

ԱՐԿ ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

ՅԱՆՐԱՅԱՇԻԿ

**ԽՄԲԵՐ,
ՕՂԱԿՆԵՐ,
ԴՎՇԵՐ**

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՆԱՍԱԼՍԱՐԱՆ

Ա. ԱԼԵԶԱՆՅԱՆ

ՆԱՆՐԱՆԱՇԻՎ
ԽՄԲԵՐ, ՕՂԱԿՆԵՐ, ԴԱՇՏԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՊՆ ՆՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

2020

ՆՏԴ 512

ԳՄԴ 22.14

Ա 296

Երաշխավորված է փպագրության Երևանի պետական համալսարանի Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի խորհրդ կողմից

Ալեքսանյան Ա.

Ա 296 Նանրահաշիվ: Խմբեր, օղակներ, դաշպեր/ Ա.

Ալեքսանյան.- Եր.: ԵՊՆ հրատ., 2020.- 148 էջ:.

Դասագիրքն ամփոփում է վերջին փասնամյակում հեղինակի կողմից ԵՊՆ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետում կարդացվող դասախոսությունները: Ֆակուլտետի ուսումնական պլանով հաստատված «Նանրահաշիվ» առարկայի ծրագիրը հիմնված է հեղինակի այս և «Գծային հանրահաշիվ» դասագրքերում ներառված նյութի վրա:

ՆՏԴ 512

ԳՄԴ 22.14

ISBN 978-5-8084-2468-5

© ԵՊՆ հրատ., 2020

© Ալեքսանյան Ա., 2020

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

1. ԽՄԲԵՐ	5
1.1. Խմբի սահմանումը	5
1.2. Ենթախմբեր	8
1.3. Իզոմորֆիզմ	10
1.4. Նոմոմորֆիզմ	14
1.5. Նարակից դասեր	16
1.6. Նորմալ ենթախմբեր	19
1.7. Ֆակտոր-խումբ	21
1.8. Նոմոմորֆիզմի կառուցվածքը	22
1.9. Կանոնական հոմոմորֆիզմը	23
1.10. Ցիկլիկ խմբեր	24
1.11. Ուղիղ արտադրյալ	27
1.12. Ծնիչ բազմություններ	30
1.13. Ծնիչների «ուժեղ» բազմություն	31
1.14. Սիմսի ալգորիթմը	34
1.15. Սիմսի ալգորիթմի նկարագրությունը և կոռեկտության ապացույցը	37
1.16. Սիմսի ալգորիթմի որոշ կիրառություններ	39
1.17. Ազատ խմբեր, որոշիչ առնչություններ	42
1.18. Վերջավոր ծնված արելյան խմբեր	47
1.19. Խմբի գործողությունը բազմության վրա	57
1.20. Անիվի խնդրի լուծումը	64
1.21. Խմբի ցիկլիկ ինդեքսը	69
1.22. Պոլյայի թեորեմը	72
1.23. Սիլովյան խմբեր	77
2. ՕՂԱԿՆԵՐ ԵՎ ԴԱՇՏԵՐ	83
2.1. Սահմանումներ	83
2.2. Ենթաօղակներ և օղակային հոմոմորֆիզմներ	85
2.3. Իդեալներ	88
2.4. Մաքսիմալ և պարզ իդեալներ	90
2.5. Քանորդների օղակներ և դաշտեր	96

2.6. Գործողություններ իդեալների նկարմամբ	98
2.7. Մնացքների մասին «չինական» թեորեմը	100
2.8. Մնացքների մասին «չինական» թեորեմի որոշ մասնավոր դեպքեր ..	105
2.9. Մնացքների մասին «չինական» թեորեմի մի կիրառության մասին ..	107
2.10. Գլխավոր իդեալների օղակներ	110
2.11. Ֆակտորիալ օղակներ	119
2.12. Ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների օղակի ֆակտորիալությունը	125
2.13. Էվկլիդեսյան (Էվկլիդյան) օղակներ	127
2.14. Դաշրի բնութագրիչը	131
2.15. Վերջավոր դաշրեր	132
2.16. Վերջավոր դաշրի ենթադաշրերը	138
2.17. Վերջավոր դաշրերի գոյությունը	140
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ	145
ԱՌԱՐԿԱՅԱԿԱՆ ՑԱՆԿ	146

ԽՄԲԵՐ

1.1. Խմբի սահմանումը

Դիցուք տրված է որևէ G բազմություն: Ընդունված է ասել, որ այդ բազմության վրա սահմանված է գործողություն, եթե տրված է արհեստագործում $G \times G$ դեկարտյան արտադրյալից G բազմություն: Այլ կերպ ասած, G -ի փարբերի յուրաքանչյուր կարգավորված զույգին՝ (a, b) -ին, համապատասխանության մեջ է դրված միարժեքորեն որոշված G -ի որոշակի փարբ: (a, b) -ին համապատասխանող փարբը սովորաբար նշանակում են $a \cdot b$ -ով (կամ ուղղակի ab -ով բաց թողնելով \cdot նշանը) և ասում են, որ G բազմության վրա սահմանված է բազմապարկման գործողություն:

Սահմանում. Դիցուք G բազմության վրա սահմանված է բազմապարկման գործողություն: G բազմությունը կոչվում է **խումբ** բազմապարկման գործողության նկատմամբ, եթե բավարարված են հետևյալ պայմանները.

1. $(ab)c = a(bc)$ – **ասոցիատիվության** պայման;
2. $\exists e \in G, \forall a \in G, ae = ea = a$ – **միավոր** փարբի գոյության պայման;
3. $\forall a \in G, \exists b \in G, ab = ba = e$ – **հակադարձ** փարբի գոյության պայման:

Ասոցիատիվության պայմանից բխում է, որ եթե սկզբից հաշվենք ab -ն հետո արդյունքը բազմապարկենք c -ով, կստանանք ճիշտ նույն բանը ինչ կստացվի, եթե սկզբից հաշվենք bc -ն և հետո արդյունքը ձախից բազմապարկենք a -ով: Այսինքն՝ կարելի է գրել ուղղակի abc առանց փակագծեր օգտագործելու, քանի որ արդյունքը կախված չէ հաշվման կարգից:

Երկրորդ պայմանն ասում է, որ գոյություն ունի մեկ հատուկ փարբ, որը նշանակվում է e փառով և կոչվում է **միավոր**, որը բազմապարկելիս

G բազմության որևէ փարրով արդյունքում փալիս է հենց այդ նույն փարրը (այսինքն միավորը խաղում է 1 թվի դերը): Միավոր փարրը միակն է: Եթե ունենք երկու միավոր e_1 և e_2 , ապա պարզ է, որ $e_1 = e_1 e_2 = e_2$:

Երրորդ պայմանը հաստատում է, որ ամեն մի $a \in G$ փարրի համար կգտնվի մեկ $b \in G$, որ $ab = ba = e$: Այդպիսի b -ն կոչվում է a -ի **հակադարձ** փարր, և այն նշանակվում է a^{-1} նշանով (թեև ընդհանուր դեպքում որևէ կապ չունի թվի հակադարձի հետ): Պարզ է, որ a -ն էլ իր հերթին b -ի հակադարձն է: Նակադարձը միակն է: Եթե b_1 -ը և b_2 -ը a -ի հակադարձներն են, ապա $b_1 = b_1(ab_2) = (b_1a)b_2 = b_2$:

Եթե բացի 1)-3) պայմաններից ճիշտ է նաև

$$4) \forall a, b \in G, ab = ba$$

պայմանը, ապա G խումբը կոչվում է **փեղափոխելի** կամ **աբելյան**:

Եթե ի սկզբանե ցանկանում են նշել, որ խումբը աբելյան է, բազմապարկման \cdot նշանի փոխարեն օգտագործում են գումարման $+$ նշանը: Այդ դեպքում միավոր փարրը նշանակվում է 0-ով, իսկ a -ի հակադարձը՝ $-a$ -ով և այն անվանում են **հակադիր**:

G խմբի գործողությունն «բազմապարկում» անվանելը և ab -ով նշանակելն արդարացված են այն բանով, որ գործողության կանոնները շար նման են թվերի բազմապարկման կանոններին (և թվերի բազմապարկումը, իրոք, խումբ է սահմանում ոչ գրոյական իրական թվերի բազմության վրա): Դա թույլ է փալիս գործել օգտվելով հարմար դարձած թվաբանության ավանդական բանաձևերից: Օրինակ, եթե ընդունենք, որ $a^0 = e$ և նշանակենք a^n -ով (բնական n թվի համար) $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ արքադրյալը, իսկ a^{-n} -ով $\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_n$, ապա դյուրին է համոզվել, որ կամայական ամբողջ m և n թվերի համար կիրառելի են հետևյալ ստանդարտ կանոնները.

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn} :$$

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Նշանակենք \mathbb{Z} -ով ամբողջ թվերի բազմությունը և որպես խմբի բազմապարկման գործողություն դիփարկենք ամբողջ թվերի գումարումը:

Նշանակենք սրացված համակարգը $(\mathbb{Z}, +)$ -ով: Դյուրին ստուգվում է, որ $(\mathbb{Z}, +)$ -ն արելյան խումբ է (որպես միավոր փարր վերցնում ենք 0 թիվը):

2. Այժմ դիտարկենք (\mathbb{Z}, \cdot) համակարգը, որտեղ \cdot -ը ամբողջ թվերի բազմապարկման գործողությունն է: Ակնհայտ է, որ խմբի սահմանման 1) և 2) պայմանները բավարարվում են (որպես միավոր վերցնում ենք 1 թիվը): Սակայն 3) պայմանը փռի չունի, քանի, որ 0 թիվը չունի հակադարձ: Եթե նույնիսկ հեռացնենք 0-ն և դիտարկենք $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ բազմությունը, ապա կրկին 3)-ը չի բավարարվում, քանի որ օրինակ 2-ը չունի հակադարձ ($\frac{1}{2}$ -ն ամբողջ թիվ չէ): Միայն 1-ը և -1 -ն ունեն հակադարձ ըստ բազմապարկման: Ուստի, ոչ (\mathbb{Z}, \cdot) -ը, ոչ էլ (\mathbb{Z}^*, \cdot) -ը խումբ չեն:

3. Դիտարկենք $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ և $(\mathbb{C}, +)$ համակարգերը, որտեղ \mathbb{Q} -ն ռացիոնալ թվերի, \mathbb{R} -ն իրական և \mathbb{C} -ն կոմպլեքս թվերի բազմություններն են, իսկ $+$ -ը թվերի գումարումն է: Դյուրին ստուգվում է, որ այս երեք համակարգերն արելյան խմբեր են: Նաև հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ և $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ համակարգերը նույնպես արելյան խմբեր են:

4. Նշանակենք մնացքների դասերն ըստ $\text{mod } n$ -ի \mathbb{Z}_n -ով, այսինքն $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$: $(\mathbb{Z}_n, + \text{ mod } n)$ համակարգն ակնհայտորեն արելյան խումբ է: Ավելի հետաքրքրական է $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot \text{ mod } n)$ համակարգի դեպքը, որտեղ $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$: Դյուրին է ստուգել, որ խմբի սահմանման 1) և 2) պայմանները բավարարված են ($e = 1$): Եթե $a \in \mathbb{Z}_n^*$, ապա այն ունի հակադարձ $\Leftrightarrow a$ -ն ու n -ը փոխադարձաբար պարզ են (սա բխում է թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը գրնելու Էվքլիդեսի ալգորիթմի հետևանքից՝ գոյություն ունեն $x, y \in \mathbb{Z}$, որ $ax + ny = (a, n) = 1$, ուստի՝ $ax \equiv 1 \pmod{n}$): Ուրեմն $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot \text{ mod } n)$ համակարգը խումբ է միայն այն դեպքում, երբ n -ը պարզ թիվ է: Սակայն, եթե դիտարկենք միայն n -ի հետ փոխադարձաբար պարզ թվերը \mathbb{Z}_n^* -ից, ապա դրանք խումբ կկազմեն, քանի որ n -ի հետ փոխադարձաբար պարզ թվերի արտադրյալը նույնպես փոխադարձաբար պարզ է և այդպիսին է նաև n -ի հետ փոխադարձաբար պարզ թվի հակադարձը:

5. Նշանակենք S_n -ով $\{1, 2, \dots, n\}$ թվերի փոխադրությունների բազմությունը: Այդ բազմությունը խումբ է փոխադրությունների բազմապարկման գործողության նկատմամբ: Նույնաբար փոխադրությունը միավոր փարրն է, իսկ հակադարձ

փարրի գոյությունը ապահովվում է հակադարձ փեղադրությունով: Այս խումբը արելյան չէ, քանի որ ընդհանուր դեպքում փեղադրությունների բազմապարկումը փեղափոխելի չէ: S_n խումբը կոչվում է **սիմետրիկ** խումբ:

6. Դիփարկենք $n \times m$ չափանի իրական թվերով մատրիցների բազմությունը: Այդ բազմությունը կազմում է արելյան խումբ մատրիցների գումարման գործողության նկատմամբ: Եթե $n = m$, ապա այս բազմությունը փակ է մատրիցների բազմապարկման գործողության նկատմամբ, սակայն այն խումբ չի կազմում, քանի որ ոչ բոլոր մատրիցներն ունեն հակադարձ ըստ բազմապարկման: Նայրնի է, որ $n \times n$ չափանի իրական A մատրիցն ունի հակադարձ միայն և միայն այն դեպքում, երբ $\det A \neq 0$: Քանի որ $\det AB = \det A \det B$, ապա չվերասերված (0 -ից փարբեր դեպերմինանսով) $n \times n$ չափանի իրական մատրիցների բազմությունը փակ է մատրիցների բազմապարկման գործողության նկատմամբ և այն կազմում է խումբ մատրիցների բազմապարկման գործողության նկատմամբ: Այդ խումբն արելյան չէ: Ոչ արելյան խումբ է կազմում (ըստ բազմապարկման) նաև $\det A = 1$ պայմանին բավարարող $n \times n$ չափանի իրական մատրիցների բազմությունը:

7. Ֆիքսենք հարթության վրա որևէ կետ և դիփարկենք հարթության բոլոր պտույտներն այդ կետի շուրջ: Պտույտների բազմության վրա սահմանենք հետևյալ գործողությունը. α և β անկյուններով պտույտների արտադրյալը $\alpha + \beta$ անկյունով պտույտն է: Որպես միավոր փարր վերցնում ենք 0 անկյունով պտույտը: Պարզ է, որ α անկյունով պտույտի հակադարձը կլինի $-\alpha$ անկյունով պտույտը: Դյուրին է ստուգել, որ պտույտների բազմությունն արելյան խումբ է:

8. Դիփարկենք «Ռուբիկի խորանարդ» հայրնի գլուխկոտրուկը: Դժվար չէ փեսնել, որ խորանարդի «շերտերի» պտույտները խումբ են կազմում:

1.2. Ենթախումբեր

Շար դեպքերում անհրաժեշտ է լինում գործել խմբի ենթաբազմության հետ, որը նույնպես խումբ է սահմանված բազմապարկման գործողության նկատմամբ:

Սահմանում. G խմբի H ենթաբազմությունը կոչվում է **ենթախումբ**, եթե

$$a, b \in H \Rightarrow ab \in H,$$

$$a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H :$$

Առաջին պայմանը նշանակում է, որ H ենթաբազմությունը «փակ» է G -ի բազմապարկման գործողության նկատմամբ, այսինքն, H -ի փարրերի արտադրյալը դուրս չի գալիս H -ից: Երկրորդ պայմանը նշանակում է, որ H -ը «փակ» է հակադարձին անցնելու գործողության նկատմամբ: Քանի որ խմբի սահմանման ասոցիատիվության պայմանը ճիշտ է ամբողջ G -ի համար, ապա այն ճիշտ է նաև H -ի համար: Նակադարձի գոյությունը H -ում ապահովված է երկրորդ պայմանով: Նկատենք, որ միավոր փարրը միշտ պարկանում է ենթախմբին: Իսկապես, համաձայն երկրորդ պայմանի, $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$, ուրեմն առաջին պայմանից ստանում ենք՝ $a, a^{-1} \in H \Rightarrow aa^{-1} = e \in H$: Ուստի H -ը բավարարում է խմբի սահմանման բոլոր պայմաններին:

Ենթախմբի սահմանման երկու պայմանները կարելի է փոխարինել մեկ համարժեքով.

$$a, b \in H \Rightarrow a^{-1}b \in H : \quad (1.1)$$

Ակնհայտ է, որ (1.1)-ը բխում է ենթախմբի սահմանման պայմաններից: Յուրյ քանք հակառակը: Եթե (1.1)-ում վերցնենք $a = b$ կախացվի $a, a \in H \Rightarrow a^{-1}a = e \in H$: Այժմ $a \in H \Rightarrow a, e \in H \Rightarrow a^{-1}e = a^{-1} \in H$, այսինքն սրացանք ենթախմբի սահմանման երկրորդ պայմանը: Ստույգ է նաև առաջին պայմանը՝

$$a, b \in H \Rightarrow a^{-1}, b \in H \Rightarrow (a^{-1})^{-1}b = ab \in H :$$

Յուրաքանչյուր G խումբ ունի առնվազն երկու ենթախումբ՝ $\{e\}$ -ն, որ կազմված է միայն միավոր փարրից և կոչվում է **տրիվիալ** ենթախումբ, և ամբողջ խումբը՝ G -ն: Այն ենթախմբերը, որոնց համար ճիշտ է $\{e\} \subset H \subset G$ պայմանը կոչվում են **սեփական** ենթախմբեր: Այն փաստը, որ H -ը G -ի ենթախումբն է նշանակվում է հետևյալ կերպ՝ $H \leq G$:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Գտնենք $(\mathbb{Z}, +)$ -ի բոլոր ենթախմբերը: Նամաձայն (1.1)-ի $H \leq \mathbb{Z}$ միայն երբ $m, n \in H \Rightarrow m - n \in H$: Պարզ է, որ $0 \in H$ և $m \in H \Rightarrow -m \in H$: Եթե H -ը պարունակում է ոչ զրոյական թիվ m , ապա այն պարունակում է դրական թիվ: Նշանակենք d -ով H -ում պարունակվող ամենափոքր դրական թիվը: Պարզ է, որ

$\{dx \mid x \in \mathbb{Z}\} \subseteq H$: Իսկապես,

$$d, -d \in H \Rightarrow d - (-d) = 2d \in H :$$

Նմանապես $d, -2d \in H \Rightarrow d - (-2d) = 3d \in H$ և այլն: Ցույց փանք, որ $H = \{dx \mid x \in \mathbb{Z}\}$: Վերցնենք կամայական m թիվ H -ից և մնացորդով բաժանենք այն d -ի վրա՝ $m = dn + p$, $0 \leq p < d$: Պարզ է, որ $p = m - dn \in H$: Եթե $0 < p < d$, ապա H -ում կգտնվի d -ից փոքր դրական թիվ, ինչն անհնար է, ուստի՝ $p = 0$ և $m = dn$, ուրեմն $H \subseteq \{dx \mid x \in \mathbb{Z}\}$: Այսպիսով, գրանք $(\mathbb{Z}, +)$ -ի բոլոր ենթախմբերը: Նրանք ունեն $\{dx \mid x \in \mathbb{Z}\}$ տեսքը, այսինքն ինչ որ մի որոշակի թվի (H -ում պարունակվող ամենափոքր դրական թվի կամ էլ 0 -ի) բոլոր պարիկներից կազմված բազմություններն են:

2. Ակնհայտ է, որ $(\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$ և $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \leq (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \leq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$:

3. Նշանակենք A_n -ով $\{1, 2, \dots, n\}$ թվերի զույգ տեղադրությունների բազմությունը (այն կոչվում է **նշանափոխ** խումբ): Դյուրին է ստուգել, որ $A_n \leq S_n$:

4. $\det A = 1$ պայմանին բավարարող $n \times n$ չափանի իրական մատրիցների խումբը $\det A \neq 0$ պայմանին բավարարող $n \times n$ չափանի իրական մատրիցների խմբի ենթախումբն է:

5. Ֆիքսված կետի շուրջ հարթության 60° -ին պարիկ անկյուններով պտույտների բազմությունը ենթախումբ է բոլոր պտույտների բազմության մեջ:

1.3. Իզոմորֆիզմ

Սահմանում. $f : G_1 \rightarrow G_2$ փոխմիարժեք արտապարկերումը G_1 խմբից G_2 -ի վրա կոչվում է **իզոմորֆիզմ**, եթե

$$f(ab) = f(a)f(b) \quad \text{բոլոր } a, b \in G_1 : \quad (1.2)$$

G_1 և G_2 խմբերը կոչվում են **իզոմորֆ**: Եթե $G_1 = G_2$, ապա $f : G_1 \rightarrow G_2$ իզոմորֆիզմը կոչվում է **ավտոմորֆիզմ**:

Իզոմորֆիզմի ժամանակ միավոր փարբը միշտ անցնում է միավորի մեջ. $f(e) = f(ee) = f(e)f(e)$ ուստի՝ $f(e) = e$: Նակադարձն անցնում է հակադարձի մեջ. $e = f(e) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1})$, ուստի $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$:

Դիփարկենք իզոմորֆիզմի հետևյալ օրինակը: Դիցուք $G_1 = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ իրական դրական թվերի խումբն է ըստ բազմապարկման, իսկ $G_2 = (\mathbb{R}, +)$ իրական թվերի խումբն է ըստ գումարման: Իզոմորֆիզմը իրականացվում է $y = \ln x$ ֆունկցիայի միջոցով, քանի որ փեղի ունեն $\ln(x_1x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, $\ln 1 = 0$ և $\ln x^{-1} = -\ln x$ հատկությունները:

Դիփարկենք մեկ այլ օրինակ ևս: $n \times n$ չափանի մատրիցը կոչվում է **փեղափոխության մատրից**, եթե մատրիցի փարբերը կամ գրոներ են կամ էլ մեկեր և յուրաքանչյուր փողում կամ սյունում բոլոր փարբերը բացի մեկից զրոյական են, այսինքն ամեն փողում կամ սյունում գոյություն ունի ճիշտ մեկ հար 1 և մնացած փարբերը 0 են: Դիցուք $P = (a_{ij})_{n \times n}$ -ն փեղափոխության մատրից է: Այդ մատրիցի հետ կարելի է կապել մի փեղադրություն, որը կնշանակենք π -ով և $\pi(i)$ -ով կնշանակենք այն j թիվը, որի մեջ է փանում i -ն π փեղադրությունը, այսինքն՝

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} :$$

π փեղադրությունը կառուցվում է հետևյալ կերպ. որպեսզի որոշենք $\pi(1)$ -ը, նախ գրնում ենք, թե մատրիցի առաջին փողում, որ փեղում է գրնվում 1-ը, այսինքն գրնում ենք այն j -ն, որ $a_{1j} = 1$ և $\pi(1)$ -ը վերցնում ենք հավասար j -ին: $\pi(2)$ -ը վերցնում ենք հավասար այն միակ j -ն, որ $a_{2j} = 1$, այսինքն երկրորդ փողում որոշում ենք մեկի փեղը: $\pi(2)$ -ն անպայման կփարբերվի $\pi(1)$ -ից, քանի որ հակառակ դեպքում կսփայլի, որ միննույն սյունում կա երկու հար 1: Շարունակելով մեկերի փեղերը գրնելը փողերում՝ որոշում ենք π փեղադրությունը: Ասում են, որ այս փեղադրությունը որոշվում է ըստ P մատրիցի փողերի: π փեղադրությունը լիովին բնորոշվում է հետևյալ պայմանով՝

$$\pi(i) = j \Leftrightarrow a_{ij} = 1 : \quad (1.3)$$

Նման եղանակով, որոշելով մեկերի փեղերը սյուններում, կարելի է կառուցել մեկ այլ փեղադրություն σ , որի համար կսփանանք

$$\sigma(i) = j \Leftrightarrow a_{ji} = 1 : \quad (1.4)$$

Նամենաբերելով (1.3)-ը և (1.4)-ը՝ դյուրին է տեսնել, որ $\sigma = \pi^{-1}$: Որպեսզի նշենք P մատրիցի հետ կապված տեղադրությունները՝ կօգտվենք հետևյալ նշանակումից՝ P_π^σ : Պարզ է, որ եթե փրված է որևէ տեղադրություն, ապա ընդունելով այն որպես ըստ փողերի տեղադրություն, հեշտությամբ կարելի է կառուցել այն միակ տեղափոխության մատրիցը, որի համար այդ տեղադրությունն ըստ փողերի տեղադրությունն է: Այսպիսով, սրանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանեցում տեղադրությունների և տեղափոխության մատրիցների միջև (հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ տեղափոխության մատրիցների քանակը $n!$ է՝ հավասար է տեղադրությունների քանակին):

Դիցուք փրված են երկու տեղափոխության մատրիցներ՝ $P_\pi^\sigma = (a_{ij})_{n \times n}$ և $P_\mu^\tau = (b_{ij})_{n \times n}$: Նշանակենք c_{ij} -ով $P_\pi^\sigma P_\mu^\tau$ արտադրյալի փարրը՝ $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$: Քանի որ c_{ij} -ն հաշվելու համար P_π^σ -ի i -րդ փողը բազմապատկվում է P_μ^τ -ի j -րդ սյունով, ապա կամ այդ փողի և սյան մեկերի տեղերը համընկնում են և արդյունքում $c_{ij} = 1$, կամ էլ մեկերի տեղերը չեն համընկնում և $c_{ij} = 0$: Օգտվելով (1.3)-ից ու (1.4)-ից՝ սրանում ենք $c_{ij} = 1 \Rightarrow \exists$ միակ k , որ $a_{ik} = b_{kj} = 1 \Leftrightarrow \pi(i) = k, \mu(k) = j \Leftrightarrow (\pi\mu)(i) = j$: Այսինքն տեղափոխության մատրիցների արտադրյալը նորից տեղափոխության մատրից է և

$$P_\pi^\sigma P_\mu^\tau = P_{\pi\mu}^{\tau\sigma} : \quad (1.5)$$

Պարզ է, որ P_π^σ -ի փրանսպոնացված (շրջված) մատրիցը P_σ^π -ն է: (1.5)-ից սրանում ենք՝

$$P_\pi^\sigma P_\sigma^\pi = P_{\pi\sigma}^{\pi\sigma} = E, \quad (1.6)$$

որտեղ E -ն միավոր մատրիցն է, ուստի տեղափոխության մատրիցի հակադարձը փրանսպոնացված մատրիցն է:

Նկատենք, որ եթե բազմապատկենք P_π^σ -ն որևէ A մատրիցով, ապա արդյունքում $P_\pi^\sigma A$ մատրիցը կստացվի A -ից փողերի տեղափոխությամբ՝ համաձայն σ տեղադրության: AP_π^σ էլ ստացվում է A -ից սյուների տեղափոխությամբ համաձայն π տեղադրության:

(1.5)-ից և (1.6)-ից հետևում է, որ $n \times n$ չափանի տեղափոխության մատրիցները խումբ են կազմում ըստ մատրիցների բազմապատկման գործողության:

Կառուցենք հետևյալ փոխմիարժեք արտապարկերումը S_n -ից $n \times n$ չափանի տեղափոխության մատրիցների խմբի վրա.

$$f(\pi) = P_\pi : \quad (1.7)$$

(1.5)-ից ամնիջապես սպանում ենք, որ (1.7)-ը իզոմորֆիզմ է:

Պոյություն ունի միակ եղանակ տեղափոխության մատրիցում ամեն փողից և ամեն սյունից փարբերն այնպես ընտրելու, որ արտադրյալը լինի ոչ զրոյական: Այդ պարճառով տեղափոխության մատրիցի դետերմինանտը հավասար է ± 1 , ավելի ստույգ, այն հավասար է 1-ի, եթե π տեղադրությունը զույգ է և -1 -ի, երբ π տեղադրությունը կենտ է: Ուստի (1.7)-ով տրված իզոմորֆիզմի ժամանակ զույգ տեղադրություններին համապատասխանում են 1 դետերմինանտով տեղափոխության մատրիցները, իսկ կենտերին՝ -1 :

Վերը բերված օրինակներից և, իհարկե, իզոմորֆիզմի սահմանումից պարզ է դառնում, որ իզոմորֆ խմբերը մեկը մյուսի պատճենն են և բազմապարկման գործողության հետ կապված որևէ հարկություն ուսումնասիրելիս իզոմորֆ խմբերն իրարից չպետք է փարբերել: Կամայական փաստ, որ վերաբերում է բազմապարկման գործողությանը և տեղի ունի մի խմբում տեղի ունի նաև նրան իզոմորֆ խմբում: Այդ իսկ պարճառով խմբերի տեսության մեջ իզոմորֆ խմբերը համարվում են համարժեք և նույնացվում են:

Թեորեմ 1.1 (Քելիի թեորեմ). *Եթե G խմբի փարբերի քանակը վերջավոր է և հավասար է n -ի, ապա G խումբն իզոմորֆ է S_n -ի n փարբանոց ենթախմբերից մեկին:*

Ապացույց. Յուրաքանչյուր $g \in G$ համար սահմանենք մի արտապարկերում $f_g : G \rightarrow G$ հետևյալ կերպ՝ $f_g(x) = gx$: Ակնհայտ է, որ $f_g(x_1) = f_g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, այսինքն f_g -ն փոխմիարժեք է: Եթե $y \in G$, ապա վերցնելով $x = g^{-1}y$ սպանում ենք $f_g(x) = g(g^{-1}y) = y$: Ուրեմն f_g -ն փոխմիարժեքորեն արտապարկերում է G -ն G -ի վրա: Նամարակալենք G -ի փարբերը՝ $G = \{a_1, \dots, a_n\}$: Յուրաքանչյուր f_g -ն լիովին նկարագրվում է n փարբանոց տեղադրությամբ՝

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ f_g(a_1) & f_g(a_2) & \dots & f_g(a_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ ga_1 & ga_2 & \dots & ga_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_n} \end{pmatrix} :$$

Վերջին փեղադրությունը պարզապես կարելի է փոխարինել համարժեքով՝

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

որը կնշանակենք $\pi(f_g)$ -ով:

Դյուրին է ստուգել, որ f_g արքայապարկերումները խումբ են կազմում կոմպոզիցիայի (հաջորդաբար կիրառման) գործողության նկատմամբ (այնպես ինչպես նաև $\pi(f_g)$ փեղադրությունները)

$$\begin{aligned} (f_g \cdot f_h)(x) &= f_g(f_h(x)) = g(hx) = (gh)x = f_{gh}(x), \\ \pi(f_g \cdot f_h) &= \pi(f_{gh}) = \pi(f_g)\pi(f_h) : \end{aligned} \quad (1.8)$$

Պարզ է, որ միավոր փարբը f_e -ն նույնաբար արքայապարկերումն է և $f_{g^{-1}} = (f_g)^{-1}$ (սա անմիջապես հետևում է (1.8)-ից): f_g արքայապարկերումների համապարասխանող փեղադրությունների խումբը նշանակենք $F(G)$ -ով: Պարզ է, որ $F(G) \leq S_n$:

Կառուցենք այժմ φ փոխմիարժեք արքայապարկերումը G -ից $F(G)$ հերևյալ կերպ.

$$\varphi(g) = \pi(f_g) :$$

Դյուրին է համոզվել, որ $\varphi : G \rightarrow F(G)$ իզոմորֆիզմ է, իսկապես $\varphi(gh) = \pi(f_{gh}) = \pi(f_g)\pi(f_h) = \varphi(g)\varphi(h)$ և թեորենն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.1-ից հետևում է, որ վերջավոր խմբերի ուսումնասիրությունը հանգեցվում է սիմետրիկ խմբի՝ S_n -ի ենթախմբերի ուսումնասիրմանը: Նարկ է նշել, որ Թեորեմ 1.1-ը հեշտությամբ կարելի է ընդհանրացնել նաև անվերջ խմբերի համար:

1.4. Նոմոմորֆիզմ

Սահմանում. Դիցուք G_1 -ը և G_2 -ը խմբեր են: $f : G_1 \rightarrow G_2$ արքայապարկերումը կոչվում է **հոմոմորֆիզմ**, եթե

$$f(ab) = f(a)f(b) :$$

Այդ դեպքում ասում են, որ G_1 խումբը **հոմոմորֆ** է G_2 -ին:

Ակնհայտ է, որ իզոմորֆ խմբերը նաև հոմոմորֆ են: Իզոմորֆ խմբերը մեկը մյուսի ճշգրիտ պատճեններն են: Նոմոմորֆիզմի դեպքում երկրորդ խումբը առաջինի, ինչ որ իմաստով, «աղավաղված» պատճենն է. սակայն այդ երկրորդ խումբը պարունակում է իր մեջ առաջին խմբին վերաբերող որոշակի ինֆորմացիա:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. $f : G_1 \rightarrow G_2$ և $f(x) = e$ բոլոր $x \in G_1$ համար: Ակնհայտ է, որ f -ը հոմոմորֆիզմ է:

2. Դիցուք G -ն կամայական խումբ է: Ֆիքսենք որևէ $a \in G$: Դիտարկենք հետևյալ արտապատկերումը՝ $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow G$, որպեսզի $f(n) = a^n$: Պարզ է, որ $f(n+m) = a^{n+m} = a^n a^m = f(n)f(m)$ և f -ը հոմոմորֆիզմ է:

3. Այսուհետև $x = y \pmod n$ գրառումը կնշանակի, որ x -ը y -ի մնացորդն է, որ սրացվում է y -ը n -ի վրա բաժանելիս: Սահմանենք հետևյալ արտապատկերումը՝ $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$ որպես $f(m) = m \pmod n$: Ակնհայտ է, որ սա հոմոմորֆիզմ է և $f(s+t) = f(s) + f(t)$ (նկատենք, որ առաջին գումարման նշանը ամբողջ թվերի սովորական գումարումն է, իսկ երկրորդը՝ մնացքների դասերի ըստ $\pmod n$ -ի գումարումը): Բացի դրանից պետի ունի նաև $f(st) = f(s)f(t)$ բանաձևը, որպեսզի առաջին բազմապատկումն ամբողջ թվերի սովորական բազմապատկումն է, իսկ երկրորդը՝ մնացքների դասերի ըստ $\pmod n$ -ի բազմապատկումը: Այսինքն հոմոմորֆիզմը պահպանում է n -ի վրա բաժանելիության հետ կապված բոլոր հատկությունները: Պարզ է, որ եթե ամբողջ գործակիցներով $g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ բազմանդամի փոփոխականի փոխարեն պետադրենք s և t թվերը, որոնց համար ճիշտ է, որ $s \equiv t \pmod n$, ապա $g(s) \equiv g(t) \pmod n$: Այս փաստը թույլ է տալիս հեշտությամբ սրանալ հայրնի բաժանելիության հայրանիշները: Դիցուք m ամբողջ թիվը փրված է փասական հիմքով, այսինքն $m = \alpha_0 + \alpha_1 10 + \dots + \alpha_n 10^n$ պեսքով: Քանի որ $10 \equiv 1 \pmod 3$ և $10 \equiv 1 \pmod 9$, ապա $m \equiv \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \pmod 3$ կամ $\pmod 9$: Նույն ձևով օգտվելով $10 \equiv -1 \pmod{11}$ -ից՝ սրանում ենք 11 -ի համար բաժանելիության շար լավ հայրնի հայրանիշը՝ $m \equiv \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (-1)^n \alpha_n \pmod{11}$: Եթե m ամբողջ թիվը փրված է երկուական հիմքով՝

$m = \alpha_0 + \alpha_1 2 + \dots + \alpha_n 2^n$, ապա օրինակ 3-ի բաժանելիության հայտարանիչը կարացվի հետևյալ կերպ. քանի որ $2 \equiv -1 \pmod{3}$, ապա

$$m \equiv \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots + (-1)^n \alpha_n \pmod{3} :$$

1.5. Տարակից դասեր

Սահմանում. Դիցուք H -ը խմբի ենթախումբն է, այսինքն $H \leq G$ և $a \in G$:

G խմբի ըստ H ենթախմբի a փարրով ծնված **ձախ հարակից դաս** է կոչվում հետևյալ բազմությունը՝

$$aH = \{ah \mid h \in H\} :$$

Նման եղանակով սահմանվում է **աջ հարակից դասը**՝ $Ha = \{ha \mid h \in H\}$: Ստորև կուսումնասիրենք ձախ հարակից դասերը: Առանց որևէ դժվարության ստուգվում է, որ բոլոր սրացված արդյունքները ճիշտ են նաև աջ հարակից դասերի համար: Այդ պատճառով, հարմարության համար, ձախ հարակից դասերը կանվանենք ուղղակի հարակից դասեր: Անհրաժեշտության դեպքում դասերի փոխակը հափուկ կճշտվի:

Ներազոտենք հարակից դասերի հատկությունները.

