\pi$, и

$$q(t)=\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t\left[p(\tau)+r(\tau)\right]\sin 2\theta(\tau)d\tau\right).$$

Заметим, что поскольку функции $\cos^2\theta(t)$ и $\sin^2\theta(t)$ равномерно ограничены, то уравнение (3.2.13) имеет решение на каждом интервале. И так как правая часть уравнения (3.2.13) дифференцируема по θ, то решение соответствующей задачи Коши единственно в обычном смысле. Не теряя общности рассуждений, будем считать, что $p(t)>0$ и $r(t)<0$ (аналогично рассматривается случай $p(t)<0$ и $r(t)>0$.) Тогда из соотношения (3.2.13) будет следовать, что $\theta'(t)>0$, а значит функция $\theta(t)$ на отрезке $[a,b]$ является возрастающей, и, следовательно, $\theta(b)>\theta(a)$. Из формул (3.2.12) следует, что система (3.2.1) будет осциллирующей, если $|\theta(b)-\theta(a)|=\theta(b)-\theta(a)\ge\pi$. Проинтегрировав от a до b уравнение (3.2.13), найдем

$$\theta(b)-\theta(a)=\int_a^b\left[p(t)\cos^2\theta(t)-r(t)\sin^2(t)\right]dt=\int_a^b\left[p(t)-r(t)+\left(p(t)+r(t)\right)\cos 2\theta(t)\right]dt. \tag{3.2.14}$$

Предположим, что $p(t)+r(t)\le 0$. Тогда, поскольку $\cos 2\theta(t)\le 1$, то имеет место неравенство:

$$\int_a^b\left(p(t)+r(t)\right)(\cos 2\theta(t)-1)dt\ge 0,$$

откуда будет следовать,что

$$\int_a^b\left(p(t)+r(t)\right)\cos 2\theta(t)dt\ge\int_a^b\left(p(t)+r(t)\right)dt.$$

Тогда, учитывая соотношение (3.2.14), найдем, что

$$\theta(b)-\theta(a)=\frac{1}{2}\int_a^b\left(p(t)-r(t)\right)dt+\frac{1}{2}\int_a^b\left[\left(p(t)+r(t)\right)\cos 2\theta(t)\right]dt\ge$$

$$\ge\frac{1}{2}\int_a^b\left(p(t)-r(t)\right)dt+\frac{1}{2}\int_a^b\left(p(t)+r(t)\right)dt\ge\int_a^b p(t)dt\ge\pi.$$

И, следовательно, система (3.2.1) на отрезке $[a,b]$ осциллирует.

Рассмотрим теперь случай, когда $p(t)+r(t)\ge 0$. Тогда, воспользовавшись очевидным неравенством,

$$\int_a^b \big(p(t)+r(t)\big)(1+\cos 2\theta(t))dt \ge 0,$$

с учетом (3.2.14), получим

$$\theta(b)-\theta(a) \ge \frac{1}{2}\int_a^b \big(p(t)-r(t)\big)dt - \frac{1}{2}\int_a^b \big(p(t)+r(t)\big)dt \ge \int_a^b |r(t)|dt \ge \pi,$$

откуда будет следовать осцилляция системы (3.2.1)

Предположим теперь, что имеет место одно из условий 2, в частности, $p(t)+r(t)\le 0$ и $\int_a^b r(t)dt < \pi/2$ (другой случай рассматривается аналогично). Поскольку наименьшее расстояние между нулями разных компонент решения систем (3.2.1), определямых соотношениями (3.1.2), составляет $\pi/2$, то, очевидно, что система не будет осциллировать при условии, если $|\theta(b)-\theta(a)| < \frac{\pi}{2}$. Учитывая формулу (3.2.14), а также наше предположение, будем иметь

$$|\theta(b)-\theta(a)| = \left|\frac{1}{2}\int_a^b \big(p(t)-r(t)\big)dt + \frac{1}{2}\int_a^b [\big(p(t)+r(t)\big)\cos 2\theta(t)]dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_a^b |p(t)-r(t)|dt + \frac{1}{2}\int_a^b |\big(p(t)+r(t)\big)\cos 2\theta(t)|dt \le \frac{1}{2}\int_a^b |p(t)-r(t)|dt + \int_a^b |p(t)+r(t)|dt =$$

$$= \int_a^b |r(t)|dt < \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что постоянная $\pi/2$ в условии 2 теоремы является оптимальной и не может быть улучшена. Это следует, например, из того, что если рассмотреть систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1, \end{cases}$$

на отрезке $[0,\pi/2]$, то $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos \end{pmatrix}$, являющееся решением этой системы, на отрезке $[0,\pi/2]$ осциллирует и $\int_0^{\pi/2} |p(t)|dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий утверждение теоремы.

Пример 18. Рассматривается система

$$\begin{cases} y_1' = (t+1)y_2, \\ y_2' = -ty_1, \end{cases}$$

на отрезке $[0.2,3]$. В данном случае $p(t)=t+1,\ r(t)=-t$, и на отрезке $[0.2,3]$ выполняются условия: $p(t)>0,\ r(t)<0$ и $p(t)+r(t)=1>0$. Заметим, что на отрезке $[0.2,1]$

$$\int_0^1 |p(t)|dt = \int_0^1 (t+1)dt = 1.28 < \frac{\pi}{2},$$

и, следовательно, согласно теореме, рассматриваемая система на отрезке $[0.2,1]$

неосциллирует. На отрезке $[1,3]$ $\int_0^1 |r(t)|dt = \int_0^1 tdt = 4 > \pi.$ А, значит, система на $[1,3]$ осциллирует.

Из доказанной теоремы, в частности, вытекают

Следствие 1. *Если в системе*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -p(t)y_1, \end{cases}$$

функция $p(t)$ *на отрезке* $[a,b]$ *является знакопостоянной и выполняется условие*

$$\int_a^b |p(t)|dt \geq \pi,$$

то для любой неотрицательной на отрезке $[a,b]$ *функции* $f(t)$ *система*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -(p(t) + f(t))y_1, \end{cases}$$

будет осциллирующей на этом отрезке.

Следствие 2. *Если в системе*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -p(t)y_1, \end{cases}$$

функция $p(t)$ *на отрезке* $[a,b]$ *является знакопостоянной и выполняется условие*

$$\int_a^b |p(t)|dt < \frac{\pi}{2},$$

то для любой неотрицательной на отрезке $[a,b]$ *функции* $f(t)$ *система*

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = -(p(t) + f(t))y_1, \end{cases}$$

будет неосциллирующей на этом отрезке.

Пусть n_i и m_i $(i = 1,2)$ имеют тот же смысл, что и в параграфе 2.2. Имеет место

Теорема 3.2.4. *Если системы*

$$\begin{cases} y_1' = p_1(t)y_2, \\ y_2' = r_1(t)y_1, \end{cases} \tag{3.2.15a}$$

и

$$\begin{cases} y_1' = p_2(t)y_2, \\ y_2' = r_2(t)y_1, \end{cases} \tag{3.2.15b}$$

удовлетворяют условиям теоремы 2.2.5, *и система* (3.2.15) *осциллирующая, причем* $n_i > 1$ $(i = 1,2)$, *и* $n_1 = n_2 + 1$, *то осциллирующей будет и система* (3.2.15b).