1. $a \in aH$;
2. **բոլոր հարակից դասերն ունեն միևնույն հզորությունը.** $ah \rightarrow h$ օրենքով սահմանված փոխմիարժեք համապատասխանեցումը aH -ի և H -ի միջև ապացուցվում է այս պնդումը ($ah_1 = ah_2 \Rightarrow h_1 = h_2$);
3. $aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$ և $a^{-1}b \in H$ – սա երկու փարրերով ծնված հարակից դասերի համընկման անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է (նկատենք, որ $b^{-1}a \in H$ և $a^{-1}b \in H$ պայմանները փոփոխաբերելի ունեն կամ չունեն միաժամանակ և քանի որ H -ը ենթախումբ է, ապա $b^{-1}a \in H \Leftrightarrow (b^{-1}a)^{-1} = a^{-1}b \in H$): Ապացուցենք հատկությունը: Դիցուք $aH = bH$: Ուրեմն $a = bh$, $h \in H$ և $b^{-1}a = h \in H$: Դիցուք $b^{-1}a \in H$: Ուրեմն $b^{-1}a = h$ և $a = bh$: Դիցուք $ah_1 \in aH$, ապա $ah_1 = b(hh_1) \in bH$, քանզի $hh_1 \in H$: Ուստի $aH \subseteq bH$: Նման ձևով $a^{-1}b \in H$ պայմանից սրանում ենք, որ $bH \subseteq aH$:
4. $aH = H \Leftrightarrow a \in H$ – սա նախորդ հատկության հետևանքն է՝ $b = e$ և $b^{-1}a = a$:

5. $aH \cap bH \neq \emptyset \Rightarrow aH = bH$ - իրոք, եթե $c \in aH \cap bH$, ապա $c = ah_1 = bh_2$ և $b^{-1}a = h_2h_1^{-1} \in H$, ուստի $aH = bH$:

6. $a \in bH \Rightarrow aH = bH$ - սա նշանակում է, որ հարակից դասի կամայական փարր ծնում է այդ նույն դասը:

Սահմանում. G խմբի **կարգ** է կոչվում G բազմության հզորությունը (վերջավոր G -ի դեպքում պարզապես փարրերի քանակը) և այն նշանակվում է $(G : 1)$ -ով:

H ենթախմբի **ինդեքսը (դասիչը)** G խմբում ըստ H -ի հարակից դասերի բազմության հզորությունն է: Այն նշանակվում է $(G : H)$ -ով:

Թեորեմ 1.2 (Լագրանժի թեորեմը). *Դիցուք $H \leq G$: Ստույգ է հետևյալ բանաձևը.*

$$(G : 1) = (G : H)(H : 1) : \quad (1.9)$$

Ապացույց. Քանի որ բոլոր հարակից դասերն ունեն միևնույն հզորությունը, նրանց միավորումը ծածկում է ամբողջ G -ն և հարակից դասերը զույգ առ զույգ չեն հափվում, ապա խմբի կարգը ստանալու համար հարկավոր է հարակից դասերի քանակը բազմապատկել H -ի կարգով:

Լագրանժի թեորեմը ճիշտ է նաև անվերջ կարգ ունեցող խմբերի համար: Ավելի ստույգ, եթե (1.9)-ում երեք մեծություններից երկուսը վերջավոր են, ապա երրորդն էլ է վերջավոր:

Ներկանք. Վերջավոր (այսինքն վերջավոր կարգ ունեցող) խմբի ենթախմբի կարգը խմբի կարգի բաժանարար է:

Օրինակ, եթե խմբի կարգը պարզ թիվ է, ապա այն ունի միայն երկու ենթախումբ՝ փրիվիալը և ամբողջ խումբը և չունի ոչ մի սեփական ենթախումբ:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

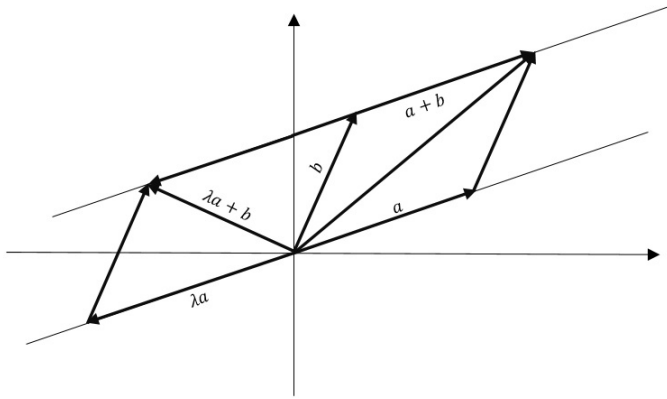
1. Դիցուք $G = S_n$, իսկ $H = A_n$ (հիշեցնենք, որ S_n -ը սիմետրիկ խումբն է, իսկ A_n -ը նշանավորիս խումբն է՝ n փարրանի զույգ փեղադրությունների խումբը): Ունենք, որ $A_n \leq S_n$: Ինչպես գիտենք $(S_n : 1) = n!$ և $A_n : 1 = \frac{n!}{2}$: Նամաձայն հարակից դասերի 3. հատկությանը (երկու փարրի միևնույն հարակից դասին պատկանելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանի)՝ π և σ փեղադրությունները կլինեն ըստ A_n -ի միևնույն հարակից դասից միայն և միայն, երբ $\pi^{-1}\sigma \in A_n$,

այսինքն $\pi^{-1}\sigma$ -ն զույգ փոխադրություն է, իսկ դա հնարավոր է միայն, եթե π -ի և σ -ի զույգությունները նույնն են: Ուստի բոլոր զույգ փոխադրությունները կազմում են հարակից դաս՝ A_n -ը և բոլոր կենտ փոխադրությունները նույնպես հարակից դաս են կազմում, որի փարրերը կարելի է սրանալ՝ վերցնելով կամայական կենտ π փոխադրություն և կառուցելով πA_n հարակից դասը: Ակնհայտ է, որ $(S_n : A_n) = 2$ և Լագրանժի թեորեմը սրանում է հետևյալ փոխքը՝

$$n! = (S_n : 1) = (S_n : A_n)(A_n : 1) :$$

2. Դիցուք $G = \mathbb{Z}$ և $H = n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$: Այսպես երկու խմբերն էլ դիֆարկում ենք ըստ գումարման: Ինչպես գիտենք, $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ և երկու խմբերն էլ անվերջ են: Երկու ամբողջ թվեր p -ն և q -ն կլինեն միևնույն հարակից դասից ըստ $n\mathbb{Z}$ -ի միայն և միայն եթե $p - q \in n\mathbb{Z}$: Վերջին պայմանը համարժեք է հետևյալին՝ $p \equiv q \pmod{n}$: Ուստի երկու թիվ նույն դասից են միայն եթե դրանք միևնույն ըստ \pmod{n} -ի մնացքների դասից են: Այսինքն ըստ $n\mathbb{Z}$ -ի հարակից դասերը դրանք ըստ \pmod{n} -ի մնացքների դասերն են: Չնայած $(\mathbb{Z} : 1)$ -ը և $(n\mathbb{Z} : 1)$ -ն անվերջ են, $n\mathbb{Z}$ -ի ինդեքսը \mathbb{Z} -ում վերջավոր է՝ $(\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}) = n$:

3. Դիֆարկենք հարթության մեջ գտնվող վեկտորների բազմությունը, որն արելյան խումբ է կազմում վեկտորների գումարման գործողության նկատմամբ: Ֆիքսած \mathbf{a} վեկտորին կոլինեար վեկտորների բազմությունը կազմում է ենթախումբ: \mathbf{b} և \mathbf{c} վեկտորները կպարկանեն միևնույն հարակից դասին ըստ \mathbf{a} -ին կոլինեար վեկտորների ենթախմբի միայն և միայն եթե $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ վեկտորը լինի կոլինեար \mathbf{a} -ին: Այսինքն հարակից դասը, որ ծնված է \mathbf{b} վեկտորով հետևյալ բազմությունն է՝ $\{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$: \mathbf{a} -ին կոլինեար բոլոր վեկտորները, որոնց սկզբնակետը կորդինատային համակարգի սկիզբն է գտնվում են միևնույն ուղղի վրա, որն անցնում է 0 կետով: Ստորև բերված նկարից երևում է, որ $\{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ բազմության բոլոր վեկտորների ծայրակետերն ընկած են միևնույն ուղղի վրա, որը զուգահեռ է \mathbf{a} -ով որոշված ուղղին: Պարզ է, որ կամայական վեկտոր, որի սկզբնակետը 0-ն է, իսկ ծայրակետն ընկած է նշված ուղղի վրա պարկանում է $\{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ բազմությանը:



Ուստի, ըստ a -ին կոլինեար վեկտորների ենթախմբի, հարակից դասերը միարժեքորեն որոշվում են a -ին զուգահեռ ուղիղներով, ընդ որում, յուրաքանչյուր ուղիղին համապարասխանում է մեկ հարակից դաս: Այս դեպքում Լագրանժի թեորեմի բանաձևում մասնակցող բոլոր մեծություններն անվերջ են:

1.6. Նորմալ ենթախմբեր

Դիցուք $H \leq G$: Դիտարկենք ըստ H -ի հարակից դասերի բազմությունը, որն անվանում են **Ֆակտոր-բազմություն** և նշանակում են հետևյալ կերպ՝ $G \setminus H$: Փաստորեն $G \setminus H$ -ի հզորությունը հավասար է $(G : H)$ -ին: Փորձենք այժմ սահմանել բազմապարկման գործողություն $G \setminus H$ -ի վրա այնպես, որ այն բավարարի խմբի սահմանման պայմաններին: Ամենաբնական եղանակը, որով կարելի կլիներ սահմանել հարակից դասերի բազմապարկումը դա

$$(aH)(bH) = (ab)H \quad (1.10)$$

բանաձևն է: Սակայն, քանի որ (1.10) բանաձևում դասերի բազմապարկումը սահմանված է փարրերի բազմապարկման միջոցով, ապա անհրաժեշտ է հանդգնել, որ սահմանումը կոռեկտ է, այսինքն բազմապարկման արդյունքը կախված չէ այն երկու կոնկրետ a և b փարրերից, որոնք վերցվում են բազմապարկվող դասերից: Ավելի ստույգ, հարկավոր է, որ ինչպիսի c և d փարրեր էլ վերցնենք aH -ից և bH -ից համապարասխանաբար, սրանանք $(cd)H = (ab)H$:

Ուրեմն, դիցուք $c \in aH$ և $d \in bH$: Որպեսզի $(cd)H = (ab)H$ անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$(ab)^{-1}(cd) = b^{-1}a^{-1}cd \in H : \quad (1.11)$$

Դիտարկենք (1.11)-ի մասնավոր դեպքը, երբ $b = d$: Այս դեպքում (1.11)-ը կարտագրվի որպես $b^{-1}a^{-1}cb \in H$: Նշանակենք $h = a^{-1}c \in H$ (սա անմիջապես հետևում է $c \in aH$ պայմանից) և $b^{-1}a^{-1}cb = b^{-1}hb \in H$, այսինքն որպեսզի հարակից դասերի բազմապարկումը (1.10) բանաձևով լինի կոռեկտ անհրաժեշտ է, որ

$$\forall b \in G \forall h \in H \quad b^{-1}hb \in H : \quad (1.12)$$

Այս պայմանը նաև բավարար է, քանի որ ընդհանուր դեպքում (1.12)-ից ստանում ենք $b^{-1}h = h_1b^{-1}$ որոշակի $h_1 \in H$ համար և $d \in bH$ -ից ստանում ենք $b^{-1}d \in H$ և, վերջապես, $b^{-1}a^{-1}cd = b^{-1}hd = h_1b^{-1}d \in H$: Ուստի (1.12) պայմանը այն որոշիչ հանգամանքն է, որը թույլ է տալիս (1.10) բանաձևի օգնությամբ սահմանել հարակից դասերի բազմապարկումը:

Սահմանում. G խմբի H ենթախումբը կոչվում է **նորմալ** (կամ **ինվարիանտ**) G -ում, եթե

$$\forall x \in G \quad x^{-1}Hx \subseteq H, \quad (1.13)$$

որպեսզի $x^{-1}Hx = \{x^{-1}hx \mid h \in H\}$:

$H \triangleleft G$ գրառումը կնշանակի, որ H -ը նորմալ է G -ում:

Բազմապարկելով (1.13)-ը ձախից x -ով և աջից x^{-1} -ով՝ կստանանք $H \subseteq xHx^{-1}$: Քանի որ x -ը կամայական է, կարող ենք x -ը փոխարինել x^{-1} -ով և ուրեմն $H \subseteq x^{-1}Hx$ և $x^{-1}Hx = H$: Պարզ է, որ համարժեք է նաև $Hx = xH$ պայմանը (ձախ և աջ հարակից դասերի հավասարությունը): Ուստի $\forall x \in G$, $x^{-1}Hx = H$ և $\forall x \in G$, $Hx = xH$ պայմանները համարժեք են (1.13)-ին և կարող են ընդունվել որպես նորմալ ենթախմբի սահմանում:

Վերը կատարված դիտարկումներից հետևում է՝

որպեսզի (1.10) բանաձևով սահմանված հարակից դասերի բազմապարկումը լինի կոռեկտ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ H ենթախումբը լինի նորմալ G -ում:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Աբելյան խմբի կամայական ենթախումբը նորմալ է:
2. Դիփարկենք S_n սիմետրիկ խմբի A_n նշանափոխ ենթախումբը: Արդեն րեսել էինք, որ $(S_n : A_n) = 2$, ուստի ըստ A_n -ի ձախ և աջ հարակից դասերը համընկնում են (մի դասը հենց A_n է, իսկ մյուսը՝ կենտ րեդադրությունների բազմությունն է): Ուրեմն A_n -ը նորմալ է S_n -ում և $A_n \triangleleft S_n$:
3. Դիցուք $H \leq G$ և $(G : H) = 2$: Նախորդ օրինակի դիփարկումից պարզ է, որ H -ը նորմալ է G -ում:

1.7. Ֆակտոր-խումբ

Ստուգենք այժմ, որ (1.10)-ով սահմանված հարակից դասերի բազմապարկումը նորմալ ենթախմբերի դեպքում բավարարում է խմբի սահմանման պայմաններին:

Ասոցիատիվության պայմանը ստույգ է՝

$$\begin{aligned} ((aH)(bH))(cH) &= ((ab)H)(cH) = ((ab)cH) = (a(bc))H = \\ &= (aH)((bc)H) = (aH)((bH)(cH)), \end{aligned}$$

ուստի կարելի է գրել ուղղակի abH կամ $abcH$ և այլն:

Միավոր փարթը դա $eH = H$ հարակից դասն է՝ $(aH)(eH) = aeH = aH = eaH = H(aH)$:

Յուրաքանչյուր aH դաս ունի հակադարձ՝ այն է $a^{-1}H$ դասը. $(aH)(a^{-1}H) = aa^{-1}H = H$:

Այսպիսով ապացուցեցինք, որ

$G \setminus H$ ֆակտոր-բազմությունը խումբ է ըստ (1.10) բանաձևով սահմանված հարակից դասերի բազմապարկման գործողության միայն և միայն այն դեպքում, երբ H ենթախումբը նորմալ է G -ում:

Այսուհետև, երբ $H \triangleleft G$ և ֆակտոր-բազմությունը խումբ է այդ խումբը կանվանենք **ֆակտոր-խումբ** (ըստ H ենթախմբի) և $G \setminus H$ նշանով կնշանակենք այդ խումբը:

1.8. Հոմոմորֆիզմի կառուցվածքը

Ամեն մի $f : G_1 \rightarrow G_2$ հոմոմորֆիզմի հետ կապվում են հետևյալ երկու բազմությունները՝ **միջուկը**

$$\ker f = \{x \in G_1 \mid f(x) = e\}$$

և **պատկերը**

$$\operatorname{Im} f = \{y \in G_2 \mid \exists x \in G_1, f(x) = y\} :$$

Նկատենք, որ միջուկը չի կարող դադարկ լինել, քանի որ $f(e) = e$ և ուրեմն $e \in \ker f$:

Համոզվենք, որ միջուկը G_1 -ի և պատկերը G_2 -ի ենթախմբերն են: Դրա համար ստուգենք (1.1) պայմանի ճշտությունը:

Դիցուք $x_1, x_2 \in \ker f$, ապա

$$f(x_1^{-1}x_2) = f(x_1^{-1})f(x_2) = (f(x_1))^{-1}f(x_2) = e,$$

քանի որ $f(x_1) = f(x_2) = e$: (1.1)-ը ստույգ է:

Միջուկը նորմալ ենթախումբ է G_1 -ում: Իրոք, եթե $h \in \ker f$, ապա $f(x^{-1}hx) = f(x^{-1})f(h)f(x) = f(x)^{-1}ef(x) = f(x)^{-1}f(x) = e$ և $x^{-1}hx \in \ker f$:

Դիցուք $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$: Կգտնվեն $x_1, x_2 \in G_1$, որ $f(x_1) = y_1$ և $f(x_2) = y_2$: Ունենք $f(x_1^{-1}x_2) = (f(x_1))^{-1}f(x_2) = y_1^{-1}y_2$, ուստի $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$ և (1.1)-ը ստույգ է:

Քանի որ պատկերը ենթախումբ է G_2 -ում, ապա ակնհայտ է, որ f արքայապատկերումը G_1 -ից $\operatorname{Im} f$ նույնպես հոմոմորֆիզմ է և սկզբնական $f : G_1 \rightarrow G_2$ հոմոմորֆիզմի ուսումնասիրությունը հանգեցվում է $f : G_1 \rightarrow \operatorname{Im} f$ հոմոմորֆիզմի ուսումնասիրությանը: Ուստի առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք սահմանափակվել միայն այն դեպքով, երբ $G_2 = \operatorname{Im} f$:

Դիցուք $f : G \rightarrow \operatorname{Im} f$ հոմոմորֆիզմ է: Դյուրին է ստուգել, որ

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow (f(b))^{-1}f(a) = e \Leftrightarrow$$

$$f(b^{-1}a) = e \Leftrightarrow f(b^{-1}a) = e \Leftrightarrow$$

$$b^{-1}a \in \ker f \Leftrightarrow a \ker f = b \ker f :$$

Այսինքն, երկու փարքերի պարկերները համընկնում են միայն և միայն այն դեպքում, երբ համընկնում են նրանցով ծնված հարակից դասերն ըստ միջուկի: Ուստի սրացված է փոխմիարժեք արտապարկերում $G \setminus \ker f$ ֆակտոր-խմբի և $\text{Im} f$ -ի միջև՝

$$\begin{aligned} g : G \setminus \ker f &\rightarrow \text{Im} f \\ g(a \ker f) &= f(a) : \end{aligned} \quad (1.14)$$

Պարզվում է, որ g -ն իզոմորֆիզմ է: Իսկապես, քանի որ g -ն փոխմիարժեք է, մնում է ստուգել

$$g((a \ker f)(b \ker f)) = g(a \ker f)g(b \ker f)$$

պայմանի ճշտությունը, բայց

$$\begin{aligned} g((a \ker f)(b \ker f)) &= g(ab \ker f) = f(ab) = \\ f(a)f(b) &= g(a \ker f)g(b \ker f) : \end{aligned}$$

Թեորեմ 1.3 (Իզոմորֆիզմի մասին թեորեմը). *Ֆակտոր-խումբն ըստ հոմոմորֆիզմի միջուկի իզոմորֆ է հոմոմորֆիզմի պարկերին:*

1.9. Կանոնական հոմոմորֆիզմը

Ինչպես գիտենք հոմոմորֆիզմի միջուկը նորմալ ենթախումբ է: Պարզվում է, որ կամայական նորմալ ենթախմբի համար կարելի է կառուցել խմբերի հոմոմորֆիզմ այնպես, որ այդ ենթախումբը կազմի այդ հոմոմորֆիզմի միջուկը:

Դիցուք $H \triangleleft G$: Կառուցենք հետևյալ արտապարկերումը:

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow G/H \\ f(a) &= aH : \end{aligned} \quad (1.15)$$

Փաստորեն f -ը յուրաքանչյուր փարք փանում է այդ փարքով ծնված (և այդ փարքը պարունակող) հարակից դասի մեջ: Նամոզվենք, որ f -ը հոմոմորֆիզմ է.

$$f(ab) = abH = (aH)(bH) = f(a)f(b) :$$

Գտնենք միջուկը: Դրա համար գտնենք բոլոր $x \in G$, որ $f(x) = eH$: Բայց $f(x) = xH$, իսկ $xH = H \Leftrightarrow x \in H$: Ուստի $\ker f = H$:

Կառուցված հոմոմորֆիզմը կոչվում է **կանոնական հոմոմորֆիզմ** և այն լիովին որոշվում է G խմբով և նրա H նորմալ ենթախմբով: Այսպիսով պարզվեց, որ **կանայական նորմալ ենթախումբ հանդիսանում է հոմոմորֆիզմի միջուկ և կանայական հոմոմորֆիզմի միջուկ նորմալ ենթախումբ է:**

Այսինքն ենթախմբի միջուկ լինելու հասկությունը համարժեք է նորմալ լինելուն և այն կարելի է դիտել որպես նորմալ ենթախմբի համարժեք սահմանում:

Իզոմորֆիզմի մասին թեորեմը հարմար է ձևակերպվում նաև կոմուտատիվ դիագրամների լեզվով: Դիտարկենք հետևյալ դիագրամը (պարկերը)

$$\begin{array}{ccc} & & f \\ & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & \text{Im} f \\ f^* \downarrow & & g \nearrow \\ G \setminus \ker f & & \end{array},$$

որպեսզ $f : G \rightarrow \text{Im} f$ արված հոմոմորֆիզմն է, $f^* : G \rightarrow G \setminus \ker f$ կանոնական հոմոմորֆիզմն է՝ $f^*(a) = a \ker f$ և $g : G \setminus \ker f \rightarrow \text{Im} f$ իզոմորֆիզմն է ֆակտոր-խմբի և պարկերի միջև: Այս դիագրամը հասկանալի է նրանով, որ սկսած G խմբի որևէ a փարրից որ սլաքով էլ շարժվենք, միշտ էլ կհասնենք $\text{Im} f$ -ի $f(a)$ փարրին: Իրոք, $g(f^*(a)) = g(a \ker f) = f(a)$ համաձայն (1.14)-(1.15) բանաձևերի:

Իզոմորֆիզմի մասին թեորեմն ասում է, որ որևէ G խմբի բոլոր հոմոմորֆ պարկերները կարելի է սրանալ վերցնելով նրա բոլոր նորմալ ենթախմբերը և կառուցելով ֆակտոր-խմբերն ըստ այդ նորմալ ենթախմբերի:

1.10. Ցիկլիկ խմբեր

Դիցուք G -ն խումբ է և $a \in G$: Նշանակենք $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$: Ակնհայտ է, որ $\langle a \rangle \leq G$:

Ննարավոր է երկու դեպք.

1. a^n փարրերը փարրեր են բոլոր n -երի համար;
2. գոյություն ունեն $n \neq m$, որ $a^n = a^m$:

Դիփարկենք առաջին դեպքը: Կառուցենք հետևյալ f արքայապարկերումը՝

$$\begin{aligned} f : \langle a \rangle &\rightarrow \mathbb{Z} \\ f(a^k) &= k, \end{aligned}$$

որպեսզ \mathbb{Z} -ը վերցված է ըստ գումարման: Ակնհայտ է, որ f -ը փոխմիարժեքորեն արքայապարկերում է $\langle a \rangle$ -ն \mathbb{Z} -ի վրա և $f(a^{n+m}) = f(a^n)f(a^m)$, ուստի այն իզոմորֆիզմ է: Այսպիսով առաջին դեպքում $\langle a \rangle$ -ն իզոմորֆ է ամբողջ թվերի խմբին և, ուրեմն, անվերջ է:

Երկրորդ դեպքում գոյություն ունեն ամբողջ $n \neq m$, որ $a^n = a^m$: Դիցուք $n > m$: Բազմապարկելով $a^n = a^m$ -ի աջ և ձախ մասերը a^{-m} -ով կստանանք $a^{n-m} = e$. Ուստի երկրորդ դեպքում կգտնվի ամենափոքր դրական ամբողջ n -ը, որ $a^n = e$: Դիտարկենք ստուգել, որ $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ տարրերը բոլորն էլ տարբեր են: Իսկապես, եթե $a^i = a^j$, $0 \leq j < i \leq n-1$, ապա $a^{i-j} = e$ և $0 < i-j < n$: Վերջին պայմանը հակասում է այն բանին, որ n -ը փոքրագույն դրական ամբողջ թիվն է, որի համար $a^n = e$: Պարզ է, որ $a^n = e$ պայմանի պարճառով $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ և $(\langle a \rangle : 1) = n$: Կառուցենք հետևյալ արքայապարկերումը՝

$$\begin{aligned} f : \langle a \rangle &\rightarrow \mathbb{Z}_n \\ f(a^k) &= k \text{ modulo } n, \end{aligned}$$

որպեսզ \mathbb{Z}_n -ը մնացքների դասերն են ըստ mod n -ի, որոնք դիփարկվում են ըստ գումարման: Պարզ է, որ f -ն իզոմորֆիզմ է և երկրորդ դեպքում $\langle a \rangle$ խումբն իզոմորֆ է մնացքների դասերի խմբին:

Մահմանում. $\langle a \rangle$ խումբը կոչվում է **ցիկլիկ** խումբ, իսկ $a \in G$ տարրը կոչվում է խմբի **ծնիչ**: $a \in G$ տարրի **կարգ** է կոչվում այն փոքրագույն դրական ամբողջ n թիվը, որ $a^n = e$:

Դիցուք G -ն վերջավոր ցիկլիկ խումբ է, այսինքն գոյություն ունի $a \in G$ որ $G = \langle a \rangle$: Պարզ է, որ խմբի և a տարրի կարգերը հավասար են միևնույն n թվին: Գտնենք G -ի կամայական տարրի կարգը: Քանի որ $G = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, ապա խմբի կամայական տարր ունի հետևյալ տեսքը՝ a^k , $0 \leq k \leq n-1$: Գտնենք այն ամենափոքր դրական ամբողջ s -ը, որ $(a^k)^s = e$: Պարզ է, որ $a^{ks} = e$ և քանի որ a -ի կարգը n է, ապա ks -ը պարբիկ է n -ին: Ուստի a^k -ի կարգը որոշելու խնդիրը հանգեցնում է հետևյալ թվաբանական խնդրին.

պրված n և k բնական թվերի համար գրնել այն ամենափոքր s բնական թիվը, որ ks -ը բաժանվի առանց մնացորդի n -ի վրա: Վերլուծենք n -ը և k -ն պարզ արտադրիչների և պարզենք թե ինչ է հարկավոր ավելացնել k -ի վերլուծությանը, որպեսզի այն իր մեջ պարունակի n -ի վերլուծությունը: Ակնհայտ է, որ n -ի և k -ի վերլուծությունների ընդհանուր մասը նրանց ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է՝ (n, k) -ն: Ուստի k -ի վերլուծության մեջ n -ի վերլուծության չպարունակվող մասը $\frac{n}{(n,k)}$ -ն է: Ուրեմն $s = \frac{n}{(n,k)}$: Այսինքն a^k փարրի կարգը հավասար է $\frac{n}{(n,k)}$ -ի և $(\langle a^k \rangle : 1) = \frac{n}{(n,k)}$: Այսպետից անմիջապես սրանում ենք, որ G խումբը ծնվում է բոլոր a^k փարրերով, որոնց համար $(n, k) = 1$: Այդպիսի ծնիչների քանակը հավասար է $\varphi(n)$ -ի, որտեղ φ -ն Էյլերի ֆունկցիան է՝ n -ից փոքր և n -ի հետ փոխադարձաբար պարզ թվերի քանակը (եթե n -ի վերլուծությունը պարզ արտադրիչների դա $p_1^{\alpha_1} \cdots p_q^{\alpha_q}$ է, ապա $\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_q}\right)$):

ՕՐԻՆԱԿ:

Դիտարկենք $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ֆակտոր-խումբը, որն իզոմորֆ է ըստ mod n -ի մնացքների դասերի խմբին: Նայարնի է, որ n -ի հետ փոխադարձաբար պարզ a -երի ենթաբազմությունը $\{1, 2, \dots, n-1\}$ -ից կազմում է մուլտիպլիկատիվ ենթախումբ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -ում, որի կարգը հավասար է $\varphi(n)$ -ի, որտեղ φ -ն Էյլերի ֆունկցիան է: Ուրեմն $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ բոլոր a -երի համար, որ $(n, a) = 1$: Սա հայրնի Էյլերի թեորեմն է, որի ապացույցը սրացվեց հիմնվելով այն փաստի վրա, որ կամայական փարր բարձրացված խմբի կարգի աստիճան փալիս է խմբի միավոր փարրը: Մասնավոր դեպքում, երբ n -ը պարզ թիվ է, սրացվում է հայրնի Ֆերմայի «փոքր» թեորեմը՝ $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ բոլոր $0 < a < p$ համար:

Այժմ պարզենք վերջավոր ցիկլիկ խմբի ենթախմբերի կառուցվածքը:

Թեորեմ 1.4.

1. Յիկլիկ խմբի ենթախումբը ցիկլիկ է:
2. Եթե G -ն ցիկլիկ խումբ է և $(G : 1) = n$, ապա n -ի կամայական k բաժանարարի համար գոյություն ունի k կարգի միակ ենթախումբը G -ում:

Ապացույց. Ապացուցենք թեորեմի առաջին պնդումը: Դիցուք $G = \langle a \rangle$ և $H \leq G$: Պարզ է, որ H -ի փարրերը a -ի աստիճաններն են: Եթե $H = \{e\}$, ապա ակնհայտորեն H -ը ցիկլիկ է: Եթե $H \neq \{e\}$, ապա H -ում կգրնվի a -ի

ամենափոքր դրական ասփիճանը, այսինքն կգտնվի $a^m \in H$ և $0 < p < m \Rightarrow a^p \notin H$: Քանի որ H -ն ենթախումբ է, ապա $\langle a^m \rangle \subseteq H$: Դիցուք $a^n \in H$: Բաժանենք n -ը m -ի վրա՝ $n = mq + p$, $0 \leq p < m$: Ուրեմն $a^n = a^{mq+p} = (a^m)^q a^p$ և քանի որ $(a^m)^q \in H$ սպանում ենք՝ $a^p = a^{n-mq} \in H$: Եթե $0 < p < m$, ապա $a^p \notin H$, ուստի $p = 0$, $n = mq$ և $a^n = (a^m)^q$: Իսկ սա նշանակում է, որ $H \subseteq \langle a^m \rangle$ և ուրեմն $H = \langle a^m \rangle$: Այսպիսով H -ը ցիկլիկ է և այն ծնվում է H -ում պարունակվող a -ի ամենափոքր դրական ասփիճանով:

Ապացուցենք այժմ թեորեմի երկրորդ մասը: Դիցուք $G = \langle a \rangle$, $(G : 1) = n$ և $H \leq G$: Լագրանժի թեորեմից պարզ է, որ $(H : 1)$ -ը n -ի բաժանարարն է: Դիցուք $0 < k \leq n$ և k -ն n -ի բաժանարարն է: Միանգամից պարզ է, որ $\langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$ -ի կարգը հավասար է $\frac{n}{(\frac{n}{k}, n)} = k$: Ապացուցենք, որ դա միակ k կարգի ենթախումբն է:

Դիցուք $H \leq G$ և $(H : 1) = k$: Ինչպես տեսանք, $H = \langle a^m \rangle$, որտեղ m -ը H -ում պարունակվող a -ի ամենափոքր ասփիճանն է: Ունենք, որ $(H : 1) = \frac{n}{(m, n)} = k$, ուրեմն $\frac{n}{k} = (m, n)$ և m -ը բաժանվում է $\frac{n}{k}$ -ի վրա առանց մնացորդի: Ուստի $H = \langle a^m \rangle \leq \langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$: Բայց H -ը և $\langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$ -ն երկուսն էլ պարունակում են k փարր, ուրեմն $H = \langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$ և թեորեմն ապացուցված է:

1.11. Ուղիղ արքադրյալ

Դիցուք G -ն խումբ է և H -ն ու K -ն G -ի այնպիսի ենթախմբեր են, որ $G = HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$: Պարզենք, թե ինչպիսի պայմանների դեպքում G խմբի յուրաքանչյուր g փարր միարժեքորեն կներկայացվի $g = hk$, $h \in H$, $k \in K$ փեսքով, ընդ որում եթե $g_1 = h_1k_1$ և $g_2 = h_2k_2$, ապա $g_1g_2 = (h_1h_2)(k_1k_2)$:

Դյուրին է տեսնել, որ $H \cap K = \{e\}$ պայմանն անհրաժեշտ և բավարար է $g = hk$ ներկայացման միարժեքության համար: Իսկապես, եթե $g = h_1k_1 = h_2k_2$, ապա $h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1} \in H \cap K$: Ուստի $h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1} = e$ և $h_1 = h_2$, $k_1 = k_2$: Մյուս կողմից, եթե $e \neq g \in H \cap K$, ապա g -ն ունի երկու փարքեր ներկայացում՝ ge և eg :

Այժմ, դիցուք $g_1 = h_1k_1$, $g_2 = h_2k_2$ և $g_1g_2 = (h_1h_2)(k_1k_2)$: Ունենք՝ $g_1g_2 = h_1k_1h_2k_2 = h_1h_2k_1k_2$, ուրեմն $k_1h_2 = h_2k_1$, ինչը նշանակում է, որ $\forall h \in H, \forall k \in K$ ստույգ է՝ $hk = kh$, այսինքն H ու K ենթախմբերի փարքերը փեղափոխելի են:

Վերջին պայմանը համարժեք է H -ի ու K -ի նորմալությանը G -ում: Նամոզվենք դրանում: Դիցուք H ու K ենթախմբերի փարրերը փեղափոխելի են: Դիցուք $g \in G$ և $g = hk$: Դիտարկենք $g^{-1}Hg$ բազմությունը: Պարզ է, որ $g^{-1}Hg = k^{-1}h^{-1}Hhk = k^{-1}Hk = k^{-1}kH = H$ և $H \triangleleft G$: Նմանապես, $g^{-1}Kg = k^{-1}h^{-1}Khk = h^{-1}k^{-1}Kkh = h^{-1}Kh = h^{-1}hK = K$ և $K \triangleleft G$: Այժմ ապացուցենք հակառակ պնդումը: Դիցուք $K \triangleleft G$ և $h \in H$, $k \in K$: Դիտարկենք $h^{-1}k^{-1}hk$ փարրը: Ունենք $h^{-1}k^{-1}hk = (h^{-1}k^{-1}h)k \in K$, քանի որ $h^{-1}k^{-1}h \in K$: Մյուս կողմից՝ $h^{-1}k^{-1}hk = h^{-1}(k^{-1}hk) \in H$, քանի որ $k^{-1}hk \in H$: Ուստի $h^{-1}k^{-1}hk \in H \cap K = \{e\}$ և $h^{-1}k^{-1}hk = e$, այսինքն՝ $hk = kh$: Այսպիսով հանգում ենք հետևյալ գաղափարին:

Սահմանում. Ասում են, որ G խումբն իր H և K ենթախմբերի **ուղիղ արտադրյալն** է, եթե

1. $G = HK$ (պարզ է, որ $HK = KH$);
2. $H \triangleleft G$ և $K \triangleleft G$;
3. $H \cap K = \{e\}$:

Ինչպես արդեն գիտենք, յուրաքանչյուր $g \in G$ միարժեքորեն ներկայացվում է որպես $g = hk$ և, եթե $g_1 = h_1k_1$, $g_2 = h_2k_2$, ապա g_1g_2 փարրի ներկայացումը հետևյալն է՝ $(h_1h_2)(k_1k_2)$:

Դիցուք այժմ ունենք երկու խումբ՝ G_1 և G_2 : Դիտարկենք $G_1 \times G_2$ դեկարտյան արտադրյալը, որի վրա սահմանենք բազմապարկման գործողություն հետևյալ կերպ: Դիցուք $a_1, b_1 \in G_1$ և $a_2, b_2 \in G_2$: Սահմանենք՝

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2) :$$

Դյուրին է ստուգել, որ $G_1 \times G_2$ -ն խումբ է վերը նշված ուղղորդված գույգերի բազմապարկման գործողության նկատմամբ: Միավոր փարրը (e_1, e_2) -ն է, որպեսզի e_1 -ը G_1 -ի, իսկ e_2 -ը G_2 -ի միավորներն են: Պարզ է, որ (a, b) -ի հակադարձը (a^{-1}, b^{-1}) -ն է: Նկատենք, որ $\{(a, e_2) \mid a \in G_1\}$ և $\{(e_1, b) \mid b \in G_2\}$ բազմությունները ենթախմբեր են $G_1 \times G_2$ խմբում և դրանք համապատասխանաբար իզոմորֆ են G_1 -ին ու G_2 -ին: Այդ ենթախմբերը նույնացվում են G_1 -ին ու G_2 -ին: Դյուրին է համոզվել, որ $G_1 \times G_2$, G_1 -ն ու G_2 -ը

բավարարում են ուղիղ արտադրյալի սահմանման 1.-3. պայմաններին, ուստի $G_1 \times G_2$ խումբը G_1 և G_2 խմբերի ուղիղ արտադրյալն է:

$G = HK$ ուղիղ արտադրյալն իզոմորֆ է $H \times K$ խմբին: Իսկապես, յուրաքանչյուր (h, k) փարրին $H \times K$ -ից համապատասխանեցնենք hk փարրը G -ից: Ակիայտ է, որ այս համապատասխանեցումն հոմոմորֆիզմ է, որը փոխմիարժեք է և պարկերը համընկնում է ամբողջ G -ի հետ: Ուրեմն դա իզոմորֆիզմ է: Այդ պարճառով այն փաստը, որ $G = HK$ ուղիղ արտադրյալ է գրում են հետևյալ կերպ՝ $G = H \times K$:

Բնական ձևով սահմանվում է կամայական վերջավոր քանակությամբ խմբերի ուղիղ արտադրյալը՝ $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ դեկարտյան արտադրյալի փարրերը բազմապարկվում են հետևյալ կերպ՝

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n)$$

G_i խումբը նույնացվում է

$$\{(e_1, \dots, e_{i-1}, a, e_{i+1}, \dots, e_n) \mid a \in G_i\}$$

ենթախմբին:

Դիցուք H_1, \dots, H_n -ը G խմբի ենթախմբեր են և $G = H_1 \dots H_n$: G խումբը կլինի H_1, \dots, H_n ենթախմբերի ուղիղ արտադրյալը, եթե $(h_1, \dots, h_n) \mapsto h_1 \dots h_n$ արտապարկերումն իզոմորֆիզմ է $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ և $G = H_1 \dots H_n$ խմբերի միջև: Այդ դեպքում գրում են՝ $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$ և սա նշանակում է, որ յուրաքանչյուր $g \in G$ համար գոյություն ունի նրա միարժեքորեն որոշված ներկայացումը՝ $g = h_1 \dots h_n$, որտեղ $h_i \in H_i$, $i = 1, \dots, n$, և եթե $g_1 = h_1 \dots h_n$, $g_2 = \acute{h}_1 \dots \acute{h}_n$, ապա $g_1 g_2 = (h_1 \acute{h}_1) \dots (h_n \acute{h}_n)$: Նաև փարրեր H_i -ի և H_j -ի փարրերը փեղափոխելի են: Ուղիղ արտադրյալի սահմանման 1.-3. պայմանները կգրվեն հետևյալ կերպ.

1. $G = H_1 \dots H_n$;
2. $(\forall i) H_i \triangleleft G$;
3. $(\forall i) H_1 \dots H_i \cap H_{i+1} = \{e\}$:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Դիցուք $G = \langle g \rangle$ -ն ցիկլիկ խումբ է և $(G : 1) = n = pq$, որտեղ $(p, q) = 1$, այսինքն p -ն ու q -ն փոխադարձաբար պարզ թվեր են: Նշանակենք $H = \langle g^p \rangle$ և $K = \langle g^q \rangle$: Ինչպես գիտենք, $(H : 1) = q$, $(K : 1) = p$ և H -ն ու K -ն q և p կարգի միակ ենթախմբերն են G -ում: Ապացուցենք, որ $G = H \times K$: Նամաձայն Էվկլիդեսի ալգորիթմի՝ գոյություն ունեն ամբողջ x և y այնպիսին, որ $xp + yq = 1$: Դիցուք $g^z \in G$: Ունենք՝ $g^z = g^{zxp+zyq} = (g^p)^{zx}(g^q)^{zy}$, սակայն $(g^p)^{zx} \in H$ և $(g^q)^{zy} \in K$, ուստի $G = HK$: Քանի որ ցիկլիկ խումբն արելյան է (պեղափոխելի), ապա դրա բոլոր ենթախմբերը նորմալ են: Դիցուք $g^z \in H \cap K$: Դա նշանակում է, որ $g^z = g^{ps} = g^{qt}$ և $ps \equiv qt \pmod{n}$: Ուրեմն $ps - qt = n\nu$ և $ps - qt = pq\nu$: Այսպեղից հեղուկում է, որ $ps = q(t + p\nu)$: Քանի որ p -ն ու q -ն փոխադարձաբար պարզ են, ապա $s \equiv 0 \pmod{q}$ և $t \equiv 0 \pmod{p}$: Այսինքն $ps \equiv 0 \pmod{n}$ և $qt \equiv 0 \pmod{n}$, ուստի $g^{ps} = g^{qt} = e$: Այսպիսով ուղիղ արտադրյալի սահմանման բոլոր 1.-3. պայմանները բավարարված են և $G = H \times K$:

2. Ինչպես գիտենք, n կարգի ցիկլիկ խումբն իզոմորֆ է ըստ $\text{mod } n$ -ի մնացքների դասերի խմբին (ըստ գումարման), որն իզոմորֆ է $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ֆակտոր-խմբին և որը մենք նշանակել էինք \mathbb{Z} -ով: Վերլուծենք n -ը պարզ արտադրիչների՝ $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$: Նամաձայն նախորդ օրինակի՝ ստանում ենք, որ $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}$:

3. Դիցուք G -ն ցիկլիկ խումբ է և $(G : 1) = p^\alpha$, որտեղ p -ն պարզ թիվ է: Փոխարինենք G -ն նրան իզոմորֆ \mathbb{Z}_{p^α} խմբով: Ինչպես գիտենք՝ \mathbb{Z}_{p^α} -ի կամայական սեփական ենթախումբ ցիկլիկ է և նրա կարգը հավասար է p^β , $0 < \beta < \alpha$: Ուրեմն \mathbb{Z}_{p^α} -ի բոլոր ենթախմբերն են՝ $\{0\} \subset \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_{p^2} \subset \cdots \subset \mathbb{Z}_{p^{\alpha-1}} \subset \mathbb{Z}_{p^\alpha}$: Ակնհայտ է, որ կամայական երկու սեփական ենթախմբերի հատումը պարունակում է \mathbb{Z}_p -ն: Ուստի, \mathbb{Z}_{p^α} (ինչպես և G -ն) հնարավոր չէ ներկայացնել սեփական ենթախմբերի ուղիղ արտադրյալի միջոցով:

1.12. Ծնիչ բազմություններ

Սահմանում. G խմբի S ենթաբազմությունը կոչվում է **ծնիչ բազմություն** G -ի համար, եթե G -ի կամայական a փարր կարելի է ներկայացնել S -ի փարրերի կամ դրանց հակադարձների արտադրյալով, $a = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_k^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$,

$x_i \in S, i = 1, 2, \dots, k$:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Դիցուք $G = S_n$: Նայքնի է, որ կամայական պեղադրություն կարելի է ներկայացնել փրանսպոզիցիաների արտադրյալով, ուստի բոլոր n փարրանի փրանսպոզիցիաների բազմությունը ծնիչ բազմություն է S_n -ի համար: Մեկ այլ ծնիչ բազմություն է S_n -ի համար հետևյալ բազմությունը կազմված երկու պեղադրություններից՝ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$ և $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$, որոնցից առաջինը n երկարության ցիկլ է, իսկ մյուսը՝ փրանսպոզիցիա:
2. Դիցուք $G = A_n$: Ծնիչների բազմություն է բոլոր 3 երկարության ցիկլերի բազմությունը:
3. Դիցուք $G = (\mathbb{Z}, +)$: Դիտարկենք հետևյալ բազմությունը՝ $S = \{2^m \mid m \in \mathbb{Z}, m \geq 0\}$: Ակնհայտ է, որ կամայական ամբողջ թիվ ունի երկուական ներկայացում, որը 2-ի աստիճանների գումար է (բացասական թվի համար վերցվում են S բազմության հակադիրները):
4. Դիցուք G -ն հարթության վեկտորների բազմությունն է դիտարկված ըստ գումարման գործողության: Ֆիքսենք երկու ոչ կոլինեար վեկտորներ՝ \vec{a} և \vec{b} : Կառուցենք S բազմությունը՝ $\{\lambda \vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\mu \vec{b} \mid \mu \in \mathbb{R}\}$: Պարզ է, որ կամայական վեկտոր կարելի է ներկայացնել S -ի փարրերի գումարի տեսքով: Ուստի, S -ը ծնիչ բազմություն է:

1.13. Ծնիչների «ուժեղ» բազմություն

Ծնիչ բազմության սահմանումից երևում է, որ խմբի բոլոր փարրերը կարելի է ստանալ կառուցելով ծնիչ բազմության փարրերի բոլոր հնարավոր արտադրյալները: Իհարկե, դա իմաստ ունի անել վերջավոր խմբերի դեպքում: Մակայն ալգորիթմական տեսակետից խմբի ծնիչ բազմության միջոցով արման եղանակը թերի է, քանի որ ունենալով թեկուզև միայն ծնիչների վերջավոր բազմություն՝ դյուրին չէ բոլոր հնարավոր արտադրյալների կառուցումը: Խմբի

փարրի ներկայացումը ծնիչ բազմության փարրերով միարժեք չէ, և ունենալով ծնիչ բազմությունը հնարավոր չէ նույնիսկ հաշվել խմբի կարգը:

Վերը նշված պատճառներով իմաստ ունի դիփարկել ծնիչ բազմության գաղափարի մեկ այլ ավելի նեղ փարբերակ, որը գերծ է վերոհիշյալ թերություններից: Ներագայում ցույց կտանք, որ կամայական ծնիչ բազմությունից կարելի է անցնել համապատասխան նոր «նեղ» փարբերակին:

Այժմ նկարագրենք ծնիչ բազմություն կառուցելու մի եղանակ:

Դիցուք $G \leq S_n$: (Ըստ Քելիի թեորեմի (Թեորեմ 1.1) կարող ենք սահմանափակվել միայն փեղադրությունների խմբերի դիփարկմամբ:) Կառուցենք G -ի ենթախմբերի մի շղթա՝

$$G \geq G_1 \geq G_{12} \geq \dots \geq G_{123\dots i} \geq \dots \geq G_{123\dots n-1} = G_{123\dots n} = \{e\} : \quad (1.16)$$

Այսպեղ $G_{123\dots i}$ -ն, կազմված է G -ի այն բոլոր փեղադրություններից, որ 1-ը փանում են 1-ի մեջ, 2-ը՝ 2-ի, 3-ը՝ 3-ի \dots , i -ն՝ i -ի մեջ: Պարզ է, որ $e \in G_{123\dots i} \neq \emptyset$ և $G_{123\dots i} \leq G$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$: Դիփարկենք (1.16)-ի երկու հարևան անդամների գույքը՝

$$G_{123\dots i-1} \geq G_{123\dots i}$$

և համապատասխան ֆակտոր-բազմությունը՝

$$G_{123\dots i-1} \setminus G_{123\dots i} :$$

Բոլոր փեղադրությունները $G_{123\dots i-1}$ -ից պահպանում են 1-ից $i-1$ փարբերը (այսինքն փանում են 1-ը 1-ի մեջ, \dots , $i-1$ -ը՝ $i-1$ -ի մեջ): Երկու x և y փեղադրություն $G_{123\dots i-1}$ -ից կպարկանեն միևնույն հարակից դասին ըստ $G_{123\dots i}$ -ի $\Leftrightarrow x(i) = y(i)$ (այսինքն միայն երբ x -ը և y -ը i փարբը փանում են միևնույն փարրի մեջ): Իրոք, որպեսզի x -ը և y -ը լինեն միևնույն դասից ըստ $G_{123\dots i}$ -ի անհրաժեշտ է և բավարար, որ $x^{-1}y \in G_{123\dots i}$: Սա նշանակում է, որ $(x^{-1}y)(i) = i$, բայց $(x^{-1}y)(i) = x^{-1}(y(i)) = i$ և ուրեմն $x(i) = y(i)$: Այսպեղից եզրակացնում ենք, որ $G_{123\dots i-1} \setminus G_{123\dots i}$ ֆակտոր-բազմությունը կարող է ունենալ ամենաշատը $n - (i - 1) = n - i + 1$ փարբ (հարակից դաս), այսինքն՝ $(G_{123\dots i-1} : G_{123\dots i}) \leq n - i + 1$:

Կառուցենք G -ի փարբերի մի բազմություն հետևյալ կերպ:

Դիփարկենք $G \setminus G_1$ -ը: Յուրաքանչյուր հարակից դասից, բացի G_1 -ից, կամայական ձևով ընտրենք մի ներկայացուցիչ: G_1 -ից որպես ներկայացուցիչ ընտրենք միավոր փարրը՝ e -ն: Նշանակենք այդ ներկայացուցիչները $e, x_1, x_2, \dots, x_{k_1}$ -ով: Պարզ է, որ $k_1 + 1 \leq n$: Դրանից հետո դիփարկենք $G_1 \setminus G_{12}$ -ը: Կրկին յուրաքանչյուր հարակից դասից, բացի G_{12} -ից, կամայական ձևով ընտրենք մի ներկայացուցիչ: G_{12} -ից որպես ներկայացուցիչ ընտրենք միավոր փարրը՝ e -ն: Նշանակենք այդ ներկայացուցիչները $e, y_1, y_2, \dots, y_{k_2}$ -ով: Պարզ է, որ $k_2 + 1 \leq n - 1$: Շարունակելով պրոցեսը՝ ամեն մի $G_{123\dots i-1} \setminus G_{123\dots i}$ -ի յուրաքանչյուր հարակից դասից ընտրենք ներկայացուցիչներ՝ վերցնելով e -ն որպես $G_{123\dots i}$ -ի ներկայացուցիչ: Վերջում կդիփարկենք $G_{123\dots n-2} \setminus G_{123\dots n-1}$ -ը, որն ամենաշափր կարող է ունենալ երկու փարր՝ միավորը և այն փեղադրությունը, որ պահպանում է 1-ից $n - 2$ փարրերը, իսկ $n - 1$ -ը փանում է n -ի մեջ, n -ն էլ՝ $n - 1$ -ի մեջ:

Դասավորենք ընտրված ներկայացուցիչներին մի աղյուսակի մեջ՝ փողերում գրելով $G_{123\dots i-1} \setminus G_{123\dots i}$ -րի ներկայացուցիչներին: Այդ աղյուսակը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$\begin{array}{cccccc} e & x_1 & x_2 & \cdots & x_{k_1} & \\ e & y_1 & y_2 & \cdots & y_{k_2} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array} \quad (1.17)$$

Աղյուսակի առաջին փողը պարունակում է $k_1 + 1$ փարր և $k_1 + 1 \leq n$, երկրորդ փողը պարունակում է $k_2 + 1 \leq n - 1$ փարր և այլն: Ապացուցենք, որ (1.17) աղյուսակում ընդգրկված փեղադրությունների բազմությունը ծնիչ բազմություն է G խմբի համար:

Դիցուք $a \in G$: Դիփարկենք $G \setminus G_1$ -ը: Պարզ է, որ a -ն պատկանում է որևէ հարակից դասի ըստ G_1 -ի: Դիցուք այդ դասի ներկայացուցիչը x_1 -ն է: Այդ դեպքում $x_1^{-1}a \in G_1$, քանի որ արդեն պարզել ենք, որ a -ն և x_1 -ը նույն հարակից դասից են $\Leftrightarrow x_1(1) = a(1)$: Դիցուք $x_1^{-1}a$ -ն պատկանում է $G_1 \setminus G_{12}$ -ի այն հարակից դասին, որի ներկայացուցիչը y_2 -ն է: Ուրեմն, $y_2^{-1}x_1^{-1}a \in G_{12}$: Այժմ դիփարկենք $G_{12} \setminus G_{123}$ -ը: Դիցուք z_3 -ը $y_2^{-1}x_1^{-1}a$ փարրը պարունակող (1.17) աղյուսակի երրորդ փողում գրնվող ըստ G_{123} -ի հարակից դասի ներկայացուցիչն է: Պարզ է, որ $z_3^{-1}y_2^{-1}x_1^{-1}a \in G_{123}$: Շարունակելով այս պրոցեսը՝ կստանանք (1.17) աղյուսակի փարրերի (ամեն փողից մեկական) մի

արտադրյալ՝ $\dots z_3^{-1}y_2^{-1}x_1^{-1}a \in G_{123\dots n-1} = \{e\}$ ուստի $\dots z_3^{-1}y_2^{-1}x_1^{-1}a = e$ և $a = x_1y_2z_3\dots$: Այսինքն, G խմբի կամայական տեղադրություն ներկայացվում է (1.17) աղյուսակի փարբերի արտադրյալով և այդ բազմությունը ծնիչ բազմություն է:

Նկատենք, որ վերը նշված արտադրյալում մասնակցում է (1.17) աղյուսակի յուրաքանչյուր փողից մեկական փարբ (որոշ դեպքերում դա կարող է լինել միավորը՝ e -ն), ընդ որում սկզբից վերցվում է առաջին փողից մեկ փարբ, հետո երկրորդից և այդպես շարունակ: Նկատենք, որ $a = x_1y_2z_3\dots$ ներկայացումը միակն է, քանի որ, եթե այդ ներկայացման որևէ փարբ փոխարինվի (1.17) աղյուսակի նույն փողից մեկ այլ փարբով, ապա դա նշանակում է, որ համապատասխան $G_{123\dots i-1} \setminus G_{123\dots i}$ -ում վերցվում է մեկ այլ հարակից դաս և ուստի հնարավոր չէ սրանալ a փարբը: Օրինակ, դիփարկենք $a = x_1y_2z_3$ և $b = x_1y_2z_2$ փարբերը, ապա $y_2^{-1}x_1^{-1}a \in G_{12}$ և $y_2^{-1}x_1^{-1}b \in G_{12}$: Քանի որ $z_3 \neq z_2$, ապա դրանք ըստ G_{123} -ի փարբեր հարակից դասերի ներկայացուցիչներ են և $z_3(3) \neq z_2(3)$: Ուստի՝ $a(3) \neq b(3)$:

Այսպիսով սրացանք, որ (1.17) աղյուսակով փրվող բազմությունը ծնիչ բազմություն է G խմբի համար, ընդ որում խմբի փարբերի ներկայացումը (1.17) աղյուսակի փարբերի միջոցով միակն է եթե ամեն փողից հաջորդաբար վերցված է ճիշտ մեկ փարբ: Դյուրին է տեսնել, որ G խմբի փարբերի քանակը հավասար է (1.17) աղյուսակի փարբերի վերը նշված արտադրյալների քանակին, որն իր հերթին հավասար է աղյուսակի փողերում պարունակվող տեղադրությունների քանակների արտադրյալին, այսինքն

$$(G : 1) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots :$$

Սահմանում. (1.17) աղյուսակով փրված ծնիչ բազմությունը կոչվում է «**ուժեղ**» ծնիչների բազմություն:

1.14. Միմսի ալգորիթմը

Դիցուք $G \leq S_n$ և խումբը փրված է ծնիչների S բազմության միջոցով: Միմսի ալգորիթմը սրանալով՝ S բազմությունը կառուցում է G խմբի «ուժեղ» ծնիչների բազմություն:

Ալգորիթմը կառուցում է (1.17) աղյուսակը: Դրա համար օգտվելու ենք $n \times n$ մի աղյուսակից, որի վանդակների մեջ գրելու ենք տեղադրություններ: Այդ աղյուսակն ունի հետևյալ տեսքը.

	1	2	3	...	n
1	e				
2	■	e			
3	■	■	e		
⋮	■	■	■	⋱	
n	■	■	■	■	e

(1.18)

Աղյուսակի փողերը և սյուները համարակալված են $1, 2, \dots, n$ թվերով: Անկյունագծային վանդակներում գրված է միավոր տեղադրությունը: Անկյունագծից ներքև գրնվող վանդակները չեն օգտագործվում: Վանդակ ստելով՝ մենք այսուհետև կհասկանանք անկյունագծից վերև գրնվող վանդակները: Վանդակներում կարող են տեղադրվել տեղադրություններ՝ մեկ տեղադրություն մեկ վանդակում: Վանդակները նաև կարող են դափարկ լինել: Ալգորիթմի ընթացքում որոշ տեղադրություններ գրվում են դափարկ վանդակների մեջ: Եթե i -րդ փողի j -րդ վանդակում ($i < j$) գրվել է x տեղադրությունը, ապա պարփառիք պետք է տեղի ունենա $x(i) = j$ պայմանը և $x(k) = k$ բոլոր $k = 1, \dots, i - 1$: Այսինքն այդ վանդակը նախատեսված է միայն այնպիսի տեղադրությունների համար, որոնք i փարրը փանում են j փարրի մեջ, իսկ 1 -ից $i - 1$ փարրերը մնում են տեղում: Փաստորեն (1.18) աղյուսակի վանդակներում ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում սրացվում են (1.17) աղյուսակի փարրերը, այսինքն կառուցվում է «ուժեղ» ծնիչների բազմությունը:

Միմսի ալգորիթմն աշխատանքի ընթացքում պարբերաբար կափարում է մի գործողություն, որը կոչվում է *cascade*: Այդ գործողությունը կիրառվում է որևէ տեղադրության, երբ (1.18) աղյուսակը մասամբ լրացված է, այսինքն որոշ վանդակներում արդեն կարող են տեղադրված լինել տեղադրություններ:

Նկարագրենք *cascade* գործողությունը: Դիցուք արված է a տեղադրությունը: *cascade(a)*-ով նշանակում են գործողության կիրառումը a տեղադրության նկատմամբ:

cascade(a)-ն հաշվում ենք հետևյալ կերպ.

1. նշանակում ենք b -ով ընթացիկ փեղադրությունը և վերցնում ենք $b = a$;
2. հաշվում ենք $b(1)$ -ը և դիֆարկում ենք (1.18) աղյուսակի առաջին փողը;
3. եթե $b(1) = 1$ անցնում ենք 5. կետին;
4. եթե $b(1) = i \neq 1$ սփուգում ենք առաջին փողի i -րդ վանդակը. եթե այն դափարկ է, ապա փեղադրում ենք այդ վանդակում b փեղադրությունը և $cascade(a)$ -ն ավարտված է. եթե այդ վանդակը զբաղեցված է և այդպեղ գրված է x փեղադրությունը, ապա հաշվում ենք $b = x^{-1}b$, վերցնում ենք այդ նոր ընթացիկ փեղադրությունը և անցնում ենք հաջորդ կետին;
5. հաշվում ենք $b(2)$ -ը և դիֆարկում ենք (1.18) աղյուսակի երկրորդ փողը;
6. եթե $b(2) = 2$ անցնում ենք 8. կետին;
7. եթե $b(2) = i \neq 2$ սփուգում ենք երկրորդ փողի i -րդ վանդակը. եթե այն դափարկ է, ապա փեղադրում ենք այդ վանդակում b փեղադրությունը և $cascade(a)$ -ն ավարտված է. եթե այդ վանդակը զբաղեցված է և այդպեղ գրված է y փեղադրությունը, ապա հաշվում ենք $b = y^{-1}b$, վերցնում ենք այդ նոր ընթացիկ փեղադրությունը և անցնում ենք հաջորդ կետին;
8. վերը նշված եղանակով շարունակում ենք պրոցեսը մյուս փողերի համար հաջորդաբար:

Արդյունքում, կամ (1.18) աղյուսակում լրացվում է մի նոր վանդակ, կամ էլ անցնելով (1.18) աղյուսակի բոլոր փողերով դուրս ենք գալիս աղյուսակից սփանալով a -ի ներկայացումն աղյուսակի փարբերի միջոցով՝ $a = xy \dots$ յուրաքանչյուր փողից մեկ փեղադրություն վերցված:

Դիցուք $G \leq S_n$ խումբը փրված է ծնիչների S բազմության միջոցով: Քանի որ G -ն վերջավոր է կամայական $a \in G$ ունի վերջավոր կարգ, այսինքն գոյություն ունի դրական ամբողջ թիվ m այնպիսի, որ $a^m = e$ (հիշենք, որ m -ը խմբի կարգի բաժանարար է): Ուրեմն $a^{m-1}a = e$ և $a^{m-1} = a^{-1}$: G -ի կամայական a փարբ սփացվում է S բազմության փարբերի արփադրյալի միջոցով՝ $a = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$, $x_i \in S$, $i = 1, 2, \dots, k$: Սակայն հաշվի առնելով $a^{m-1} = a^{-1}$ հավասարությունը՝ սփացվում է, որ կամայական a փարբի համար կգտնվի այնպիսի ներկայացում $a = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k}$, որ $\varepsilon_i = 1$, այսինքն a -ն S բազմության (առանց դրա հակադարձների օգտագործման) փարբերի

արտադրյալն է:

1.15. Միմսի ալգորիթմի նկարագրությունը և կոռեկտության ապացույցը

Ալգորիթմի մուտք է հանդիսանում n փարրանի փեղադրություններից կազմված S բազմությունը, որը ծնիչների բազմություն է ինչ-որ մի $G \leq S_n$ ենթախմբի համար: Ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում կառուցվում է G խմբի «ուժեղ» ծնիչների մի բազմություն, որի փարրերը սրացվում են (1.18) աղյուսակում (որի փողերը համընկնում են համապատասխանաբար «ուժեղ» ծնիչների բազմության (1.17) աղյուսակի փողերի հետ):

Ալգորիթմի աշխատանքի սկզբում (1.18) աղյուսակը դատարկ է: Եթե ալգորիթմի որևէ քայլից հետո (1.18) աղյուսակում լրացվում են բոլոր վանդակները, ապա ալգորիթմը վերջացնում է իր աշխատանքը և այդ դեպքում պարզ է, որ $G = S_n$: Իսկապես, ինչպես արդեն ստուգել ենք ($G : 1$)-ը հավասար է (1.17) աղյուսակի փողերի փարրերի քանակների արտադրյալին, որը համընկնում է (1.18) աղյուսակի փողերում գրված (հաշվի են առնվում նաև միավոր փարրերը) փեղադրությունների քանակների արտադրյալին: Եթե բոլոր վանդակները զբաղված են, ապա $(G : 1) = n(n-1) \dots 2 = n!$:

Ալգորիթմի կատարման առաջին փուլում յուրաքանչյուր a -ի համար S բազմությունից կատարում ենք $cascade(a)$ գործողությունը:

Ալգորիթմի կատարման երկրորդ փուլում (1.18) աղյուսակի փարրերի յուրաքանչյուր a, b զույգի համար կազմվում են a^2, b^2, ab, ba արտադրյալները և դրանց համար կատարվում է $cascade$ գործողությունը: (Նարկ է նշել, որ a, b զույգերի բազմությունը դինամիկ է, այսինքն անընդհար փոփոխվում է, բայց, քանի որ այն վերջավոր է, ապա ալգորիթմի երկրորդ փուլը կավարտվի վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո): Երկրորդ փուլի ավարտով ավարտվում է ալգորիթմի աշխատանքը:

Այժմ ապացուցենք, որ Միմսի աշխատանքի արդյունքում կառուցված (1.18) աղյուսակը հանդիսանում է «ուժեղ» ծնիչների բազմություն:

Դիցուք $S = \{t_1, \dots, t_m\}$: Կամայական a փարր G խմբից ներկայացվում է S -ի փարրերի արտադրյալով՝ $a = t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}$: Քանի որ Միմսի ալգորիթմի

առաջին փուլում S -ի բոլոր փարրերն անցել են *cascade*-ով, դրանք բոլորը ներկայացվում են (1.18) աղյուսակի փարրերի արտադրյալներով, ընդ որում ամեն փողից վերցված է ճիշտ մեկ փեղադրություն (դա կարող է նաև լինել միավորը): Այդպիսի ներկայացում սպանալու համար բավական է կրկին *cascade* կատարել փվյալ t_{i_j} համար: Այսուհետև (1.18) աղյուսակի փարրերը կնշանակենք g փառերով: Կօգրագործենք ինդեքսներ՝ սփորին ինդեքսը ցույց կրա թե փվյալ g -ն (1.18) աղյուսակի որ փողից է վերցված, իսկ վերին ինդեքսը կօգրագործենք ուղղակի հերթականությունը նշելու համար: Այսպիսով $a = t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}$ ներկայացումից (օգրվելով t_{i_j} -րի (1.18) աղյուսակի փարրերով ներկայացումներից) կսրանանք հետևյալը.

$$a = \underbrace{(g_1^1 g_2^1 \dots g_{n-1}^1)}_{t_{i_1}} \underbrace{(g_1^2 g_2^2 \dots g_{n-1}^2)}_{t_{i_2}} \dots \underbrace{(g_1^{k-1} g_2^{k-1} \dots g_{n-1}^{k-1})}_{t_{i_{k-1}}} \underbrace{(g_1^k g_2^k \dots g_{n-1}^k)}_{t_{i_k}} : \quad (1.19)$$

Այս ներկայացումը թեև պարունակում է միայն (1.18) աղյուսակի փեղադրություններ, սակայն չի կարող համարվել վավեր ներկայացում, քանի որ ամեն փողից չի վերցված ճիշտ մեկ փեղադրություն (իհարկե, եթե $k = 1$, սպա ներկայացումը վավեր է) և ավելի մեծ համարի փողի փարրը հանդիպում է ավելի շուր, քան ավելի փոքր համարինը՝ օրինակ $g_{n-1}^1 g_1^2$:

Դիտարկենք (1.19) ներկայացման փարրերը շարժվելով աջից ձախ: Առաջին դեպքը, երբ առաջին փողի փարրը գրված է այլ փողի փարրից հետո դա $g_{n-1}^{k-1} g_1^k$ -ն է: Քանի որ $g_{n-1}^{k-1} g_1^k$ -ը (1.18) աղյուսակի փարրերի գույգի արտադրյալ է, սպա ալգորիթմի երկրորդ փուլի ժամանակ այս արտադրյալը ենթարկվել է *cascade*-ի և ուրեմն այն ներկայացվում է (1.18) աղյուսակի փարրերի արտադրյալով՝ $g_{n-1}^{k-1} g_1^k = g_1' g_2' \dots g_{n-1}'$ (որը հեշտության կարող ենք սպանալ կրկին $g_{n-1}^{k-1} g_1^k$ -ն ենթարկելով *cascade*-ի): Այսպիսով, (1.19) ներկայացումը կարագրվի որպես

$$a = g_1^1 g_2^1 \dots g_{n-1}^1 g_1^2 g_2^2 \dots g_{n-1}^2 \dots g_1^{k-1} g_2^{k-1} \dots g_{n-2}^{k-1} g_1' g_2' \dots g_{n-1}' g_2^k \dots g_{n-1}^k :$$

Այժմ $g_{n-2}^{k-1} g_1'$ դրվագում առաջին փողի փարրը գրված է այլ փողի փարրից հետո: Այս դրվագը մեկ փեղով ավելի մոտ է (1.19) ներկայացման սկզբին: Փոխարինելով $g_{n-2}^{k-1} g_1'$ -ը նրա ներկայացումով (1.18) աղյուսակի փարրերով և շարունակելով այս պրոցեսը՝ կհասնենք այն պահին, երբ աջից ձախ գննելով a -ի ներկայացման առաջին դրվագը, որում առաջին փողի փարրը այլ փողի

փարրից հետո է գրված դա $g_1^{k-1}g_1$ փեսքի դրվագը կլինի: Այս դրվագը մեկ փեղով ավելի մոտ է (1.19) ներկայացման սկզբին քան նախորդ այդպիսի դրվագը: Քանի որ $g_1^{k-1}g_1$ արտադրյալն է ենթարկվել է *cascade*-ի ալգորիթմի երկրորդ փուլում, ապա $g_1^{k-1}g_1$ -ն ունի ներկայացում (1.18) աղյուսակի փարրերով, որով և կփոխարինենք $g_1^{k-1}g_1$ -ն a -ի ներկայացման մեջ: Շարունակելով պրոցեսը կհասնենք a -ի հետևյալ ներկայացմանը՝

$$a = g_1g_{j_1}g_{j_2} \dots g_{j_q}$$

որտեղ միայն g_1 -ն է (1.18) աղյուսակի առաջին փողից, իսկ մնացածները երկրորդից սկսած փողերից են: Վերցնելով $g_{j_1}g_{j_2} \dots g_{j_q}$ արտադրյալը վերը դիփարկված եղանակով կարագրենք այն $g_2g_{i_1} \dots g_{i_p}$ փեսքով, որտեղ միայն g_2 -ն է (1.18) աղյուսակի երկրորդ փողից, իսկ մնացածները երրորդից սկսած փողերից են: Այս պրոցեսի արդյունքում պարզ է, որ կստանանք a -ի մի $a = g_1g_2 \dots g_{n-1}$ ներկայացում, որտեղ g_i -ն (1.18) աղյուսակի i -րդ փողից է: Ալգորիթմի կոռեկտությունն ապացուցված է:

Դյուրին է պեսնել, որ Միմսի ալգորիթմի առաջին փուլում կստարվող *cascade*-ների քանակը հավասար է $|S|$ -ի, իսկ երկրորդ փուլում այն չի գերազանցում $\binom{n(n-1)/2}{2} = O(n^4)$ թիվը:

1.16. Միմսի ալգորիթմի որոշ կիրառություններ

Միմսի ալգորիթմը թույլ է փալիս հեշտությամբ լուծել մի շարք կարևոր խնդիրներ: Ստորև բերված են մի քանի օրինակներ:

1. Դիցուք G խումբը ($G \leq S_n$) փրված է S ծնիչ բազմությունով և հարկավոր է հաշվել G խմբի կարգը: Դրա համար կառուցում ենք Միմսի ալգորիթմի միջոցով G խմբի «ուժեղ» ծնիչների բազմությունը: Ապա հաշվում ենք (1.18) աղյուսակի փողերում գրված փեղադրությունների քանակները և այդ քանակներն իրար բազմապատկելով ստանում ենք $(G : 1)$ -ը:

2. Դիցուք G խումբը ($G \leq S_n$) փրված է S ծնիչ բազմությունով: Խնդիր. $a \in S_n$ համար ստուգել $a \in G$ պայմանը: Այս խնդիրը լուծվում է հետևյալ կերպ: Կառուցում ենք Միմսի ալգորիթմի միջոցով G խմբի «ուժեղ» ծնիչների բազմությունը: Այժմ կամայական փրված a փեղադրության համար $a \in G$

պայմանը ստուգելու համար կիրառում ենք $\text{cascade}(a)$ -ն (1.18) աղյուսակի (որը ստացվել է Միմսի ալգորիթմով) նկարմամբ: Արդյունքում կամ ստանում ենք a -ի ներկայացումն «ուժեղ» ծնիչների բազմության փարրերով և ուստի՝ $a \in G$, կամ էլ $\text{cascade}(a)$ -ի արդյունքում փորձ է կատարվում լրացնել (1.18) աղյուսակի որևէ դափարկ վանդակ, իսկ դա նշանակում է, որ $a \notin G$:

3. Դիցուք G -ն և H -ը S_n -ի ենթախմբեր են և փրված են համապատասխանաբար S^G և S^H ծնիչ բազմություններով: Նարկավոր է ստուգել $H \leq G$ պայմանը: Դրա համար բավական է բոլոր $a \in S^H$ ստուգել $a \in G$ պայմանը: Վերջին խնդիրը լուծված է նախորդ կետում:

4. Դիցուք $H \leq G \leq S_n$ և G -ն ու H -ը փրված են համապատասխանաբար S^G և S^H ծնիչ բազմություններով: Նարկավոր է ստուգել $H \triangleleft G$ պայմանը: Դրա համար վարվում ենք հետևյալ կերպ: Միմսի ալգորիթմով կառուցում ենք H -ի և G -ի «ուժեղ» ծնիչների բազմությունները: Յուրաքանչյուր h -ի և g -ի համար համապատասխանաբար վերցված H -ի և G -ի «ուժեղ» ծնիչների բազմություններից ստուգում ենք $ghg^{-1} \in H$ պայմանը: Վերջին պայմանի ստուգումը հեշտությամբ կատարվում է $\text{cascade}(ghg^{-1})$ -ը հաշվելով: Եթե բոլոր դեպքերում ստանում ենք, որ $ghg^{-1} \in H$, ապա $H \triangleleft G$: Եթե գոնե մեկ դեպքում $ghg^{-1} \notin H$, ապա ակնհայտորեն $H \triangleleft G$ պայմանը փեղի չունի: Ապացուցենք, որ եթե բոլոր h -րի և g -րի համար համապատասխանաբար վերցված H -ի և G -ի «ուժեղ» ծնիչների բազմություններից փեղի ունի $ghg^{-1} \in H$ պայմանը, ապա $H \triangleleft G$: Փաստորեն հարկավոր է ստուգել, որ $\forall x \in G, \forall y \in H, xyx^{-1} \in H$: Դիցուք $x = g_1 \cdots g_{n-1}$ և $y = h_1 \cdots h_{n-1}$ «ուժեղ» ծնիչների բազմությունների փարրերով ներկայացումներն են: Ունենք՝

$$xyx^{-1} = g_1 \cdots g_{n-1} h_1 \cdots h_{n-1} g_{n-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}$$

և

$$xyx^{-1} = g_1 \cdots g_{n-2} \underbrace{(g_{n-1} h_1 g_{n-1}^{-1})}_{\in H} \cdots \underbrace{(g_{n-1} h_{n-1} g_{n-1}^{-1})}_{\in H} g_{n-2}^{-1} \cdots g_1^{-1} :$$

Պարզ է, որ $(g_{n-1} h_1 g_{n-1}^{-1})(g_{n-1} h_2 g_{n-1}^{-1}) \cdots (g_{n-1} h_{n-1} g_{n-1}^{-1})$ արտադրյալը պատկանում է H -ին և կարող է փոխարինվել «ուժեղ» ծնիչների ներկայացմամբ (օրինակ cascade -ով), $(g_{n-1} h_1 g_{n-1}^{-1})(g_{n-1} h_2 g_{n-1}^{-1}) \cdots (g_{n-1} h_{n-1} g_{n-1}^{-1}) = \acute{h}_1 \acute{h}_2 \cdots \acute{h}_{n-1}$: Ուստի $xyx^{-1} = g_1 \cdots g_{n-2} \acute{h}_1 \acute{h}_2 \cdots \acute{h}_{n-1} g_{n-2}^{-1} \cdots$

g_1^{-1} և մեզ հաջողվեց վերացնել g_{n-1} -ը xyx^{-1} -ի ներկայացումից: Նման եղանակով կվերացնենք հաջորդաբար g_{n-2} -ը, հետո g_{n-3} -ը և այլն մինչև կմնան միայն H -ի փարբերը: Ուստի $xyx^{-1} \in H$:

5. Նայարնի է, որ սիմետրիկ խմբի ծնիչների բազմություն է հանդիսանում բոլոր փրանսպոզիցիաների բազմությունը: Դա ապացուցվում է փեղադրությունները հատուկ կարգով դասավորման ալգորիթմով՝ օգտագործելով մաթեմատիկական ինդուկցիա: Սակայն այդ փաստն անմիջապես դառնում է ակնհայտ «ուժեղ» ծնիչների գաղափարի օգնությամբ:

Դիտարկենք Սիմսի ալգորիթմի աղյուսակը և լրացնենք այն հետևյալ կերպ. i -րդ փողի j -վանդակում փեղադրում ենք (i, j) փրանսպոզիցիան (հիշենք, որ $i < j$): Աղյուսակի բոլոր վանդակները $\binom{n(n-1)}{2}$ հար) ճիշտ ձևով լրացված են, ուստի սրացվածը S_n սիմետրիկ խմբի «ուժեղ» ծնիչների բազմություն է:

Մենք սրացանք ավելին, քան գիտեինք: Եթե դիտարկենք միայն փեղադրությունների այնպիսի արտադրյալներ, որոնցում 1-ը պարունակող փեղադրությունից ձախ փեղադրություն չկա, 2-ը պարունակող փեղադրությունից ձախ կարող է լինել միայն 1-ը պարունակող փեղադրություն, 3-ը պարունակող փեղադրությունից ձախ կարել է լինել միայն 1-ը և/կամ 2-ը պարունակող փեղադրություններ և այլն, ապա այդպիսի ներկայացումը որոշվում է միարժեքորեն:

6. Նշանափոխ A_n բոլոր զույգ փեղադրություններից բաղկացած խմբի դեպքում, երբ $n \geq 3$, հայարնի է, որ բոլոր 3 երկարության ցիկլերը կազմում են ծնիչների բազմություն: Այս փաստը նույնպես հեշտությամբ հետևում է որոշակի «ուժեղ» ծնիչների բազմության գոյությունից: Լրացնենք Սիմսի ալգորիթմի աղյուսակը հետևյալ կերպ. i -րդ փողի j -վանդակում փեղադրում ենք (i, j, k) ցիկլը, որտեղ $k \notin \{i, j\}$ (հիշենք, որ $i < j$): Սա հնարավոր է կատարել բոլոր i -երի համար, բացի $i = n - 1$ դեպքից: Այսինքն $i = n - 1$ -րդ փողի միակ վանդակը թողնում ենք դատարկ: Ակնհայտ է, որ 3 երկարության ցիկլերը զույգ փեղադրություններ են և սրացվածը A_n -ի ենթախմբի «ուժեղ» ծնիչների բազմություն է: Նաշվենք այդ ենթախմբի կարգը՝ բազմապատկելով փողերում լրացված վանդակների քանակները: Ստանում ենք $\frac{n!}{2}$: Ուրեմն ենթախումբը համընկնում է A_n -ի հետ և սրացվածը A_n -ի «ուժեղ» ծնիչների բազմություն է:

1.17. Ազատ խմբեր, որոշիչ առնչություններ

Լուծենք հետևյալ խնդիրը: Փորձենք նկարագրել բոլոր 8-րդ կարգի ոչ արելյան խմբերը:

Դիցուք $(G : 1) = 8$ և $e \neq a \in G$: Լագրանժի թեորեմից պարզ է, որ a -ի կարգը կարող է միայն 8-ի բաժանարար լինել: Դիցուք G -ում գոյություն ունի a , որի կարգը 8 է, ապա $\langle a \rangle = G$ (հիշենք, որ $\langle a \rangle$ -ն դա a -ով ծնված ցիկլիկ խումբն է) և G -ն ցիկլիկ է, ուրեմն արելյան: Եթե G -ի բոլոր փարրերի կարգը 2 է, ապա $\forall a \in G, a^2 = e$: Վերջին պայմանից հետևում է, որ, G -ն, արելյան է: Իսկապես, $a^2 = e \Leftrightarrow a = a^{-1}$ և կամայական է a -ի և b -ի համար, ճիշտ է՝ $ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$:

Ուստի G -ի բոլոր փարրերի կարգը կամ 2 է կամ 4 և գոյություն ունի $a \in G$, որի կարգը 4 է՝ $a^4 = e$: Ունենք $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3\}$ և փրոհելով G -ն հարակից դասերի ըստ $\langle a \rangle$ -ի կախանանք՝ $G = \langle a \rangle \cup b\langle a \rangle$, որտեղ $b \in G \setminus \langle a \rangle$: Պարզ է, որ $b^2 \in \langle a \rangle$, քանի որ եթե $b^2 \in b\langle a \rangle$, ապա $b^2 = ba^k$ և $b = a^k \in \langle a \rangle$, ինչը սխալ է: Դյուրին է ստուգել, որ $b^2 \notin \{a, a^3\}$: Դիցուք $b^2 = a$ կամ $b^2 = a^3$: Պարզ է, որ b -ի կարգը 2 չէ: Այն նաև 4 չէ, քանի որ $b^4 = a^2$ կամ $b^4 = (a^3)^2 = a^4a^2 = a^2$: Եթե b -ի կարգը 8 է այդ դեպքում $\langle b \rangle = G$ և խումբն արելյան է:

Ուստի $b^2 \in \{e, a^2\}$ և $b^2 = e$ կամ $b^2 = a^2$:

Այժմ դիփարկենք bab^{-1} փարրը: Եթե $bab^{-1} \in b\langle a \rangle$, ապա $bab^{-1} = ba^k$ և $ab^{-1} = a^k$, որից էլ ստանում ենք, որ $b = a^{1-k} \in \langle a \rangle$: Ուստի $bab^{-1} \in \langle a \rangle$: Պարզ է, որ $bab^{-1} \neq e$, քանի որ հակառակ դեպքում $a = e$: Եթե $bab^{-1} = a$, ապա $ba = ab$: Դա նշանակում է որ G -ն արելյան է, քանի որ G -ի յուրաքանչյուր փարր ներկայացվում է $b^n a^m$ տեսքով, որտեղ $n = 0, 1$ և $m = 0, 1, 2, 3$ (դա հետևում է $G = \langle a \rangle \cup b\langle a \rangle$ հարակից դասերի փրոհումից) և $(b^n a^m)(b^p a^q) = b^{n+p} a^{m+q} = (b^p a^q)(b^n a^m)$: Եթե $bab^{-1} = a^2$, ապա $ba^2b^{-1} = bab^{-1}bab^{-1} = (bab^{-1})^2 = a^4 = e$ և $a^2 = e$: Ուստի մնում է եզրակացնել, որ $bab^{-1} = a^3$:

Այսպիսով ստացանք, որ a և b փարրերը կապված են կամ

$$\begin{aligned} a^4 &= e \\ b^2 &= e \\ ba &= a^3b \end{aligned} \tag{1.20}$$

կամ էլ

$$\begin{aligned} a^4 &= e \\ b^2 &= a^2 \\ ba &= a^3b \end{aligned} \quad (1.21)$$

առնչություններով:

Վերը նշված (1.20) և (1.21) պայմաններին բավարարող 8 փարր պարունակող խմբեր իսկապես գոյություն ունեն:

Պիտարկենք, օրինակ, հետևյալ երկու 4 փարրանի փեղադրությունները.
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1234)$ և $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (24)$, այսինքն a -ն 4 երկարության ցիկլ է, իսկ b -ն փրանսպոզիցիա է: Դյուրին է ստուգել, որ $a^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e = b^2$: Նաև $ba = (12)(34) = a^3b$: Խմբի բոլոր 8 փարրերն են $e, a, a^2 = (13)(24), a^3 = (1432), b, ab = (14)(23), a^2b = (13), a^3b = (12)(34)$:

(1.21) պայմանների դեպքի համար դիտարկենք հետևյալ 2-չափանի կոմպլեքս մատրիցները. $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ և $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, i -ն կեղծ միավորն է: Դյուրին է ստուգել, որ $A^4 = E$ (E -ն միավոր մատրիցն է), $B^2 = A^2 = -E$, $BA = A^3B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$: Խմբի բոլոր 8 փարրեր են՝ $A^2 = -E$, $A^3 = -A$, B , $AB = iE$, $A^2B = -B$, $A^3B = -iE$: Այս խումբը բավարարում է (1.21) պայմաններին և արելյան չէ, քանի որ $AB = iE \neq BA = -iE$: Սա հայտնի, այսպես կոչված, «քվարտերնիոնների» խումբն է:

Այժմ ֆիքսենք a և b փառերը և դիտարկենք $\{a, b\}^*$ բազմությունը, որը a և b փառերից կազմված բոլոր վերջավոր բառերի բազմությունն է (այդ բազմության մեջ է մտնում նաև դափարկ բառը, որը փարր չի պարունակում և ունի զրոյական երկարություն): $\{a, b\}^*$ -ի վրա սահմանենք բազմապարկման գործողությունը հետևյալ կերպ. եթե α և $\beta \in \{a, b\}^*$, ապա α -ի և β -ի արտադրյալը դա $\alpha\beta$ բառն է, որը ստացվում է α և β բառերի կցագրումով: Պարզ է, որ այս գործողությունն ասոցիատիվ է՝ $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma$: Դափարկ բառը կնշանակենք Λ -ով: Ակնհայտ է, որ $\alpha\Lambda = \Lambda\alpha = \alpha$ կամայական α բառի համար և դափարկ բառը խաղում է խմբի միավոր փարրի դերը:

Դիցուք a և b փառերը բավարարում են (1.20) պայմաններին, այսինքն

$aaaa = a^4 = \Lambda$, $bb = b^2 = \Lambda$, $ba = aaab = a^3b$: Դա նշանակում է որ կամայական բառում a^4 -ը կարելի է փոխարինել դափարկ բառով և հակառակը՝ դափարկի փոխը (այսինքն բառի կամայական փոխում) գրել a^4 կամ b^2 : Նաև կամայական բառում ba հափվածը կարելի է փոխարինել a^3b -ով և հակառակը: Քանի որ $aa^3 = a^3a = \Lambda$ և $bb = \Lambda$, ապա a և b բառերը, և ուրեմն բոլոր բառերը $\{a, b\}^*$ -ից, ունեն հակադարձ ըստ բազմապարկման՝ a -ի հակադարձը a^3 -ն է, իսկ b -ի հակադարձը հենց b -ն է: Այսպիսով $\{a, b\}^*$ բազմությունը կազմում է խումբ ըստ բառերի կցագրման գործողության եթե a և b փառերը բավարարում են (1.20) պայմաններին:

Այժմ դիփարկենք $\{a, b\}^*$ խմբի կամայական բառ: Պարզ է, որ կիրառելով $ba = a^3b$ պայմանը (այսինքն կամայական ba հափվածը փոխարինելով a^3b -ով) կարող ենք այդ փոխված բառը ձևափոխել այնպես, որ այն ունենա $a^n b^m$ փեսքը: $a^4 = \Lambda$ և $b^2 = \Lambda$ պայմաններից ստանում ենք, որ խմբի կամայական բառ կարող է ներկայացվել $a^n b^m$ փեսքով, որտեղ $n = 0, 1, 2, 3$ և $m = 0, 1$: Այսպիսով ստանում ենք 8 փարբեր բառ՝ $\{\Lambda, a, aa, aaa, b, ab, aab, aaab\} = \langle a \rangle \cup \langle a \rangle b$:

Նման եղանակով կարող ենք կառուցել մեկ այլ խումբ, որը բավարարում է (1.21) պայմաններին: Բոլոր բառերը կներկայացվեն $a^n b^m$ փեսքով, որտեղ $n = 0, 1, 2, 3$ և $m = 0, 1, 2, 3$ քանի որ $b^4 = \Lambda$: Սակայն $b^2 = a^2$ և $a^n b^m$ բառում b^2 -ին փոխարինելով a^2 -ով՝ կստանանք $a^n b^m$ փեսքի բառ, որում $n = 0, 1, 2, 3$ և $m = 0, 1$: Ուստի կրկին խումբի կարգը 8 է և

$$\{\Lambda, a, aa, aaa, b, ab, aab, aaab\} = \langle a \rangle \cup \langle a \rangle b :$$

Խմբի նկարագրման բառերի և որոշիչ առնչությունների ((1.20) և (1.21) պայմանների) միջոցով այս վերջին եղանակը կիրառելի է նաև ընդհանուր դեպքում կամայական խմբի համար: Փաստորեն դա խմբի փրման մի եղանակ է, որն ի փարբերություն «ուժեղ» ծնիչների բազմության ալգորիթմական եղանակի կարելի է համարել խմբի «անալիտիկ» նկարագրման եղանակ:

Դիցուք S -ն որևէ բազմություն է, որի փարբերը դիփարկում ենք որպես ֆորմալ փառեր (նիշեր): Ամեն մի a փառի համար սահմանում ենք մի նոր նիշ՝ a^{-1} , որը կանվանենք a -ի հակադարձ: Նշանակենք S^* -ով բոլոր վերջավոր երկարության բառերը, որոնք կազմված են S -ի փարբերից կամ էլ S -ի փարբերի հակադարձներից, այսինքն բոլոր $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k}$ փեսքի բառերը, որտեղ $k \geq 0$

և $x_i \in S$, $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$, $i = 1, 2, \dots, k$: Զրոյական երկարության բառը $k = 0$ կոչվում է դափարկ բառ և նշանակվում է Λ -ով: Երկու բառ S^* -ից համարվում են համարժեք և չեն փարբերվում իրարից, եթե մեկը մյուսից կարելի է սրանալ aa^{-1} կամ $a^{-1}a$ փեսքի ($a \in S$) ենթաբառերը Λ -ով փոխարինելով կամ էլ հակառակը՝ մի բառի հարևան փառերի միջև aa^{-1} կամ $a^{-1}a$ փեսքի ենթաբառեր ավելացնելով: α և β բառերի համարժեքության փաստը կվավերացնենք՝ գրելով $\alpha \approx \beta$: Այլ կերպ ասած, կամայական $a \in S$ համար փեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

$$aa^{-1} = a^{-1}a = \Lambda : \quad (1.22)$$

S^* բազմությունը փրոհվում է չհափվող դասերի՝ միևնույն դասի բառերը համարժեք են, իսկ փարբեր դասերինը համարժեք չեն: Իրոք, ամեն մի բառ պարկանում է ինչ որ մի դասի: Եթե $\alpha \approx \beta$, ապա $\beta \approx \alpha$: Եթե $\alpha, \beta, \gamma \in S^*$, ապա $\alpha \approx \beta$, $\beta \approx \gamma \Rightarrow \alpha \approx \gamma$: Այժմ, եթե երկու դաս ունեն ընդհանուր բառ, ապա այդ երկու դասերի կամայական բառեր իրար համարժեք են: $a \in S^*$ բառի համարժեքության դասը կնշանակենք $[\alpha]$ -ով:

Նշանակենք $F(S)$ -ով S^* բազմության համարժեքության դասերի բազմությունը: $F(S)$ -ի վրա սահմանենք բազմապարկման գործողություն՝ $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$: Ակնհայտ է, որ այսպիսի սահմանումը կոռեկտ է, եթե $\alpha_1 \in [\alpha]$ և $\beta_1 \in [\beta]$, ապա $[\alpha_1\beta_1] = [\alpha\beta]$: Դյուրին ստուգվում է, որ $F(S)$ -ը խումբ է: Միավոր փարբը Λ -ն է, իսկ $[x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k}]$ -ի հակադարձը $[x_k^{-\varepsilon_k} \dots x_2^{-\varepsilon_2} x_1^{-\varepsilon_1}]$ -ն է:

Սահմանում. $F(S)$ խումբը կոչվում է **ազափ** խումբ S բազմության նկատմամբ:

Փաստորեն ազափ խումբը S բազմությամբ ծնված այն խումբն է, որի փարբերի միջև չկա ոչ մի առնչություն բացի (1.22) փեսքի փրիվիալ առնչություններից: Այդ իմաստով $F(S)$ -ն «ազափ» է:

Դիցուք փրված են S ճնիչների բազմությունը և S -ի փարբերի միջև որոշիչ առնչությունների մի բազմություն: Կամայական առնչություն կարելի է գրել այնպես, որ այն ունենա $\alpha = e$ փեսքը: Բոլոր այդ առնչություններից սրանանք առնչություններ՝ $F(S)$ ազափ խմբում վերցնելով $[\alpha] = [\Lambda]$ առնչությունները: Այդ առնչությունների բազմությունը կնշանակենք T -ով: Ազափ խմբի երկու դաս (փարբ) կհամարենք հավասար, եթե մի դասի որևէ բառ սրացվում է մյուս դասի

որևէ բառից T բազմության առնչությունների հաջորդաբար կիրառմամբ: Այլ կերպ ասած՝ S^* -ի երկու բառ համարժեք են (միևնույն դասից են), եթե մեկը մյուսից սրացվում է (1.22) տեսքի փոփոխվալ և T բազմության առնչությունների վերջավոր անգամ հաջորդաբար կիրառմամբ:

Նշանակենք R -ով T բազմության առնչությունների ձախ մասերից բաղկացած բազմությունը: Պարզ է, որ $R \subseteq F(S)$: Ակնհայտ է, որ բացի T բազմության առնչություններից ազապ խմբում տեղի ունեն նաև հետևյալ առնչությունները՝ $[\beta][\alpha][\beta^{-1}] = [\Lambda]$, որտեղ $[\beta] \in F(S)$ և $[\alpha] \in R$: Ավելացնելով R -ին բոլոր $[\beta][\alpha][\beta^{-1}]$ տեսքի փոփոխությունները՝ կստանանք R -ը պարունակող ամենափոքր նորմալ ենթախումբը $F(S)$ ազապ խմբում, որը կնշանակենք $N(R)$ -ով: Դիտարկենք $F(S)/N(R)$ ֆակտոր-խումբը: Երկու փոփոխություն $[\alpha]$ և $[\beta]$ կպարկանեն միևնույն հարակից դասին ըստ $N(R)$ -ի միայն և միայն, եթե $[\beta^{-1}][\alpha] = [\beta^{-1}\alpha] \in N(R)$, իսկ դա նշանակում է, որ $[\alpha] = [\beta\gamma] = [\beta][\gamma]$, $[\gamma] \in N(R)$: Ուրեմն $[\beta]$ -ն սրացվում է $[\alpha]$ -ից $N(R)$ -ի $[\gamma] = [\Lambda]$ առնչության կիրառմամբ: Դիցուք այժմ $\alpha = \alpha_1\gamma\alpha_2$ և $[\gamma] \in N(R)$: Քանի որ $N(R)$ -ը նորմալ է $F(S)$ -ում, ապա գոյություն ունի $[\gamma_1] \in N(R)$, որ

$$[\gamma\alpha_2] = [\gamma][\alpha_2] = [\alpha_2][\gamma_1] = [\alpha_2\gamma_1] :$$

Ուստի

$$[\alpha] = [\alpha_1\gamma\alpha_2] = [\alpha_1][\gamma\alpha_2] = [\alpha_1][\alpha_2\gamma_1] = [\alpha_1\alpha_2][\gamma_1] = [\alpha_1\alpha_2]$$

և $[(\alpha_1\alpha_2)^{-1}][\alpha] \in N(R)$: Սրացանք, որ $[\alpha]$ -ն և $[\alpha_1\alpha_2]$ -ը միևնույն հարակից դասից են ըստ $N(R)$ -ի և $[\gamma] = [\Lambda]$, $[\gamma] \in N(R)$, առնչությունների կիրառումը փրկած հարակից դասի փոփոխությունն չի բերում արդյունքն այդ դասից:

Այսպիսով ապացուցեցինք, որ $[\alpha]$ -ից $[\beta]$ -ն կարելի է ստանալ T բազմության առնչությունների հաջորդաբար կիրառմամբ միայն և միայն այն դեպքում, երբ $[\alpha]$ -ն ու $[\beta]$ -ն միևնույն հարակից դասից են ըստ $N(R)$ -ի: Ուստի S ծնիչների բազմությամբ և փրկած առնչություններով որոշվում է մի խումբ, որն իզոմորֆ է $F(S)/N(R)$ ֆակտոր-խմբին: Այս դեպքում ասում են, որ խումբը փրկած է ծնիչներով և որոշիչ առնչություններով: Վերը նկարագրված 8 կարգի ոչ արելյան խմբերը փրկած են $S = \{a, b\}$ ծնիչներով և (1.20) կամ (1.21) որոշիչ առնչություններով:

1.18. Վերջավոր ծնված արելյան խմբեր

Դիցուք G -ն արելյան խումբ է, որն ունի ծնիչների վերջավոր բազմություն: Այդպիսի խմբերը կանվանենք **վերջավոր ծնված** արելյան խմբեր: Դրանց պարզագույն օրինակներն են ցիկլիկ խմբերը, որոնք ծնվում են մեկ ծնիչով: Պարզվում է, որ կամայական վերջավոր ծնված արելյան խումբ կարելի է ներկայացնել ցիկլիկ խմբերի ուղիղ արտադրյալի տեսքով և դրանով իսկ փաստորեն նկարագրել բոլոր վերջավոր ծնված արելյան խմբերը:

Այս մասում կօգտվենք արելյան խմբերի ադիտիվ ներկայացումից, այսինքն խմբի գործողությունը կնշանակենք գումարման $+$ նշանով: Բոլոր խմբերը այս մասում արելյան են: $G_1 \times \dots \times G_n$ արելյան խմբերի ուղիղ արտադրյալը կնշանակենք $G_1 \oplus \dots \oplus G_n$ նշանով (այս արտադրյալը նույնպես անվանում են ուղիղ գումար):

Այն փաստը, որ G խումբը վերջավոր ծնված է, նշանակում է, որ կգտնվեն վերջավոր քանակությամբ տարրեր G -ից՝ g_1, \dots, g_n , որ

$$G = \{ \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n \} :$$

Նախ և առաջ կուսումնասիրենք

$$\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n \text{ անգամ}} = \{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n \}$$

խումբը:

Լեմմա 1.5. \mathbb{Z}^n խմբի կամայական ենթախումբ վերջավոր ծնված է և ունի ծնիչների բազմություն, որի հզորությունը $\leq n$:

Ապացույց. Ապացույցը կկատարենք ինդուկցիայով ըստ n -ի: Ակնհայտ է, որ $n = 1$ դեպքում \mathbb{Z} -ի կամայական ենթախումբը կազմված է որոշակի ամբողջ թվի բոլոր պարիկներից, ուստի վերջավոր ծնված է մեկ ծնիչով: Դիցուք լեմմի պնդումը ճիշտ է \mathbb{Z}^{n-1} համար: Ապացուցենք այն \mathbb{Z}^n համար: Դիցուք $H \leq \mathbb{Z}^n$: Սահմանենք բազմությունը հետևյալ կերպ՝ $F = \{ \mu \mid \exists (\lambda_2, \dots, \lambda_n) (\mu, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in H \}$: Ակնհայտ է, որ $F \leq \mathbb{Z}$: Եթե $F = \{0\}$, ապա հեռացնելով H -ի բոլոր վեկտորների առաջին կոորդինատները՝ կստանանք ենթախումբ \mathbb{Z}^{n-1} -ում և համաձայն ինդուկտիվ ենթադրության այդ ենթախմբի

համար կգտնվի ծնիչների բազմություն, որի հզորությունը չի գերազանցում $n - 1$ -ը: Այդ ծնիչների բազմության բոլոր վեկտորներին կավելացնենք առաջին գրոյական կոորդինատը և կստանանք ծնիչների բազմություն H -ի համար:

Դիտարկենք $F \neq \{0\}$ դեպքը: Նշանակենք μ_1 -ով ենթախմբի փոքրագույն դրական փարբը: Ֆիքսենք H ենթախմբում որևէ փարբ, որի առաջին կոորդինատը μ_1 է՝ $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$: Քանի որ $F \leq \mathbb{Z}$, ապա F -ը μ_1 -ին պարփակ բոլոր ամբողջ թվերի բազմությունն է:

Դիցուք $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in H$: Պարզ է, որ $\lambda_1 \in F$ և $\lambda_1 = \varepsilon\mu_1$ միարժեքորեն որոշված ամբողջ ε -ի համար: Դյուրին է փեսնել, որ

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \varepsilon(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + (0, \lambda_2 - \varepsilon\mu_2, \dots, \lambda_n - \varepsilon\mu_n) \quad (1.23)$$

և յուրաքանչյուր $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in H$ համապատասխանում է որոշակի $(\lambda_2 - \varepsilon\mu_2, \dots, \lambda_n - \varepsilon\mu_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$: Նշանակենք բոլոր այդպիսի $(\lambda_2 - \varepsilon\mu_2, \dots, \lambda_n - \varepsilon\mu_n)$ վեկտորների բազմությունը \acute{H} -ով և ապացուցենք, որ $\acute{H} \leq \mathbb{Z}^{n-1}$: Իրոք, դիցուք $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ և $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \acute{H}$: Նամաձայն (1.23)-ի ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) &= \varepsilon_\alpha(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + (0, \alpha_2 - \varepsilon_\alpha\mu_2, \dots, \alpha_n - \varepsilon_\alpha\mu_n) \quad \text{և} \\ (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) &= \varepsilon_\beta(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + (0, \beta_2 - \varepsilon_\beta\mu_2, \dots, \beta_n - \varepsilon_\beta\mu_n) : \end{aligned}$$

Պարզ է, որ $(0, \alpha_2 - \varepsilon_\alpha\mu_2, \dots, \alpha_n - \varepsilon_\alpha\mu_n) \in \acute{H}$ և $(0, \beta_2 - \varepsilon_\beta\mu_2, \dots, \beta_n - \varepsilon_\beta\mu_n) \in \acute{H}$: Ակնհայտ է նաև, որ $(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_n - \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) - (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in H$: Ունենք, որ $\alpha_1 - \beta_1 = (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\mu_1$ և $(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_n - \beta_n) = (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + (0, (\alpha_2 - \beta_2) - (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\mu_2, \dots, (\alpha_n - \beta_n) - (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\mu_n) \in \acute{H}$:

Ուստի $(\alpha_2 - \varepsilon_\alpha\mu_2, \dots, \alpha_n - \varepsilon_\alpha\mu_n) - (\beta_2 - \varepsilon_\beta\mu_2, \dots, \beta_n - \varepsilon_\beta\mu_n) = ((\alpha_2 - \beta_2) - (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\mu_2, \dots, (\alpha_n - \beta_n) - (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\mu_n) \in \acute{H}$ և $\acute{H} \leq \mathbb{Z}^{n-1}$:

Նամաձայն ինդուկտիվ ենթադրության՝ \acute{H} -ը վերջավոր ծնված է և ունի ծնիչների բազմություն, որ բաղկացած է ոչ ավելի, քան $n - 1$ հար ծնիչներից: \acute{H} -ի ծնիչների այդ բազմության վեկտորներին ավելացնենք մեկ նոր գրոյական առաջին կոորդինատը: Այսինքն $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}) \in \acute{H}$ ծնիչից ստացվում է $(0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}) \in H$ վեկտորը: Այս գրոյական կոորդինատներով ընդլայնված ծնիչների բազմությունը կանվանենք \acute{H} -ի ընդլայնված ծնիչների բազմություն: Այժմ ակնհայտ է, որ (1.23)-ի $(0, \lambda_2 - \varepsilon\mu_2, \dots, \lambda_n - \varepsilon\mu_n)$

վեկտորը կսրացվի \hat{H} -ի ընդլայնված ծնիչների միջոցով, ուստի կամայական $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in H$ կսրացվի $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ և \hat{H} -ի ընդլայնված ծնիչների միջոցով, որոնք կկազմեն H -ի համար ծնիչների վերջավոր բազմություն: Լեմմն ապացուցված է:

Դիցուք $H \leq \mathbb{Z}^n$ և H -ի ծնիչներն են՝ $\Lambda_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1n}), \dots, \Lambda_m = (\lambda_{m1}, \dots, \lambda_{mn})$: Կազմենք հետևյալ մատրիցը

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} :$$

Այս մատրիցի ստորերը կազմում են H -ի ծնիչների բազմություն: Նամաձայն Լեմմ 1.5-ի՝ կարող ենք համարել, որ $m \leq n$: Դիտարկենք Λ մատրիցի ստորերի նկատմամբ հետևյալ գործողությունները՝

1. երկու ստորերի փոխարկություն;
2. ստորի բազմապատկում -1 -ով;
3. մեկ ստորի գումարումը մյուսին:

Այս գործողությունների արդյունքում սրացվում են H -ի ծնիչների նոր բազմություններ: Առաջին երկու գործողությունների դեպքում դա ակնհայտ է: Դիցուք

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} + \lambda_{21} & \lambda_{12} + \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{1n} + \lambda_{2n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} :$$

Եթե H -ի որևէ փարր ներկայացվում է $\varepsilon_1 \Lambda_1 + \varepsilon_2 \Lambda_2 + \dots + \varepsilon_m \Lambda_m$ փեսքով, ապա $\hat{\Lambda}$ համակարգով այն կներկայացվի $\varepsilon_1 \hat{\Lambda}_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \hat{\Lambda}_2 + \varepsilon_3 \hat{\Lambda}_3 + \dots + \varepsilon_m \hat{\Lambda}_m$ փեսքով:

Դյուրին է փեսնել, որ եթե \mathbb{Z}^n -ի բոլոր փարրերում միաժամանակ փեղերով փոխենք i -րդ և j -րդ կոորդինատները, ապա կսրանանք \mathbb{Z}^n -ի ավտոմորֆիզմ, որի դեպքում H -ը կանցնի իրեն իզոմորֆ մեկ այլ խմբի մեջ: \mathbb{Z}^n -ի ավտոմորֆիզմ է սրացվում նաև, եթե միաժամանակ \mathbb{Z}^n -ի բոլոր փարրերում բազմապատկենք

i -րդ կոորդինատները -1 -ով: Մեկ այլ ավտոմորֆիզմ կստանանք, եթե \mathbb{Z}^n -ի բոլոր փարբերում միաժամանակ i -րդ կոորդինատները գումարենք j -րդ կոորդինատներին: Բոլոր դեպքերում H -ը կանցնի իրեն իզոմորֆ մեկ այլ խմբի մեջ: Ուրեմն, եթե մափրիցի սյուներին կիրառենք հետևյալ գործողությունները,

4. երկու սյուների փոխարկություն,
5. սյան բազմապատկում -1 -ով,
6. մեկ սյան գումարումը մյուսին,

ապա ձևափոխված Λ մափրիցի փողերը կկազմեն ծնիչների համակարգ H -ին իզոմորֆ խմբի համար:

Պարզ է, որ թե փողերի և թե սյուների դեպքում մեկ փողը/սյունը -1 -ով բազմապատկելով և հետո մյուս փողին/սյանը գումարելով իրականացվում է մեկ փողից/սյունից մեկ այլ փող/սյուն հանելու գործողությունը:

Վերը նշված փողերի 1.-3. և սյուների 4.-6. գործողությունները կանվանենք փողերի և սյուների նկատմամբ **փարբական գործողություններ**:

Այսպիսով, Λ մափրիցին կիրառելով փողերի և/կամ սյուների փարբական գործողությունները՝ կստանանք H խմբին իզոմորֆ խմբի ծնիչների բազմություն: Տեղի ունի հետևյալ կարևոր փաստը:

Թեորեմ 1.6 (Մափրիցի Սմիթի նորմալ փեսքի մասին). *Կամայական $n \times n$ -չափանի մատրից, որի փարբերն ամբողջ թվեր են, փողերի և սյուների փարբարկան գործողություններով կարելի է բերել*

$$\begin{pmatrix} n_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & n_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

անկյունագծային փեսքի, որտեղ $n_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, ընդ որում $n_{i+1} - \nu$ բաժանվում է առանց մնացորդի n_i -ի վրա, $i = 1, 2, \dots, r - 1$:

Ապացույց. Դիցուք փրված է A մատրիցը: Ջրոյական A մատրիցի համար $r = 0$ և թեորեմի պնդումն ակնհայտորեն ճիշտ է, այդ պատճառով կդիտարկենք $A \neq 0$ դեպքը:

Այժմ կնկարագրենք մի ալգորիթմ, որը բերում է փրված մատրիցը Սմիթի նորմալ տեսքին: Մատրիցի առաջին սյունում և առաջին սյունում գտնվող փարրը կանվանենք հենքային փարր և կնշանակենք այն α -ով: Սկզբից գտնենք մատրիցի նվազագույն դրական բացարձակ արժեքով փարրը և սյունի ու սյունների տեղափոխություններով և, եթե անհրաժեշտ է, -1 -ով բազմապատկելով առաջին սյունը, դարձնենք այդ փարրի բացարձակ արժեքը հենքային: Վերցնենք այժմ որևէ ոչ հենքային ոչ զրոյական փարր առաջին սյունից/սյունից: Դիցուք դա β -ն է: Պարզ է, որ $|\beta| \geq \alpha$: Բաժանենք β -ն հենքային փարրի վրա՝ $\beta = \alpha\gamma + \delta$: Ապա $|\gamma|$ անգամ գումարենք (հանենք) առաջին սյունը/սյունը β -ն պարունակող սյունին (սյունից)/սյանը (սյունից): Արդյունքում β -ի տեղում կստանանք δ -ն: Եթե $\delta > 0$, ապա $\delta < \alpha$ և սյունների ու սյունների տեղափոխություններով դարձնենք δ -ն հենքային փարր: Նշված եղանակով վարվենք մատրիցի բոլոր ոչ հենքային փարրերի հետ, որոնք գտնվում են առաջին սյունում/սյունում: Քանի որ հենքային փարրերի բացարձակ արժեքները խիստ նվազում են, ապա այս պրոցեսը կավարտվի վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո և արդյունքում առաջին սյունի/սյան բոլոր փարրերը բացի հենքայինից կդառնան զրոյական: Այսինքն մատրիցը կբերվի հետևյալ տեսքի՝

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Դիցուք B մատրիցում գոյություն ունի փարր, որ չի բաժանվում առանց մնացորդի հենքայինի վրա: Նշանակենք այդ փարրը β -ով: Ենթադրենք, որ β -ն գտնվում է A մատրիցի i -րդ սյունում և j -րդ սյունում $i, j > 1$: Բաժանենք β -ն հենքային փարրի վրա՝ $\beta = \alpha\gamma + \delta$, որտեղ $0 < \delta < \alpha$: Ապա $|\gamma|$ անգամ գումարենք առաջին սյունը β -ն պարունակող j -րդ սյանը: Արդյունքում A մատրիցի առաջին սյունի j -րդ տեղում կստանանք $\pm\alpha\gamma$ -ն: Այժմ i -րդ սյունում առաջինին գումարելով կամ առաջինից հանելով՝ դարձնենք առաջին սյունի j -րդ փարրը հավասար $\pm\delta$: Առաջին սյունում ստանում ենք մի փարր, որի բացարձակ

արժեքը փոքր է հենքային փարրի բացարձակ արժեքից: Տողերի ու սյունների փեղափոխություններով և, եթե անհրաժեշտ է, -1 -ով բազմապատկելով առաջին սյունը, դարձնենք δ փարրը հենքային և կրկնենք վերը շարադրված առաջին փողի և առաջին սյան ոչ հենքային փարրերի գրոյացման պրոցեսը: Քանի որ հենքային փարրերի բացարձակ արժեքները խիստ նվազում են, ապա այս պրոցեսը կավարտվի վերջավոր քանակությամբ քայլերից հետո և B մատրիցի յուրաքանչյուր փարր կբաժանվի հենքայինի վրա առանց մնացորդի: Մնում է ամբողջ պրոցեսը կիրառել B մատրիցիին: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 1.7. *Մատրիցի Սմիթի նորմալ փեսքը որոշված է միարժեքորեն:*

Ապացույց. Դյուրին է նկատել, որ փարրական գործողությունները չեն փոխում մատրիցի բոլոր k -չափանի միներների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարները, $k \leq n$: Նաշվենք k -չափանի միներների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարները Սմիթի նորմալ փեսքի մատրիցի համար

$$\begin{pmatrix} n_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & n_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} :$$

Ակնհայտ է, որ 1 -չափանի միներների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը n_1 -ն է: Դյուրին է համոզվել, որ k -չափանի միներների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը դա $n_1 n_2 \dots n_k$ արտադրյալն է, $k \leq r$: Երբ փեղի ունի $r < k \leq n$ պայմանը k -չափանի միներները գրոյական են: Ուստի $n_1, n_1 n_2, \dots, n_1 n_2 \dots n_r$ արտադրյալները և դրանց հարաբերությունները՝ $n_1, \frac{n_1 n_2}{n_1} = n_2, \frac{n_1 n_2 n_3}{n_1 n_2} = n_3, \dots, \frac{n_1 n_2 \dots n_r}{n_1 n_2 \dots n_{r-1}} = n_r$ որոշվում են միարժեքորեն: Թեորեմն ապացուցված է:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ մատրիցի Սմիթի նորմալ փեսքն է՝ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$:

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ մապրիցի Սմիթի նորմալ տեսքն է՝ } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

Այժմ կիրառենք Սմիթի նորմալ տեսքի մասին թեորեմը \mathbb{Z}^n -ի բոլոր ենթախմբերի իզոմորֆիզմի ճշտությամբ նկարագրման համար: Դիցուք $H \leq \mathbb{Z}^n$: Վերցնենք H -ի որևէ ծնիչների բազմություն, որ պարունակում է m ծնիչ ($m \leq n$ համաձայն Լեմմա 1.5-ի) և կազմենք ծնիչների մապրիցը, լրացնելով այն $n - m$ հար զրոյական տողերով՝

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \cdots & \lambda_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Պարզ է, որ սա նույնպես H -ի ծնիչների բազմություն է: Բերենք Λ մապրիցը Սմիթի նորմալ տեսքի և կստանանք H -ին իզոմորֆ խմբի ծնիչների բազմության $n \times n$ մապրից՝

$$\begin{pmatrix} n_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & n_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Դյուրին է տեսնել, որ այս ծնիչներով ծնվում է

$$\left\{ \left(\gamma_1 n_1, \gamma_2 n_2, \dots, \gamma_r n_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r} \right) \mid \gamma_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \dots, r \right\}$$

խումբը, որն իր հերթին իզոմորֆ է հետևյալ ուղիղ գումարին՝

$$n_1 \mathbb{Z} \oplus n_2 \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus n_r \mathbb{Z} \oplus \underbrace{\{0\} \oplus \cdots \oplus \{0\}}_{n-r},$$

որպես $k\mathbb{Z} = \{kx \mid x \in \mathbb{Z}\}$: Այսպիսով ապացուցեցինք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1.8. *Դիցուք $H \leq \mathbb{Z}^n$: H -ն իզոմորֆ է*

$$n_1\mathbb{Z} \oplus n_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus n_r\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}}_{n-r},$$

ուրիշ գումարին միարժեքորեն որոշված n_1, n_2, \dots, n_r այնպիսի դրական ամբողջ թվերի համար, որ n_{i+1} -ը բաժանվում է առանց մնացորդի n_i -ի վրա, $i = 1, 2, \dots, r - 1$:

Այստեղից էլ ստացվում է վերջավոր ծնված աբելյան խմբերի նկարագրությունը՝

Թեորեմ 1.9. *Դիցուք G -ն վերջավոր ծնված աբելյան խումբ է և ծնված է n հասարակ ծնիչ պարունակող ծնիչների բազմությամբ: Գոյություն ունեն միարժեքորեն որոշված այնպիսի դրական ամբողջ n_1, n_2, \dots, n_r թվեր, որ n_{i+1} -ը բաժանվում է առանց մնացորդի n_i -ի վրա, $i = 1, 2, \dots, r - 1$, որ G -ն իզոմորֆ է*

$$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_r} \oplus \mathbb{Z}^{n-r}$$

ուրիշ գումարին, որտեղ $\mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$:

Ապացույց. Դիցուք G -ի ծնիչներն են՝ g_1, \dots, g_n փարբերը, ուստի

$$G = \{\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n\} :$$

Դյուրին է փեսնել, որ $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n$ արտապարկերումը հոմոմորֆիզմ է \mathbb{Z}^n -ից G -ի վրա: Նամաձայն իզոմորֆիզմի մասին թեորեմի՝ G -ն իզոմորֆ է \mathbb{Z}^n -ի ըստ նշված հոմոմորֆիզմի միջուկի ֆակտոր-խմբին: Բայց միջուկը լինելով \mathbb{Z}^n -ի ենթախումբ ըստ Թեորեմ 1.8-ի իզոմորֆ է

$$n_1\mathbb{Z} \oplus n_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus n_r\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}}_{n-r}$$

ուրիշ գումարին: Դյուրին է փեսնել, որ

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n / n_1\mathbb{Z} \oplus n_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus n_r\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}}_{n-r} = \\ \mathbb{Z} / n_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / n_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} / n_r\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-r} : \end{aligned}$$

Իսկապես՝ $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ և (μ_1, \dots, μ_n) փարբերը \mathbb{Z}^n -ից կպարկանեն միևնույն հարակից դասին ըստ

$$n_1\mathbb{Z} \oplus n_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus n_r\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}}_{n-r}$$

խմբի, միայն և միայն, եթե դրանց փարբերությունը պարկանի

$$n_1\mathbb{Z} \oplus n_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus n_r\mathbb{Z} \oplus \underbrace{\{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}}_{n-r}$$

խմբին, իսկ դա համարժեք է հետևյալին՝

1. $\lambda_i \equiv \mu_i \pmod{n_i}, i = 1, 2, \dots, r;$
2. $\lambda_i = \mu_i, i = r + 1, \dots, n:$

Թեորեմն ապացուցված է:

Նկատենք, որ վերջավոր ծնված արելյան խումբը կլինի վերջավոր, միայն երբ $r = n$:

Այժմ սրանանք վերջավոր արելյան խմբերի ուղիղ գումարի ավելի «նուրբ» վերլուծություն:

Դիցուք G -ն վերջավոր արելյան խումբ է և իզոմորֆ է $\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_r}$ ուղիղ գումարին: Վերցնենք n_r -ի վերլուծությունը պարզ արտադրիչների՝ $n_r = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$: Քանի որ n_{i+1} -ը բաժանվում է առանց մնացորդի n_i -ի վրա, $i = 1, 2, \dots, r - 1$, ապա կարող ենք գրել՝

$$\begin{aligned} n_r &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \\ n_{r-1} &= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}, \\ &\vdots \\ n_1 &= p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} \dots p_k^{\varepsilon_k}, \end{aligned}$$

որպեսզի $\alpha_i \geq \beta_i \geq \dots \geq \varepsilon_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$: Ինչպես գիպենք (տեսք ուղիղ

արտադրյալներին վերաբերվող մասի օրինակները)

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_{n_r} &= \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}}, \\ \mathbb{Z}_{n_{r-1}} &= \mathbb{Z}_{p_1^{\beta_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{\beta_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\beta_k}}, \\ &\vdots \\ \mathbb{Z}_{n_1} &= \mathbb{Z}_{p_1^{\varepsilon_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{\varepsilon_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\varepsilon_k}}\end{aligned}$$

և G -ն իզոմորֆ է

$$\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{\beta_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\beta_k}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{\varepsilon_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\varepsilon_k}}$$

ուղիղ գումարին: Նկատենք, որ ավելի «նուրբ» վերլուծություն ցիկլիկ խմբերի ուղիղ գումար սրանալու համար հնարավոր չէ, քանի որ, ինչպես գիտենք (տեսքը ուղիղ արտադրյալներին վերաբերվող մասի օրինակները), ցիկլիկ խումբը, որի կարգը պարզ թվի աստիճան է, հնարավոր չէ ոչ փրիվիալ ձևով ներկայացնել ուղիղ գումարի տեսքով:

Թեորեմ 1.10. *Վերջավոր արելյան խումբն իզոմորֆ է ցիկլիկ խմբերի ուղիղ գումարին, ընդ որում ցիկլիկ խմբերի կարգերը պարզ թվերի աստիճաններ են: Ուղիղ գումարը որոշված է միարժեքորեն գումարելիների տեղափոխության ճշտությամբ:*

Ապացույց. Մնում է ապացուցել միակությունը: Բայց դա դառնում է ակնհայտ, եթե նկատենք, որ

$$\mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\alpha_k}} \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{\beta_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\beta_k}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{\varepsilon_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{\varepsilon_k}}$$

ուղիղ գումարով n_1, \dots, n_r թվերը որոշվում են միարժեքորեն: Թեորեմն ապացուցված է:

ՕՐԻՆԱԿ:

Նամաձայն Թեորեմ 1.10-ի՝ ստորև բերված են բոլոր իրար ոչ իզոմորֆ $1800 =$

$2^3 3^2 5^2$ կարգի արելյան խմբերը.

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25}$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{25}$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25}$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{25}$$

$$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25}$$

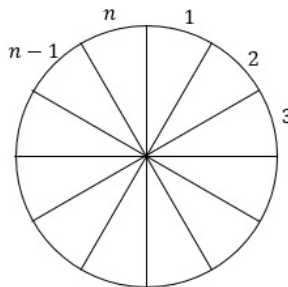
$$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{25}$$

1.19. Խմբի գործողությունը բազմության վրա

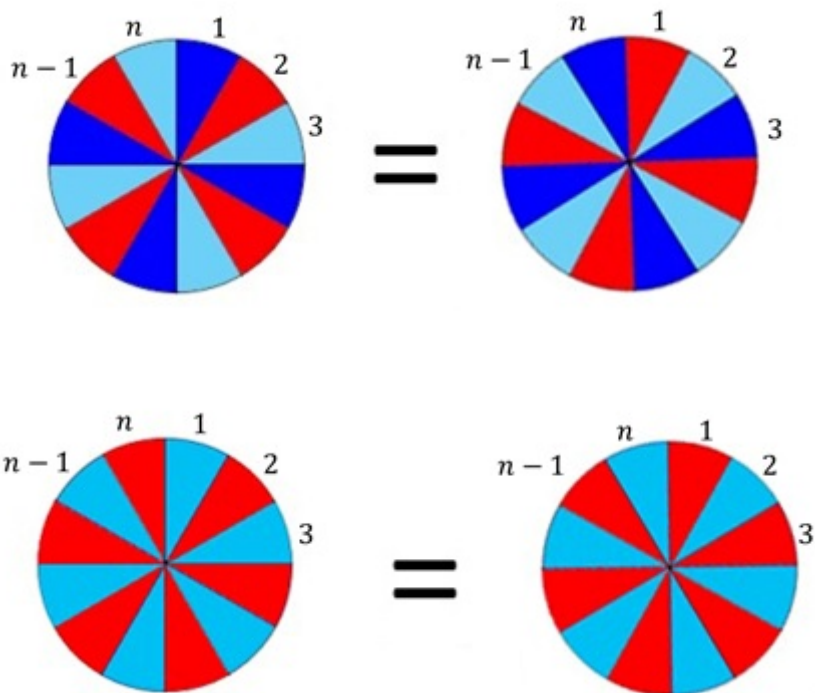
Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը:

Դիցուք տրված է մի անիվ, որը բաժանված է n հասարակասար սեկտորների, որոնք պայամանականորեն համարակալված են $1, 2, \dots, n$ թվերով, ինչպես ցույց է տրված ստորև բերված նկարում.



Անիվը կարելի է պտտել կենտրոնի նկատմամբ: Պտույտի միավոր քայլը մեկ սեկտորի չափով է: Այսինքն մեկ քայլով առաջին սեկտորը գրավում է երկրորդի տեղը, երկրորդը՝ երրորդի և այլն, $n - 1$ -ը՝ n -ի տեղը, իսկ n -ը՝ առաջինի:

Տրված են նաև r փարբեր գույնի ներկեր: Յուրաքանչյուր սեկտոր ներկելով որևէ գույնով՝ ստանում ենք անիվի ներկում: Երկու ներկում համարում ենք նույնը, եթե մեկը մյուսից ստացվում է անիվի պտույտով: Օրինակ, ստորև բերված ներկումները նույնն են՝



Պահանջվում է հաշվել փարբեր (իրարից պտույտով չստացվող) ներկումների քանակը:

Փորձենք խնդրին փալ մաթեմատիկական ձևակերպում: Նշանակենք՝ $N = \{1, 2, \dots, n\}$ և $R = \{1, 2, \dots, r\}$:

Ամեն մի ներկման եղանակ արվում է $f : N \rightarrow R$ ֆունկցիայի միջոցով: Այսպիսի ֆունկցիայով որոշված ներկման եղանակով i -րդ սեկտորը ներկվում է $f(i)$ գույնով: Բոլոր $f : N \rightarrow R$ ֆունկցիաների բազմությունն ընդունված է նշանակել R^N -ով:

Անիվի պտույտները կարելի է նկարագրել

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

փեղադրության ասփիճաններով: Դյուրին է փեսնել, որ π -ն նկարագրում է անիվի միավոր պտույտը, քանի որ i -րդ սեկտորը գրավում է $i + 1$ -ի փեղը $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ համար, իսկ n -րդ սեկտորը գրավում է առաջինի փեղը: Պարզ է, որ π^k փեղադրությունը (π -ի k անգամ հաջորդաբար կիրառումը) համարժեք է k հապ միավոր պտույտներին: Այսինքն անիվի բոլոր պտույտները նկարագրվում են π -ով ծնված ցիկլիկ խմբով՝ $\langle \pi \rangle = \{e, \pi, \pi^2, \pi^3, \dots, \pi^{n-1}\}$ և $(\langle \pi \rangle : 1) = n$: Նաև π փեղադրության կարգը հավասար է n -ի, այսինքն π -ի ամենափոքր դրական ասփիճանը, որ հավասար է միավորի դա n -ն է (որովհետև n միավոր պտույտից հետո ամեն մի սեկտոր վերադառնում է իր սկզբնական փեղին):

Դիցուք ունենք երկու ներկման եղանակ՝ $f, g \in R^N$, և դրանք սրացվում են իրարից պտույտով, որը փրվում է π^k -ով: Այդ փաստը համարժեք է $f(i) = g(\pi^k(i))$, $i \in N$: Եթե օգտագործենք $g\pi^k$ նշանը π^k փեղադրության և g ֆունկցիայի հաջորդաբար կիրառման արդյունքում սրացվող ֆունկցիայի նշանակման համար, ապա f և g ներկումների իրարից պտույտով սրացվելու փաստը կարող ենք գրել նաև հետևյալ կերպ՝ $f = g\pi^k$: Վերջին պայմանը համարժեք է $f\pi^{n-k} = g$ պայմանին: Իսկապես, եթե $f(i) = g(\pi^k(i))$ բոլոր i -րի համար N -ից, ապա $\pi^k(i) = j$ ընդունում է մեկական անգամ բոլոր արժեքները N -ից և $\pi^{n-k}(j) = i$, ուստի $f(\pi^{n-k}(j)) = g(j)$ բոլոր $j \in N$: Այն փաստը, որ $f, g \in R^N$ ներկման եղանակներն իրարից պտույտով են սրացվում կնշանակենք $f \sim g$ նշանով: Ուրեմն՝

$$f \sim g \Leftrightarrow (\exists k)f = g\pi^k : \quad (1.24)$$

Տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները.

1. $f \sim f$;
2. $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$;
3. $f \sim g$ և $g \sim h \Rightarrow f \sim h$:

Իսկապես, (1.24)-ի աջ մասը կարելի է գրել նաև որպես $(\exists k)f\pi^{n-k} = g$, ուստի $g \sim f$ և 2. հատկությունը ստույգ է:

Եթե $f \sim g$ և $g \sim h$, ապա գոյություն ունեն k և m որ $f = g\pi^k$ և $g = h\pi^m$, որպեղից ստանում ենք $f = h\pi^m\pi^k = h\pi^{m+k} \Rightarrow f \sim h$ և 3. հատկությունը ստույգ է:

Այս երեք հատկություններից հեքևում է, որ R^N -ը փրոհված է համարժեքության դասերի՝ $f, g \in R^N$ միևնույն դասից են $\Leftrightarrow f \sim g$: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր $f \in R^N$ պարկանում է ինչ-որ դասի: Երկու դասեր կամ չեն հատվում կամ էլ համընկնում են: Իրոք, եթե f -ը պարկանում է A և B դասերին, ապա $g \in A \Rightarrow f \sim g$ և $h \in B \Rightarrow f \sim h$: Նամաձայն 2. և 3. հատկությունների $g \sim f$ և $f \sim h \Rightarrow g \sim h$, այսինքն A դասի ֆունկցիաները պարկանում են B դասին և հակառակը՝ B դասի ֆունկցիաները պարկանում են A դասին: Ուստի $A = B$:

Քանի որ միևնույն դասին պարկանող ֆունկցիաներով փրվող ներկումները համընկնում են, իսկ փարբեր դասերի ֆունկցիաներով փրվող ներկումները չեն համընկնում, ապա փարբեր ներկումների քանակը հավասար է փարբեր դասերի քանակին: Այսպիսով փարբեր ներկումների քանակի հաշվման խնդիրը հանգեցվեց ֆունկցիաների համարժեքության դասերի քանակի հաշվման խնդրին:

Այս և այլ նման խնդիրների լուծման համար հարմար է օգտագործել հեքևյալ գաղափարը:

Սահմանում. Դիցուք փրված են G խումբը և S բազմությունը: Ատում են, որ G խումբը **գործում է S բազմության վրա**, եթե սահմանված է մի $G \times S \rightarrow S$ արտապարկերում (ամեն (g, s) զույգին համապատասխանող փարբը S -ից նշանակվում է gs -ով), որ բավարարում է հեքևյալ պայմաններին.

1. $es = s$;
2. $g_1(g_2s) = (g_1g_2)s$:

Այս սահմանման բովանդակալից իմաստը հեքևյալն է: Խմբի փարբերը մեկնաբանվում են որպես S բազմության փարբերի «ձևափոխությունների» խումբ: Այսինքն խմբի g փարբը ազդելով S բազմության s փարբի վրա՝ «ձևափոխում» է այն $gs \in S$ փարբի: Սահմանման առաջին պայմանը նշանակում է, որ միավոր կամ նույնաբար «ձևափոխությունը» ազդելով փարբի վրա՝ այն չի փոխում: Երկու «ձևափոխությունների» հաջորդաբար կիրառումը համարժեք է նրանց արտադրյալով ստացվող մեկ «ձևափոխության» ազդեցությանը:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Դիցուք $G = S_n$ և $S = N = \{1, 2, \dots, n\}$: Ամեն մի α փեղադրությունը $i \in N$ թիվը փանում է $\alpha(i)$ թվի մեջ, այսինքն $\alpha i = \alpha(i)$: Ակնհայտ է, որ S_n -ը գործում է N բազմության վրա:

2. Դիցուք $G = S_n$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $R = \{1, 2, \dots, r\}$ և $S = R^N$: S_n -ի գործողությունը R^N -ի վրա սահմանում ենք հետևյալ կերպ՝ $\alpha \in S_n$, $f \in R^N$ համար $\alpha f = f \cdot \alpha$, այսինքն $(\alpha f)(x) = f(\alpha(x))$:

3. Խորանարդի գագաթների (կողերի, նիստերի) փեղադրությունների բազմությունը, որ սփռվում են խորանարդի պտույտներով խումբ են կազմում: Այդ խումբը գործում է խորանարդի գագաթների բազմության վրա: Այդպիսի պտույտները 24-ն են.