Доказательство. Предположим, что система (3.2.15a) осциллирующая и $n_i > 1$ $(i = 1,2)$. Из теоремы 2.2.6 будет следовать, что имеют место неравенства

$$|n_i - m_i| \leq 1 \quad (i = 1,2),$$

откуда найдем, что

$$m_i \geq n_i - 1 \geq 1 \quad (i = 1,2).$$

Из этих соотношений, согласно определению 3.1.2 и будет следовать, что система (3.2.15b) – осциллирующая. Теорема доказана.

Рассмотрим применение теоремы 3.2.3 на следующем примере. Требуется выяснить – осциллирует ли система

$$\begin{cases} z_1' = \sqrt{t}\, z_2, \\ z_2' = -t\sqrt{t}\, z_1, \end{cases} \qquad (3.2.16)$$

на отрезке $[2,5]$. Рассмотрим для сравнения систему

$$\begin{cases} y_1' = t y_2, \\ y_2' = -t y_1, \end{cases}$$

Определим число нулей компонент решений этой системы, воспользовавшись формулами из параграфа 2.2. Имеем

$$M = \int_2^5 t dt \approx 3.342, \quad n_1 = 3,\ n_2 = 2.$$

Отсюда следует, что на отрезке [2, 5] для системы (3.2.16) имеют место условия теоремы 3.2.4, согласно которой система на отрезке $[2,5]$ будет осциллирующей.

ГЛАВА 4

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

4.1. Теорема об осцилляции решений одной краевой задачи для канонической системы Дирака 1-ого типа

Известная в релятивистской квантовой теории одномерная стационарная система Дирака 1-ого типа ([5, стр. 254]) записывается в виде следующего матричного уравнения

$$S\frac{d\bar{y}}{dt}+P(t)\bar{y}=\lambda\bar{y},$$

где

$$S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ P(t)=\begin{pmatrix}p(t) & 0\\ 0 & r(t)\end{pmatrix},\ \bar{y}=\bar{y}(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix},$$

причем $p(t)$ и $r(t)$т действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[0,\pi]$, λ – действительный параметр. Это уравнение эквивалентно следующей системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y_2'+p(t)y_1=\lambda y_2,\\ -y_1'+r(t)y_2=\lambda y_1.\end{cases}$$

Рассматривается следующая краевая задача для канонической системы Дирака 1-ого типа

$$\begin{cases} y_2'+p(t)y_1=\lambda y_2,\\ -y_1'+r(t)y_2=\lambda y_1.\end{cases} \tag{4.1.1a}$$

$$y_1(0)\sin\alpha+y_2(0)\cos\alpha=0, \tag{4.1.1b}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta+y_2(\pi)\cos\beta=0, \tag{4.1.1c}$$

где $p(t)$ и $r(t)$ – действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[0,\pi]$, α и β – произвольные действительные числа, λ – параметр.

Определение 4.1.1. Если при некотором λ краевая задача (4.1.2a)-(4.1.2c) имеет нетривиальное решение

$$\bar{y}(t,\lambda_0)=\begin{pmatrix}y_1(t.\lambda_0)\\ y_2(t,\lambda_0)\end{pmatrix},$$

то число λ_0 называется собственным значением, а соответствующее решение $\bar{y}(t,\lambda_0)$ – собственной вектор-функцией задачи (4.1.1a)-(4.1.1c).

Имеем место

Теорема 4.1.1. *Существует бесконечно много собственных значений*

$$\ldots,\lambda_{-n},\ldots,\lambda_{-1},\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots$$

задачи (4.1.1a)-(4.1.1c), *которые действительны и образуют монотонно возрастающую последовательность с* $\lambda_n\to+\infty,\lambda_{-n}\to-\infty$. *Кроме того, одна из компонент собственной функции, соответствующей* λ_n *имеет точно* n *нулей на интервале* $(0,\pi)$.

Доказательство. Запишем систему (4.1.1) в виде

$$\begin{cases} y_1' = (\lambda - r(t))\, y_2, \\ y_2' = (\, p(t) - \lambda)\, y_1. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Пусть $\bar{\varphi}(t,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t,\lambda) \\ \varphi_2(t,\lambda) \end{pmatrix}$ – решение системы (4.1.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0,\lambda) = -\cos\alpha,\ \varphi_2(0,\lambda) = \sin\alpha. \tag{4.1.3}$$

Очевидно, что это решение будет удовлетворять и краевому условию (4.1.1b). Собственными значениями задачи (4.1.1a)-(4.1.1c) будут те значения λ, которые удовлетвряют условию (4.1.1c). Для $\bar{y} = \bar{\varphi}(t,\lambda)$ определим ω так, чтобы функция $\theta = \omega(t,\lambda)$ удовлетворяла бы условию $\omega(0,\lambda) = \alpha$. В силу теоремы 2.2.7 $\theta = \omega(t,\lambda)$ для фиксированного $0 < t \le \pi$ есть монотонно возрастающая функция от λ. Заметим, что если $\omega = 0 \ (\mathrm{mod}\, \pi)$, то первая компонента решения $\bar{\varphi}(t,\lambda)$ будет обращаться в нуль. Далее, согласно соотношению (2.2.47a), будем иметь

$$\theta' = (\lambda - r(t)\cos^2\theta - (\, p(t) - \lambda)\sin^2\theta = \lambda - r(t)\cos^2\theta - p(t)\sin^2\theta. \tag{4.1.4}$$

Пусть R_1, R_2, P_1 и P_2 такие постоянные, что

$$P_1 \le p(t) \le P_2,\ \ R_1 \le r(t) \le R_2.$$

Тогда, из соотношения (4.1.4) будет следовать, что если $\omega = 0 \ (\mathrm{mod}\, \pi)$, то при $\lambda > R_2$ $\omega' > 0$будем иметь. Это означает, что если $\omega = 0 \ (\mathrm{mod}\, \pi)$, то ω есть возрастающая функция от t. Таким образом, если для некоторого t_k из интервала $(0,\pi)$ $\omega(t_k,\lambda) = \pi k,$то $\omega(t,\lambda) > \pi k$ для $t > t_k$ и $\omega(t,\lambda) < \pi k$ для $t < t_k$.Кроме того, так как функция ω по λ монотонна, то из теоремы 2.2.9 следует, что при возрастании λ нули функции φ_1, если они существуют, передвигаются к точке $t = 0$. Так как функция ω непрерывна по t и λ, и $\omega' > 0$, то координата k-ого нуля $t_k = t_k(\lambda)$ функции $\varphi_1(t,\lambda)$ на интервале $(0,\pi)$ есть непрерывная монотонно убывающая функция от λ, что следует из соотношения

$$\omega'(t_\kappa,\lambda) = \frac{dt_k}{d\lambda} + \frac{\partial\omega(t_\kappa,\lambda)}{\partial\lambda} = 0.$$