- a. միավոր պտույտ (փաստացի պտույտ չի կատարվում) - 1 հատ,
- b. 90° պտույտ խորանարդի երկու հանդիպակաց նիստերի կենտրոններով անցնող առանցքի շուրջ - 3 հատ,
- c. 180° պտույտ խորանարդի երկու հանդիպակաց նիստերի կենտրոններով անցնող առանցքի շուրջ - 3 հատ,
- d. 270° պտույտ խորանարդի երկու հանդիպակաց նիստերի կենտրոններով անցնող առանցքի շուրջ - 3 հատ,
- e. 120° պտույտ խորանարդի անկյունագծի շուրջ - 4 հատ,
- f. 240° պտույտ խորանարդի անկյունագծի շուրջ - 4 հատ,
- g. 180° պտույտ խորանարդի երկու հանդիպակաց կողերի կենտրոններով անցնող առանցքի շուրջ - 6 հատ;

4. G խումբը գործում է ինքն իր վրա ($S = G$) հետևյալ կերպ. $g \in G$, $s \in G$ գույզին համապատասխանում է $gs \in S$;

5. G խումբը գործում է ինքն իր վրա ($S = G$) հետևյալ կերպ. $g \in G$, $s \in G$ համար $gs = g^{-1}sg$: Իրոք, $e^{-1}se = s$ և $g_1^{-1}(g_2^{-1}sg_2)g_1 = (g_2g_1)^{-1}s(g_2g_1)$:

Դիցուք G , խումբը գործում է S բազմության վրա: Ֆիքսենք որևէ $g \in G$: Այդ g -ով որոշվում է S բազմության փոխմիարժեք արտապատկերում S -ի, վրա՝ $T_g : S \rightarrow S$, $T_g(s) = gs$: Եթե $T_g(s_1) = T_g(s_2)$, ապա $gs_1 = gs_2$ և $s_1 = s_2$: Եթե

$s \in S$, ապա $T_g(g^{-1}s) = s$, ուստի T_g արտապարկերումը S բազմության $g^{-1}s$ փարրը փանում է s -ի մեջ:

T_g արտապարկերումների բազմությունը փակ է հաջորդաբար կիրառման գործողության նկատմամբ: Իսկապես, $T_{g_2}(T_{g_1}(s)) = T_{g_2}(g_1s) = g_2(g_1s) = (g_2g_1)s = T_{g_2g_1}(s)$: Ուստի

$$T_{g_2} \cdot T_{g_1} = T_{g_2g_1} ,$$

$$T_g T_{g^{-1}} = T_e :$$

Վերջին երկու հատկությունները նշանակում են, որ T_g արտապարկերումների բազմությունը խումբ է արտապարկերումների հաջորդաբար կիրառման գործողության նկատմամբ:

Եթե S բազմությունը վերջավոր է, ապա T_g արտապարկերումները փեղադրություններ են S_n սիմպրիկ խմբից, որտեղ $n = |S|$: Պարզ է, որ $g \mapsto T_g$ արտապարկերումը G -ից S_n հոմոմորֆիզմ է և G -ի գործողության փոխարեն կարելի է սահմանափակվել T_g փեղադրությունների S -ի վրա գործողության հեղադրմամբ: Այսուհետև վերջավոր S -ի դեպքում միշտ կհամարենք, որ G -ն փեղադրությունների խումբ է:

Սահմանում. Դիցուք G խումբը գործում է S բազմության վրա: $s \in S$ փարրի **սփաթիլ խումբ** (կամ պարզապես **սփաթիլիզատոր**) է կոչվում հետևյալ բազմությունը.

$$G_s = \{g \in G \mid gs = s\} :$$

$s \in S$ փարրի **ուղեծիր** է կոչվում $G_s = \{s \mid \exists g \in G, gs = s\} = \{gs \mid g \in G\}$ բազմությունը: Ուղեծրի **երկարությունը** ուղեծրի փարրերի քանակն է:

Նամոզվենք, որ $G_s \leq G$: Եթե $g_1, g_2 \in G_s$, ապա $g_1s = s$, $g_2s = s$ և $g_2^{-1} = s$: Ուրեմն $(g_2^{-1}g_1)s = g_2^{-1}(g_1s) = g_2^{-1}s = s$ և $g_2^{-1}g_1 \in G_s$, ուստի՝ $G_s \leq G$: Նկատենք, որ $e \in G_s$ և $G_s \neq \emptyset$:

Դիցուք $g \in G$, $s, t \in S$ և $gs = t$: Այս դեպքում $G_s = g^{-1}G_tg$: Ապացուցենք դա: Եթե $g_1 \in g^{-1}G_tg$, ապա $\exists h \in G_t$ $g_1 = g^{-1}hg$ և

$$g_1s = (g^{-1}hg)s = (g^{-1}h)gs = (g^{-1}h)t = g^{-1}(ht) = g^{-1}t = s :$$

Այսինքն $g_1 \in G_s$ և $G_s \supseteq g^{-1}G_tg$: Քանի որ $g^{-1}t = s$, ապա, ըստ ապացուցածի, $G_t \supseteq (g^{-1})^{-1}G_s g^{-1} = gG_s g^{-1}$ և $g^{-1}G_tg \supseteq G_s$:

Այժմ ուսումնասիրենք ուղեծրերը: Դիցուք $s_1 \in Gs$ և $gs = s_1$: Պարզ է, որ $g^{-1}s_1 = s$ և ուրեմն $s \in Gs_1$: Ներկայացրե՛ք $Gs = Gs_1$: Այսինքն իրար մեջ որևէ «ձևափոխությամբ» անցնող բոլոր s -րի ուղեծրերը նույնն են:

Դիցուք $s \in Gs_1 \cap Gs_2$: Ուրեմն $Gs = Gs_1$ և $Gs = Gs_2$, այսինքն՝ $Gs_1 = Gs_2$:

Այսպիսով S բազմությունը փրոհվում է չհարվող ուղեծրերի: Փորձենք հաշվել այդ փրոհվող ուղեծրերի քանակը վերջավոր S բազմության դեպքում: Եթե բոլոր ուղեծրերի երկարությունները համընկնեին, ապա ուղեծրերի քանակը պարզապես հավասար կլիներ S -ի հզորության և ուղեծրի երկարության քանորդին (հարակից դասերի դեպքի նման): Սակայն փրոհվող ուղեծրեր կարող են ունենալ փրոհվող երկարություններ և ուղեծրերի քանակի հաշվարկն ավելի նուրբ մեթոդների կիրառում է պահանջում:

Նախ պարզենք, թե որ դեպքում խմբի փրոհվող «ձևափոխությունները» կիրառած s -ին փախի են միևնույն փրոհը: Ստույգ է համարժեքությունների հերևյալ շղթան.

$$g_1s = g_2s \Leftrightarrow (g_2^{-1}g_1)s = s \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in G_s \Leftrightarrow g_1G_s = g_2G_s :$$

Սա նշանակում է, որ $g_1s = g_2s$ միայն և միայն այն դեպքում, երբ համընկնում են g_1 -ի և g_2 -ի ըստ G_s -ի կառուցված հարակից դասերը: Ուրեմն փրոհվող gs -րի քանակը փրված s -ի համար հավասար է հարակից դասերի քանակին ըստ G_s ենթախմբի՝ G_s -ի ինդեքսին: Այսինքն՝

$$|Gs| = (G : G_s) : \quad (1.25)$$

Ստորև կօգտագործենք հերևյալ նշանակումը՝ $\psi(g) = |\{s \in S \mid gs = s\}|$, այսինքն կամայական $g \in G$ համար $\psi(g)$ -ն դա այն s -րի քանակն է S -ից, որ $gs = s$: Նշանակենք նաև $\mathfrak{M}(G, S)$ -ով բոլոր ուղեծրերի քանակը:

Թեորեմ 1.11 (Բեռնսայդի լեմմա). *Դիցուք վերջավոր G խումբը գործում է S վերջավոր բազմության վրա: Ստույգ է հերևյալ բանաձևը՝*

$$\mathfrak{M}(G, S) = \frac{1}{(G : 1)} \sum_{g \in G} \psi(g) :$$

Ապացույց. Նաշվենք բոլոր (g, s) զույգերի քանակը, որոնց համար $gs = s$: Ֆիքսած $g \in G$ համար բոլոր s -երի քանակը, որ $gs = s$ հավասար է $\psi(g)$ -ի,

ուսրի գումարելով ըստ բոլոր g -երի կարանանք՝ $\sum_{g \in G} \psi(g) = |\{(g, s) \mid gs = s\}|$: Մյուս կողմից, եթե ֆիքսենք $s \in S$, ապա բոլոր g -րի քանակը, որ $gs = s$ հավասար է $(G_s : 1)$ -ին: Գումարելով ըստ բոլոր s -րի սահման ենք՝ $\sum_{s \in S} (G_s : 1) = |\{(g, s) \mid gs = s\}|$: Ներկայացնելով $\sum_{g \in G} \psi(g) = \sum_{s \in S} (G_s : 1)$: Օգտվելով Լագրանժի թեորեմից և (1.25) բանաձևից՝ կարանանք

$$\sum_{g \in G} \psi(g) = \sum_{s \in S} \frac{(G : 1)}{(G : G_s)} = (G : 1) \sum_{s \in S} \frac{1}{(G : G_s)} = (G : 1) \sum_{s \in S} \frac{1}{|G_s|} : \quad (1.26)$$

Ավելի ուշադիր դիտարկենք $\sum_{s \in S} \frac{1}{|G_s|}$ գումարը: Դիցուք բոլոր փարբեր ուղեծրերը հերկյալն են՝ G_{s_1}, \dots, G_{s_k} (այսինքն՝ $\mathfrak{M}(G, S) = k$): Ուրեմն, $\sum_{s \in S} \frac{1}{|G_s|} = \sum_{i=1}^k \sum_{s \in G_{s_i}} \frac{1}{|G_s|}$: Բոլոր $s \in G_{s_i}$ համար $G_s = G_{s_i}$ և բնականաբար $\frac{1}{|G_s|} = \frac{1}{|G_{s_i}|}$: Այսպիսով,

$$\sum_{s \in S} \frac{1}{|G_s|} = \sum_{i=1}^k \sum_{s \in G_{s_i}} \frac{1}{|G_s|} = \sum_{i=1}^k |G_{s_i}| \frac{1}{|G_{s_i}|} = \sum_{i=1}^k 1 = k :$$

Այժմ (1.26)-ից հետևում է, որ

$$\frac{1}{(G : 1)} \sum_{g \in G} \psi(g) = \sum_{s \in S} \frac{1}{|G_s|} = k = \mathfrak{M}(G, S)$$

և թեորեմն ապացուցված է:

1.20. Անիվի խնդրի լուծումը

Կիրառենք Թեորեմ 1.11-ի բանաձևը վերը դիտարկված «անիվի» խնդրին: Պարզ է, որ $\langle \pi \rangle = \{e, \pi, \pi^2, \pi^3, \dots, \pi^{n-1}\}$ խումբը գործում է R^N -ի վրա (տես օրինակ 2.-ը): Նաև դյուրին է տեսնել, որ ներկյան ֆունկցիաների համարժեքության դասերը համընկնում են այդ ֆունկցիաների ուղեծրերի հետ: Ներկայացնելով իրարից պարույրով չստացվող ներկյանների քանակը հավասար է ֆունկցիաների ուղեծրերի քանակին, որն ըստ Բեռնսայի լեմմի պրվում է հերկյալ բանաձևով՝

$$\mathfrak{M}(\langle \pi \rangle, R^N) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\pi^k) :$$

Այսպիսով խնդիրը հանգեցվեց $\psi(\pi^k)$ -ի հաշվմանը: Ըստ սահմանման $\psi(\pi^k) = |\{f \in R^N \mid f\pi^k = f\}|$:

Դիցուք α -ն որևէ փեղադրություն է S_n -ից: Նկարագրենք բոլոր $f \in R^N$, որ $f\alpha = f$: Տրոհենք α -ն ցիկլերի: Տիշեցնենք որ յուրաքանչյուր ցիկլ ունի հետևյալ փեսքը՝

$$\{i, \alpha(i), \alpha^2(i), \dots, \alpha^m(i)\},$$

որտեղ բոլոր $i, \alpha(i), \alpha^2(i), \dots, \alpha^m(i)$ փարրերը փարբեր են և $\alpha^{m+1}(i) = i$: $f\alpha = f$ պայմանը նշանակում է, որ

$$f(i) = f(\alpha(i)) = f(\alpha^2(i)) = \dots = f(\alpha^m(i))$$

բոլոր $i \in N$ -երի համար, այսինքն f ֆունկցիան հասարակորեն է α փեղադրության ցիկլերի վրա: Ուստի, եթե α -ի ցիկլերի քանակը հավասար է q -ի, ապա $f\alpha = f$ պայմանին բավարարող ֆունկցիաները թվարկելու համար պեսք է ընտրել ֆունկցիայի արժեքը յուրաքանչյուր ցիկլի համար: Քանի որ ֆունկցիաների արժեքների փիրույթը $R = \{1, 2, \dots, r\}$ -ն է և ցիկլերի վրա արժեքներն ընտրվում են իրարից անկախ, ապա $f\alpha = f$ պայմանին բավարարող ֆունկցիաների քանակը կլինի հավասար r^q :

Այժմ պարզ է դառնում, որ $\psi(\pi^k)$ -ն հաշվելու համար անհրաժեշտ է հաշվել π^k -ի ցիկլերի քանակը: Տիշենք, որ π^k -ով նկարագրվում է անփվի պրույթը k սեկտորների չափով: Դիտարկենք 1 համարի սեկտորի ցիկլը: π^k -ին համապատասխանող պրույթով 1 համարի սեկտորը անցնում է $k + 1$ համարի սեկտորի մեջ, վերջինս՝ $2k + 1$ համարի սեկտորի մեջ և այլն մինչև որ վերադառնանք համար 1 սեկտորին: Բայց, եթե վերադարձել ենք համար 1 սեկտորին, ապա նույն պրույթներով 2 համարի սեկտորը կվերադառնա իր փեղը և մյուս բոլոր սեկտորները նույնպես կվերադառնան իրենց փեղերը: Ուստի π^k -ի բոլոր ցիկլերն ունեն միևնույն երկարությունը: Ակնհայտ է, որ այդ երկարությունը ամենափոքր դրական l թիվն է, որ $(\pi^k)^l = e$: Այսինքն, ցիկլի երկարությունը համընկնում է π^k -ի կարգի հետ, որն ինչպես գիտենք հավասար է $\frac{n}{(n,k)}$: Քանի որ ցիկլերի միավորումը համընկնում է $N = \{1, 2, \dots, n\}$ բազմության հետ, ապա ցիկլերի քանակը հավասար է (n, k) -ին: Ներկայացնենք $\psi(\pi^k) = r^{(n,k)}$ և

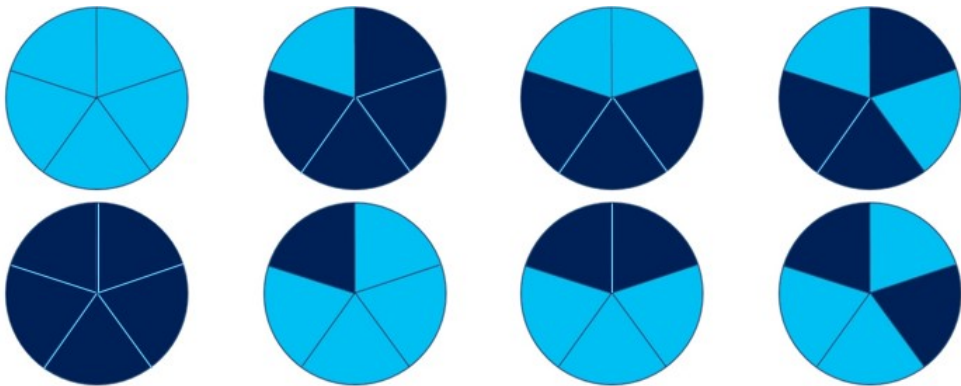
$$\mathfrak{M}(\langle \pi \rangle, R^N) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} r^{(n,k)} :$$

Վերջին բանաձևը կարելի է ավելի պարզեցնել: Ակնհայտ է, որ (n, k) -ն n -ի բաժանարարն է և n -ի կամայական m բաժանարարի համար կարելի է ընտրել $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, որի համար $(n, k) = m$ (օրինակ՝ $k = m$): Նաշվենք թե քանի անգամ է կրկնվում r^m -ը $\sum_{k=0}^{n-1} r^{(n,k)}$ գումարում: Եթե $(n, k) = m$, ապա m -ը և n -ի և k -ի բաժանարարն է, ուստի $(\frac{n}{m}, \frac{k}{m}) = 1$: Ուրեմն k -երի քանակը, որոնց համար $(n, k) = m$ հավասար է $\frac{n}{m}$ -ից փոքր $\frac{n}{m}$ -ի հետ փոխադարձաբար պարզ թվերի քանակին: Այդ թիվը փրվում է հայտնի $\varphi(\frac{n}{m})$ Էյլերի ֆունկցիայի միջոցով: (Էյլերի ֆունկցիան $\varphi(n)$ -ը, հավասար է n -ից փոքր և n -ի հետ փոխադարձաբար պարզ թվերի քանակին: Եթե $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ -ը n -ի վերլուծությունն է պարզ թվերի արտադրյալի միջոցով, ապա $\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$:)

Այսպիսով «անիվի» խնդրի վերջնական լուծումը փրվում է հետևյալ բանաձևով

$$\mathfrak{M}(\langle \pi \rangle, R^N) = \frac{1}{n} \sum_{m|n} \varphi\left(\frac{n}{m}\right) r^m :$$

Դիտարկենք «անիվի» խնդիրը $n = 5$ և $k = 2$ դեպքում: Դյուրին է թվարկել բոլոր ներկումները, որ պտույտներով իրարից չեն սրացվում: Դրանք ութն են՝



Նամաձայն սրացված բանաձևի՝

$$\frac{1}{5} (\varphi(1)2^5 + \varphi(5)2^1) = \frac{1}{5} (1 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^1) = \frac{40}{5} = 8 :$$

Խմբի գործողության այլ կիրառության օրինակներ

Օգտվելով խմբի գործողության գաղափարից և վերը սրացված արդյունքներից՝ ապացուցենք, որ եթե վերջավոր խմբի ենթախմբի դասիչը (ինդեքսը) խմբի

կարգի ամենափոքր պարզ բաժանարարն է, ապա այդ ենթախումբը նորմալ է: Այս պնդումը մենք արդեն ապացուցել ենք, երբ դասիչը հավասար է 2-ի:

Սահմանում. Դիցուք $H \leq G$: H ենթախմբի **նորմալիզատոր** է կոչվում $N_H = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$ բազմությունը:

Դյուրին է տեսնել, որ նորմալիզատորը ենթախումբ է G -ում: Իսկապես, դիցուք $g_1, g_2 \in N_H$ և $g_1^{-1}Hg_1 = H$, $g_2Hg_2^{-1} = H$: Ուստի

$$(g_2^{-1}g_1)^{-1}H(g_2^{-1}g_1) = g_1^{-1}(g_2Hg_2^{-1})g_1 = g_1^{-1}Hg_1 = H$$

և $g_2^{-1}g_1 \in N_H$, այսինքն N_H -ն ենթախումբ է:

Ակնհայտ է, որ $H \leq N_H \leq G$ և N_H -ն ամենամեծ ենթախումբն է G -ում, որում H -ը նորմալ է: Եթե $N_H = G$, ապա H -ը նորմալ է G -ում:

Դիցուք $S = \{a^{-1}Ha \mid a \in G\}$: G խումբը գործում է S բազմության վրա՝ $g \in G$ խմբի փարրը գործելով $a^{-1}Ha$ վրա այն փանում է $g^{-1}(a^{-1}Ha)g = (ag)^{-1}H(ag)$ -ի մեջ: Պարզ է, որ $H \in S$ և H -ի ուղեծիրը համընկնում է ամբողջ S -ի հետ, իսկ ստաբիլ խումբը N_H -ն է: Ուրեմն ուղեծրի երկարությունը հավասար է $(G : N_H)$ -ին:

Թեորեմ 1.12. Դիցուք $H \leq G$: Եթե $(G : 1) = n$, p -ն n -ի ամենափոքր պարզ բաժանարարն է և $(G : H) = p$, ապա $H \triangleleft G$:

Ապացույց. Քանի որ $H \leq N_H \leq G$, ապա թեորեմն ապացուցված է, եթե $N_H = G$:

Պարզ է, որ $(H : 1) \leq (N_H : 1)$ և ուրեմն $1 \leq (G : N_H) \leq (G : H) = p$: Եթե $(G : N_H) = 1$, ապա $N_H = G$ և $H \triangleleft G$:

Դիցուք $1 < (G : N_H)$, ապա $(G : N_H) = (G : H) = p$, $H = N_H$ և $|S| = p$: Սա նշանակում է, որ գոյություն ունի հոմոմորֆիզմ G խմբից S_p սիմետրիկ խմբի մեջ (տես վերը նկարագրված T_g արտապատկերումները): Նշանակենք այդ հոմոմորֆիզմը f -ով:

Մյուս կողմից $\ker f = N_H = H$ և $\ker f = H$: Ներկայացրեք, $H \triangleleft G$, քանի որ հոմոմորֆիզմի միջուկը նորմալ է G -ում: Թեորեմն ապացուցված է:

Դիցուք G -ն վերջավոր խումբ է և այն գործում է ինքն իր վրա հերևյալ կերպ.

$$(a, x) \rightarrow a^{-1}xa :$$

Այս գործողությունն անվանում են համալուծ գործողություն: Բնականաբար G -ն փրոհվում է ուղեծրերի և երկու փարր նույն ուղեծրից են միայն և միայն այն դեպքում երբ դրանք համալուծ են, այսինքն x և y փարրերի համար կգտնվի $a \in G$, որ $y = a^{-1}xa$:

Դիփարկենք այն ուղեծրերը, որոնց երկարությունը 1 է: Ակնհայտ է, որ այդպիսի ուղեծրեր գոյություն ունեն, քանի որ միավոր փարրը պարունակող ուղեծիրը բաղկացած է միայն այդ փարրից: Միավորենք բոլոր 1 երկարությամբ ուղեծրերը և սրացված բազմությունը նշանակենք $Z(G)$ -ով: Դյուրին է համոզվել, որ $Z(G)$ -ն բաղկացած է G -ի բոլոր այն փարրերից, որ փեղափոխելի են G -ի բոլոր փարրերի հետ: Իսկապես, $x \in Z(G)$ միայն և միայն այն դեպքում, երբ $a^{-1}xa = x$ բոլոր $a \in G$, սակայն $a^{-1}xa = x$ պայմանը համարժեք է $xa = ax$ պայմանին: Պարզ է, նաև, որ $Z(G)$ -ն G -ի ենթախումբն է: Եթե $x, y \in Z(G)$ ապա $a^{-1}xa = x$ և $a^{-1}ya = y$, հետևաբար, $ya = ay$ և $ay^{-1} = y^{-1}a$ և $a^{-1}y^{-1}a = y^{-1}$: Այժմ դիփարկենք $a^{-1}(y^{-1}x)a$ փարրը, $a^{-1}(y^{-1}x)a = a^{-1}(y^{-1}aa^{-1}x)a = (a^{-1}y^{-1}a)(a^{-1}xa) = y^{-1}x$: Սրացանք, որ $y^{-1}x \in Z(G)$, քանի որ $y^{-1}x$ փարրը կազմում է 1 երկարությամբ ուղեծիր:

$Z(G)$ ենթախումբը կոչվում է G խմբի **կենտրոն**: Ակնհայտ է, որ այն նորմալ ենթախումբ է:

Օգտվելով վերը նշված համալուծ գործողությունից՝ ապացուցենք հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 1.13. *Կամայական վերջավոր խումբ, որի կարգը պարզ թիվի քառակուսի է, աբելյան (փեղափոխելի) է:*

Ապացույց. Նշանակենք $(G : 1) = p^2$, որտեղ p -ն պարզ թիվ է: Դիցուք G -ն գործում է ինքն իր վրա համալուծությամբ: Պարզ է, որ G -ն փրոհվում է չհափվող ուղեծրերի և յուրաքանչյուր ուղեծրի երկարությունը G խմբի կարգի բաժանարար է, քանի որ երկարությունը հավասար է այդ ուղեծրի փարրի սրաբիլ խմբի ինդեքսին: Ուրեմն՝ բոլոր ուղեծրերի երկարությունները կամ 1 են կամ p կամ էլ p^2 : Վերջին դեպքն անհնար է, քանի որ միավոր փարրը չի կարող մեկ այլ փարի հետ լինել միևնույն ուղեծրում: Եթե 1 երկարության ուղեծրերի քանակը չլինի պարիկ p -ին կսպանանք, որ բոլոր ուղեծրերի մեջ պարունակվող փարրերի քանակը չի լինի պարիկ p -ին, ինչը հնարավոր չէ: Ուստի 1 երկարության ուղեծրերի քանակը՝ $Z(G)$ կենտրոնի կարգը պարիկ է

p -ին: Նամաձայն Լագրանժի թեորեմի՝ այն կարող է լինել հավասար կամ p -ին կամ էլ p^2 : Եթե $(Z(G) : 1) = p^2$ ապա $G = Z(G)$ և G -ն արելյան է:

Դիցուք $(Z(G) : 1) = p$: Քանի որ կենտրոնը նորմալ ենթախումբ է կարող ենք դիտարկել $G/Z(G)$ ֆակտոր-խումբը, որի կարգը նույնպես p է և այդ պարճառով այն ցիկլիկ է:

Դրանից անմիջապես հետևում է G -ի փեղափոխելի լինելը: Քանի որ $G/Z(G)$ ֆակտոր-խումբը ցիկլիկ է, ապա դրա բոլոր փարբերն ինչ-որ մեկի ասփիճաններն են, այսինքն կգտնվի $x \in G \setminus Z(G)$ այնպիսին, որ $G/Z(G) = \{Z(G), xZ(G), (xZ(G))^2, \dots, (xZ(G))^{p-1}\}$: Քանի որ կենտրոնի փարբերը փեղափոխելի են բոլոր փարբերի հետ, ստանում ենք, որ $(xZ(G))^k = x^k Z(G)$ և $G/Z(G) = \{Z(G), xZ(G), (x^2Z(G)), \dots, (x^{p-1}Z(G))\}$:

Դիցուք $a, b \in G$: Կգտնվեն երկու հարակից դասեր ֆակտոր-խմբում, որ $a \in x^m Z(G)$ և $b \in x^n Z(G)$: Ուստի $a = x^m c_1$ և $b = x^n c_2$, որտեղ c_1, c_2 -ը կենտրոնից են: Այժմ, օգտվելով այն փաստից, որ կենտրոնի փարբերը փեղափոխելի են խմբի բոլոր փարբերի հետ, ստանում ենք՝ $ab = x^m c_1 x^n c_2 = x^{m+n} c_1 c_2 = x^{n+m} c_2 c_1 = x^n c_2 x^m c_1 = ba$ և թեորեմն ապացուցված է:

1.21. Խմբի ցիկլիկ ինդեքսը

Դիտարկենք n փարբանի փեղադրությունները: Ներմուծենք զույգ առ զույգ փեղափոխելի t_1, t_2, \dots, t_n անկախ փոփոխականները՝ $t_i t_j = t_j t_i$: Կամայական n փարբանի փեղադրության համար սահմանենք դրա ցիկլիկ փեսակը որպես $t_1^{b_1} t_2^{b_2} \dots t_n^{b_n}$, որտեղ b_i -ն փեղադրության i երկարության ցիկլերի քանակն է: Դյուրին է նկատել, որ $\sum_{i=1}^n i b_i = n$: Իսկապես, $i b_i$ -ն i երկարության ցիկլերում պարունակվող $\{1, 2, \dots, n\}$ բազմության փարբերի քանակն է:

$a \in S_n$ փեղադրության ցիկլիկ փեսակը կնշանակենք հետևյալ կերպ. $t_1^{b_1(\alpha)} t_2^{b_2(\alpha)} \dots t_n^{b_n(\alpha)}$:

Սահմանում. Տեղադրությունների $G \leq S_n$, խմբի **ցիկլիկ ինդեքս** է կոչվում հետևյալ բազմանդամը՝

$$P_G(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{(G : 1)} \sum_{\alpha \in G} t_1^{b_1(\alpha)} t_2^{b_2(\alpha)} \dots t_n^{b_n(\alpha)} :$$

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Դիցուք $G = \langle \pi \rangle = \{e, \pi, \pi^2, \pi^3, \dots, \pi^{n-1}\}$, որպես

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} :$$

Ինչպես պեսանք «անիվի» խնդրի լուծման ժամանակ π^k -ի ցիկլիկ պեսակը $t_{\frac{n}{m}, k}^{(n, k)}$ -ն է, ուստի ցիկլիկ խմբի համար

$$P_{\langle \pi \rangle}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t_{\frac{n}{m}, k}^{(n, k)} = \frac{1}{n} \sum_{m|n} \varphi\left(\frac{n}{m}\right) t_{\frac{n}{m}}^m :$$

2. Դիցուք $G = S_n$ և b_1, b_2, \dots, b_n թվերը բավարարում են $\sum_{i=1}^n i b_i = n$ պայմանին: Նաշվենք $t_1^{b_1} t_2^{b_2} \dots t_n^{b_n}$ ցիկլիկ պեսակի տեղադրությունների քանակը: Յուրաքանչյուր α տեղադրություն ներկայացնենք ցիկլերի արտադրյալով, որը գրված է հետևյալ կերպ՝

$$\alpha = (i_1) \dots (i_{b_1}) (j_1 k_1) \dots (j_{b_2} k_{b_2}) (p_1 q_1 s_1) \dots (p_{b_3} q_{b_3} s_{b_3}) \dots, \quad (1.27)$$

որպես $(i_1) \dots (i_{b_1})$ -ը 1 երկարության ցիկլերն են, $(j_1 k_1) \dots (j_{b_2} k_{b_2})$ -ը 2 երկարության ցիկլերն են, $(p_1 q_1 s_1) \dots (p_{b_3} q_{b_3} s_{b_3})$ -ը 3 երկարության ցիկլերն են և այլն: Փաստորեն (1.27)-ում որոշակի հերթականությամբ գրված են բոլոր $1, 2, \dots, n$ թվերը՝ ամեն մեկը ճիշտ մեկ անգամ, այսինքն (1.27)-ով որոշվում է $1, 2, \dots, n$ թվերի մի տեղափոխություն: (1.27)-ի յուրաքանչյուր ցիկլի թվերի ցիկլիկ տեղափոխությունը ցիկլի մեջ չի փոխում տեղադրությունը, քանի որ այդ ցիկլը չի փոխվում և փոխվում է միայն ցիկլի գրառումը: Նաև տեղադրությունը չի փոխվի, եթե տեղերով փոխենք միևնույն երկարության երկու ցիկլ: Ամեն մի այդպիսի ցիկլիկ տեղաշարժ և ցիկլերի տեղափոխություն (1.27)-ում չեն փոխում α -ն, սակայն փոխում են $1, 2, \dots, n$ թվերի տեղափոխությունը: Ցիկլիկ տեղաշարժերի և ցիկլերի տեղափոխությունների քանակը հավասար է $\prod_{i=1}^n b_i! i^{b_i}$: Ուրեմն α -ին համապատասխանում է $\prod_{i=1}^n b_i! i^{b_i}$ հար $1, 2, \dots, n$ թվերի տեղափոխություն և քանի որ բոլոր տեղափոխությունների քանակը $n!$ է, ապա (1.27) ցիկլիկ պեսակի α տեղադրությունների քանակը

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^n b_i! i^{b_i}}$$

է: Ուստի S_n -ի ցիկլիկ ինդեքսն է հետևյալ բազմանդամը՝

$$P_{S_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n)} \frac{n!}{\prod_{i=1}^n b_i! i^{b_i}} t_1^{b_1} t_2^{b_2} \dots t_n^{b_n},$$

որտեղ գումարը վերցվում է ըստ բոլոր (b_1, b_2, \dots, b_n) հավաքածուների, որ $\sum_{i=1}^n i b_i = n$:

3. Դիցուք $G = A_n$: Կանայական $\alpha \in S_n$ տեղադրության համար, որի ցիկլիկ տեսակը $t_1^{b_1} t_2^{b_2} \dots t_n^{b_n}$ է կնշանակենք $d(\alpha)$ -ով α տեղադրության դեկրեմենտը՝

$$d(\alpha) = \sum_{i=1}^n (i-1)b_i = n - \sum_{i=1}^n b_i :$$

Նայումի է, որ դեկրեմենտը գույգ թիվ է միայն և միայն, երբ α տեղադրությունը գույգ է: Ուստի, A_n -ի ցիկլիկ ինդեքսը կարելի է սրանալ հետևյալ կերպ՝

$$P_{S_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n)} \frac{n!(1 + (-1)^{n - \sum_{i=1}^n b_i})}{\prod_{i=1}^n b_i! i^{b_i}} t_1^{b_1} t_2^{b_2} \dots t_n^{b_n},$$

որտեղ գումարը վերցվում է ըստ բոլոր (b_1, b_2, \dots, b_n) հավաքածուների, որ $\sum_{i=1}^n i b_i = n$:

4. Դիցուք G -ն վերը դիտարկված խորանարդի գագաթների բազմության պտույտներով սրացվող տեղադրությունների խումբն է: Պարզենք այդ տեղադրությունների ցիկլիկ տեսակները.

- a. միավոր պտույտ (փաստացի պտույտ չի կարարվում) - 1 հատ - ցիկլիկ տեսակը t_1^8 է;
- b. 90° պտույտ խորանարդի երկու հանդիպակաց նիստերի կենտրոններով անցնող առանցքի շուրջը - 3 հատ - ամեն մի հանդիպակաց նիստի գագաթները կազմում են մի ցիկլ - ցիկլիկ տեսակը t_4^2 է;
- c. 180° պտույտ խորանարդի երկու հանդիպակաց նիստերի կենտրոններով անցնող առանցքի շուրջը - 3 հատ - առանցքի վրա գագաթ չկա՝ բոլոր ցիկլերը 2 երկարության են - ցիկլիկ տեսակը t_2^4 է;

- d. 270^0 պտույտ խորանարդի երկու հանդիպակաց նիստերի կենտրոններով անցնող առանցքի շուրջը - 3 հասարակ - նույնն է ինչ 90^0 պտույտի համար - t_4^2 ;
- e. 120^0 պտույտ խորանարդի անկյունագծի շուրջը - 4 հասարակ - առանցքի վրայի երկու զագաթները 1 երկարության ցիկլեր են կազմում, այդ զագաթներից յուրաքանչյուրին կից 3 զագաթները ցիկլ են կազմում - ցիկլիկ փեսակը $t_1^2 t_3^2$ է;
- f. 240^0 պտույտ խորանարդի անկյունագծի շուրջը - 4 հասարակ - նույնն է ինչ 120^0 պտույտի համար - $t_1^2 t_3^2$ է;
- g. 180^0 պտույտ խորանարդի երկու հանդիպակաց կողերի կենտրոններով անցնող առանցքի շուրջը - 6 հասարակ - առանցքի վրա զագաթ չկա՝ ուրիշ ցիկլերը 2 երկարության են - ցիկլիկ փեսակը t_2^4 է:

Ցիկլիկ ինդեքսը հետևյալն է.

$$P_{\text{զագաթների}}(t_1, \dots, t_8) = \frac{1}{24} (t_1^8 + 6t_4^2 + 8t_1^2 t_3^2 + 9t_2^4) :$$

1.22. Պոլյայի թեորեմը

Դիցուք $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $R = \{1, 2, \dots, r\}$ և $G \leq S_n$ խումբը գործում է R^N -ի վրա՝ $(\forall \alpha \in G \forall f \in R^N) (\alpha, f) \mapsto f \cdot \alpha$: Ստացվում է խումբը $G_f = \{\alpha \in G \mid f = f\alpha\}$ -ն է, իսկ ուղեծիրը դա $Gf = \{f\alpha \mid \alpha \in G\}$ -ն է: Ինչպես գիտենք R^N -ը փրոհվում է չհափվող ուղեծրերի:

Ընտրենք x_1, x_2, \dots, x_r անկախ փոփոխականների բազմությունը՝ $x_i x_j = x_j x_i$: Յուրաքանչյուր $f \in R^N$ համար սահմանենք ֆունկցիայի կշիռը հետևյալ բանաձևով՝ $\omega(f) = \prod_{i=1}^n x_{f(i)}$: Փաստորեն ֆունկցիայի կշիռը թույլ է տալիս իմանալ, թե ֆունկցիան քանի անգամ է ընդունում փոփոխականը R բազմությունից:

Դիցուք $g \in Gf$, այսինքն $\exists \alpha \in G$ որ $f = g\alpha$: Պարզ է, որ $\omega(f) = \prod_{i=1}^n x_{f(i)} = \prod_{i=1}^n x_{g(\alpha(i))}$: Քանի որ α -ն փոփոխություն է, ապա երբ i -ն ընդունում է 1-ից n արժեքները $\alpha(i)$ -ն նույնպես ընդունում է 1-ից n արժեքները (ընդհանուր դեպքում մեկ այլ հաջորդականությամբ): Օգտվելով x_1, x_2, \dots, x_r

փոփոխականների արեղափոխելի լինելու հանգամանքից՝ սրանում ենք՝

$$\omega(f) = \prod_{i=1}^n x_{f(i)} = \prod_{i=1}^n x_{g(\alpha(i))} = \prod_{j=1}^n x_{g(j)} = \omega(g) :$$

Այսպիսով ապացուցեցինք, որ միևնույն ուղեծրի ֆունկցիաների կշիռները հավասար են: Նակառակը միշտ չէ որ ճիշտ է: Դիցուք $n = 4$, $r = 2$ և $f(1) = f(3) = 1 = g(1) = g(2)$, $f(2) = f(4) = 2 = g(3) = g(4)$ և $G = \{e, \pi\}$, որպես $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$: Ակնհայտ է, որ $\omega(f) = x_1^2 x_2^2 = \omega(g)$ սակայն f -ը և g -ն փարբեր ուղեծրերից են, քանի որ $g = g\pi$:

Յուրաքանչյուր ուղեծրի համար սահմանենք կշիռը որպես այդ ուղեծրի ֆունկցիայի կշիռը: Քանի որ այդ ուղեծրի բոլոր ֆունկցիաներն ունեն միևնույն կշիռն, այս սահմանումը կոռեկտ է: Այժմ փորձենք հաշվել բոլոր ուղեծրերի կշիռների գումարը՝ $\sum_{\substack{\text{բոլոր } Gf \\ \text{ուղեծրերի}}} \omega(Gf)$, որը կնշանակենք $\Omega(N, R)$ -ով: Այսպիսով $\Omega(N, R) = \sum_{f \in R^N} \frac{\omega(f)}{|Gf|}$ և օգրվելով (1.25) բանաձևից սրանում ենք՝

$$\begin{aligned} \Omega(N, R) &= \sum_{f \in R^N} \frac{\omega(f)}{(G : Gf)} = \sum_{f \in R^N} \frac{\omega(f)}{(G : 1)} (Gf : 1) = \\ &= \frac{1}{(G : 1)} \sum_{f \in R^N} \omega(f) (Gf : 1) \end{aligned}$$

(այսպես օգրվեցինք Լագրանժի թեորեմից): Ձևափոխելով վերջին գումարը սրանում ենք՝

$$\begin{aligned} \sum_{f \in R^N} \omega(f) (Gf : 1) &= \sum_{f \in R^N} \omega(f) |\{\alpha \in G \mid f = f\alpha\}| = \\ &= \sum_{f \in R^N} \omega(f) \sum_{\substack{\alpha \in G \\ f = f\alpha}} 1 = \sum_{\alpha \in G} \sum_{\substack{f \in R^N \\ f = f\alpha}} \omega(f) : \end{aligned}$$

Ուստի,

$$\Omega(N, R) = \frac{1}{(G : 1)} \sum_{\alpha \in G} \sum_{\substack{f \in R^N \\ f = f\alpha}} \omega(f) : \quad (1.28)$$

Ներմուծենք հետևյալ բազմանդամները (փարբական սիմետրիկ

բազմանդամները՝

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + \dots + x_r \\ s_2 &= x_1^2 + \dots + x_r^2 \\ s_3 &= x_1^3 + \dots + x_r^3 \\ &\dots \\ s_k &= x_1^k + \dots + x_r^k \\ &\dots \end{aligned}$$

Տեղադրենք s_1, s_2, \dots, s_n բազմանդամները G խմբի ցիկլիկ ինդեքսի մեջ t_1, t_2, \dots, t_n փոփոխականների փոխարեն և կստանանք

$$P_G(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{1}{(G : 1)} \sum_{\alpha \in G} s_1^{b_1(\alpha)} s_2^{b_2(\alpha)} \dots s_n^{b_n(\alpha)},$$

որպես $b_1^{(\alpha)}, \dots, b_n^{(\alpha)}$ -ն α փեղադրության փեսակն է: Նամադրելով (1.28)-ը և $P_G(s_1, s_2, \dots, s_n)$ -ը՝ փեսանում ենք, որ եթե $\sum_{\substack{f \in R^N \\ f=f\alpha}} \omega(f) = s_2^{b_2(\alpha)} \dots s_n^{b_n(\alpha)}$, ապա

$$\Omega(N, R) = P_G(s_1, s_2, \dots, s_n):$$

Դիփարկենք $s_1^{b_1(\alpha)} s_2^{b_2(\alpha)} \dots s_n^{b_n(\alpha)}$ արտադրյալը: Այն կարելի է վերարտադրել հետևյալ կերպ.

$$(x_1 + \dots + x_r)^{b_1(\alpha)} (x_1^2 + \dots + x_r^2)^{b_2(\alpha)} \dots (x_1^n + \dots + x_r^n)^{b_n(\alpha)} : \quad (1.29)$$

Այս արտադրյալի փակագծերը բացելուց հետո ստացվում է մի բազմանդամ, որի յուրաքանչյուր անդամ կարելի է նաև ստանալ (1.29)-ի փակագծերից յուրաքանչյուրից մեկական գումարելի ընտրելով: Նշանակենք α փեղադրության ցիկլերը (դիփարկելով դրանք որպես N -ի ենթաբազմություններ) հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} A_1, A_2, \dots, A_{b_1(\alpha)} &- 1 \text{ երկարության ցիկլերը} \\ B_1, B_2, \dots, B_{b_2(\alpha)} &- 2 \text{ երկարության ցիկլերը} \\ C_1, C_2, \dots, C_{b_3(\alpha)} &- 3 \text{ երկարության ցիկլերը} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ինչպես արդեն պարզել էինք, արված α փեղադրության համար $f \in R^N$ ֆունկցիան բավարարում է $f = f\alpha$ պայմանին միայն և միայն այն դեպքում, երբ

f ֆունկցիան հասարարուն է α փեղադրության ցիկլերի վրա: Ուստի, կարելի է խոսել f ֆունկցիայի ցիկլի վրա արժեքի մասին, այսինքն գրելով $f(A_1)$ հասկանում ենք $f(i)$, $i \in A_1$:

Եթե $f \in R^N$ և $f = f\alpha$, ապա

$$\omega(f) = x_{f(A_1)} \dots x_{f(A_{b_1(\alpha)})} x_{f(B_1)}^2 \dots x_{f(B_{b_2(\alpha)})}^2 x_{f(C_1)}^3 \dots x_{f(C_{b_3(\alpha)})}^3 \dots \quad (1.30)$$

որպես $x_{f(A_1)} \dots x_{f(A_{b_1(\alpha)})}$ -ն, դա 1 երկարության ցիկլերում պարունակվող թվերի վրա f ֆունկցիայի արժեքներին համապարասխանող կշռի մասն է, $x_{f(B_1)}^2 \dots x_{f(B_{b_2(\alpha)})}^2$ ՝ 2 երկարության ցիկլերում պարունակվող թվերի վրա f ֆունկցիայի արժեքներին համապարասխանող կշռի մասն է (քանի որ B_i -ն երկու թվից է բաղկացած, ուստի այդ մասի կշիռն է $x_{f(B_i)} x_{f(B_i)} = x_{f(B_i)}^2$) և այլն: Այժմ ցույց փանք, որ գոյություն ունի (1.29)-ի փակագծերից անդամների ընդաման մի եղանակ, որի արդյունքում սրացվում է (1.30)-ը: (1.29)-ում ունենք $b_1(\alpha)$ հար $x_1 + \dots + x_r$ փակագիծ, առաջինից ընդրենք $x_{f(A_1)}$ -ն, երկրորդից՝ $x_{f(A_2)}$ -ը, և այլն և վերջինից՝ $x_{f(A_{b_1(\alpha)})}$ -ն: Այնուհետև, $b_2(\alpha)$ հար $(x_1^2 + \dots + x_r^2)$ փակագծերից սկզբից կընդրենք առաջին փակագծից $x_{f(B_1)}^2$ -ը, երկրորդից՝ $x_{f(B_2)}^2$ -ը և այլն և վերջինից՝ $x_{f(B_{b_2(\alpha)})}^2$: Նման ձևով կսրանանք ամբողջ (1.30)-ը: Այսպիսով, յուրաքանչյուր $f \in R^N$ համար, (1.29)-ի փակագծերը բացելով կսրանանք $\omega(f)$ -ը: Մյուս կողմից պարզ է, որ (1.29)-ի փակագծերից անդամների ընդաման կամայական եղանակ հանգեցնում է որևէ $f \in R^N$ ($f = f\alpha$) ֆունկցիայի կշռի սրացմանը: Իսկապես, դիցուք առաջին $b_1(\alpha)$ հար $(x_1 + \dots + x_r)$ փակագծերից ընդրվել են $x_{i_1}, \dots, x_{i_{b_1(\alpha)}}$, հաջորդ $b_2(\alpha)$ հար $(x_1^2 + \dots + x_r^2)$ փակագծերից ընդրվել են $x_{j_1}^2, \dots, x_{j_{b_2(\alpha)}}^2$ և այլն: Դա նշանակում է, որ համապարասխան ֆունկցիայի համար

$$f(A_1) = i_1, \dots, f(A_{b_1(\alpha)}) = i_{b_1(\alpha)}, \quad f(B_1) = j_1, \dots, f(B_{b_2(\alpha)}) = j_{b_2(\alpha)}$$

և այլն: Եթե գոնե մեկ փակագծից ընդրենք մեկ այլ անդամ, ապա ակնհայտորեն կսրանանք մեկ այլ ֆունկցիա, քանի որ կփոխվի ֆունկցիայի արժեքը համապարասխան ցիկլի վրա: Այսպիսով ապացուցվեց որ

$$\sum_{\substack{f \in R^N \\ f = f\alpha}} \omega(f) = s_1^{b_1(\alpha)} s_2^{b_2(\alpha)} \dots s_n^{b_n(\alpha)}$$

և հերևաբար՝

$$\Omega(N, R) = P_G(s_1, s_2, \dots, s_n) :$$

Վերջին բանաձևը հայտնի է որպես Պոլյայի թեորեմ:

Թեորեմ 1.14 (Պոլյա). *Դիցուք $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $R = \{1, 2, \dots, r\}$ և $G \leq S_n$ խումբը գործում է R^N -ի վրա: R^N -ի բոլոր ֆունկցիաների կշիռների գումարը՝ $\Omega(N, R)$ -ը, հավասար է $P_G(s_1, s_2, \dots, s_n)$ -ին:*

Դյուրին է նկատել, որ փեղադրելով $x_i = 1$ բոլոր $i \in R$ համար ստացվում է $\omega(f) = 1$, ուստի

$$\Omega(N, R) = \sum_{\substack{\text{ըստ բոլոր } Gf \\ \text{ուղեծրերի}}} \omega(Gf)$$

հավասար է դառնում ուղեծրերի քանակին:

Դիցուք, հարկավոր է գրել ուղեծրերի քանակը, որոնց կշիռը հավասար է $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r}$, որպես $\sum_{i=1}^r m_i = n$: Պարզ է, որ այդ քանակը հավասար է $P_G(s_1, s_2, \dots, s_n)$ բազմանդամում $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_r^{m_r}$ անդամի գործակցին:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Դիցուք հարկավոր է գրել խորանարդի զագաթների իրարից պրույտով չստացվող երեք գույներով ներկումների քանակը: Պարզ է, որ ներկումները փրվում են $f : N \rightarrow R$ ֆունկցիաներով, որպես $N = \{1, 2, \dots, 8\}$, $R = \{1, 2, 3\}$: Պրույտները նկարագրված են նախորդ օրինակներից մեկում, որպես կառուցված է համապարասխան 24 փարր պարունակող խմբի ցիկլիկ ինդեքսը՝ $P(t_1, \dots, t_8) = \frac{1}{24}(t_1^8 + 6t_4^2 + 8t_1^2 t_3^2 + 9t_2^4)$: Այդ խումբը գործում է R^N -ի վրա և համաձայն Պոլյայի թեորեմի՝ իրարից պրույտով չստացվող ներկումների (ֆունկցիաների փարբեր ուղեծիրների) քանակը կստացվի, եթե

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} & \left((x_1 + x_2 + x_3)^8 + 6(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)^2 + \right. \\ & \left. + 8(x_1 + x_2 + x_3)^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^2 + 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^4 \right) \end{aligned}$$

բազմանդամում փեղադրենք մեկեր փոփոխականների փոխարեն: Այդ քանակը կլինի հավասար $\frac{1}{24}(3^8 + 6 \times 3^2 + 9 \times 3^2 \times 3^2 + 9 \times 3^4) = 333$:

2. Դիցուք հարկավոր է գրել խորանարդի զագաթների իրարից պրույտով չստացվող երեք գույներով այնպիսի ներկումների քանակը, որ առաջին գույնով

ներկված է երկու գազաթ, երկրորդով՝ ևս երկու գազաթ, իսկ մնացած չորս գազաթները ներկված են երրորդ գույնով: Պարզ է, որ հարկավոր է գրնել $x_1^2 x_2^2 x_3^4$ անդամի գործակիցը

$$\frac{1}{24} \left((x_1 + x_2 + x_3)^8 + 6(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)^2 + \right. \\ \left. + 8(x_1 + x_2 + x_3)^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^2 + 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^4 \right)$$

բազմանդամում: $(x_1 + x_2 + x_3)^8$ -ում $x_1^2 x_2^2 x_3^4$ անդամի գործակիցը հավասար է $\binom{8}{2} \binom{6}{2} = 420$: $6(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)^2 + 8(x_1 + x_2 + x_3)^2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^2$ -ում անդամի գործակիցը զրո է, իսկ $9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^4$ -ում՝ $9 \times \binom{4}{1} \binom{3}{1} = 108$: Ուստի, խնդրի պայրասխանն է $\frac{420+108}{24} = 22$:

1.23. Միովյան խմբեր

Ինչպես գիտենք Լանգրանժի թեորեմից, վերջավոր խմբում կամայական ենթախմբի կարգը խմբի կարգի բաժանարարն է: Այս մասում մենք կապացուցենք ինչ որ իմաստով հակադարձ պնդում, եթե խմբի կարգը բաժանվում է p^n -ի վրա, որտեղ p -ն պարզ թիվ է, ապա կամայական $s \leq n$ համար խմբում կգրնվի p^s կարգի ենթախումբ:

Նախ ապացուցենք մի քանի պարզ պնդում:

Լեմա 1.15. *Դիցուք H -ը և K -ն G վերջավոր խմբի ենթախմբեր են և $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$: HK բազմությունը տարրերի քանակի՝ $|HK|$ -ի համար ստույգ է՝*

$$|HK| = \frac{|H| |K|}{|H \cap K|} :$$

Ապացույց. Դիցուք $h \in H, k \in K$: Որոշենք այն $(h_1, k_1) \in H \times K$ գույգերի քանակը, որ $hk = h_1 k_1$: Դյուրին է տեսնել, որ $hk = h_1 k_1 \Rightarrow h_1^{-1} h = k_1 k^{-1} \in H \cap K$: Նշանակենք $t = h_1^{-1} h = k_1 k^{-1}$: Ստանում, ենք՝ $h_1 = ht^{-1}$ և $k_1 = tk$: Այսինքն յուրաքանչյուր $t \in H \cap K$ տարրին համապատասխանում է մի $(h_1, k_1) \in H \times K$ գույգ, որ $hk = h_1 k_1$: Ուստի, HK -ի տարրերի քանակը հավասար է

$$\frac{|H \times K|}{|H \cap K|}$$

և լեմմն ապացուցված է:

Նկատենք, որ այս լեմմի պնդումից հետևում է, որ եթե $H \cap K = \{e\}$, ապա $|HK| = |H||K|$ և HK -ի փարրերի ներկայացումը hk փեսքով, որպեսզի $h \in H$, $k \in K$ միակն է: Սա մենք պարզել էինք ուղիղ արտադրյալի ուսումնասիրման ժամանակ:

Լեմմա 1.16. *Դիցուք m -ը ամբողջ դրական թիվ է, իսկ p^α -ն պարզ թվի n -ը բացասական ամբողջ աստիճան է:*

$\binom{mp^\alpha - 1}{p^\alpha - 1}$ բինոմիալ գործակիցը լինելով ամբողջ թիվ չի բաժանվում p -ի վրա:

Ապացույց. Ըստ սահմանման ունենք՝

$$\binom{mp^\alpha - 1}{p^\alpha - 1} = \frac{(mp^\alpha - 1)(mp^\alpha - 2) \dots (mp^\alpha - (p^\alpha - 1))}{(p^\alpha - (p^\alpha - 1))(p^\alpha - (p^\alpha - 2)) \dots (p^\alpha - 1)} = \prod_{k=1}^{p^\alpha - 1} \frac{mp^\alpha - k}{k} :$$

Ապացուցենք, որ բոլոր $1 \leq k \leq p^\alpha - 1$ համար k և $mp^\alpha - k$ թվերը, միաժամանակ կան բաժանվում կամ էլ չեն բաժանվում p^s -ի վրա:

Դիցուք k -ն բաժանվում է p^s -ի վրա: Ակնհայտ է, որ $p^s < p^\alpha$ և $s < \alpha$: Ուստի $k = np^s$ և $mp^\alpha - k = mp^\alpha - np^s = p^s(mp^{\alpha-s} - n)$:

Դիցուք $mp^\alpha - k$ -ն բաժանվում է p^s -ի վրա և $mp^\alpha - k = np^s$: Եթե $s \geq \alpha$, ապա $p^\alpha(m - np^{s-\alpha}) = k \geq p^\alpha$ քանի որ $m - np^{s-\alpha} \geq 1$: Ուստի $s < \alpha$ և $k = p^s(mp^{s-\alpha} - n)$:

Այսպիսով, $\prod_{k=1}^{p^\alpha - 1} \frac{mp^\alpha - k}{k}$ արտադրյալում յուրաքանչյուր $\frac{mp^\alpha - k}{k}$ կոփորակի համարիչի և հայտարարի p^s փեսքի բաժանարարները միմյանց չէզոքացնում են և ուրեմն $\binom{mp^\alpha - 1}{p^\alpha - 1}$ -ը չի բաժանվում p -ի վրա: Լեմմն ապացուցված է:

Լեմմա 1.17. *Եթե H -ը և K -ն G խմբի ենթախումբեր են և բոլոր $h \in H$ համար փեղի ունի $h^{-1}Kh = K$ պայմանը, ապա $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ -ն նույնպես G խմբի ենթախումբ է:*

Ապացույց. Բավական է ստուգել, որ $(h_2k_2)^{-1}(h_1k_1) \in HK$: Պարզ է, որ $h_2^{-1}h_1 = h_3 \in H$ և $h_3^{-1}k_2^{-1}h_3 = k_3 \in K$: Ուստի $k_2^{-1}h_3 = h_3k_3$ և

$$(h_2k_2)^{-1}(h_1k_1) = k_2^{-1}h_2^{-1}h_1k_1 = k_2^{-1}h_3k_1 = h_3(k_3k_1) \in HK :$$

Լեմմն ապացուցված է:

Սահմանում. Դիցուք G -ն վերջավոր խումբ է և p^α -ն p պարզ թվի ամենամեծ աստիճանն է, որի վրա առանց մնացորդի բաժանվում է խմբի $(G : 1)$ կարգը: G խմբի H ենթախումբը կոչվում է p -**ենթախումբ**, եթե $(H : 1) = p^\beta$, $\beta \leq \alpha$:

p^α կարգի p -ենթախումբը կոչվում է **Սիլովյան p -ենթախումբ** G -ում:

G խմբի H_1 և H_2 ենթախմբերը կանվանենք **համալուծ**, եթե կգտնվի $g \in G$, որ $g^{-1}H_1g = H_2$: Նեշտությունը ստուգվում է, որ համալուծ ենթախմբերն իզոմորֆ են:

Թեորեմ 1.18 (Սիլովի թեորեմը). Դիցուք G -ն վերջավոր խումբ է, p -ն պարզ թիվ է, $(G : 1) = mp^\alpha$ և $(m, p) = 1$, այսինքն՝ $(G : 1)$ -ը չի բաժանվում $p^{\alpha+1}$ -ի վրա, ապա

1. կանայական β -ի համար, որ $1 \leq \beta \leq \alpha$, G -ում գոյություն ունի p^β կարգի p -ենթախումբ;
2. Սիլովյան p -ենթախմբերի n_p քանակը բավարարում է $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ բաղադրանքը;
3. կանայական երկու Սիլովյան p -ենթախմբեր իրար համալուծ են;
4. յուրաքանչյուր p -ենթախումբ պարունակվում է Սիլովյան p -ենթախմբի մեջ:

Ապացույց. Դիցուք $S = \{s \subseteq G \mid |s| = p^\beta\}$ (ինչպես միշտ $|s|$ -ը բազմություն փարբերի քանակն է): G խումբը գործում է S բազմության վրա հետևյալ կերպ՝ $g \in G$ և $s \in S$ համար $gs = \{gx \mid x \in s\}$: Ակնհայտ է, որ $|gs| = |s|$ և $es = s$, $g_1(g_2s) = (g_1g_2)s$: Նշանակենք $\tilde{m} = mp^{\alpha-\beta}$ և $(G : 1) = \tilde{m}p^\beta$: Դյուրին է տեսնել, որ $|S| = \binom{\tilde{m}p^\beta}{p^\beta} = \tilde{m} \binom{\tilde{m}p^\beta - 1}{p^\beta - 1}$: Նամաձայն Լեմմա 1.16՝ p թվի ամենամեծ աստիճանը, որի վրա բաժանվում է $|S|$ -ը, համընկնում է p թվի ամենամեծ աստիճանին, որի վրա բաժանվում է \tilde{m} -ը: Պարզ է, որ p -ի այդպիսի աստիճանը $p^{\alpha-\beta}$ -ն է: G խմբի գործողությունը S բազմության վրա փրոհում է վերջինս չհապովող ուղեծրերի: Եթե բոլոր ուղեծրերի երկարությունները բաժանվում են p թվի ավելի մեծ քան $p^{\alpha-\beta}$ -ն աստիճանի վրա, ապա $|S|$ -ն էլ կբաժանվի p -ի այդ աստիճանի վրա, ինչն անհնար է: Ուստի կգտնվի մի ուղեծիր, որի երկարությունը չի բաժանվում $p^{\alpha-\beta}$ -ից մեծ p -ի աստիճանի վրա: Ֆիքսենք որևէ

s էլեմենտ այդ ուղեծրից (այդ ուղեծիրը կնշանակենք ստանդարտ G_s նշանով) և դիտարկենք դրա ստաբիլ խումբը՝ $G_s = \{g \in G \mid gs = s\}$: Նամաձայն (1.25)-ի՝ $|G_s| = (G : G_s)$ և Լագրանժի թեորեմի՝

$$mp^\alpha = (G : 1) = (G : G_s)(G_s : 1) = |G_s|(G_s : 1) :$$

Քանի որ $|G_s|$ -ը չի բաժանվում $p^{\alpha-\beta}$ -ից մեծ p -ի աստիճանի վրա, ստանում ենք, որ $(G_s : 1)$ -ը բաժանվում է p^β -ի վրա և ուրեմն $p^\beta \leq (G_s : 1)$:

Մյուս կողմից ունենք, որ $(G_s : 1) \leq p^\beta$: Իսկապես, վերցնենք որևէ \tilde{x} փարր s բազմությունից: Պարզ է, որ $g\tilde{x} \in s$ բոլոր $g \in G_s$ համար, քանի որ $gs = \{gx \mid x \in s\} = s$: Եթե $g_1\tilde{x} = g_2\tilde{x}$ որևէ $g_1, g_2 \in G_s$ համար, ապա բազմապարկելով $g_1\tilde{x} = g_2\tilde{x}$ առնչությունն աջից \tilde{x}^{-1} -ով ստանում ենք՝ $g_1 = g_2$: Ուրեմն բոլոր $g\tilde{x}$ արտադրյալները, որպեսզի $g \in G_s$, փարբեր են և պարկանում են s բազմությանը: Ուստի $p^\beta = |s| > (G_s : 1)$:

Այսպիսով G_s ենթախումբը p^β կարգի p -ենթախումբ է G -ում և թեորեմի 1. պնդումն ապացուցված է:

Դիցուք H -ը Սիլովյան p -ենթախումբ է G -ում: Նշանակենք \mathfrak{H} -ով H -ն համալուծ բոլոր ենթախմբերի բազմությունը՝ $\mathfrak{H} = \{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$: H -ը գործում է \mathfrak{H} -ի վրա հետևյալ կերպ՝ $h \in H$ փարբը փանում է $\tilde{H} \in \mathfrak{H}$ ենթախումբը $h^{-1}\tilde{H}h = h^{-1}g^{-1}Hgh = (gh)^{-1}H(gh) \in \mathfrak{H}$ ենթախմբի մեջ: Տրիվիալ ստուգվում է, որ դա գործողություն է: Յուրաքանչյուր ուղեծրի երկարությունը p -ի աստիճան է, քանի որ այն հավասար է համապատասխան ստաբիլ խմբի ինդեքսին H -ում: Նամաձայն Լագրանժի թեորեմի, p -ենթախմբի ենթախմբերի թե կարգերը, թե ինդեքսները, լինելով p -ենթախմբի կարգի բաժանարարներ, p -ի աստիճաններ են:

Պարզ է, որ $H \in \mathfrak{H}$: Դիտարկենք H -ի ուղեծիրը՝ $\{h^{-1}Hh \mid h \in H\} = H$: Ապացուցենք, որ միայն H -ի ուղեծիրն է կազմված մեկ փարբից, այսինքն ունի 1 երկարություն: Դիցուք կգրնվի մեկ այլ $K \in \mathfrak{H}$, որ $\{h^{-1}Kh \mid h \in H\} = K$, այսինքն $h^{-1}Kh = K$ բոլոր $h \in H$: Նամաձայն Լեմմա 1.17-ի՝ $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ -ն ենթախումբ է G -ում: Նամաձայն Լեմմա 1.15-ի՝ $(HK : 1) = \frac{(H:1)(K:1)}{(H \cap K:1)}$: Սակայն ունենք, որ $(H : 1) = p^\alpha$ և քանի որ K -ն H -ի համալուծն է, ապա $(K : 1) = p^\alpha$: Ենթախմբերի հատումը նորից ենթախումբ է: Ուստի՝ $H \cap K \leq H$ և $(HK : 1) = p^\beta$, որպեսզի $0 \leq \beta \leq \alpha$: Ուրեմն HK -ն նույնպես

p -ենթախումբ է G -ում, $(HK : 1) = p^{2\alpha-\beta}$: Քանի որ $HK \leq G$, ապա $(HK : 1)$ -ն p^α -ի բաժանարարն է և $p^{2\alpha-\beta} \leq p^\alpha$: Ներկաբար, $p^\alpha \leq p^\beta$ և $\alpha = \beta$: Սրանում ենք, որ $(H \cap K : 1) = p^\alpha = (H : 1) = (K : 1)$ և $H = K$:

Այսպիսով բոլոր ուղեծրերի երկարությունները, բացի մեկից, p -ի դրական ասփիճաններ են: Ներկաբար ուղեծրերի երկարությունների գումարը՝ $|\mathfrak{H}|$ -ը $1 + pq$ տեսքի թիվ է, այսինքն՝ $|\mathfrak{H}| = 1 \pmod{p}$:

Դիցուք կամայական p -ենթախումբ պարունակվում է \mathfrak{H} -ի ենթախմբերից մեկում: Այստեղից Սիլովյան p -ենթախմբի դեպքում կբխի, որ բոլոր Սիլովյան p -ենթախմբերը համալուծ են H -ին և ուստի միմյանց (թեորեմի 3. պնդումը): Նաև կարացվի, որ \mathfrak{H} -ը դա բոլոր Սիլովյան p -ենթախմբերի բազմությունն է և $|\mathfrak{H}| = n_p \equiv 1 \pmod{p}$ (թեորեմի 2. պնդումը): Վերջապես կապացուցվի նաև թեորեմի 4. պնդումը:

Ապացուցենք այժմ, որ կամայական p -ենթախումբ պարունակվում է \mathfrak{H} -ի ենթախմբերից մեկում: Դիցուք K -ն p -ենթախումբ է, որը չի պարունակվում \mathfrak{H} -ի ենթախմբերից ոչ մեկում: K -ն գործում է \mathfrak{H} -ի վրա ճիշտ այնպես, ինչպես H -ը՝ $k \in K$ փարը փանում է $\tilde{H} \in \mathfrak{H}$ ենթախումբը

$$k^{-1}\tilde{H}k = k^{-1}g^{-1}Hgk = (gk)^{-1}H(gk) \in \mathfrak{H}$$

ենթախմբի մեջ: Դիցուք գոյություն ունի 1 երկարության ուղեծիր, այսինքն $\tilde{H} \in \mathfrak{H}$, որ $k^{-1}\tilde{H}k = \tilde{H}$ բոլոր $k \in K$: Ինչպես վերը բերված դափողություններում $K\tilde{H}$ -ն ենթախումբ է,

$$(K\tilde{H} : 1) = \frac{(K : 1)(\tilde{H} : 1)}{(\tilde{H} \cap K : 1)}$$

և $K\tilde{H}$ -ը p -ենթախումբ է: Սակայն $(\tilde{H} : 1) = p^\alpha$ և

$$\frac{(K : 1)}{(\tilde{H} \cap K : 1)} \geq 1,$$

հերկաբար $(K\tilde{H} : 1) \geq p^\alpha$: Ուրեմն $(K\tilde{H} : 1) = p^\alpha$ և $(K : 1) = (\tilde{H} \cap K : 1)$: Վերջին հավասարությունից խումբ է, որ $K \subseteq \tilde{H}$ ինչն անհնար է: Այսպիսով, բոլոր ուղեծրերի երկարությունները p -ի դրական ասփիճաններ են և $|\mathfrak{H}| \equiv 0 \pmod{p}$, ինչը նույնպես անհնար է: Ներկաբար, բոլոր p -ենթախմբերը պարունակվում են \mathfrak{H} -ի ենթախմբերից մեկում:

Թեորեմն ապացուցված է:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Ապացուցենք, որ θ -երեն 1.18-ում սահմանված n_p թիվը m -ի բաժանարարն է: Դիցուք G խումբը գործում է իր ենթախմբերի վրա հետևյալ կերպ՝ $g \in G$ փարրը փանում է H ենթախումբը $g^{-1}Hg$ ենթախմբի մեջ: θ -երեն 1.18-ից անմիջապես բխում է, որ բոլոր Սիլովյան p -ենթախմբերը կազմում են մեկ ուղեծիր, իսկ կամայական H Սիլովյան p -ենթախմբի ստաբիլ խումբը դա նրա նորմալիզատորն է՝ $N_H = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$: Ուրեմն համաձայն (1.25)-ի՝ $n_p = (G : N_H)$: Դյուրին է ստուգել, որ $m = (G : H) = (G : N_H)(N_H : H)$ և, հետևաբար, m -ը բաժանվում է n_p -ի վրա:

2. Ապացուցենք, որ եթե $(G : 1) = 15$, ապա G խումբը ցիկլիկ է: Դիցուք G խումբը գործում է իր ենթախմբերի վրա այնպես, ինչպես 1. օրինակում: Դիցուք H -ը Սիլովյան 5-ենթախումբն է, իսկ K -ն Սիլովյան 3-ենթախումբը: Ներկայացնենք $(K : 1) = 3$, $(H : 1) = 5$ և H -ն ու K -ն ցիկլիկ են: Տեսնում ենք, որ θ -երեն 1.12-ի՝ H -ը նորմալ է G -ում, ուստի $N_H = G$ և $(G : N_H) = 1$, այսինքն Սիլովյան 5-ենթախմբերի ուղեծիրը բաղկացած է միայն H -ից և H -ը միակ 5-ենթախումբն է: Սիլովյան 3-ենթախմբերի ուղեծրի երկարությունը հավասար է $(G : N_K)$ -ին: Պարզ է, որ $(G : N_K) \in \{1, 3, 5, 15\}$ և θ -երեն 1.18-ի համաձայն $(G : N_K) \equiv 1 \pmod{3}$, ուստի $(G : N_K) \notin \{3, 5, 15\}$ Ներկայացնենք K -ն միակ 3-ենթախումբ է: Դիցուք k -ն K -ի ծնիչն է, իսկ h -ը H -ի: Դիտարկենք kh -ով ձևավորված $\langle kh \rangle$ ցիկլիկ ենթախումբը G -ում: Ակնհայտ է, որ $kh \notin H \cup K$, ուստի kh -ը չի պարկանում G -ի և ոչ մի սեփական ենթախմբի, ուրեմն $\langle kh \rangle = G$:

ՕՂԱԿՆԵՐ ԵՎ ԴԱՇՏԵՐ

2.1. Մահմանումներ

Դիցուք A բազմության վրա ստեղծված են երկու գործողություն, որոնցից առաջինը կանվանենք «գումարում», իսկ երկրորդը՝ «բազմապատկում»:
Նամապատկանաբար կօգտվենք $+$ և \cdot նշաններից:

Մահմանում. $(A, +, \cdot)$ համակարգը կոչվում է **օղակ**, եթե

1. $(A, +)$ համակարգը փեղափոխելի խումբ է (միավոր փարբը նշանակվում է 0-ով);
2. $(ab)c = a(bc)$;
3. A -ում գոյություն ունի փարբ, որը նշանակվում է 1-ով, այնպիսին, որ $\forall a \in A$ համար $a1 = 1a = a$;
4. $(a + b)c = ac + bc$ և $a(b + c) = ab + ac$:

Եթե փեղի ունի նաև $ab = ba$ պայմանը A -ի բոլոր փարբերի համար, ապա օղակը կոչվում է **փեղափոխելի**:

Տեղափոխելի օղակը կոչվում է **դաշտ**, եթե յուրաքանչյուր ոչ գրոյական փարբ ունի հակադարձ ըստ բազմապատկման, այսինքն՝ $(\forall a \neq 0 \exists b) ab = ba = 1$:

Նշենք օղակների մի քանի փարբական, բայց կարևոր հատկություն.

a) $a0 = 0a = 0$;

իսկապես, $a + a0 = a1 + a0 \stackrel{\text{համաձայն 4}}{=} a(1 + 0) = a1 = a$, ուստի $a0 = 0$;

$$b) (-1)a = -a;$$

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a \quad \underbrace{=} \quad (1 + (-1))a = 0a = 0, \text{ ուստի } (-1)a = -a:$$

համաձայն 4

Այսուհետև միշտ կհամարենք, որ $0 \neq 1$, քանի որ հակառակ դեպքում $a = a1 = a0 = 0$ և օղակի բոլոր փարրերը հավասար են 0-ի, այսինքն՝ $A = \{0\}$:

Ամփոփելով վերը նշվածը՝ կարելի է ասել, որ օղակը այն հանրահաշվական համակարգն է, որում կարելի է գումարել, հանել և բազմապարկել, իսկ դաշարում նաև բաժանել:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Դյուրին է ստուգել, որ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ -ը տեղափոխելի օղակ է (դաշար չէ), իսկ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ և $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ -ը դաշարեր են:

2. Դիտարկենք $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ -ը, որտեղ \mathbb{Z}_n -ն ինչպես միշտ ըստ $\text{mod } n$ -ի մնացքների դասերի բազմությունն է: Ակնհայտ է, որ $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ -ը տեղափոխելի օղակ է: Ինչպես գիտենք, \mathbb{Z}_n -ում ըստ բազմապարկման հակադարձ ունեն միայն այն ոչ զրոյական փարրերը, որոնք փոխադարձաբար պարզ են մոդուլի հետ:

3. Ուրեմն $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ -ը դաշար է միայն, երբ n -ը պարզ թիվ է: Նշենք $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ օղակի մի կարևոր հատկություն ևս: Դիցուք $n = 6$, ապա $2 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{6}$: Սակայն ոչ $2 \equiv 0 \pmod{6}$ ոչ էլ $3 \equiv 0 \pmod{6}$, այսինքն այն բանից, որ փարրերի արտադրյալը հավասար է զրոյի չի հետևում, որ արտադրիչներից որևէ մեկը զրոյական է:

4. Նշանակենք $A[x]$ -ով x փոփոխականի A տեղափոխելի օղակից գործակիցներով բոլոր բազմանդամների բազմությունը: $A[x]$ -ը տեղափոխելի օղակ է բազմանդամների սովորական գումարման և բազմապարկման նկատմամբ:

5. $n \times n$ չափանի մատրիցների բազմությունը, որոնց փարրերը A օղակից են, օղակ է (ոչ տեղափոխելի) մատրիցների գումարման և բազմապարկման նկատմամբ:

6. Դիտարկենք $a + b\sqrt{2}$ տեսքի բոլոր թվերի բազմությունը, որտեղ a -ն և b -ն ռացիոնալ թվեր են: Դյուրին է համոզվել, որ այս բազմությունը դաշար է, եթե

գումարումը և բազմապարկումը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2};$$

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} :$$

7. Դիտարկենք $(0, 1)$ հարվածի վրա բոլոր անընդհար ֆունկցիաների բազմությունը: Այս բազմությունը տեղափոխելի օղակ է ֆունկցիաների գումարման և բազմապարկման նկատմամբ:

2.2. Ենթաօղակներ և օղակային հոմոմորֆիզմներ

Սահմանում. A օղակի B ենթաբազմությունը կոչվում է **ենթաօղակ**, եթե՝

1. $(B, +) \leq (A, +)$ – այսինքն, ըստ գումարման B -ն A -ի ենթախումբն է;
2. $1 \in B$;
3. $a, b \in B \Rightarrow ab \in B$ – այսինքն, B -ն փակ է բազմապարկման նկատմամբ:

Այլ կերպ ասած, օղակի որևէ ենթաբազմություն ենթաօղակ է, եթե օղակի գործողությունների սահմանափակումը տվյալ ենթաբազմության վրա այն դարձնում է օղակ:

Սահմանում. Դիցուք A_1 -ը և A_2 -ն օղակներ են:

$f : A_1 \rightarrow A_2$ արտապարկերումը կոչվում է **օղակային հոմոմորֆիզմ** (կամ ուղղակի **հոմոմորֆիզմ**) եթե

1. $f(0) = 0, f(1) = 1$;
2. $f(a + b) = f(a) + f(b)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$:

Եթե վերը նշված f արտապարկերումը փոխմիարժեքորեն արտապարկերում է A_1 -ը A_2 -ի վրա, ապա ասում են, որ օղակներն իրար **իզոմորֆ** են և f -ը կոչվում է **օղակային իզոմորֆիզմ**:

Փաստորեն, եթե դիտարկենք միայն գումարման գործողությունը, օղակային հոմոմորֆիզմը կվերածվի խմբերի հոմոմորֆիզմի:

Ինչպես և խմբերի դեպքում, այսուհետև մենք իրարից չենք փարբերի իզոմորֆ օղակները:

Յուրաքանչյուր հոմոմորֆիզմի հետ կապվում են հետևյալ երկու բազմությունները միջուկը՝

$$\ker f = \{a \in A_1 \mid f(a) = 0\}$$

և պատկերը՝

$$\operatorname{Im} f = \{b \in A_2 \mid (\exists a \in A_1) f(a) = b\} :$$

Դյուրին է ստուգել, որ պատկերը ենթաօղակ է: Իսկապես, քանի որ հոմոմորֆիզմը խմբերի հոմոմորֆիզմ է գումարման գործողության նկատմամբ, ապա պատկերը նաև խմբերի հոմոմորֆիզմի պատկեր է, ուստի և այն ենթախումբ է և $(\operatorname{Im} f, +) \leq (A_2, +)$: Ակնհայտ է, որ $f(0) = 0$ և $f(1) = 1 \in \operatorname{Im} f$: Եթե $b_1, b_2 \in \operatorname{Im} f$, ապա կգտնվեն a_1 և a_2 այնպիսին, որ $b_1 = f(a_1)$, $b_2 = f(a_2)$: Պարզ է, $f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2) = b_1 b_2$, ուրեմն $b_1 b_2 \in \operatorname{Im} f$ և պատկերը ենթաօղակ է: Ինչպես և խմբերի դեպքում, առանց ընդհանրությունը խախտելու, հարմարության համար կարող ենք համարել, որ $\operatorname{Im} f = A_2$:

Միջուկը չի կարող լինել ենթաօղակ A_1 -ում, որովհետև $f(1) = 1$ և $1 \notin \ker f$: Սակայն $(\ker f, +) \leq (A_1, +)$, քանի որ միջուկը նաև խմբերի հոմոմորֆիզմի միջուկն է և ենթախումբ է A_1 -ում: Միջուկի համար փեղի ունի մի շար կարևոր պայման, որն ավելի ուժեղ է քան ենթաօղակի սահմանման 3-րդ պայմանը (փակ լինելն ըստ բազմապարկման).

$$a \in \ker f, x \in A_1 \Rightarrow ax \in \ker f, xa \in \ker f : \quad (2.1)$$

Իսկապես, $f(ax) = f(a)f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$: Այլ կերպ ասած, միջուկը պարունակում է իր փարբերի բոլոր պատկիկները:

Անդրադառնանք հոմոմորֆիզմի կառուցվածքին:

Դիցուք $f : A \rightarrow \operatorname{Im} f$ արքայապատկերումն օղակային հոմոմորֆիզմ է: Քանի որ այն նաև խմբային հոմոմորֆիզմ է գումարման գործողության նկատմամբ, ապա համաձայն իզոմորֆիզմի մասին թեորեմի՝ սրանում ենք, որ $(A/\ker f, +)$ ֆակտոր-խումբն իզոմորֆ է $(\operatorname{Im} f, +)$ պատկերին: Ինչպես գիտենք, $A/\ker f$ ֆակտոր-խմբի փարբերն ըստ $\ker f$ -ի հարակից դասերն են, այսինքն՝

$$a + \ker f = \{a + x \mid x \in \ker f\}$$

բազմությունները: Ցույց փանք, որ այդ դասերը ոչ միայն կարելի է գումարել, այլ նաև կարելի է բազմապարկել:

Սահմանենք հարակից դասերի արտադրյալը հետևյալ բնական եղանակով. $(a + \ker f)(b + \ker f) \equiv ab + \ker f$: Ստուգենք այս սահմանման կոռեկտությունը: Դիցուք $a_1 \in a + \ker f$, $b_1 \in b + \ker f$: Ապացուցենք, որ $a_1 b_1 \in ab + \ker f$: Ունենք, որ $a_1 - a \in \ker f$ և $b_1 - b \in \ker f$: Ներկայացրեք,

$$a_1 b_1 - ab = a_1 b_1 - a_1 b + a_1 b - ab = a_1(b_1 - b) + (a_1 - a)b$$

և համաձայն (2.1)-ի $a_1(b_1 - b) \in \ker f$, $(a_1 - a)b \in \ker f$: Ուստի՝

$$a_1 b_1 - ab = a_1(b_1 - b) + (a_1 - a)b \in \ker f$$

և

$$a_1 b_1 \in ab + \ker f :$$

Այսպիսով (2.1) պայմանը թույլ փվեց սահմանել հարակից դասերի բազմապարկումը: Նասարակ վարժություն է ստուգել, որ $A/\ker f$ ֆակտոր-խումբը հանդիսանում է օղակ հարակից դասերի գումարման և բազմապարկման նկատմամբ: Այդ օղակը կանվանենք **ֆակտոր-օղակ** և պարզ է, որ զրոյական փարթը դա $0 + \ker f = \ker f$ -ն է, իսկ մեկը՝ $1 + \ker f$ -ն է:

Նիշենք, որ $(A/\ker f, +)$, ֆակտոր-խմբի և $(\text{Im} f, +)$ պարկերի իզոմորֆիզմն իրականացվում է մի g արտապարկերմամբ, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ. $g(a + \ker f) = f(a)$: Զանի որ սա խմբերի իզոմորֆիզմ է, ապա

$$g((a_1 + \ker f) + (a_2 + \ker f)) = g(a_1 + \ker f) + g(a_2 + \ker f),$$

$$g(0 + \ker f) = g(\ker f) = f(0) = 0 :$$

Նանդվենք այժմ, որ g -ն նաև օղակային իզոմորֆիզմ է՝ $g(1 + \ker f) = f(1) = 1$ և

$$g((a_1 + \ker f)(a_2 + \ker f)) = g(a_1 a_2 + \ker f) =$$

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2) = g(a_1 + \ker f) g(a_2 + \ker f) :$$

Այսպիսով ապացուցեցինք հետևյալ պնդումը.

Թեորեմ 2.1. $f : A_1 \rightarrow A_2$ օղակային հոմոմորֆիզմի դեպքում $A_1/\ker f$ ֆակտոր-օղակն իզոմորֆ է $\text{Im} f$ պարկերին:

2.3. Իդեալներ

Սահմանում. A օղակի B ենթաբազմությունը կոչվում է **ձախ իդեալ**, եթե

1. $(B, +) \leq (A, +)$ – այսինքն, ըստ գումարման B -ն A -ի ենթախումբ է;
2. $BA \subseteq B$, որպեսզի $BA \equiv \{ax \mid a \in B, x \in A\}$:

Նման եղանակով սահմանվում են աջ և երկկողմանի իդեալները: Ոչ էական մանրամասների մեջ չխորանալու համար այսուհետև կդիտարկենք միայն փոփոխելի օղակները և *օղակ* անվանումը կնշանակի *փոփոխելի օղակ*: Դա մեզ թույլ կտա միավորել ձախ, աջ և երկկողմանի իդեալների դեպքերը, քանի որ փոփոխելի օղակների համար այդ երեք գաղափարները համընկնում են: Այդ պարճառով այսուհետև կօգտագործենք **իդեալ** անվանումը:

Կամայական A օղակ ունի առնվազն երկու իդեալ՝ A -ն և $\{0\}$ -ն: Այս իդեալները կոչվում են **տրիվիալ իդեալներ**, մնացած բոլորը՝ **ոչ տրիվիալ**:

Պնդում 2.2. Դիցուք B -ն A օղակի իդեալ է և գոյություն ունի $a \in B$, որն ունի հակադարձ ըստ բազմապատկման: Այդ դեպքում $B = A$:

Իրոք, $1 = aa^{-1} \in B$ համաձայն իդեալի սահմանման 2. կետի, ուրեմն, համաձայն նույն 2. կետի, B -ին է պատկանում նաև 1 -ի կամայական պատիկը, այսինքն կամայական $x \in A$ համար $x = 1 \cdot x \in B$, ուստի և $B = A$:

Ներևանք. Դաշտն ունի միայն տրիվիալ իդեալներ:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Դիտարկենք ամբողջ թվերի \mathbb{Z} օղակը: Ինչպես գիտենք, ըստ գումարման ենթախմբերն են բոլոր $m\mathbb{Z} = \{mx \mid x \in \mathbb{Z}\}$, փեսքի բազմությունները: Եթե $mx \in m\mathbb{Z}$ և $n \in \mathbb{Z}$, ապա $(mx)n = m(xn)$, որպեսզի $xn \in \mathbb{Z}$: Ուրեմն $m\mathbb{Z}$ -ը իդեալ է:

2. Դիցուք A -ն դաշտ է: Նշանակենք $A[x]$ -ով x փոփոխականի այն բազմանդամների օղակը, որոնց գործակիցները A -ից են: Դիցուք $\alpha \in A$: Նշանակենք $F(\alpha) \equiv \{f \in A[x] \mid f(\alpha) = 0\}$: Այսինքն, $F(\alpha)$ -ն բոլոր բազմանդամների բազմությունն է, որոնց համար α -ն արմատ է: Դիտարկենք $F(\alpha)$ -ն իդեալ է $A[x]$ -ում:

3. Դիցուք A -ն օղակ է և $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$: Նշանակենք (a_1, a_2, \dots, a_n) -ով հերկյալ բազմությունը՝

$$\{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in A\} :$$

(a_1, a_2, \dots, a_n) -ը իդեալ է A -ում:

Ինչպես րեսանք նախորդ բաժնում օղակային հոմոմորֆիզմի միջուկն իդեալ է: Փաստորեն իդեալ լինելը համարժեք է հոմոմորֆիզմի միջուկ լինելուն (այսինքն իդեալները խաղում են նորմալ ենթախմբերի դերն օղակների դեպքում):

Դիցուք B -ն A օղակի իդեալն է: Դիֆարկենք $(A/B, +)$ ֆակտոր-խումբը (դիֆարկելով միայն գումարման գործողությունը): Ճիշտ այնպես, ինչպես վարվեցինք միջուկի ուսումնասիրման դեպքում նախորդ բաժնում սահմանվում է հարակից դասերի արտադրյալը՝ $(a + B)(b + B) \equiv ab + B$, և ստուգվում է այդ սահմանման կոռեկտությունը: Ակնհայտ է, որ A/B -ն դառնում է օղակ (տեղափոխելի): Այսպիսով տեսնում ենք, որ եթե B -ն A օղակի իդեալն է, ապա A/B -ն օղակ է, այսինքն $(a + B)(b + B) \equiv ab + B$ բանաձևով սահմանվում է բազմապարկումը A/B -ում: Տեղի ունի նաև հակառակ պնդումը. եթե A օղակի որևէ B ենթաբազմության համար (որը հանդիսանում է ենթախումբ ըստ գումարման) $(a + B)(b + B) \equiv ab + B$ բանաձևը սահմանում է հարակից դասերի արտադրյալ և A/B -ն օղակ է, ապա B -ն A օղակի իդեալն է: Բավական է ստուգել իդեալի սահմանման 2. կետը: Դիցուք $a \in B$ և $x \in A$: Ունենք, որ $(a + B)(x + B) \equiv ax + B$: Սակայն $a + B = B$ դասը A/B օղակի զրոն է, հերևաբար $ax + B$ -ն էլ հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $ax + B = B$: Քանի որ $ax + B = B \Leftrightarrow ax \in B$ ստանում ենք, որ $a \in B$ և $x \in A \Rightarrow ax \in B$ և իդեալի սահմանման 2. կետը ստույգ է:

Դիցուք այժմ B -ն A օղակի իդեալն է: Խմբերի դեպքի նման կառուցենք հերկյալ կանոնական հոմոմորֆիզմը.

$$f : A \rightarrow A/B,$$

$$f(a) = a + B :$$

Գտնենք f -ի միջուկը.

$$a \in \ker f \Leftrightarrow f(a) = 0 + B \Leftrightarrow a + B = B \Leftrightarrow a \in B :$$

Այսպիսով, $\ker f = B$ և յուրաքանչյուր իդեալ հանդիսանում է օղակային հոմոմորֆիզմի միջուկ:

2.4. Մաքսիմալ և պարզ իդեալներ

Սահմանում. A օղակի B իդեալը կոչվում է **մաքսիմալ**, եթե այն բանից, որ C -ն նույնպես իդեալ է A -ում և $B \subset C$ հետևում է, որ $C = A$:

A օղակի B իդեալը կոչվում է **պարզ**, եթե րեղի ունի հետևալը՝ $ab \in B \Rightarrow a \in B$ կամ $b \in B$:

Փաստորեն մաքսիմալ իդեալը այնպիսի իդեալ է, որը հնարավոր չէ ընդգրկել մեկ այլ ոչ փրիմիալ իդեալի մեջ:

Պարզ իդեալի գաղափարը բացահայտելու համար ներմուծենք մի նոր և շար կարևոր օղակների դաս:

Սահմանում. A օղակը կոչվում է **ամբողջ**, եթե $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ կամ $b = 0$:

Կամայական դաշտ ամբողջ օղակ է: Ամբողջ թվերի և որևէ դաշտից գործակիցներով բազմանդամների օղակներն ամբողջ են: Ամբողջ չեն մնացքների դասերի օղակները բաղադրյալ մոդուլի դեպքում (տեսեք օրինակ 2-ը օղակների սահմանումից հետո բերված օրինակներում): Ամբողջ չեն նաև մաքրիցների օղակները՝

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

Այժմ արտագրենք պարզ իդեալի սահմանման պայմանը հետևյալ կերպ.

$$ab + B = B \Rightarrow a + B = B \text{ կամ } b + B = B :$$

Սա իր հերթին համարժեք է

$$(a + B)(b + B) = 0 + B \Rightarrow a + B = 0 + B \text{ կամ } b + B = 0 + B :$$