Докажем теперь, что для фиксированного $t = c$ из интервала $(0,\pi)$

$$\omega(t,\lambda) \to \infty \ \text{ при } \ \lambda \to +\infty..$$

Так как $\alpha \ge 0$ и $\omega' > 0$ для $\omega = 0 \ (\mathrm{mod}\, \pi)$, то $\omega(t,\lambda) \ge 0$. Таким образом достаточно показать, что для некоторого t_0 при $0 < t_0 < c$ $\omega(c,\lambda) - \omega(t_0,\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to +\infty.$

Пусть $t_0 = \dfrac{c}{2}$, тогда для решения $\bar{\psi}$ системы

$$\begin{cases} y_1' = (\lambda - R_1)\, y_2, \\ y_2' = (P_2 - \lambda)\, y_1. \end{cases}$$

удовлетворяющего условиям $\bar{\psi}(t_0,\lambda)=\bar{\varphi}(t_0,\lambda)$, будем иметь $\bar{\omega}(t_0,\lambda)=\omega(t_0,\lambda)$, и, следовательно, в силу теоремы 2.2.9

$$\omega(c,\lambda)-\omega(t_0,\lambda)\ge\bar{\omega}(c,\lambda)-\bar{\omega}(t_0,\lambda).$$

Последовательные нули компонент функции ψ_1 отличаются на величину

$$\frac{\pi}{\sqrt{|(P_2-\lambda)(\lambda-R_1)|}}.$$

Эта величина стремится к нулю при $\lambda\to+\infty$. Поэтому $\bar{\omega}=0\ (\mathrm{mod}\,\pi)$ для произвольного числа значений t, и так как $\bar{\omega}'>0$ при $\bar{\omega}=0\ (\mathrm{mod}\,\pi)$, то $\bar{\omega}\to\infty$. Аналогично вышеизложенному, доказывается, что при $\lambda\to-\infty$ $\omega(\pi,\lambda)\to-\infty$. Далее, так как $\beta>0$ и функция $\omega(\pi,\lambda)$ по λ монотонно возрастает, то существует значение λ, обозначим его через λ_0, для которого $\omega(\pi,\lambda_0)=\beta$. Далее, так как $0\le\alpha<\pi$ и $\beta\le\pi$, то $0<\omega(t,\lambda_0)<\beta$ на интервале $(0,\pi)$, так что решение $\vec{\varphi}(t,\lambda_0)$ удовлетворяет условию (4.1.1c) и не обращается в нуль на $(0,\pi)$. Полагая, что λ принимает значения, превосходящие λ_0, получим единственное λ_1, для которого

$$\omega(\pi,\lambda_1)=\beta+\pi.$$

Очевидно, что функция $\vec{\varphi}(t,\lambda_1)$ удовлетворяет условию (4.1.1c) и имеет в точности один нуль на интервале $(0,\pi)$. Собственное значение с номером n определится равенством $\omega(\pi,\lambda_n)=\beta+\pi n.$ Теорема доказана.

Теорема 4.1.2. *Для любого натурального числа* n *существует число* μ_n, *такое, что если собственное значение* λ *задачи* (4.1.1a)-(4.1.1c) *удовлетворяет неравенству* $\lambda\ge|\mu_n|$, *то каждая из компонент соответствующей собственной вектор-функции задачи* (4.1.1a)-(4.1.1c) *имеет на отрезке* $[0,\pi]$ *по крайней мере* n *нулей.*

Доказательство. Запишем систему (4.1.1a) в виде

$$\begin{cases} y_1'=(\lambda-r(t))\,y_2, \\ y_2'=(p(t)-\lambda)\,y_1. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Для заданного натурального числа выберем натуральное число s так, чтобы имело место неравенство $s\ge n+1$. Затем подберем пару натуральных чисел m и k так, чтобы $s=mk$ (например, можно выбрать $k=1$ и $m=s$).

Поскольку функции $p(t)$ и $r(t)$ непрерывны на отрезке $[0,\pi]$, то они будут ограничены, т.е. найдутся числа p_0,p_1,r_0 и r_1 такие, что $p_0\le p(t)\le p_1$ и $r_0\le r(t)\le r_1$. Далее, выберем λ_n – собственное значение задачи (4.1.1a)-(4.1.1c) так, чтобы имели место неравенства

$$\lambda_n\ge m^2+r(t)$$

и

$$\lambda_n\ge k^2+p(t).$$

Такое собственное значение λ_n согласно теореме 4.1.1 всегда найдется, и его, например, можно выбрать таким, чтобы оно удовлетворяло бы соотношению

$$\lambda_n \geq_1 \max\{r_1 + m^2,\ p_1 + k^2\}. \qquad (4.1.6)$$

Сравним теперь систему (4.1.3) с системой

$$\begin{cases} y_1' = -m^2 y_2 \\ y_2' = k^2 y_1. \end{cases} \qquad (4.1.7)$$

Если принять

$$p_1(t) = -m^2,\ r_1(t) = k^2,\ p_2(t) = \lambda_n - r(t),\ r_2(t) = p(t) - \lambda_n,$$

то, учитывая (4.1.6), будем иметь

$$p_i(t) < 0,\ r_i(t) > 0\ \ (i = 1,2)\ \text{ и } \quad |p_2(t)| \geq |p_1(t)|,\ |r_2(t)| \geq |r_1(t)|.$$

Как уже было показано в §1.3, общее решение системы (4.1.7) $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ можно записать в виде

$$u_1(t) = A\cos(mkt + \varphi),\ \ u_2(t) = \frac{Ak}{m}\sin(mkt + \varphi),$$

где A и φ – произвольные постоянные. Предположим теперь, что $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ – собственная вектор-функция задачи (4.1.1a)-(4.1.1c), соответствующая собственному значению λ_n, и, следовательно, $\vec{v}(t, \lambda_n)$ – собственная вектор-функция задачи (4.1.1a)-(4.1.1c). Пусть

$$v_1(0, \lambda_n) = y_{10},\ \ v_2(0, \lambda_n) = y_{20}.$$

В силу теоремы существования решения для задачи Коши, очевидно, что можно подобрать значения A и φ так, чтобы для соответствующего им частного решения $\vec{u}(t)$ имело бы место условие

$$u_1(0) = y_{10},\ u_2(0) = y_{20}.$$

Заметим теперь, что для систем (4.1.5) и (4.1.7) и соответствующих им решений $\vec{u}(t)$ и $\vec{v}(t, \lambda_n)$ имеют место условия теоремы 2.2.1. Так как первая компонента $\vec{u}(t)$ имеет на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере $\left[\frac{\pi mk}{\pi}\right] = s > n$ нулей, то, применив теорему 2.2.1, получим, что одна из компонент собственной вектор-функции $\vec{v}(t, \lambda_n)$ будет иметь на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере n нулей. Тогда, согласно лемме 2.2.1, другая компонента этой же собственной вектор-функции будет иметь на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере n нулей. Очевидно, что при $\lambda \geq \lambda_n$, число нулей может только увеличиться.