պայմանին: Անցնելով A/B ֆակտոր-օղակին՝ ստանում ենք, որ B -ն պարզ իդեալ է միայն և միայն այն դեպքում, երբ A/B -ն ամբողջ է:

Թեորեմ 2.3. *Մաքսիմալ իդեալը պարզ է:*

Ապացույց. Դիցուք B -ն A օղակի մաքսիմալ իդեալն է և $ab \in B$: Եթե $a \in B$, ուրեմն B -ն պարզ է: Դիցուք $a \notin B$: Ցույց փանք, որ այդ դեպքում $b \in B$:

Կառուցենք $\{a\} \cup B$ բազմությունը պարունակող փոքրագույն իդեալը A -ում: Այդ իդեալը պետք է առնվազն պարունակի բոլոր ax փեսքի փարրերը կամայական $x \in A$ համար: Նաև այն պետք է պարունակի բոլոր $ax + y$ փեսքի փարրերը, որպեսզի $y \in B$: Դիփարկենք $\{ax + y \mid x \in A, y \in B\}$ բազմությունը, որը կնշանակենք C -ով: Ստուգենք, որ C -ն իդեալ է A -ում: Նախ ստուգենք, որ C -ն ենթախումբ է ըստ գումարման՝

$$(ax_1 + y_1) - (ax_2 + y_2) = a(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \in C,$$

քանի որ $y_1 - y_2 \in B$ (B -ն իդեալ է): Իդեալի սահմանման երկրորդ պայմանը ստուգելու համար դիփարկենք $(ax + y)z$, որպեսզի $ax + y \in C$ իսկ $z \in A$: Ունենք՝ $(ax + y)z = a(xz) + yz$: Սակայն ակնհայտ է, որ $xz \in A$ և $yz \in B$, քանի որ B -ն իդեալ է և $y \in B$: Ուստի, $(ax + y)z \in C$ և C -ն իդեալ է A -ում:

Պարզ է, որ $B \subseteq C$, քանի որ B -ի բոլոր փարրերը սրացվում են, եթե $ax + y$ -ի մեջ փեղադրենք $x = 0$ բոլոր $y \in B$ համար: Նաև պարզ է, որ $a \in C$, քանզի $a \cdot 1 + 0 \in C$: Ըստ ենթադրության $a \notin B$, ուրեմն $B \subset C$: Բայց B -ն մաքսիմալ իդեալ է, հետևաբար $C = A$ և $1 \in C$: Կգտնվեն $x_0 \in A$ և $y_0 \in B$ այնպիսին, որ $1 = ax_0 + y_0$:

Բազմապարկենք վերջին հավասարությունը b -ով՝ $b = abx_0 + by_0$: Ունենք, որ $ab \in B$, ուրեմն $abx_0 \in B$, քանի որ B -ն իդեալ է: Նույն պատճառով էլ $by_0 \in B$ և $b = abx_0 + by_0 \in B$: Սրացանք, որ $b \in B$ և թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 2.4. Որպեսզի A օղակի B իդեալը լինի մաքսիմալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ A/B ֆակտոր-օղակը լինի դաշտ:

Ապացույց. Նախ ճշտենք, թե ինչ է նշանակում A/B -ի դաշտ լինելը: A/B -ն փեղափոխելի օղակ է, ուստի այն դաշտ է միայն եթե ամեն մի ոչ զրոյական փարր ունի հակադարձ ըստ բազմապարկման: A/B -ի ոչ զրոյական փարրերն են $a + B$ փեսքի այն հարակից փարրերը, որոնց համար $a \notin B$: Այն, որ $a + B$ -ն ունի հակադարձ, նշանակում է, որ կգտնվի մեկ այլ $b + B$ հարակից դաս, որ $(a + B)(b + B) = 1 + B$: Սակայն $(a + B)(b + B) = ab + B$, ուրեմն $ab + B = 1 + B$ և սա համարժեք է հետևյալ պայմանին՝

$$(\forall a \notin B)(\exists b)ab - 1 \in B :$$

Այսպիսով թեորեմի պնդումը համարժեք է հետևյալին.

$$B \text{ իդեալը մաքսիմալ է} \Leftrightarrow (\forall a \notin B)(\exists b)ab - 1 \in B :$$

Սկզբից ապացուցենք առաջին մասը՝ B իդեալը մաքսիմալ է $\Rightarrow (\forall a \notin B)(\exists b)ab - 1 \in B$:

Դիցուք $a \notin B$: Կառուցենք հետևյալ իդեալը՝

$$C = \{ax + y \mid x \in A, y \in B\} :$$

Թեորեմ 2.3-ում ապացուցել ենք, որ C -ն իդեալ է և $B \subset C$: Քանի որ B -ն մաքսիմալ է, ապա $C = A$ և կգտվեն $x_0 \in A, y_0 \in B$, այնպես որ $1 = ax_0 + y_0$: Ներկաբար, $ax_0 - 1 = -y_0 \in B$ և վերցնելով $b = x_0$, ապացուցում ենք թեորեմի պնդման առաջին մասը:

Այժմ ապացուցենք թեորեմի պնդման երկրորդ մասը՝

$$(\forall a \notin B)(\exists b)ab - 1 \in B \Rightarrow B \text{ իդեալը մաքսիմալ է:}$$

Դիցուք գոյություն ունի այնպիսի C իդեալ, որ $B \subset C$ և $a \in C \setminus B$: Քանի որ $a \notin B$ գոյություն ունի b , որ $ab - 1 \in B$: Սակայն $B \subset C$, ուստի $ab - 1 \in C$: C -ն իդեալ է և $a \in C$, ուրեմն $ab \in C$ և վերջապես, $1 \in C$: Նամաձայն Պնդում 2.2-ի՝ $C = A$ և B -ն մաքսիմալ իդեալ է:

Դիպարկենք Թեորեմ 2.4-ի մի շար կարևոր մասնավոր դեպք:

Նախ պարզենք բազմանդամների օղակների իդեալների կառուցվածքը:

Դիցուք K -ն դաշտ է: Նշանակենք $K[x]$ -ով x փոփոխականի բոլոր բազմանդամների բազմությունը, որոնց գործակիցները K դաշտից են: Ակնհայտ է, որ $K[x]$ -ը փեղափոխելի օղակ է: $f(x)$ բազմանդամի աստիճանը կնշանակենք ինչպես միշտ $\deg f(x)$ -ով: Եթե M -ը իդեալ է $K[x]$ -ում և պարունակում է գոնե մեկ հար գրո աստիճանի բազմանդամ, ապա, հաշվի առնելով, որ ըստ բազմապարկման հակադարձ ունեն միայն զրոյական աստիճանի բազմանդամները, համաձայն Պնդում 2.2-ի ստացվում է, որ $M = K[x]$: Մյուս ծայրահեղ դեպքն է, երբ $M = \{0\}$: Դիցուք $M \neq K[x]$ և $M \neq \{0\}$: Այս դեպքում M -ում կգտնվի դրական աստիճանի բազմանդամ և, հետևաբար, ամենափոքր դրական աստիճանի բազմանդամ և չկա գրո աստիճանի որևէ բազմանդամ: Ամենափոքր դրական աստիճանի բազմանդամը միակը չէ, այն որոշված է

հասարակություն գործակցի ճշտությամբ: Իսկապես, իդեալի սահմանումից հետևում է, որ $f(x) \in M \Leftrightarrow \lambda f(x) \in M$, $\lambda \neq 0$: Որպեսզի որոշակի դարձնենք ամենափոքր դրական աստիճանի բազմանդամի ընտրությունը, կայանանավորվենք վերցնել նորմավորված բազմանդամը, այսինքն այն բազմանդամը, որի x փոփոխականի ամենաբարձր աստիճանի գործակիցը 1 է: Նշանակենք $f(x)$ -ով M իդեալի ամենափոքր դրական աստիճանի նորմավորված բազմանդամը: Եթե $0 \neq g(x) \in M$, ապա $\deg g(x) \geq \deg f(x)$: Բաժանենք $g(x)$ -ը $f(x)$ -ի վրա՝ $g(x) = f(x)h(x) + r(x)$: Դյուրին է փեսնել, որ համաձայն իդեալի սահմանման 2-րդ պայմանի $f(x)h(x) \in M$ և համաձայն 1-ին պայմանի $r(x) = g(x) - f(x)h(x) \in M$: Եթե $\deg r(x) > 0$, ապա $\deg r(x) < \deg f(x)$ և M -ը կարրունակի $f(x)$ -ի աստիճանից փոքր դրական աստիճանի բազմանդամ, ինչն անհնար է: Ուստի, $r(x) = 0$ և $g(x)$ -ը բաժանվում է $f(x)$ -ի վրա առանց մնացորդի: Ուրեմն

$$M = \{f(x)h(x) \mid h(x) \in K[x]\},$$

այսինքն իդեալը բաղկացած է ամենափոքր դրական աստիճանի նորմավորված բազմանդամի պարիկներից: Այսպիսի իդեալները (երբ բոլոր փարբերը մեկ փարբի պարիկներն են) կոչվում են **գլխավոր** իդեալներ, իսկ $f(x)$ բազմանդամը կոչվում է իդեալի **ձնորդ** կամ **ձնիչ**: Այն դեպքերում երբ $M = K[x]$ կամ $M = \{0\}$, իդեալները նույնպես գլխավոր են, քանի որ ձևված են համապարասխանաբար 1 և 0 բազմանդամներով:

Վերադառնանք Թեորեմ 2.4-ի մասնավոր դեպքին: Դիցուք $f(x)$ -ն անվերածելի բազմանդամ է (այսինքն՝ $f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow \deg g(x) = 0$ կամ $\deg h(x) = 0$) $K[x]$ -ից: Դյուրին է փեսնել, որ հետևյալ բազմությունը՝ $(f) = \{f(x)g(x) \mid g(x) \in K[x]\}$, մաքսիմալ իդեալ է $K[x]$ -ում: Իսկապես փրիվիալ է, որ (f) -ը իդեալ է: Դիցուք այն պարունակվում է մեկ այլ իդեալի մեջ՝ $(f) \subset M \subseteq K[x]$: Նշանակենք $g(x)$ -ով M իդեալի ձնորդը՝ $M = (g)$: Պարզ է, որ $f(x) \in (g) = M$, ուրեմն $f(x) = g(x)h(x)$: Սակայն $f(x)$ -ն անվերածելի է և կամ $\deg g(x) = 0$ կամ $\deg h(x) = 0$: Եթե $\deg h(x) = 0$, ապա $g(x) = f(x)h^{-1}(x) \in (f)$ և $g(x)$ -ին պարիկ բազմանդամը կլինի պարիկ նաև $f(x)$ -ին, իսկ դա կնշանակի, որ $(f) = M$, ինչն անհնար է: Ուրեմն, $\deg g(x) = 0$: Նամաձայն պնդում 2.2-ի՝ $(g) = M = K[x]$ և (f) իդեալը մաքսիմալ է: Այժմ կիրառենք Թեորեմ 2.4-ը (f) մաքսիմալ իդեալին՝ $K[x]/f$ ֆակտոր-օղակը դաշտ

է: Ավելի մանրամասն ուսումնասիրենք $K[x]/(f)$ դաշտը: Ամեն մի հարակից դաս $K[x]/(f)$ -ից ունի հետևյալ տեսքը՝

$$g(x) + (f) = \{g(x) + f(x)h(x) \mid h(x) \in K[x]\} :$$

Պարզ է, որ եթե $r(x)$ -ը $g(x)$ -ի $f(x)$ -ի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդն է, ապա $g(x) = f(x)s(x) + r(x)$ և

$$g(x) + f(x)h(x) = f(x)s(x) + r(x) + f(x)h(x) = r(x) + f(x)(s(x) + h(x)) :$$

Ուրեմն, $g(x) + (f) = r(x) + (f)$ և $K[x]/(f)$ -ից յուրաքանչյուր հարակից դասում կարելի է ընտրել այնպիսի ներկայացուցիչ, որը կամ 0-ն է ((f) -ի դեպքում), կամ էլ մի բազմանդամ է, որի աստիճանը $f(x)$ -ի աստիճանից փոքր է: Այսպիսով $K[x]/(f)$ դաշտի փարրերն են $r(x) + (f)$ հարակից դասերը, որտեղ $r(x)$ -ը կամ 0-ն է կամ էլ $K[x]$ -ի $f(x)$ -ի աստիճանից փոքր աստիճան ունեցող կամայական բազմանդամ է: Այդ դաշտն ակնհայտորեն իզոմորֆ է հետևյալ ավելի մաքուր նկարագրություն ունեցող դաշտին: Դիցուք $n = \deg f(x)$: Նշանակենք $K_n[x]$ -ով $K[x]$ -ի բազմանդամների բազմությունը, որոնց աստիճանները փոքր են n -ից: Ակնհայտ է, որ $K[x]/(f)$ դաշտի փարրերի և $K_n[x]$ -ի միջև կարելի է իրականացնել փոխմիարժեք համապարասխանեցում՝ նույնացնելով $r(x) + f(x)$ հարակից դասերը $r(x)$ բազմանդամներին: $K_n[x]$ -ի վրա բնականորեն որոշվում են բազմանդամների ըստ $\text{mod } f(x)$ -ի գումարման և բազմապարկման գործողությունները, որոնք օղակի կառուցվածք են սահմանում $K_n[x]$ -ի վրա: Վերը նշված փոխմիարժեք համապարասխանեցումն իրականացնում է իզոմորֆիզմ $K[x]/(f)$ -ի և $K_n[x]$ -ի միջև: Ուստի $K_n[x]$ -ը դաշտ է:

Կոնկրետացնելով Թեորեմ 2.4-ի վերը նկարագրված մասնավոր դեպքի գլխավոր իդեալի ծնորդի՝ $f(x)$ անվերածելի բազմանդամի տեսքը՝ կարելի է լուծել մի շարք կարևորագույն խնդիրներ: Ստորև կդիտարկենք այդպիսի երեք օրինակ:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Ինչպես հայտնի է $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ բազմանդամը (հիշենք, որ \mathbb{R} -ով նշանակել ենք իրական թվերի, իսկ \mathbb{C} -ով կոմպլեքս թվերի դաշտերը) չունի իրական արմար: Փորձենք Թեորեմ 2.4-ի օգնությամբ կառուցել իրական թվերի

դաշպի այնպիսի ընդլայնում, որում $x^2 + 1$ բազմանդամը կունենա արմար: Այդ նպարակով կառուցենք $K[x]/(f)$ և $K_n[x]$ դաշպերը, որոնք փվյալ դեպքում կլինեն $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ և $\mathbb{R}_2[x]$ դաշպերը: Դյուրին է նկարագրել $\mathbb{R}_2[x]$ -ի փարրերը: $\mathbb{R}_2[x] = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ և հաշվի առնելով

$$x^2 \equiv -1 \pmod{(x^2 + 1)} \quad (2.2)$$

առնչությունը օղակային գործողություններն ըստ $\pmod{(x^2 + 1)}$ -ի կարարվում են հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1x) + (a_2 + b_2x) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x \\ (a_1 + b_1x)(a_2 + b_2x) &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)x : \end{aligned} \quad (2.3)$$

Մյուս կողմից պարզ է, որ \mathbb{R} -ն իզոմորֆ է $\mathbb{R}_2[x]$ -ի $a + 0x$ փեսքի բազմանդամների ենթադաշպին: Այսինքն $\mathbb{R}_2[x]$ դաշպը կարելի է դիփարկել որպես իրական թվերի դաշպի ընդլայնում և $y^2 + 1 \in \mathbb{R}_2[x][y]$: Այս նոր դաշպում $y^2 + 1$ բազմանդամն ունի երկու արմար (պարզ է, որ ավելի շար արմար լինել չի կարող): Իսկապես, դիփարկենք $\mathbb{R}_2[x]$ -ի հետևյալ փարրը $0 + 1x$: Ճիշտ է, որ

$$(0 + 1x)^2 = (0 + 1x)(0 + 1x) \quad \underbrace{=}_{\text{համաձայն (2.2)}} \quad -1$$

և $(0 + 1x)^2 + 1 = 0$, այսինքն $0 + 1x$ -ը $y^2 + 1$ (պարզ է որ նաև $x^2 + 1$) բազմանդամի արմարն է: Մյուս արմարը $0 - 1x$ -ն է: Փաստորեն մենք կառուցեցինք կոմպլեքս թվերի \mathbb{C} դաշպը, քանի որ ակնհայտ է, որ $a + bi \mapsto a + bx$ համապարասխանեցումը սահմանում է իզոմորֆիզմ \mathbb{C} -ի և $\mathbb{R}_2[x]$ -ի միջև: Փոխարինելով x նշանը կեղծ միավորի i նշանով (2.3)-ը վերածվում է կոմպլեքս թվերի գումարման և բազմապարկման բանաձևերին: Այս օրինակը շար ուսանելի է այն առումով, որ մեզ հաջողվեց բնական ձևով (առանց կեղծ միավորի որևէ վերացական գաղափար ներմուծելու և որպես դրա հիմնավորում բովանդակալից մեկնաբանություն փնտրելու) ընդլայնել իրական թվերի դաշպը, սրանալով կոմպլեքս թվերի դաշպը: Այսպիսով, մենք սրացանք միավար եղանակ թվային դաշպի այնպիսի ընդլայնման կառուցման համար, որում փվյալ արմար չունեցող բազմանդամն ունի արմարներ:

2. Այս օրինակում $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ (այսպեղ \mathbb{Q} -ն ռացիոնալ թվերի դաշպն է): Պարզ է, որ $x^2 - 2$ -ը չունի ռացիոնալ արմար: Կիրառելով Թեորեմ 2.4-ը՝

ստանում ենք \mathbb{Q} -ի $\mathbb{Q}_2[x] = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ընդլայնումը: Այս դաշտում գործողությունները կատարվում են հետևյալ կերպ (հաշվի առնելով $x^2 \equiv 2 \pmod{(x^2 - 2)}$ առնչությունը).

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1x) + (a_2 + b_2x) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x \\ (a_1 + b_1x)(a_2 + b_2x) &= (a_1a_2 - 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)x\end{aligned}$$

Դիտարկենք $y^2 - 2$ բազմանդամը: Այն ունի արմատ $\mathbb{Q}_2[x]$ -ում $0 + 1x$ տարրը: Իսկապես

$$(0 + 1x)(0 + 1x) = 2$$

և $(0 + 1x)^2 - 2 = 0$:

Փաստորեն, մենք կառուցեցինք $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ թվերի քառակուսային դաշտը (x -ը համապատասխանում է $\sqrt{2}$ նշանին): Այս օրինակում ևս, օգտվելով միավոր եղանակից, կարողացանք ընդլայնել ռացիոնալ թվերի դաշտն այնպես, որ $x^2 - 2$ բազմանդամն ունենա արմատ և ելնելով ռացիոնալ թվերից՝ ներմուծեցինք $\sqrt{2}$ իռացիոնալ թիվը:

3. Թեորեմ 2.4-ի մեկ այլ կարևոր կիրառության օրինակ կրեսնենք վերջավոր դաշտերի կառուցման ժամանակ:

2.5. Քանոթիների օղակներ և դաշտեր

Նախորդ օրինակներում տեսանք, թե ինչպես ելնելով փրկած օղակից կամ դաշտից՝ Թեորեմ 2.4-ի օգնությամբ կարելի է կառուցել վերջիններիս ընդլայնումները: Դիտարկենք նման մի իրավիճակ: Դիցուք փրկած է $2x - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ բազմանդամը: Ակնհայտ է, որ այդ բազմանդամը չունի արմատ \mathbb{Z} -ում: Սակայն այն ունի ռացիոնալ արմատ՝ $\frac{3}{2}$: Այժմ տեսնենք, թե ինչպես կարելի է ստանդարտ եղանակով կառուցել փրկած օղակի ընդլայնումը մինչև դաշտ, մասնավորապես կառուցել ռացիոնալ թվերի դաշտը:

Դիցուք A -ն փեղափոխելի օղակ է և S -ն օղակի այնպիսի ենթաբազմություն է, որի համար $0 \notin S$, $1 \in S$ և ստույգ է

$$a, b \in S \Rightarrow ab \in S$$

պայմանը, այսինքն S -ը փակ է բազմապարկման նկատմամբ (այդպիսի բազմություններն ընդունված է անվանել **մոնոիդներ** կամ **կիսախմբեր**): $A \times$

S դեկարտյան արտադրյալի վրա ներմուծենք հետևյալ \simeq համարժեքության հարաբերությունը.

$$(a, s) \simeq (b, t) \Leftrightarrow \exists p \in S, \text{ որ } p(at - bs) = 0 :$$

Սա իսկապես համարժեքության հարաբերություն է, քանի որ

1. $(a, s) \simeq (a, s)$;
2. $(a, s) \simeq (b, t) \Rightarrow (b, t) \simeq (a, s)$;
3. $(a, s) \simeq (b, t)$ և $(b, t) \simeq (c, r) \Rightarrow (a, s) \simeq (c, r)$:

Առաջին երկու հատկություններն ակնհայտ են: Ապացուցենք երրորդը, ունենք $(a, s) \simeq (b, t)$ և $(b, t) \simeq (c, r) \Rightarrow \exists p, q \in S$, որ $p(at - bs) = 0$ և $q(br - ct) = 0$: Այսպեղից բխում է, որ $pqr(at - bs) = 0$ և $qsp(br - ct) = 0$: Գումարելով վերջին երկու հավասարությունները սպանում ենք՝

$$pqt(ar - cs) = 0 \Rightarrow (a, s) \simeq (c, r) :$$

Նշանակենք $\frac{a}{s}$ -ով (a, s) -ի համարժեքության դասը, իսկ $S^{-1}A$ -ով համարժեքության դասերի բազմությունը:

$S^{-1}A$ բազմությունը կարելի է դարձնել օղակ՝ սահմանելով գումարման և բազմապատկման գործողություններ:

Սահմանենք գումարումը և բազմապատկումը հետևյալ բնական բանաձևերով.

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} + \frac{b}{t} &= \frac{at + bs}{st}, \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} &= \frac{ab}{st} : \end{aligned}$$

Քանի որ գործ ունենք համարժեքության դասերի հետ, անհրաժեշտ է ստուգել գործողությունների կոռեկտությունը: Սկսենք գումարումից: Դիցուք $\frac{a}{s} = \frac{a_1}{s_1}$ և $\frac{b}{t} = \frac{b_1}{t_1}$: Ապացուցենք, որ $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{a_1}{s_1} + \frac{b_1}{t_1}$, այսինքն $\frac{at+bs}{st} = \frac{a_1t_1+b_1s_1}{s_1t_1}$: Ունենք $\exists p, q \in S$ որ $p(as_1 - a_1s) = 0$ և $q(bt_1 - b_1t) = 0$: Ներկայացրեք $pqt_1(as_1 - a_1s) = 0$ և $pqs_1(bt_1 - b_1t) = 0$: Գումարելով վերջին հավասարումների աջ և ձախ մասերը կստանանք՝

$$\begin{aligned} 0 &= pqt_1as_1 - pqt_1a_1s + pqs_1bt_1 - pqs_1b_1t = \\ &pg((at + bs)s_1t_1 - (a_1t_1 + b_1s_1)st) \Rightarrow \frac{at + bs}{st} = \frac{a_1t_1 + b_1s_1}{s_1t_1} : \end{aligned}$$

Բազմապարկման համար՝ $\frac{a}{s} = \frac{a_1}{s_1}$ և $\frac{b}{t} = \frac{b_1}{t_1}$ պայմաններից ստանում ենք, որ

$$p, q \in S, \quad p(as_1 - a_1s) = 0 \quad \text{և} \quad q(bt_1 - b_1t) = 0 :$$

Նեպևաբար $pqbt_1(as_1 - a_1s) = 0$ և $pqa_1s(bt_1 - b_1t) = 0$: Գումարելով վերջին հավասարումների աջ և ձախ մասերը ստանում ենք՝

$$\begin{aligned} 0 &= pqabs_1t_1 - pqa_1bst_1 + pqa_1bst_1 - pqa_1b_1st = \\ &pq(abs_1t_1 - a_1b_1st) \Rightarrow \frac{a}{s} \frac{b}{t} = \frac{a_1}{s_1} \frac{b_1}{t_1} : \end{aligned}$$

Դյուրին է ստուգել, որ բազմապարկման համար ստույգ է $\frac{at}{st} = \frac{a}{s}$ կոպորակների կրճաբման բանաձևը:

Վերցնելով $\frac{0}{1}$ և $\frac{1}{1}$ դասերը համապարասխանաբար որպես զրո և մեկ, դյուրին է համոզվել, որ $S^{-1}A$ -ն փեղափոխելի օղակ է: Այն կոչվում է **քանորդների օղակ**:

Դիտարկենք $\frac{a}{1}$ փեքի փարրերից կազմված ենթաօղակը $S^{-1}A$ -ում: Սահմանենք φ հոմոմորֆիզմը A -ից դեպի այդ ենթաօղակը որպես $\varphi(a) = \frac{a}{1}$: Այն դեպքում, երբ A օղակն ամբողջ է $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Rightarrow a = b$ և φ հոմոմորֆիզմը փոխմիարժեքորեն ներդնում է A -ն $S^{-1}A$ -ի մեջ: Այսինքն ամբողջ օղակի դեպքում A -ն կարելի է նույնացնել $S^{-1}A$ -ում $\frac{a}{1}$ փեքի փարրերից կազմված ենթաօղակի հետ և փաստորեն $S^{-1}A$ -ն հանդիսանում է A օղակի ընդլայնում:

Եթե A ամբողջ օղակում վերցնենք $S = A \setminus \{0\}$, ապա $S^{-1}A$ -ի բոլոր ոչ զրոյական փարրերը կունենան հակադարձներ ըստ բազմապարկման՝ $\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = \frac{as}{as} = \frac{1}{1}$: Ստանում ենք, որ այս դեպքում $S^{-1}A$ -ն դաշտ է՝ **քանորդների դաշտ**, որը A օղակի ընդլայնում է: Մասնավոր դեպքում, երբ $A = \mathbb{Z}$ քանորդների դաշտը ռացիոնալ թվերի դաշտն է:

2.6. Գործողություններ իդեալների նկատմամբ

Դիցուք A -ն փեղափոխելի օղակ է իսկ B_1 -ը և B_2 -ը իդեալներ են A -ում:

Դյուրին է ստուգել, որ $B_1 \cap B_2$ -ը իդեալ է A -ում: Ավելին, իդեալների կամայական B_i , $i \in I$ ընդանիքի համար $\bigcap_{i \in I} B_i$ -ն իդեալ է:

Իդեալների արտադրյալ է կոչվում հետևյալ բազմությունը՝

$$B_1 B_2 = \{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in B_1, y_i \in B_2, i = 1, \dots, n\},$$

որպես \mathbb{N} -ը բնական թվերի բազմությունն է: Ստուգենք, որ $B_1 B_2$ -ը իդեալ է: Եթե $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in B_1 B_2$ և $z_1 w_1 + \dots + z_m w_m \in B_1 B_2$, ապա նշանակելով

$$\bar{x}_i = \begin{cases} x_i, & i = 1, \dots, n \\ -z_{i-n}, & i = n+1, \dots, n+m \end{cases}$$

և

$$\bar{y}_i = \begin{cases} y_i, & i = 1, \dots, n \\ -w_{i-n}, & i = n+1, \dots, n+m \end{cases}$$

ստանում ենք՝

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n - (z_1 w_1 + \dots + z_m w_m) = \bar{x}_1 \bar{y}_1 + \dots + \bar{x}_{n+m} \bar{y}_{n+m},$$

որպես $\bar{x}_i \in B_1, \bar{y}_i \in B_2, i = 1, \dots, n+m$: Ուստի՝

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n - (z_1 w_1 + \dots + z_m w_m) \in B_1 B_2 :$$

Մյուս կողմից, եթե

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in B_1 B_2$$

և $z \in A$, ապա

$$z(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) = z(x_1) y_1 + \dots + (z x_n) y_n :$$

Քանի որ B_1 -ը իդեալ է՝ $z x_i \in B_1, i = 1, \dots, n$: Ուրեմն՝

$$z(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) = z(x_1) y_1 + \dots + (z x_n) y_n \in B_1 B_2 :$$

Իդեալների արտադրյալը միշտ ընկած է հատման մեջ.

$$B_1 B_2 \subseteq B_1 \cap B_2 : \quad (2.4)$$

Իսկապես, եթե $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in B_1 B_2$ և $x_i \in B_1, y_i \in B_2, i = 1, \dots, n$, ապա յուրաքանչյուր $x_i y_i$ արտադրյալը պարկանում է թե B_1 -ին և թե B_2 -ին: Ուստի $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ -ը պարկանում է և B_1 -ին և B_2 -ին, ուրեմն և $B_1 \cap$

B_2 -ին: Ակնհայտ է, որ (2.4) բանաձևը փոփոխելիս ունի նաև իդեալների կամայական վերջավոր ընդամենի համար:

Իդեալների **գումար** է կոչվում հետևյալ բազմությունը՝

$$B_1 + B_2 = \{x + y \mid x \in B_1, y \in B_2\},$$

որն իդեալ է: Իսկապես, եթե $x_1 + y_1$ -ը և $x_2 + y_2$ -ը պատկանում են $B_1 + B_2$ -ին, ապա

$$(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\in B_1} + \underbrace{(y_1 - y_2)}_{\in B_2} \in B_1 + B_2 :$$

Նաև եթե $x + y \in B_1 + B_2$, ապա $z(x + y) = \underbrace{zx}_{\in B_1} + \underbrace{zy}_{\in B_2} \in B_1 + B_2$:

2.7. Մնացրների մասին «չինական» թեորեմը

Թեորեմ 2.5. Դիցուք A -ն փոփոխական օղակ է և B_1, \dots, B_m իդեալները փոխադարձաբար պարզ են՝ այսինքն $i \neq j \Rightarrow B_i + B_j = A$: Նախապես ընդհանրացնում կամայական m հար $y_1, \dots, y_m \in A$ փարբերից կազմված հավաքածուի համար գոյություն ունի $x \in A$ այնպիսին, որ $x - y_i \in B_i$, $i = 1, 2, \dots, m$:

Ապացույց. Թեորեմը կապացուցենք ինդուկցիայով ըստ m -ի:

Դիցուք $m = 2$: Քանի որ $B_1 + B_2 = A$ գոյություն ունեն $x_1 \in B_1$ և $x_2 \in B_2$, որ $x_1 + x_2 = 1$: Կառուցենք $x = x_1 y_2 + x_2 y_1$ փարբը և համոզվենք, որ x -ը բավարարում է թեորեմի պնդմանը: Իսկապես,

$$x - y_1 = x_1 y_2 + (x_2 - 1) y_1 = x_1 (y_2 - y_1) \in B_1 :$$

Միմեթրիկությունից բխում է, որ $x - y_2 \in B_2$:

Դիցուք թեորեմի պնդումը ճիշտ է, եթե իդեալների քանակը փոքր է m -ից ($m > 2$): Ապացուցենք թեորեմը m հար իդեալների դեպքում:

Նամաձայն թեորեմի պայմանների ունենք՝

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = A \\ B_1 + B_3 = A \\ \vdots \\ B_1 + B_m = A \end{cases}$$

և կգրնվեն $a_1, \dots, a_{m-1} \in B_1, b_1 \in B_2, b_2 \in B_3, \dots, b_{m-1} \in B_m$ այնպիսին, որ

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 1, \\ a_2 + b_2 = 1, \\ \vdots \\ a_{m-1} + b_{m-1} = 1 : \end{cases}$$

Բազմապարկելով վերջին հավասարությունների աջ և ձախ մասերը՝ ստանում ենք $1 = \prod_{i=1}^{m-1} (a_i + b_i)$: Վերջին արտադրյալի փակագծերը բացելով կստանանք a_i և b_j փարրերի արտադրյալների գումար, ընդ որում բոլոր արտադրյալները, բացի մեկից՝ $b_1 b_2 \dots b_{m-1}$ -ից կպարունակեն առնվազն մեկ հար a_i : Ակնհայտ է, որ բոլոր արտադրյալները, որ պարունակում են որևէ a_i փարր և, հեքևաքար, դրանց գումարը պարկանում է B_1 իղեալին: Նշանակենք այդ գումարը a -ով: Մյուս կողմից $b_1 b_2 \dots b_{m-1}$ արտադրյալը պարկանում է $B_2 B_3 \dots B_m$ իղեալին՝ համաձայն իղեալների արտադրյալի սահմանման: Նամաձայն (2.4) բանաձևի՝

$$B_2 B_3 \dots B_m \subseteq B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_m$$

և

$$b_1 b_2 \dots b_{m-1} \in B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_m :$$

Նշանակենք $b_1 b_2 \dots b_{m-1}$ արտադրյալը b -ով: Վերը շարադրվածից ստանում ենք, որ $1 = a + b, a \in B_1, b \in B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_m$: Մրանից բխում է, որ $B_1 + (B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_m) = A$ և թեորեմի պնդումը կիրառելի է B_1 և $B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_m$ իղեալների դեպքում, քանի որ ինդուկտիվ ենթադրությամբ թեորեմը ճիշտ է, եթե փոխադարձաքար պարզ իղեալների քանակը՝ փվյալ դեպքում 2-ը փոքր է m -ից: Ընտրենք $y_1 = 1$ և $y_2 = 0$ փարրերը և կիրառենք թեորեմը 2 փոխադարձաքար պարզ B_1 և $B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_m$ իղեալների դեպքում՝ կգրնվի x_1 այնպիսին, որ $x_1 - 1 \in B_1$ և $x_1 - 0 = x_1 \in B_2 \cap B_3 \cap \dots \cap B_m$: Այսպիսով, մենք կառուցեցինք այնպիսի x_1 փարր, որ

$$\begin{cases} x_1 - 1 \in B_1 \\ x_1 \in B_2 \\ x_1 \in B_3 \\ \vdots \\ x_1 \in B_m : \end{cases}$$

Փոխարինելով հաջորդաբար B_1 -ը B_2 -ով, B_3 -ով ... վերը կիրառված եղանակով՝ կկառուցենք x_2, x_3, \dots, x_m փարրերը, այնպես որ յուրաքանչյուր $i = 1, 2, \dots, m$ համար փեղի ունի.

$$\begin{cases} x_i - 1 \in B_i \\ \forall j \neq i \quad x_i \in B_j : \end{cases} \quad (2.5)$$

Վերադառնանք թեորեմի ապացուցմանը m հար իդեալների դեպքում: Օգտվելով կառուցված $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ և թեորեմի պայմաններում փրված $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ փարրերից՝ կառուցենք $x = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m$ փարրը և հաշվենք

$$x - y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m - y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m x_jy_j + (x_i - 1)y_i :$$

Նամաձայն (2.5)-ի՝ $x_j \in B_i, \forall j \neq i$ և ուրեմն $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m x_jy_j \in B_i$: Նաև համաձայն (2.5)-ի $x_i - 1 \in B_i$ և $(x_i - 1)y_i \in B_i$: Այսինքն $x - y_i \in B_i$ յուրաքանչյուր $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ համար և թեորեմն ապացուցված է:

Ներկանք 1. Նկատենք որ $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_m = A^m$ դեկարտյան արտադրյալը հեշտությամբ կարելի է դարձնել փեղափոխելի օղակ, սահմանելով դրա փարրերի՝ (y_1, y_2, \dots, y_m) հավաքածուների նկատմամբ կոորդինատ և կոորդինատ գումարման և բազմապատկման գործողությունները.

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) + (z_1, z_2, \dots, z_m) = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_m + z_m)$$

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) \cdot (z_1, z_2, \dots, z_m) = (y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_mz_m) :$$

Դյուրին է ստուգել, որ բավարարված են օղակի սահմանման բոլոր պայմանները և A^m օղակի մեկն ու զրոն համապատասխանաբար $(1, 1, \dots, 1)$ և $(0, 0, \dots, 0)$ հավաքածուներն են:

Այժմ դիտարկենք $A / \bigcap_{i=1}^m B_i$ ֆակտոր-օղակը: Դիցուք փրված (y_1, y_2, \dots, y_m) հավաքածուին համապատասխանում են երկու փարրեր՝ x_1 և x_2 , որ բավարարում են թեորեմի պնդմանը.

$$x_1 - y_i \in B_i, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$x_2 - y_i \in B_i, \quad i = 1, 2, \dots, m :$$

Անմիջապես պարզ է, որ $x_1 - x_2 \in B_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ և ուրեմն՝ $x_1 - x_2 \in \bigcap_{i=1}^m B_i$: Այսինքն, x_1 -ը և x_2 -ը համապատասխանում են գրված (y_1, y_2, \dots, y_m) -ին, միայն և միայն այն դեպքում, երբ x_1 -ը և x_2 -ը պատկանում են միևնույն հարակից դասին ըստ $\bigcap_{i=1}^m B_i$ -ի: Մյուս կողմից, եթե $y_i - z_i \in B_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, այսինքն y_i -ն և z_i -ն միևնույն հարակից դասից են ըստ B_i , ապա

$$x - y_i \in B_i, i = 1, 2, \dots, m \Rightarrow x - z_i \in B_i, i = 1, 2, \dots, m :$$

Այսպիսով, սրանում ենք փոխմիարժեք համապատասխանեցում $A / \bigcap_{i=1}^m B_i$ և

$$(A/B_1) \times \dots \times (A/B_m) = \prod_{i=1}^m A/B_i$$

օղակների միջև: Այդ համապատասխանումն իզոմորֆիզմ է: Իսկապես, դիցուք

$$f : A / \bigcap_{i=1}^m B_i \rightarrow \prod_{i=1}^m A/B_i,$$

որպեղ

$$f \left(x + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) = (x + B_1, \dots, x + B_m) :$$

Կամայական

$$(y_1 + B_1, \dots, y_m + B_m) \in \prod_{i=1}^m A/B_i$$

համար համաձայն Թեորեմ 2.5-ի՝ գոյություն ունի $x \in A$ այնպիսին, որ $x + B_i = y_i + B_i$, $i = 1, 2, \dots, m$: Ներկայացրեք

$$f \left(x + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) = (x + B_1, \dots, x + B_m) = (y_1 + B_1, \dots, y_m + B_m) :$$

Այսպիսով, կամայական փարթ $\prod_{i=1}^m A/B_i$ -ից ունի նախապարկեր (այդպիսի դեպքերում ասում են, որ f արտապարկերումը **սուրյեկտիվ** է):

$$\text{Դիցուք } f \left(x + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) = (B_1, \dots, B_m): \text{ Պարզ է, որ}$$

$$(x + B_1, \dots, x + B_m) = (B_1, \dots, B_m)$$

և $x + B_i = B_i$, $i = 1, 2, \dots, m$: Ուստի, $x \in B_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ և $x \in \bigcap_{i=1}^m B_i$:

Ներկայացնենք, $\ker f = \bigcap_{i=1}^m B_i$ և f արտապարկերունը փոխմիարժեք է (**ինյեկտիվ**

է): Ապացուցեցինք, որ f -ը փոխմիարժեքորեն արտապարկերուն է $A / \bigcap_{i=1}^m B_i$ -ը

$\prod_{i=1}^m A/B_i$ -ի վրա: Դյուրին է ստուգել, որ

$$\begin{aligned} f \left(\left(x_1 + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) + \left(x_2 + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) \right) &= f \left(\left(x_1 + x_2 + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) \right) = \\ &= \left((x_1 + x_2) + B_1, \dots, (x_1 + x_2) + B_m \right) = \\ &= \left((x_1 + B_1) + (x_2 + B_1), \dots, (x_1 + B_m) + (x_2 + B_m) \right) = \\ &= \left(x_1 + B_1, \dots, x_1 + B_m \right) + \left(x_2 + B_1, \dots, x_2 + B_m \right) = \\ &= f \left(x_1 + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) + f \left(x_2 + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) \end{aligned}$$

և նմանապես՝

$$f \left(\left(x_1 + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) \left(x_2 + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) \right) = f \left(x_1 + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) f \left(x_2 + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) :$$

Այսպիսով ապացուցեցինք, որ վերը նշված f արտապարկերունը $A / \bigcap_{i=1}^m B_i$

և $\prod_{i=1}^m A/B_i$ օղակների իզոմորֆիզմ է:

Ներկայացնենք 2. Նախորդ հերևանքում սահմանած f արտապարկերունը կիրառենք $x^k + \bigcap_{i=1}^m B_i$ փարրին.

$$\begin{aligned} f \left(x^k + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) &= f \left(\left(x + \bigcap_{i=1}^m B_i \right)^k \right) = \left(f \left(x + \bigcap_{i=1}^m B_i \right) \right)^k = \\ &= \left(x + B_1, \dots, x + B_m \right)^k = \left(x^k + B_1, \dots, x^k + B_m \right) : \end{aligned}$$

Այսինքն, եթե (y_1, y_2, \dots, y_m) հավաքածուին, ըստ Թեորեմ 2.5-ի, համապարասխանում է x փարրը, ապա $(y_1^k, y_2^k, \dots, y_m^k)$ հավաքածուին համապարասխանում է x^k -ն: Այս փաստն ունի նաև ուղղակի ապացույց: Ունենք

$x - y_i \in B_i, i = 1, 2, \dots, m$: Օգտվենք հայտնի բանաձևից՝

$$x^k - y_i^k = (x - y_i) \sum_{j=1}^{k-1} x^{k-j} y_i^{j-1} :$$

Քանի որ $x - y_i \in B_i$, ապա իդեալների սահմանումից հետևում է, որ

$$x^k - y_i^k = (x - y_i) \sum_{j=1}^{k-1} x^{k-j} y_i^{j-1} \in B_i, \quad i = 1, 2, \dots, m :$$

2.8. Մնացքների մասին «չինական» թեորեմի որոշ մասնավոր դեպքեր

Թեորեմ 2.5-ի մասնավոր դեպքերն են ամբողջ թվերի և բազմանդամների համար հայտնի թեորեմները:

Դիցուք A օղակը ամբողջ թվերի \mathbb{Z} օղակն է: Ինչպես գիտենք յուրաքանչյուր իդեալ \mathbb{Z} -ում ծնված է մեկ փարրով, այսինքն բաղկացած է որոշակի ամբողջ թվի բոլոր պարիկներից: Երկու իդեալների փոխադարձաբար պարզ լինելը համարժեք է իդեալների ծնիչների փոխադարձաբար պարզ լինելուն: Ներկաբար, եթե $B_i = \{k_i x \mid x \in \mathbb{Z}\}, i = 1, 2, \dots, m$, ապա Թեորեմ 2.5-ի $i \neq j \Rightarrow B_i + B_j = A$ պայմանն ընդունում է $i \neq j \Rightarrow (\exists x_1, x_2 \in \mathbb{Z}) k_i x_1 + k_j x_2 = 1$ փեքը, որն իր հերթին համարժեք է $i \neq j \Rightarrow (k_i, k_j) = 1$ պայմանին (այսպես (k_i, k_j) -ն ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է): Ուստի, ամբողջ թվերի դեպքում Թեորեմ 2.5-ն ընդունում է հետևյալ փեքը.