В качестве λ выберем теперь λ_n' – собственное значение задачи (4.1.1a)-(4.1.1c) так, чтобы оно удовлетворяло бы соотношениям

$$\lambda_n' \leq -m^2 + r(t)$$

и

$$\lambda_n' \geq -k^2 + p(t)\,.$$

Такое значение λ_n' можно выбрать, например, воспользовавшись соотношением $\lambda_n' \leq \min\{r_0 - m^2, p_0 - k^2\}$. Примем

$$p_1(t) = m^2,\ r_1(t) = -k^2,\ p_2(t) = \lambda_n' - r(t),\ r_2(t) = p(t) - \lambda_n',$$

Сравним теперь систему (4.1.2) с системой

$$\begin{cases} y_1' = m^2 y_2 \\ y_2' = -k^2 y_1, \end{cases} \tag{4.1.8}$$

общее решение которой можно представить в виде

$$u_1(t) = A\sin(mkt+\varphi), \quad u_2(t) = \frac{Ak}{m}\cos(mkt+\varphi),$$

где A и φ – произвольные постоянные. Выберем значения постоянных A и φ так, чтобы имело место условие

$$u_1(0) = y_{10}, \; u_2(0) = y_{20}.$$

Далее, заметим, что имеют место неравенства

$$p_i(t) < 0, \; r_i(t) > 0 \; (i=1,2) \text{ и } \quad |p_2(t)| \ge |p_1(t)|, \; |r_2(t)| \ge |r_1(t)|.$$

И, вновь воспользовашись теоремой 2.2.1, и, учитывая то, что компоненты решения системы (4.1.8) будут иметь на отрезке $[0,\pi]$ по крайней мере $n+1$ нулей, получим, что каждая из компонент собственной вектор-функции задачи (4.1.1a)-(4.1.1c) будет иметь на отрезке $[0,\pi]$ по крайней мере n нулей. При $\lambda \le \lambda_n'$ число нулей может только увеличиться. Очевидно, что для заверешения доказательства достаточно выбрать μ_n из соотношения

$$\mu_n = \max\{|\lambda_n|, |\lambda_n'|\}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим вновь систему (4.1.1) при тех же предположениях, что и выше. Поскольку функции $p(t)$ и $r(t)$ непрерывны на отрезке $[0,\pi]$, и, следовательно, ограничены, то найдутся такие постоянные $R_i, P_i \; (i=1,2)$, что

$$R_1 = \min_{0\le t\le\pi} r(t), \quad R_2 = \max_{0\le t\le\pi} r(t), \quad ,P_1 = \min_{0\le t\le\pi} p(t), \quad P_2 = \max_{0\le t\le\pi} p(t).$$

Рассмотрим следующие два возможных случая:

1. $[R_1, R_2] \cap [P_1, P_2] = \varnothing,$
2. $[R_1, R_2] \cap [P_1, P_2] \ne \varnothing.$

В первом случае, либо $R_2 < P_1$, либо $P_2 < R_1$. Тогда, для значений параметра, удовлетворящего условию $\lambda \in [R_2, P_1]$ (соответственно $\lambda \in [P_2, R_1]$) будем иметь

$$(\lambda - r(t))(p(t) - \lambda) > 0.$$

И, следовательно, согласно теореме 3.1.1 система (4.1.1) для указанных значений параметра, не будет осциллирующей на отрезке $[0,\pi]$. Предположим теперь, что имеет место случай 2. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $R_1 < P_1 < R_2 < P_2$, (другие возможные случаи рассматриваются аналогично). Предположим, что функция $p(t)$ на отрезке $[0,\pi]$ возрастает. Для фиксированного $R_2 < \lambda < P_2$, в силу непрерывности $p(t)$, найдется единственная точка $t_0 \in (0,\pi)$ так, что $p(t_0) = \lambda$. Тогда, для $t \in (0,\pi)$ будем иметь. И, следовательно,система (4.1.1) на интервале $[t_0,\pi]$будет неосциллирующей.

В случае, когда $p(t)$ убывающая, система (4.1.1) будет неосциллирующей на интервале $(0,t_0)$.

Проиллюстрируем вышеизложенное на следующем примере.

Пример 19. Рассматривается система

$$\begin{cases} y_1' = (\lambda - t)y_2, \\ y_2' = (t^2 + 4 - \lambda)y_1 \end{cases} \qquad (4.1.9)$$

на отрезке $[0,\pi]$. В данном случае

$$r(t) = t,\ \ p(t) = t^2 + 4,\ \ R_1(t) = 0,\ R_2 = \pi,\ P_1 = 4,\ P_2 = \pi^2 + 4,$$

причем, $R_2 < P_1$. Следовательно, рассматриваемая система для $\lambda \in (\pi, 4)$ будет неосциллирующей.

Что касается интервалов осцилляции системы, то верна

Теорема 4.1.3. *Система* (4.1.1*) на отрезке* $[0,\pi]$ *при* $\lambda \geq \max\{P_1, R_2\}$ *и* $\lambda \leq \min\{P_1, R_2\}$ *является осциллирующей.*

Доказательство. Предположим, что $P_1 \geq R_2$ (доказательтсво в случае $R_2 \geq P_1$ проводится аналогично) и пусть выполняется условие $\lambda \geq \max\{P_1, R_2\}$. Тогда, очевидно, что имеет место неравенство

$$(\lambda - r(t))(p(t) - \lambda) < 0.$$

Далее, будем иметь иметь

$$\min_{0 \leq t \leq \pi} (p(t) - \lambda) = P_1 - \lambda,\ \ \min_{0 \leq t \leq \pi} (\lambda - r(t)) = \lambda - R_2.$$

С другой стороны, непосредственным вычислением нетрудно найти, что при сделанных предположениях будет выполняться неравенство

$$\lambda^2 - (P_1 + R_2)\lambda + P_1 R_2 \geq 1,$$

и, следовательно,

$$\pi \geq \frac{\pi}{\sqrt{(\lambda - P_1)(\lambda - R_2)}}.$$

Заметим теперь, что приняв во внмание соотношения (4.1.10) и (4.1.11), мы найдем, что имеют место условия теоремы 3.1.2, согласно которой система (4.1.1) осциллирующая.Случай $\lambda \leq \min\{P_1, R_2\}$ рассматривается аналогично вышеизложенному. Теорема доказана.

4.2. Теорема об осцилляции решений одной краевой задачи для канонической системы Дирака 2-ого типа

Рассматривается следующая краевая задача для канонической системы Дирака 2-ого типа ([5])

$$\begin{cases} y_2' + p(t)y_1 + q(t)y_2 = \lambda y_1, \\ y_1' + q(t)y_1 - p(t)y_2 = \lambda y_2. \end{cases} \tag{4.2.1a}$$

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0, \tag{4.2.1b}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0, \tag{4.2.1c}$$

где $p(t)$ и $q(t)$ $[0,\pi]$ – действительные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[0,\pi]$, α и β – произвольные действительные числа, λ – параметр. Известно ([5]), что собственные значения краевой задачи (4.2.1a)-(4.2.1c) действительны и счетны, причем их множество простирается от $-\infty$ до $+\infty$.

Имеет место

Теорема 4.2.1. *Для любого натурального числа* n *существует число* μ_n*, такое, что если собственное значение* λ *задачи* (4.2.1a)-(4.2.1c) *удовлетворяет неравенству* $\lambda \ge |\mu_n|$*, то каждая из компонент соответствующей собственной вектор-функции задачи* (4.2.1a)-(4.2.1c) *имеет на отрезке* $[0,\pi]$ *по крайней мере* n *нулей.*

Доказательство. Запишем систему (4.2.1) в виде

$$\begin{cases} y_1' = q(t)y_1 - (p(t)+\lambda)y_2, \\ y_2' = (\lambda - p(t))y_1 - q(t)y_2. \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Воспользовавшись леммой 1.2.3, преобразуем систему (4.2.2) к виду

$$\begin{cases} z_1' = p_0(t)z_2, \\ z_2' = r_0(t)z_1, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

в которой, согласно соотношениям (1.1.20a), будем иметь

$$p_0(t) = -(p(t)+\lambda)e^{-2\int_0^t q(\tau)d\tau}, \quad r_0(t) = (\lambda - p(t))e^{2\int_0^t q(\tau)d\tau}, \tag{4.2.4}$$

Для заданного натурального числа n выберем натуральные число s так, чтобы имело место неравенство $s \ge n+1$. Затем подберем пару натуральных чисел m и k так, чтобы $s = mk$. Обозначив

$$\varphi(t) = e^{-2\int_0^t q(\tau)d\tau},$$

заметим, что $\varphi(t)$. Далее, так как функции $p(t), \varphi(t)$ и $\dfrac{1}{\varphi(t)}$ непрерывны на отрезке $[0,\pi]$, то фунцкии $\dfrac{m^2}{\varphi(t)} - p(t)$ и $p(t) + k^2\varphi(t)$ также будут непрерывны на $[0,\pi]$, и, следовательно, ограничены. А, значит, найдутся такие числа l_1, l_2, L_1 и L_2, что

$$l_1 \le \frac{m^2}{\varphi(t)} - p(t) \le L_1$$

и

$$l_2 \le p(t) + k^2\varphi(t) \le L_2.$$

Выберем теперь собственное значение задачи (4.2.1a)-(4.2.1c) так, чтобы выполнялись неравенства

$$\lambda_n \ge \frac{m^2}{\varphi(t)} - p(t) \tag{4.2.5a}$$

и

$$\lambda_n \ge p(t) + k^2\varphi(t). \tag{4.2.5b}$$

Например, значение λ_n можно выбрать таким, чтобы оно удовлетворяло бы соотношению

$$\lambda_n \ge \max\{L_1, L_2\}.$$

Такой выбор всегда возможен в силу особенности расположения собственных значений на числовой прямой. Тогда, учитывая, что $\varphi(t) > 0$, а также соотношения (4.2.5) и (4.2.6), будем иметь

$$-(p(t) + \lambda_n)\varphi(t) \le -m^2 < 0, \quad \frac{\lambda_n - p(t)}{\varphi(t)} \ge k^2 > 0. \tag{4.2.6}$$

Сравним теперь систему (4.2.3) с системой

$$\begin{cases} y_1' = -m^2 y_2 \\ y_2' = k^2 y_1. \end{cases} \tag{4.2.7}$$

Общее решение системы (4.2.7) $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, как уже нам известно, можно представить в виде

$$u_1(t) = A\cos(mkt + \varphi), \quad u_2(t) = \frac{Ak}{m}\sin(mkt + \varphi),$$

где A и φ – произвольные постоянные. Предположим теперь, что $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ – собственная вектор-функция задачи (4.2.1a)-(4.2.1c), соответствующая собственному значению λ_n, а $\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ – соответствующее ему (по лемме 1.2.3) решение системы (4.2.3) и пусть

$$z_1(0) = z_{10}, \; z_2(0) = z_{20}, \tag{4.2.8}$$

где z_{10} и z_{20} – некоторые действительные числа. Из общего решения системы (4.2.7) выделим решение, которое удовлетворяло бы условию

$$u_1(0) = z_{10}, \; u_2(0) = z_{20},$$

(такой выбор возможен согласно теореме о существовании и единственности задачи Коши для линейных однородных систем). Очевидно, что каждая из компонент этого решения будет иметь на отрезке $[0, \pi]$ по крайней мере $mk = s > n+1$ нулей. Далее, примем

$$p_1(t)=-m^2,\ r_1(t)=k^2,\ p_2(t)=p_0(t),\ r_2(t)=r_0(t).$$

Тогда, с учетом (4.2.4), (4.2.5a) и (4.2.5b), будем иметь

$$\left|p_2(t)\right|=\left|-(p(t)+\lambda)\right|e^{-2\int_0^t q(\tau)d\tau}=\left|-(p(t)+\lambda)\right|\varphi(t)\geq m^2=\left|p_1(t)\right|,$$

$$\left|r_2(t)\right|=\left|(\lambda-p(t))\right|e^{2\int_0^t q(\tau)d\tau}=\frac{\left|\lambda_n-p(t)\right|}{\varphi(t)}\geq k^2=\left|r_1(t)\right|.$$

Заметим теперь, что по отношению к системам (4.2.3) и (4.2.7) и соответствующим им решениям $\vec{z}(t)$ и $\vec{u}(t)$ имеют место условия теоремы 2.1.1, и так как каждая из компонент решения $\vec{u}(t)$ имеет на отрезке $[0,\pi]$ по крайней мере $n+1$ нулей, то, применив теорему 2.1.1, получим, что одна из компонент $\vec{z}(t)$, а значит, согласно следствию из леммы 1.2.3, и соответствующей собственной вектор-функции задачи (4.2.1a)-(4.2.1c)), будет иметь на отрезке $[0,\pi]$ по крайней мере $n+1$ нулей. Согласно лемме 2.2.1, другая компонента этой же собственной вектор-функции будет иметь на отрезке $[0,\pi]$ по крайней мере n нулей. Очевидно, что при $\lambda\geq\lambda_n$, число нулей может только увеличиться.

Выберем теперь собственное значение задачи (4.2.1a)-(4.2.1c) так, чтобы имели место неравенства

$$\lambda_n'\leq-\frac{m^2}{\varphi(t)}-p(t) \tag{4.2.9a}$$

и

$$\lambda_n'\leq p(t)-k^2\varphi(t). \tag{4.2.9b}$$

Такое значение λ_n' можно выбрать, например, воспользовавшись соотношением

$$\lambda_n'\leq\min_{0\leq t\leq\pi}\left(-\frac{m^2}{\varphi(t)}-p(t),\, p(t)-k^2\varphi(t)\right).$$

Примем

$$p_1(t)=m^2,\ r_1(t)=-k^2,\ p_2(t)=p_0(t),\ r_2(t)=r_0(t).$$

Тогда, с учетом (4.2.4), (4.2.9a) и (4.2.9b), будем иметь, что

$$p_2(t)=-(p(t)+\lambda)\varphi(t)\geq-m^2=p_1(t),$$

$$r_2(t)=\frac{\lambda_n'-p(t)}{\varphi(t)}\leq k^2=r_1(t).$$

Рассмотрим теперь для сравнения с системой (4.2.3) систему

$$\begin{cases} y_1'=m^2y_2\\ y_2'=-k^2y_1. \end{cases} \tag{4.2.10}$$

общее решение которой можно записать в виде

$$u_1(t) = A\sin(mkt+\varphi), \quad u_2(t) = \frac{Ak}{m}\cos(mkt+\varphi),$$

где A и φ – произвольные постоянные. Выберем теперь из этого решения то частное решение $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$, которое удовлетворяет условию

$$u_1(0) = z_{10},\ u_2(0) = z_{20}.$$

Тогда, для систем (4.2.3) и (4.2.10), будут иметь место условия теоремы 2.2.1. И так как каждая из компонент $\vec{u}(t)$ решения системы (4.2.11), будет иметь наотрезке $[0,\pi]$ по крайней мере $n+1$ нулей, то, вновь, применив теорему 2.2.1, получим, что каждая из компонент $\vec{z}(t)$, а значит, согласно следствию из леммы 1.2.3, и соответствующей собственной вектор-функции задачи (4.2.1a)-(4.2.1c)), будет иметь на отрезке $[0,\pi]$ по крайней мере n нулей. Число нулей при $\lambda \le \lambda'_n$ может только увеличиться. Для заверешения доказательства достаточно выбрать μ_n из соотношения

$$\mu_n = \max\ \{|\lambda_n|, |\lambda'_n|\}.$$

Теорема доказана.

4.3. Применение теорем сравнения в примерах

Рассмотрим в качестве приложения одной из теорем сравнения – определение осцилляционнех свойств систем с степенными и экспотенциальными коэффициентами на полупрямой.

Из утверждения теоремы 2.2.8 следует, что если имеют место условия теоремы, то осцилляционные свойства системы (3.2.1) напрямую зависят от поведения корней уравнений (2.2.46c) и (2.2.46d), а именно, чем больше их количество на рассматриваемом отрезке, тем сильнее осцилляция системы. Приведем необходимые определения.

Определение 4.3.1. ([11]) Нетривиальное решение $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (3.2.1) назовем осциллирующим, если функция $y_1(t)$ имеет по крайней мере один нуль в некоторой окрестности $+\infty$, в противном случае решение называется неосциллирующим.

Известно, что если система имеет одно осциллирующее решение, то каждая из его нетривиальных решений также является осциллирующим.

Определение 4.3.2. Система (3.2.1) называется осциллирующей, если она имеет по крайней мере одно осциллирующее решение, в противном случае система называется неосциллирующей.

Перейдем теперь к рассмотрению осциляционных свойств системы

$$\begin{cases} y_1' = t^m y_2 \\ y_2' = -t^n y_1. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

в предположении, что $t \geq 0$. Рассмотрим систему (4.3.1) сначала на конечном отрезке $[a,b] \subset [0,\infty)$ [a, b].

1. Пусть $m,n \geq 0,\ m < n.$ Имеем
   1) $p, r \in C^2[a,b],\ \ p(t) > 0,\ r(t) < 0.$
   2) $p'(t) = mt^{m-1} \geq 0,\ -r'(t) = nt^{n-1} \geq 0.$
   3) $P'(t) = \left(-\dfrac{p(t)}{r(t)} \right) = (t^{m-n})' = (m-n)t^{m-n-1} \leq 0.$
   4) $(\ln P(t))'' = (\ln t^{m-n})'' = \dfrac{m-n}{t^2} > 0$

Таким образом имеют место условия теоремы 2.2.8 (условие $n_1 = n_2 + 1$ можно будет обеспечить выбрав, например, подходящим образом значение b). И, следовательно, число нулей компонент решений системы (4.3.1) будет определяться числом корней уравнений (2.2.46c) и (2.2.46d), которые при этом будут иметь вид

$$\int_a^t \tau^{\frac{m+n}{2}} d\tau = \frac{t^{\frac{m+n+2}{2}} - a^{\frac{m+n+2}{2}}}{\frac{m+n+2}{2}} = \pi k,\ k \in Z, \tag{4.3.2a}$$

и

$$\int_a^t \tau^{\frac{m+n}{2}} d\tau = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z. \tag{4.3.2b}$$

Из уравнения (4.3.2a) найдем,

$$t^{\frac{m+n+2}{2}} = \frac{m+n+2}{2} + \pi k + a^{\frac{m+n+2}{2}},\ k \in Z.$$

Учитывая принадлежность корней отрезку $[a,b]$, и, обозначив $l = \dfrac{m+n+2}{2}$, будем иметь

$$a^l \leq l\pi k + a^l \leq b^l,\ k \in Z,$$

или

$$0 \leq l\pi k \leq b^l - a^l,\ k \in Z. \tag{4.3.3}$$

Поскольку $l > 0$, то из полученных соотношений, во-первых, будет следовать, что уравнения (4.3.2a) и (4.3.2b) будут иметь более одного корня, если

$$\frac{b^l - a^l}{l} \geq \frac{3\pi}{2}.$$

Во-вторых, можно сделать вывод, что при малых значениях a и b осцилляция будет слабой (маленькая плотность нулей), поскольку будет малой и разность $b^l - a^l$, и вследствии чего число значений k, удовлетворяющих соотношению (4.3.3), будет мало. С увеличением значений a и b разность $b^l - a^l$, очевидно, будет расти, а, значит, осцилляция будет усиливаться. И, следовательно, согласно определениям 4.3.1 и 4.3.2 , система (4.3.1) будет осциллирующей на всей полупрямой $t \geq 0$.

2. Рассмотрим теперь систему (4.3.1) в предположении, что $m \le n \le 0,\ m+n<-2$. В этом случае мы будем иметь $l<0$, и из соотношений (4.3.3) найдем, что

$$\frac{b^l - a^l}{\pi l} \le k \le 0,\ k \in Z,$$

или

$$\frac{b^{|l|} - a^{|l|}}{\pi |l| (ab)^{|l|}} \le k \le 0,\ k \in Z.$$

Отсюда будет следовать, что чем меньше значения a и b, тем большее количество значений k будет удовлетворять этому неравенству, причем, с приближением a и b к нулю, их число будет расти и стремиться к бесконечности. Таким образом, мы получим, что при малых a и b осцилляция будет сильнее, чем при больших. С другой стороны, если зафиксировать a, а b взять достаточно большим, то неравенству (4.3.4) в этом случае не будет удовлетворять ни одно значение k. Отсюда следует, что система (4.3.1) не будет осциллирующей на полупрямой $t>0$.

3. Рассмотрим теперь случай $m \le n \le 0,\ -2<m+n<0.$ При этом будем иметь $l>0$, и, для определения числа корней вновь можем воспользоваться неравенством (4.4.3), откуда будет следовать, что при малых, близких к нулю значений a и b, осциляция будет проявляться относительно сильнее, чем при больших a и b, причем при любом достаточно большем b найдутся значения k, удовлетворяющие неравенству (4.3.3). Таким образом приходим к выводу, что в рассматриваемом случае система (4.3.1) будет осцилллирующей.

4. Рассмотрим теперь систему (4.1.10) в предположении, что $m \le n \le 0, m+n=-2.$ Уравнение (4.3.2а) при этом примет вид

$$\int_a^t \tau^{\frac{m+n}{2}} d\tau = \int_a^t \frac{d\tau}{\tau} = \ln t - \ln a = \pi k,\ k \in Z,$$

откуда, учитывая принадлежность корней отрезку $[a,b]$, найдем

$$\ln a \le \ln a + \pi k \le \ln b,$$

или

$$0 \le \pi k \le \ln \frac{b}{a},\ k \in Z. \qquad (4.3.5)$$

Из этого соотношения следует, что осцилляция на отрезке $[a,b]$ возможна лишь при условии, что $\ln\frac{b}{a} \ge \pi$ или $\frac{b}{a} \ge e^{\pi}$. В частности, если зафиксировать значение a, а b устремить в бесконечность, то найдется бесконечное число значений k, удовлетворяющих неравенству (4.3.5). Откуда будет следовать, что решения, а значит, и системы такого вида будут осциллировать на полупрямой $t>0$.

Обобщая вышеизложенное, приходим к выводу, что имеет место следующая

Теорема 4.3.1. *Если в системе* (4.3.1) $m<n$ *и выполняется одно из условий:* $m \ge 0, n \ge 0$ *или* $m \le 0, n \le 0$ *и* $m+n \ge -2$, *то система осциллирует на полупрямой* $t>0$. *В случае* $m \le 0, n \le 0$ *и* $m+n<-2$ *система неосциллирует.*

Перейдем теперь к рассмотрению осцилляционных свойств систем

$$\begin{cases} y_1' = e^{mt} y_2 \\ y_2' = -e^{nt} y_1. \end{cases}$$

Как и выше, рассмотрим системy (4.3.6) сначала на конечном отрезке $[a,b] \subset [0,\infty)$.

1. Предположим, что $m=-n$. В этом случае, уравнение (2.2.46c) примет вид

$$\int_a^t d\tau = t - a = \pi k, \ \ k \in Z.$$

Число значений k, удовлетворяющих этому соотношению, определится из условия

$$0 \le \pi k \le b-a, \ k \in Z.$$

Отсюда будет следовать, что на любом отрезке длиной большей или равной $\frac{3\pi}{2}$, решение системы будет осциллировать. А, значит, любое нетривиальное решение системы будет осциллировать на всей полупрямой $t \ge 0$, и, следовательно, система (4.3.6) в рассматриваемом случае будет осцилллирующей на полупрямой $t \ge 0$.

2. Пусть $m \ge 0, \ n \ge 0, \ m \le n.$ Имеем

1) $p, r \in C^2[a,b], \ \ p(t) > 0, \ r(t) < 0.$

2) $p'(t) = me^{mt} \ge 0, \ -r'(t) = ne^{nt} \ge 0.$

3) $P'(t) = \left(-\dfrac{p(t)}{r(t)}\right) = (e^{(m-n)t})' = (m-n)e^{(m-n)t} \le 0.$

4) $\left(\ln P(t)\right)'' = \left(\ln e^{(m-n)t}\right)'' = \dfrac{n-m}{t^2} \ge 0$

Таким образом имеют место условия теоремы 2.2.8. И, следовательно, число нулей компонент решений системы (4.3.7) будет определяться числом корней уравнений (2.2.46c) и (2.2.46d), которые при этом будут иметь вид

$$\int_a^t e^{\frac{(m+n)\tau}{2}} d\tau = \frac{2}{m+n}\left(e^{\frac{m+n}{2}t} - e^{\frac{m+n}{2}a}\right) = \pi k, \ \ k \in Z, \tag{4.3.7}$$

и

$$\int_a^t e^{\frac{(m+n)\tau}{2}} d\tau = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ \ n \in Z.$$

Обозначив $l = \dfrac{m+n}{2}$, и, учитывая принадлежность корней отрезку $[a,b]$, из уравнения (4.3.7) найдем

$$0 \le l\pi k \le e^{bl} - e^{al}, \ k \in Z. \tag{4.3.8}$$

Из полученных соотношений во-первых следует, что уравнение (4.3.7) будет иметь корни, отличные от a, если

$$\frac{e^{bl}-e^{al}}{l} \geq \pi.$$

Во-вторых, можно сделать вывод, что при малых значениях a и b осцилляция будет слабой (маленькая плотность нулей), поскольку будет малой и разность $e^{bl}-e^{al}$, и вследствии чего число значений k, удовлетворяющих соотношению (4.3.9) будет мало. С увеличением значений a и b разность $e^{bl}-e^{al}$, очевидно, будет расти, а, значит, осцилляция будет усиливаться. И, следовательно, система (4.3.6) будет осциллирующей на всей полупрямой $t \geq 0$.

3. Рассмотрим теперь систему (4.3.6) в предположении, что $m<0, n<0$. Нетрудно проверить, что и в этом случае имеют место условия теоремы 2.2.8. И, поскольку $l<0$, то из соотношений (4.3.8) найдем, что

$$\frac{e^{bl}-e^{al}}{l} \leq k \leq 0.$$

Из этого неравенства следует, что такие значения k найдутся, если l будет достаточно малым, причем с увеличением значений a и b их практически не будет. Отсюда следует, что система (4.3.6) не будет осциллирующей на всей полупрямой $t \geq 0$.

Обобщая вышеизложенное, приходим к выводу, что имеет место следующая

Теорема 4.3.2. *Если в системе* (4.3.7) $m \geq 0, n \geq 0$, *то система осциллирует на всей полупрямой* $t \geq 0$. *В случае* $m<0, n<0$ *система неосциллирует.*

Список литературы

1. Беллман А. И. Введение в теорию матриц. -М.: Наука, 1975.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. -М.: Физматлит, 2004.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1976.
4. Кодингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. -М.: ИЛ, 1958.
5. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
6. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. -М.; ИЛ, 1961.
7. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. -М.; Высшая школа, 1963.
8. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. -М.: 1947.
9. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.; ИЛ, т. 1, 1953.
10. Схаляхо Ч.А. *О нулях решений одной двумерной дифференциальной системы на конечном промежутке*. Дифференциальные уравнения. 1988.Т.24, № 6, с. 1080-1083.
11. Схаляхо Ч.А. *Колеблемость решений систем дифференциальных уравнений со знакопеременными правыми частями*. Дифференциальные уравнения, 1992, Т.28, № 10, с.1736-1747.
12. Трикоми Ф. Дифференцциальные уравнения. -М.: ИЛ, 1962.
13. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.: Наука, 1985.
14. Chantladze T., Kandelaki N. and Lomtatidze A. *Oscillation and nonoscillation criteria for second order linear differential equation.* Georgian Math. J. 6 (1999), № 5, p. 401-414.
15. Chuaqui M., Duren P., Osgood B., Stowe D. *Oscillation of solutions of linear differential equations.* Bull. Anst. Math. Soc. 79 (2009), p.161-169.
16. Don Hinton. *Sturm's 1836 oscillation results evolution of the theory. Sturm-Liouville Theory*; Past and Present, Birk"{a}user, Basel, 2005, p.1-27.
17. Kruger H. and Teschl G. Relative Oscillation Theory. Weighted Zeros of the Wronskian and the Spectral Shift Functions. Arxiv. msth/0703574v1 [math. SP], 20 mar 2007.
18. Hille E. Non-oscillation theorems. Trans.Amer.Math. Soc. 64(1948), 234-252.
19. Lomtatidze A. *Oscillation and nonoscillation criteria for second order linear differential equation.* Georgian Math. J. 4(1997), № 2, p.129-138.
20. Lomtatidze A. and Partsvania N. Oscillation and nonoscillation criteria two-dimentional systems of first linear ordinary differential equations. Georgian Math. J. 6(1999), № 3, p.285-298.
21. London D. and Schwarz B. Disconjugacy of complex diffrential systems and equations, Trans. Amer. Math. Soc. 135 (1969), p.487-505.

22. Mirzov J. *On oscillation of solutions of a certain system of differential equations*. (Russian), Mat. Zametki 23(1978), № 3, 401-404.
23. Nehary Z. *Oscillation criteria for second order linear differential equations*. Trans.Amer.Math. Soc., 85(1957), N 2, p.428-445.
24. Polak L. *Oscillation and nonoscillation criteria for two-dimentional systems of linear ordinary diuffrential equations*. Georgian Math. J. 11 (2004), № 1, p.137-154.
25. Simon B. *Sturm Oscillation and Comparison Theorems. Sturm-Liouville Theory.* Past and Presesnt, Birk"{a}user, Basel, 2005, p.29-43.
26. Swanson C. A. Comparison and oscillation theory of linear differential equations, Academic Press, New York, 1968.
27. Wiliam T. Reid. *Oscillation criteria for linear differential systems with complex coefficients*, Pacific J. Math. 1(1971), p. 383-406.
28. Zheng Z. Meng P. *On oscillation properties for linear hamiltonian systems,* Rocky Mountain, Journal of Mathematics, v. 30, № 1, 2009.
29. Саакян Г.Г.
   1. *Об одном методе исследования канонической системы Дирака.* Ученые записки АрГУ, 1-2 (6-7), 2003, с. 4-8.
   2. *О решениях одной периодической краевой задачи.* Ученые записки АрГУ, 1 (12), 2006, с. 5-6.
   3. *О свойствах решений одной однородной системы двух дифференциальных уравнений.* Ученые записки АрГУ, 2 (42), 2006, с. 3-7.
   4. *О некоторых свойствах решений канонической системы Дирака.* Ученые записки ЕрГУ, 2, 2007, с. 3-11.
   5. *Об осциллирующих решениях одной задачи с линейной однородной системой двух дифференциальных уравнений первого порядка.* Ученые записки АрГУ, 1 (14), 2007, с. 9-14.
   6. *О некоторых свойствах решений линейной однородной системы двух дифференциальных уравнений.* Ученые записки АрГУ, 2 (15), 2007, с. 7-11.
   7. *Об одном критерии неосцилляции для линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка.* Ученые записки АрГУ, 2 (22), 2010, с. 3-7.
   8. *Об осцилляционных свойствах решений одной линейной однородной системы дифференциальных уравнений.* Вестник Воронежского университета, серия Математика, 2010, № 2, с. 139-141.
   9. *О некоторых свойствах решений одной линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка.* Вестник РУДН, серия Математика, 2010, № 3 (1).
   10. *О некоторых критериях осцилляции для линейной однородной системы второго порядка.* Ученые записки АрГУ, 1-2 (19), 2011, с. 3-9.

11. *Об одном критерии осцилляции линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка.* Материалы VII международной научно-практической конференции -Новейшие достижения европейской науки. София, 2011,17-25 июня, Т.37, Математика, с. 62-64.
12. *О некоторых критериях осцилляции для канонических систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.* Материалы международной конференции -Динамические системы, нелинейный анализ и их приложения. Ереван, 2011, с. 54-56.
13. *Oscillation's theorem for one boundary value problem.* Taiwanese Journal of Mathematics, v. 15, № 5, p. 2351-2356, October 2011.
14. *О собственных значениях и собственных функциях одной задачи для двумерной задачи Дирака.* Материалы VIIIмеждународной научно-практической конференции -Стратегические вопросы современной науки, Прага, 2012,7-15 января, Т.28, с. 3-10.
15. *Об одной теореме сравнения для канонических линейных однородных систем обыкновенных дифференциланых уравнений второго порядка.* Ученые записки АрГУ, 1 (25), 2012, с. 3-5.
16. *Об осцилляционных свойствах одномерной канонической системы Дирака.* Ученые записки АрГУ, 2 (26), 2012, с. 3-8.
17. *О некоторых теоремах неосцилляции для линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка.* Ученые записки АрГУ, 1/2016, с. 3-6.
18. *О некоторых теоремах сравнения для двумерных линейных систем дифференциальных уравнений.*Ученые записки АрГУ, 1/2016, с. 7-14.
19. *Об осцилляции одной двумерной системы дифференциальных уравнений на конечном интервале.* Фонд содействия научному развитию “Novation”, N2, май 2016, Болгария, Варна, с.149-153.
20. *О нулях решений некоторых линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка на конечном интервале.* American Scientific Journal, N2 (2), 2016, Vol.2, с.88-92.
21. *О некоторых характеристиках для сравнения осцилляций линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка.* Российско-китайский научный журнал “Содружество”, № 3, 2016, часть 2, с.110-114.
22. *On a criterion for oscillation and non-oscillation of two-dimentional linear homogenous system of differential equations.* Slovak international scientific journal, № 2, 2016, Bratislava, Slovakia, p.48-51.
23. *Об осцилляционных свойствах одного класса линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* “Бюллетень науки и практики” (научный журнал), № 1, 2017 с. 8-16.

24. *Об осцилляционных свойствах одного класса линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* The Scientific Heritage, № 8 , 2017, P.1, Budapest, Hungary, c.76-81.
25. *О некоторых теоремах сравнения для двумерных линейных систем дифференциальных уравнений.* Бюллетень науки и практики, 2017, № 3, с.14-27.