Դիցուք k_1, k_2, \dots, k_m թվերը փոխադարձաբար պարզ են: Կամայական y_1, y_2, \dots, y_m թվերի հավաքածուի համար գոյություն ունի այնպիսի x թիվ, որ $x \equiv y_i \pmod{k_i}, i = 1, 2, \dots, m$:

Քանի որ բազմանդամների (որոնց գործակիցներն K դաշտից են) $K[x]$ օղակում իդեալները ծնվում են մեկ փարրի միջոցով (իդեալի ամենափոքր դրական աստիճանի բազմանդամով), ապա իդեալների փոխադարձաբար պարզ լինելը այս դեպքում ևս համարժեք է իդեալների ծնիչների փոխադարձաբար պարզ լինելուն: Թեորեմ 2.5-ը շարադրվում է հետևյալ կերպ.

Դիցուք $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ փոխադարձաբար պարզ բազմանդամներ են $K[x]$ օղակում: Կամայական $h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x) \in K[x]$ բազմանդամների համար գոյություն ունի այնպիսի $g(x) \in K[x]$ բազմանդամ, որ $g(x) \equiv h_i \pmod{f_i(x)}, i = 1, 2, \dots, m$:

Դիտարկենք Թեորեմ 2.5-ի մեկ այլ ուշագրավ մասնավոր դեպք $K[x]$ օղակի համար: Ֆիքսենք իրարից փարբեր m հար K դաշտի փարբեր՝ a_1, a_2, \dots, a_m : Նշանակենք $f_i(x) = x - a_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ և $f(x) = \prod_{i=1}^m (x - a_i)$: Ակնհայտ է, որ բոլոր $f_i(x)$ բազմանդամները փոխադարձաբար պարզ են: Այժմ ֆիքսենք K դաշտի որևէ b_1, b_2, \dots, b_m փարբեր, որոնց կդիտարկենք որպես բազմանդամներ: Նամաձայն Թեորեմ 2.5-ի՝ գոյություն ունի $g(x) \in K[x]$, որ $g(x) \equiv b_i \pmod{(x - a_i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$: Սակայն պարզ է նաև (Բեզուի թեորեմից), որ $g(x) \equiv g(a_i) \pmod{(x - a_i)}$, ուստի

$$g(a_i) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m : \quad (2.6)$$

Այս դեպքում Ներկանք 1-ում դիտարկված $\bigcap_{i=1}^m B_i$ իդեալը $f(x) = \prod_{i=1}^m (x - a_i)$ բազմանդամով ծնված իդեալն է, այսինքն՝

$$\bigcap_{i=1}^m B_i = \{f(x)g(x) \mid g(x) \in K[x]\} :$$

Նամաձայն Ներկանք 1-ի՝ $g(x)$ -ը միակն է $\bigcap_{i=1}^m B_i$ ճշտությամբ, այսինքն բոլոր բազմանդամները, որոնք բավարարում են (2.6) պայմանին հետևյալ փեսքի են՝ $g(x) + f(x)q(x)$ և պարկանում են $g(x)$ -ի հարակից դասին ըստ $f(x)$ -ի $K[x]$ օղակում: Վերցնելով այդ հարակից դասի կամայական բամանդամ և բաժանելով այն $f(x)$ -ի վրա՝ մնացորդում կստանանք նույն հարակից դասի մեկ այլ բազմանդամ, որի աստիճանը փոքր է $f(x)$ -ի աստիճանից՝ m -ից: Այդ բազմանդամը բավարարում է (2.6) պայմանին և $g(x)$ -ի հարակից դասի միակ m -ից փոքր աստիճանի բազմանդամն է (եթե լինեին այդպիսի երկու փարբեր բազմանդամներ, ապա $f(x)$ -ի վրա բաժանելուց ստացված դրանց մնացորդները պեսք է իրար համընկնեին, բայց այդ մնացորդները համընկնում են հենց դրանց հետ, քանի որ դրանց աստիճանները փոքր են $f(x)$ -ի աստիճանից): Ուստի (2.6) պայմանին բավարարող m -ից փոքր աստիճանի բազմանդամը միակն է: Դա նշանակում է, որ m փարբեր կեսերում ստացված արժեքները ընդունող m -ից փոքր աստիճանի բազմանդամը միակն է:

2.9. Մնացքների մասին «Ֆինական» թեորեմի մի կիրառության մասին

Դիցուք $K[x]$ -ը x փոփոխականից կախված K դաշտից գործակիցներով բազմանդամների օղակն է: Դիցուք $x^m - 1$ բազմանդամն ունի K դաշտում m հար փարբեր արմարներ և բոլոր այդ արմարների բազմությունը կազմում է ցիկլիկ խումբ ըստ բազմապարկման, այսինքն գոյություն ունի մեկ ω արմար, որ $x^m - 1$ բազմանդամի բոլոր փարբեր արմարները ω -ի աստիճաններն են՝ $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{m-1}$ և $x^m - 1 = \prod_{i=0}^{m-1} (x - \omega^i)$: Նշանակենք $K_m[x]$ -ով $K[x]$ -ի այն բազմանդամների ենթաբազմությունը, որոնց աստիճանը փոքր է m թվից: Սահմանենք \mathcal{F} արքայապարկերումը $K_m[x]$ -ից $K^m = \underbrace{K \times K \times \dots \times K}_m$ դեկարտյան արքադրյալի վրա հեքսյալ կերպ.

$$\mathcal{F}(f(x)) = (f(1), f(\omega), \dots, f(\omega^{m-1})) : \quad (2.7)$$

Վերը նկարագրված Թեորեմ 2.5-ի բազմանդամների համար մասնավոր դեպքից հեքսում է, որ \mathcal{F} արքայապարկերումը փոխմիարժեք է: Սա թույլ է տալիս դիֆարկել հակադարձ արքայապարկերումը՝ \mathcal{F}^{-1} -ը:

Դիցուք $f(x), g(x) \in K_m[x]$: Պարզ է, որ

$$\mathcal{F}(f(x)) = (f(1), f(\omega), \dots, f(\omega^{m-1}))$$

և

$$\mathcal{F}(g(x)) = (g(1), g(\omega), \dots, g(\omega^{m-1})) :$$

Ներկանք 1-ից ստանում ենք, որ

$$\mathcal{F}^{-1}((f(1)g(1), f(\omega)g(\omega), \dots, f(\omega^{m-1})g(\omega^{m-1}))) = f(x)g(x) \bmod (x^m - 1) :$$

Դիցուք $f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i$ և $g(x) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i$: Դյուրին է ստուգել, որ ըստ բազմանդամների բազմապարկման սահմանման

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^i + \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=i+1}^{m-1} a_j b_{m+i-j} \right) x^{i+m}, \quad (2.8)$$

որպեսզ $b_m = 0$:

Քանի որ $x^m \equiv 1 \pmod{(x^m - 1)}$, ապա (2.7)-ում փոխարինելով x^m -ը 1-ով կստանանք

$$f(x)g(x) \pmod{(x^m - 1)} = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} + \sum_{j=i+1}^{m-1} a_j b_{m+i-j} \right) x^i : \quad (2.9)$$

Նման եղանակով ստացվում է.

$$f(x)g(x) \pmod{(x^m + 1)} = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} - \sum_{j=i+1}^{m-1} a_j b_{m+i-j} \right) x^i : \quad (2.10)$$

Դիցուք գոյություն ունի $\psi \in K$ որ $\psi^2 = \omega$ և $\psi^m = -1$: Պարզ է, որ $\psi^{2m} = \omega^m = 1$ և $\psi^{-1} = \psi^{2m-1}$:

Սահմանենք $f_\psi(x) = \sum_{i=0}^{m-1} (\psi^i a_i) x^i$ և $g_\psi(x) = \sum_{i=0}^{m-1} (\psi^i b_i) x^i$: Նամաձայն (2.8)-ի՝

$$f_\psi(x)g_\psi(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^i \psi^j a_j \psi^{i-j} b_{i-j} \right) x^i + \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=i+1}^{m-1} \psi^j a_j \psi^{m+i-j} b_{m+i-j} \right) x^{i+m}$$

և

$$f_\psi(x)g_\psi(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \psi^i \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^i + \sum_{i=0}^{m-1} \psi^{m+i} \left(\sum_{j=i+1}^{m-1} a_j b_{m+i-j} \right) x^{i+m},$$

ապա

$$f_\psi(x)g_\psi(x) \pmod{(x^m - 1)} = \sum_{i=0}^{m-1} \psi^i \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} - \sum_{j=i+1}^{m-1} a_j b_{m+i-j} \right) x^i : \quad (2.11)$$

Նկատենք, որ $\deg f(x) = \deg g(x) = m - 1$ դեպքում բազմանդամների (2.8) բանաձևով $f(x)g(x)$ արտադրյալի գործակիցները հաշվելու համար K դաշտում անհրաժեշտ գործողությունների (գումարումների և բազմապարկումների) քանակը $O(m^2)$ կարգի է:

Նշանակենք $F(m)$ -ով \mathcal{F} արտապարկերումը և դրա հակադարձը հաշվելու համար K դաշտում կարարվելիք գործողությունների քանակը: Վերը ստացված

(2.8)-(2.11) բանաձևերը թույլ են տալիս հաշվել $f(x)g(x)$ արտադրյալը՝ կիրառելով \mathcal{F} և \mathcal{F}^{-1} արտապարկերումները: Իսկապես, սկզբից կհաշվենք

$$\mathcal{F}(f(x)) = (f(1), f(\omega), \dots, f(\omega^{m-1}))$$

և

$$\mathcal{F}(g(x)) = (g(1), g(\omega), \dots, g(\omega^{m-1}))$$

կարարելով $2F(m)$ գործողություն: Ապա կարարելով m հար բազմապարկում՝ կհաշվենք

$$(f(1)g(1), f(\omega)g(\omega), \dots, f(\omega^{m-1})g(\omega^{m-1}))$$

վեկտորը: Ներո կհաշվենք

$$\mathcal{F}^{-1}((f(1)g(1), \dots, f(\omega^{m-1})g(\omega^{m-1}))) = f(x)g(x) \bmod (x^m - 1) :$$

կարարելով $F(m)$ գործողություն:

Կարարելով ոչ ավելի քան $2m$ բազմապարկում՝ կկառուցենք $1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{2m-1}$ փարրերը (այսինքն բոլոր $1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{m-1}$ փարրերը և դրանց հակադարձները): Դրանից հետո կկառուցենք $f_\psi(x)$ և $g_\psi(x)$ բազմանդամները՝ կարարելով ոչ ավելի քան $2m$ բազմապարկում: Կիրառելով \mathcal{F} -ը կստանանք $\mathcal{F}(f_\psi(x))$ և $\mathcal{F}(g_\psi(x))$ վեկտորները՝ կարարելով $2F(m)$ գործողություն: Կոորդինատ ան կոորդինատ կբազմապարկենք այդ վեկտորները և կկիրառենք \mathcal{F}^{-1} -ը, ստանալով $f_\psi(x)g_\psi(x) \bmod (x^m - 1)$ -ը: Դրա համար կկարարվի $m + F(m)$ գործողություն:

Նամաձայն (2.10) և (2.11) բանաձևերի՝ $f(x)g(x) \bmod (x^m + 1)$ -ը փարբերվում է $f_\psi(x)g_\psi(x) \bmod (x^m - 1)$ -ից միայն ψ^i գործակիցներով: Բազմապարկենք $f_\psi(x)g_\psi(x) \bmod (x^m - 1)$ -ի գործակիցները ψ^{2m-i} փարրերով, որ նախապես հաշվել էինք և կստանանք $f(x)g(x) \bmod (x^m + 1)$ -ը: Դրա համար կծախսենք m բազմապարկում: Նիմնվելով (2.8), (2.9) և (2.10) բանաձևերի վրա, դյուրին է տեսնել, որ $f(x)g(x)$ բազմանդամի առաջին m գործակիցները համընկնում են

$$\frac{1}{2}(f(x)g(x) \bmod (x^m - 1) + f(x)g(x) \bmod (x^m + 1))$$

բազմանդամի գործակիցների հետ, իսկ մնացած գործակիցները

$$\frac{1}{2}(f(x)g(x) \bmod (x^m - 1) - f(x)g(x) \bmod (x^m + 1))$$

բազմանդամի գործակիցների հետ: Ուստի, կարարելով ևս ոչ ավելի քան $2(m + 1)$ գործողություն, ի վերջո, կարանանք $f(x)g(x)$ բազմանդամի բոլոր գործակիցները: Ընդհանուր գործողությունների քանակը կլինի $O(F(m) + m)$: Սակայն ակնհայտ է, որ $F(m) \geq m$ և, ուրեմն $f(x)g(x)$ -ը հաշվելու համար կկարարենք $O(F(m))$ գործողություն:

Օգրվելով $x^m - 1$ բազմանդամի արմարների հարուկ հարկություններից՝ կառուցվել է հարուկ ալգորիթմ, որի օգնությամբ \mathcal{F} և \mathcal{F}^{-1} արտապարկերումները հաշվարկվում են կարարելով $O(m \ln m)$ գործողություն: Դա թույլ է տալիս հաշվել $f(x)g(x)$ արտադրյալը շար ավելի արագ, քան համաձայն բազմանդամների արտադրյալի սահմանման բանաձևի, երբ ծախսվում է $O(m^2)$ գործողություն:

\mathcal{F} և \mathcal{F}^{-1} արտապարկերումները հայտնի են որպես **Ֆուրյեի դիսկրետ ուղիղ և հակադարձ ձևափոխություններ**, իսկ դրանց հաշվման ալգորիթմը՝ **Ֆուրյեի արագ ձևափոխություն**: Ֆուրյեի արագ ձևափոխությունը նաև ընկած է մեծ թվերի բազմապարկման մինչ օրս հայտնի լավագույն ալգորիթմների հիմքում:

2.10. Գլխավոր իդեալների օղակներ

Սահմանում. A տեղափոխելի օղակի փարրը կոչվում է **միավոր**, եթե այն ունի հակադարձ ըստ բազմապարկման գործողության: Միավորների բազմությունը նշանակվում է A^* -ով:

Ամբողջ թվերի օղակում միակ միավորները դրանք ± 1 փարրերն են: $\mathbb{R}[x]$ բազմանդամների օղակի միավորներն են բացառապես բոլոր զրո աստիճանի բազմանդամները, այսինքն ոչ զրոյական հաստատունները:

Սահմանում. A տեղափոխելի օղակի B իդեալը կոչվում է **գլխավոր**, եթե այն ծնված է մեկ փարրով՝

$$B = (a) = \{ax \mid x \in A\},$$

իսկ a փարրը կոչվում է **իդեալի ծնիչ**:

Սահմանում. A տեղափոխելի օղակը, որի բոլոր իդեալները գլխավոր են կոչվում է **գլխավոր իդեալների օղակ**:

Սահմանում. A փրեդափոխելի օղակի $p \neq 0$ փարրը կոչվում է **անվերածելի**, եթե $p \notin A^*$ և փրեդի ունի

$$p = ab \Rightarrow \text{կամ } a \in A^* \text{ կամ } b \in A^* :$$

Պնդում 2.6.

- Եթե p -ն անվերածելի է, ապա անվերածելի է նաև εp -ն կամայական $\varepsilon \in A^*$ համար:

Իսկապես, ակնհայտ է, որ $\varepsilon p \notin A^*$: Եթե $\varepsilon p = ab$, ապա $p = a(b\varepsilon^{-1})$ և կամ $a \in A^*$ կամ $b\varepsilon^{-1} \in A^*$: Սակայն $b\varepsilon^{-1} \in A^*$ պայմանը համարժեք է $b \in A^*$ պայմանին, ուստի εp -ն անվերածելի է:

- Եթե ամբողջ օղակում $p \notin A^*$, $p \neq 0$ փարրով ձևված (p) իդեալը պարզ է, ապա p -ն անվերածելի է:

Եթե $p = ab$, ապա $ab \in (p)$ և a և b փարրերից առնվազն մեկը պարկանում է (p) իդեալին: Դիցուք դա a -ն է՝ $a = px$ որոշակի $x \in A$ համար: Ուրեմն $p = pxb$ և $p(1 - xb) = 0$: Օղակն ամբողջ է, ուրեմն $1 - xb = 0$ և $b \in A^*$:

- Եթե p -ն անվերածելի է գլխավոր իդեալների օղակում, ապա p իդեալը մաքսիմալ է (նաև պարզ):

Դիցուք (p) իդեալը պարունակվում է մեկ այլ (q) իդեալում և $(p) \neq (q)$: Ուրեմն $\exists x$, որ $p = qx$: Քանի որ p -ն անվերածելի է, ապա կամ $q \in A^*$ կամ $x \in A^*$: Եթե $x \in A^*$, ապա $q = px^{-1}$ և $(p) = (q)$ ինչն անհնար է: Եթե $q \in A^*$, ապա $(q) = A$ և (p) իդեալը մաքսիմալ է:

Երկու p և q փարրերը կանվանենք **ասոցիացված**, եթե $\exists(\varepsilon \in A^*)$, որ $p = \varepsilon q$: Պարզ է, որ ասոցիացվածության հարաբերությունը սահմանում է համարժեքության հարաբերություն օղակի անվերածելի փարրերի բազմության վրա, փրոհելով այն չհարվող համարժեքության դասերի՝ երկու անվերածելի փարր մեկ դասից են միայն և միայն, եթե դրանք ասոցիացված են: Ակնհայտ է, որ ասոցիացված փարրերը ծնում են միևնույն իդեալը:

Ամբողջ թվերի օղակում միակ անվերածելի փարրերը պարզ թվերն են, ընդ որում p և $-p$ պարզ թվերն ասոցիացված են: Բազմանդամների $\mathbb{R}[x]$ օղակում անվերածելի փարրերը դրանք անվերածելի բազմանդամներն են:

Ասում են, որ փեղափոխելի օղակի B իդեալը ծնված է a և b փարրերով, եթե $B = \{ax+by \mid x, y \in A\}$: Դյուրին է ստուգել, որ $\{ax+by \mid x, y \in A\}$ բազմությունն իդեալ է: Մենք կօգտագործենք (a, b) նշանակումը $\{ax + by \mid x, y \in A\}$ իդեալի համար:

Նաև կասենք, որ ամբողջ օղակի a փարրը բաժանվում է b փարրի վրա, եթե կգտնվի այնպիսի c , որ $a = bc$: Այդ փաստը կարձանագրենք հետևյալ կերպ՝ $b:a$: Սահմանենք **ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի** գաղափարը. a և b փարրերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարար է կոչվում այդ փարրերի այն ընդհանուր բաժանարարը, որը բաժանվում է դրանց կամայական այլ ընդհանուր բաժանարարի վրա:

Պնդում 2.7. Դիցուք A -ն գլխավոր իդեալների օղակ է: a և b փարրերով ծնված իդեալը գլխավոր է և գոյություն ունի $c \in A$, որ $(c) = (a, b)$: c -ն a և b փարրերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է:

Ապացույց. Ակնհայտ է, որ կգտնվի $c \in A$, որ $(c) = (a, b) = \{ax + by \mid x, y \in A\}$: Տեղադրելով $x = 1$, $y = 0$ կստանանք, որ $a \in (c)$: Նմանապես՝ $b \in (c)$: Ուստի $c:a$ և $c:b$ և c -ն a և b փարրերի ընդհանուր բաժանարարն է:

Դիցուք $d:a$ և $d:b$: Այսինքն, կգտնվեն e և f այնպիսին, որ $a = de$ և $b = df$: Քանի որ $c \in (a, b)$, ապա գոյություն ունեն x_0 և y_0 , որ $c = ax_0 + by_0$: Այսպեղից անմիջապես ստացվում է՝ $c = ax_0 + by_0 = d(ex_0 + fy_0)$ և $d:c$: Պնդումն ապացուցված է:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Դիցուք \mathbb{Z} -ն ամբողջ թվերի օղակն է: Ինչպես գիտենք, \mathbb{Z} -ի կամայական ոչ փրիվիալ ենթախումբ ըստ գումարման կազմված է որոշակի փարրի (ամենափոքր դրական փարրի) բոլոր պարիկներից: Ուստի յուրաքանչյուր իդեալ, լինելով ենթախումբ, ըստ գումարման գլխավոր է:

2. Դիցուք $K[x]$ -ը K դաշտից գործակիցներով բազմանդամների օղակն է: Դիցուք B -ն իդեալ է $K[x]$ -ում: Եթե $B = K[x]$ կամ էլ $B = \{0\}$, ապա ակնհայտորեն B -ն գլխավոր է: Դիցուք B -ն պարունակում է առնվազն մեկ դրական աստիճանի բազմանդամ (հակառակ դեպքում կամ $B = K[x]$ կամ էլ $B = \{0\}$): Նշանակենք $f(x)$ -ով B -ում պարունակվող ամենափոքր դրական աստիճանի բազմանդամներից որևէ մեկը: Դիցուք $g(x) \in B$: Բաժանենք $g(x)$ -ը

$f(x)$ -ի վրա՝ $g(x) = f(x)h(x) + r(x)$: Պարզ է, որ $r(x) = g(x) - f(x)h(x) \in B$: Եթե $r(x) \neq 0$, ապա $0 \leq \deg r(x) < \deg f(x)$: Սակայն $\deg r(x) > 0$, քանի որ եթե $\deg r(x) = 0$, ապա $B = K[x]$: Ուրեմն $0 < \deg r(x) < \deg f(x)$: Բայց իդեալում չկա դրական աստիճանի բազմանդամ, որի աստիճանը փոքր է $\deg f(x)$ -ից: Ուստի $r(x) = 0$ և $g(x) = f(x)h(x)$: Ակնհայտ է, որ $B = (f(x)) = \{f(x)h(x) \mid h(x) \in K[x]\}$ գլխավոր իդեալ է:

3. Դիփարկենք

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

բազմությունը: Դյուրին է ստուգել, որ այն ամբողջ տեղափոխելի օղակ է կոմպլեքս թվերի գումարման ու բազմապարկման նկատմամբ: Այդ օղակը կոչվում է Գաուսյան ամբողջ թվերի օղակ: Ապացուցենք, որ այն գլխավոր իդեալների օղակ է: Նախ ցույց փանք, որ $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ -ում հնարավոր է սահմանել մնացորդով բաժանում: Նշանակենք $\|\alpha\|$ -ով $\alpha = x + y\sqrt{-1}$ թվի նորմը՝ $\|\alpha\| = x^2 + y^2$: Դյուրին է ստուգել, որ $\|\alpha\beta\| = \|\alpha\| \|\beta\|$ և $\|\alpha\| = 0 \Rightarrow \alpha = 0$: Դիցուք $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ և $\beta \neq 0$: Բաժանենք α -ն β -ի վրա որպես հասարակ կոմպլեքս թվեր՝ $\alpha = \beta\gamma$: Եթե $\gamma \notin \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, ապա վերցնենք $\hat{\gamma} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, որի իրական և կեղծ մասերը γ -ի իրական և կեղծ մասերի մոտակա ամբողջ թվերն են: Պարզ է, որ $\|\gamma - \hat{\gamma}\| \leq \frac{1}{4}$: Վերցնենք $\delta = \alpha - \beta\hat{\gamma} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$: Ունենք

$$\delta = \alpha - \beta\hat{\gamma} = \beta\gamma - \beta\hat{\gamma} = \beta(\gamma - \hat{\gamma})$$

և $\|\delta\| = \|\beta\| \|\gamma - \hat{\gamma}\| < \|\beta\|$: Այսպիսով սրացանք մնացորդով բաժանում $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ -ում՝ $\alpha = \beta\hat{\gamma} + \delta$, որտեղ կամ $\delta = 0$ կամ էլ $\|\delta\| < \|\beta\|$: Դիցուք այժմ B -ն իդեալ է $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ -ում և $B \neq \{0\}$: Նշանակենք β -ով B -ի ամենափոքր դրական նորմ ունեցող փարրերից մեկը: Դիցուք $\alpha \in B$: Բաժանենք մնացորդով α -ն β -ի վրա՝ $\alpha = \beta\hat{\gamma} + \delta$: Պարզ է, որ $\delta = \alpha - \beta\hat{\gamma} \in B$: Եթե $\delta \neq 0$, ապա $0 < \|\delta\| < \|\beta\|$ և սրացվում է, որ B -ն պարունակում է մի փարր, որի նորմը դրական է և փոքր է $\|\beta\|$ -ից: Ուստի $\delta = 0$, $\alpha = \beta\hat{\gamma}$ և $B = (\beta) = \{\beta\gamma \mid \gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]\}$ գլխավոր իդեալ է:

4. Դիփարկենք

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2}\right] = \left\{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{-19} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{2}\right\}$$

բազմությունը: $\mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$ -ն ամբողջ փեղափոխելի օղակ է կոմպլեքս թվերի գումարման և բազմապարկման նկատմամբ: Իրոք,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{-19} \right) \left(\frac{c}{2} + \frac{d}{2}\sqrt{-19} \right) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{4}(ac - 19bd) + \frac{1}{4}(ad + bc)\sqrt{-19} = \\ &= \frac{(ac - 19bd)/2}{2} + \frac{(ad + bc)/2}{2}\sqrt{-19}, \end{aligned}$$

այսպես $(ac - 19bd)/2$ և $(ad + bc)/2$ ամբողջ թվեր են, քանի որ $a \equiv b \pmod{2}$, $c \equiv d \pmod{2}$ պայմաններից բխում է՝

$$ac \equiv 19bd \pmod{2}, \quad ad \equiv bc \pmod{2},$$

և $ac - 19bd$ ու $ad + bc$ թվերը զույգ են: Նաև $\frac{ac-19bd}{2} \equiv \frac{ad+bc}{2} \pmod{2}$: Իսկապես, դա համարժեք է $ac - 19bd - ad - bc \equiv 0 \pmod{4}$ պայմանին, որի ճշտությունը դառնում է ակնհայտ, եթե ձախ մասը վերաբարձրենք որպես

$$ac - 20bd + bd - ad - bc = (a - b)(c - d) - 20bd :$$

Եթե $\alpha \in \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$, ապա դրա կոմպլեքս համալուծը՝ $\bar{\alpha}$ -ն, նույնպես պարկանում է $\mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$ -ին, քանի որ $a \equiv b \pmod{2} \Rightarrow a \equiv (-b) \pmod{2}$:

Սահմանենք $\alpha = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{-19} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$ փարրի նորմը սրանդարտ եղանակով որպես $\|\alpha\| = \alpha\bar{\alpha} = \frac{a^2}{4} + 19\frac{b^2}{4}$: Դյուրին է ստուգել, որ $\|\alpha\beta\| = \|\alpha\| \|\beta\|$: Նաև $\|\alpha\| \in \mathbb{Z}$: Քանի որ a -ն ու b -ն միևնույն զույգության են, ապա

$$a^2 \equiv b^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod{4}, & a\text{-ն ու } b\text{-ն զույգ են,} \\ 1 \pmod{4}, & a\text{-ն ու } b\text{-ն կենտ են} \end{cases}$$

և ամեն դեպքում $a^2 + 19b^2 \equiv 0 \pmod{4}$, ուստի $\|\alpha\| \in \mathbb{Z}$:

Յույց փանք այժմ, որ

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right], \beta \neq 0 \text{ համար, եթե } \alpha\text{-ն չի} \\ \text{բաժանվում } \beta\text{-ի վրա և } \|\beta\| \leq \|\alpha\|, \text{ ապա} \\ \exists \gamma, \delta \text{ այնպիսի, որ } 0 < \|\alpha\gamma - \beta\delta\| < \|\beta\| : \end{aligned} \tag{2.12}$$

Նիմնվելով (2.12)-ի վրա՝ դյուրին է համոզվել, որ $\mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$ -ը գլխավոր իդեալների օղակ է: Իսկապես, դիցուք B -ն ոչ փրիմիալ իդեալ է և $0 \neq \beta \in B$

փարրն ունի նվազագույն դրական նորմը B -ում: Դիցուք $\alpha \in B$ և չի բաժանվում β -ի վրա: Ակնհայտ է, որ $\alpha \neq 0$ և $\|\beta\| \leq \|\alpha\|$: Կգրնվեն γ, δ այնպիսի, որ $0 < \|\alpha\gamma - \beta\delta\| < \|\beta\|$: Քանի որ $\alpha, \beta \in B$, ապա $\alpha\gamma - \beta\delta \in B$: Նաև քանի որ $0 < \|\alpha\gamma - \beta\delta\|$, ապա $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$: Ուստի B -ում գրանք ոչ զրոյական փարր $\alpha\gamma - \beta\delta$, որի նորմը փոքր է β -ի նորմից, ինչն անհնար է:

Այժմ ապացուցենք (2.12) պնդումը: Դիցուք $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$, $\beta \neq 0$, α -ն չի բաժանվում β -ի վրա և $\|\beta\| \leq \|\alpha\|$: Քանի որ β -ն միավոր չէ, սրանում ենք՝ $\|\beta\| > 1$ (եթե β -ն միավոր է, ապա $\beta\beta^{-1} = 1$ և $\|\beta\| \|\beta^{-1}\| = 1$, ուստի $\|\beta\| = 1$): Նշանակենք՝ $\alpha = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{-19}$ և $\beta = \frac{c}{2} + \frac{d}{2}\sqrt{-19}$: Դյուրին է հաշվել β -ի սովորական կոնյուգիտը հակադարձը: Ունենք $\|\beta\| = \beta\bar{\beta}$ և

$$\beta^{-1} = \frac{1}{\|\beta\|} \bar{\beta} = \frac{1}{\|\beta\|} \left(\frac{c}{2} - \frac{d}{2}\sqrt{-19} \right) :$$

Այժմ

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\|\beta\|} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{-19} \right) \left(\frac{c}{2} - \frac{d}{2}\sqrt{-19} \right) = \frac{1}{\|\beta\|} \left(\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{-19} \right) ,$$

որպեղ

$$\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{-19} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$$

(այսինքն՝ $p \equiv q \pmod{2}$) և

$$\frac{1}{\|\beta\|} \left(\frac{p}{2} - \frac{q}{2}\sqrt{-19} \right) \notin \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right] :$$

Նշանակենք՝ $x = \frac{p}{\|\beta\|}$, $y = \frac{q}{\|\beta\|}$: Սրանում ենք՝ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{-19} \notin \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$: Սա նշանակում է, որ կամ x -ը կամ y -ը ամբողջ չեն, կամ էլ դրանք ամբողջ են, բայց $x \equiv y \pmod{2}$ բաղդափումը սխալ է, ինչը համարժեք է $\frac{x-y}{2} \notin \mathbb{Z}$ պայմանին: Ապացուցենք, որ կգրնվեն $\gamma, \delta \in \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$, որ $0 < \left\| \frac{\alpha}{\beta}\gamma - \delta \right\| < 1$, հետևաբար՝

$$0 < \|\alpha\gamma - \beta\delta\| < \|\beta\| :$$

Նշանակենք $\{a\}$ -ով a իրական թվին մոտակա ամբողջ թիվը, ընդ որում, եթե $a = m + \frac{1}{2}$, ապա $\{a\} = m$:

Դեպք 1: $y \in \mathbb{Z}$, $\frac{x-y}{2} \notin \mathbb{Z}$:

Ունենք

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{-19} = \frac{x-y}{2} + \frac{y}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{-19} :$$

Վերցնենք $\gamma = 1$ և $\delta = \frac{2\{\frac{x-y}{2}\}}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{-19} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$: Ստանում ենք, որ $\frac{\alpha}{\beta}\gamma - \delta = \frac{x-y}{2} - \left\{\frac{x-y}{2}\right\} \neq 0$ և

$$\left\|\frac{\alpha}{\beta}\gamma - \delta\right\| = \left(\frac{x-y}{2} - \left\{\frac{x-y}{2}\right\}\right)^2 \leq \frac{1}{4} < 1 :$$

Դեպք 2: $y \notin \mathbb{Z}$, $\frac{x-y}{2} \in \mathbb{Z}$:

Ենթադեպք 2.1: $5y \in \mathbb{Z}$:

Պարզ է, որ $y = m + \frac{i}{5}$, $i = 1, 2, 3, 4$ և

$$\{y\} = \begin{cases} m, & i = 1, 2, \\ m + 1, & i = 3, 4 : \end{cases}$$

Ուստի՝ $|y - \{y\}| \in \left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right\}$: Պարզ է նաև, որ $x - y$ -ը զույգ թիվ է: Վերցնենք $\gamma = 1$ և

$$\delta = \frac{x-y + \{y\}}{2} + \frac{\{y\}}{2}\sqrt{-19} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right] :$$

Ստանում ենք՝

$$\frac{\alpha}{\beta}\gamma - \delta = \frac{y - \{y\}}{2} + \frac{y - \{y\}}{2}\sqrt{-19} \neq 0$$

և

$$\left\|\frac{\alpha}{\beta}\gamma - \delta\right\| = \frac{(y - \{y\})^2}{4} + \frac{(y - \{y\})^2}{4} 19 = 5(y - \{y\})^2 \leq 5 \times \frac{4}{25} < 1 :$$

Ենթադեպք 2.2: $5y \notin \mathbb{Z}$:

Վերցնենք $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-19}$: Կստանանք՝

$$\frac{\alpha}{\beta}\gamma = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{-19}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-19}\right) = \frac{x-y}{2} + 10y - \frac{x-y}{2}\sqrt{-19} :$$

Վերցնենք

$$\delta = \frac{\frac{x-y}{2} + 2\{5y\}}{2} - \frac{x-y}{2}\sqrt{-19} \in \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$$

և $\frac{\alpha}{\beta}\gamma - \delta = 5y - \{5y\} \neq 0$: Ուրեմն՝

$$\left\|\frac{\alpha}{\beta}\gamma - \delta\right\| = (5y - \{5y\})^2 \leq \frac{1}{4} < 1 :$$

Դեպք 3: $y \notin \mathbb{Z}$, $\frac{x-y}{2} \notin \mathbb{Z}$:

Ենթադեպ 3.1: $2y \in \mathbb{Z}$, $x - y \in \mathbb{Z}$:

Ունենք՝ $2y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = m + \frac{1}{2} \Rightarrow 5y = 5m + \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$ և $5y - \{5y\} = \frac{1}{2}$: Պարզ է, որ $x - y$ -ը կենար է: Դիցուք $x - y = 2k + 1$: Ստանում ենք

$$x + y = 2k + 1 + 2 \left(m + \frac{1}{2} \right) = 2(k + m + 1)$$

և $x + y$ -ը զույգ է: Վերցնենք $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-19}$, ապա

$$\frac{\alpha}{\beta}\gamma = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{-19} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-19} \right) = \frac{\frac{x+y}{2} - 10y}{2} + \frac{\frac{x+y}{2}}{2}\sqrt{-19} :$$

և

$$\delta = \frac{\frac{x+y}{2} - 2\{5y\}}{2} + \frac{\frac{x+y}{2}}{2}\sqrt{-19} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right] :$$

Ստանում ենք

$$\frac{\alpha}{\beta}\gamma - \delta = \{5y\} - 5y = -\frac{1}{2} \neq 0$$

և վերջապես՝

$$\left\| \frac{\alpha}{\beta}\gamma - \delta \right\| = (\{5y\} - 5y)^2 = \frac{1}{4} < 1 :$$

Ենթադեպ 3.2: $2y \in \mathbb{Z}$, $x - y \notin \mathbb{Z}$:

Ունենք

$$2y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = m + \frac{1}{2} \Rightarrow 2y = 2m + 1 :$$

Վերցնենք $\gamma = 2$, ապա $\frac{\alpha}{\beta}\gamma = \frac{2x}{2} + \frac{2y}{2}\sqrt{-19}$:

Կգրվի ամբողջ p , որ $p \leq x \leq p + 1$, ուստի՝ $2p \leq 2x \leq 2p + 2$ և $|2x - (2p + 1)| \leq 1$:

Վերցնենք

$$\delta = \frac{2p + 1}{2} + \frac{2y}{2}\sqrt{-19} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right] :$$

Պարզ է, որ $\frac{\alpha}{\beta}\gamma - \delta = \frac{2x - (2p + 1)}{2} \neq 0$, քանի որ, եթե $2x = 2p + 1$, ապա $x - y = p - m \in \mathbb{Z}$ ինչն անհնար է:

Վերջապես ստանում ենք

$$\left\| \frac{\alpha}{\beta}\gamma - \delta \right\| = \frac{(2x - (2p + 1))^2}{4} \leq \frac{1}{4} < 1 :$$

Ենթադեպ 3.3: $2y \notin \mathbb{Z}$:

Ունենք $y \notin \mathbb{Z}$ և $y \neq m + \frac{1}{2}$: Կգրնվի ամբողջ p , որ $p < y < p + 1$: Եթե $p < y \leq p + \frac{1}{3}$ կամ $p + \frac{2}{3} \leq y < p + 1$, ապա $|y - \{y\}| \leq \frac{1}{3}$: Եթե $p + \frac{1}{3} < y < p + \frac{2}{3}$, ապա

$$2p + \frac{2}{3} < 2y < 2p + 1 + \frac{1}{3}, \quad \{2y\} = 2p + 1$$

և $|2y - \{2y\}| \leq \frac{1}{3}$:

Դիցուք փրեղի ունի $p < y \leq p + \frac{1}{3}$ կամ $p + \frac{2}{3} \leq y < p + 1$ դեպքը: Կգրնվի ամբողջ k , որ $k \leq x < k + 1$: Սահմանենք՝

$$z = \begin{cases} k, & k \equiv \{y\} \pmod{2}, \\ k + 1, & k + 1 \equiv \{y\} \pmod{2} : \end{cases}$$

Պարզ է, որ $|z - x| \leq 1$: Վերցնենք $\gamma = 1$ և

$$\delta = \frac{z}{2} + \frac{\{y\}}{2} \sqrt{-19} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right] :$$

Սքանում ենք

$$\frac{\alpha}{\beta} \gamma - \delta = \frac{x - z}{2} + \frac{y - \{y\}}{2} \sqrt{-19} \neq 0,$$

քանի որ $y \notin \mathbb{Z}$: Վերջապես

$$\left\| \frac{\alpha}{\beta} \gamma - \delta \right\| = \frac{(x - z)^2}{4} + \frac{19(y - \{y\})^2}{4} \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{9} \times \frac{19}{4} = \frac{7}{9} < 1 :$$

Այժմ դիտարկենք $p + \frac{1}{3} < y < p + \frac{2}{3}$ դեպքը: Կգրնվի ամբողջ k որ $k \leq x < k + 1$: Սահմանենք z -ը հետևյալ կերպ: Եթե $\{2y\}$ -ը գույգ է, ապա

$$z = \begin{cases} 2k, & 2k \leq 2x \leq 2k + 1, \\ 2k + 2, & 2k + 1 < 2x < 2k + 2 : \end{cases}$$

Եթե $\{2y\}$ -ը կենդ է, ապա $z = 2k + 1$: Բոլոր դեպքերում $|z - 2x| \leq 1$:

Վերցնենք $\gamma = 2$ և

$$\delta = \frac{z}{2} + \frac{\{2y\}}{2} \sqrt{-19} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right] :$$

Սքանում ենք

$$\frac{\alpha}{\beta} \gamma - \delta = \frac{2x - z}{2} + \frac{2y - \{2y\}}{2} \sqrt{-19} \neq 0,$$

քանի որ $2y \notin \mathbb{Z}$: Վերջապես՝

$$\left\| \frac{\alpha}{\beta} \gamma - \delta \right\| = \frac{(2x - z)^2}{4} + \frac{19(2y - \{2y\})^2}{4} \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{9} \times \frac{19}{4} = \frac{7}{9} < 1 :$$

5. Դիցուք $\mathbb{Z}[x]$ -ն ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների օղակն է: Դիտարկենք 2 և x բազմանդամներով ծնված իդեալը՝

$$(2, x) = \{2f(x) + xg(x) \mid f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]\} :$$

Դյուրին է ստուգել, որ սա իսկապես իդեալ է: Այն գլխավոր իդեալ չէ: Ապացուցենք դա: Պարզ է, որ $2f(x) + xg(x)$ փեսքի բազմանդամի ազատ անդամը զույգ թիվ է, ուստի $(2, x)$ իդեալը չի պարունակում 1 կամ -1 հասարարուն բազմանդամները: Եթե գրնվի մի $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, որ ծնում է $(2, x)$ իդեալը, ապա $2 = h(x)p(x)$ և $x = h(x)q(x)$, որոշակի $p(x)$ և $q(x)$ բազմանդամների համար $\mathbb{Z}[x]$ -ից: Ակնհայտ է, որ $\deg h(x) + \deg p(x) = 0$ և $h(x) \neq \pm 1$: Ներկայացնենք $h(x) = \pm 2$: Սակայն գոյություն չունի ամբողջ գործակիցներով մի $q(x)$ բազմանդամ, որ բավարարի $x = \pm 2q(x)$ պայմանին:

6. Դիցուք $\mathbb{C}[x, y]$ -ը կոմպլեքս գործակիցներով x, y փոփոխականներից կախված բազմանդամների օղակն է: Դյուրին է փաստել, որ

$$(x, y) = \{xf(x, y) + yg(x, y) \mid f(x, y), g(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]\}$$

իդեալը գլխավոր չէ: Իսկապես, $xf(x, y) + yg(x, y)$ փեսքի բազմանդամի ազատ անդամը զրոյական է: Եթե գրնվեն $h(x, y)$ ծնիչ այդ իդեալի համար, ապա $x = h(x, y)p(x, y)$ և $y = h(x, y)q(x, y)$: Պարզ է, որ $h(x, y)$ -ը չի կարող լինել հասարարուն (ոչ զրոյական): Մյուս կողմից, եթե $\deg h = 1$, ապա $q(x, y)$ -ը հասարարուն է: Ակնհայտ է, որ $h(x, y)$ -ի առաջին աստիճանի անդամը կպարունակի կամ միայն x փոփոխականը կամ էլ միայն y փոփոխականը: Ուստի $x = h(x, y)p(x, y)$ և $y = h(x, y)q(x, y)$ պայմանները միաժամանակ բավարարվել չեն կարող:

2.11. Ֆակտորիալ օղակներ

Սահմանում. A ամբողջ փոփոխականների օղակը կոչվում է **ֆակտորիալ օղակ**, եթե բոլոր ոչ զրոյական փարրերն այդ օղակից միարժեքորեն ներկայացվում

են անվերածելի փարրերի արփադրյալներով, այսինքն՝ կամայական $0 \neq a \in A$ փարրի համար կգտնվեն անվերածելի p_1, \dots, p_n և միավոր $\varepsilon \in A$ այնպիսին, որ $a = \varepsilon p_1 \dots p_n$:

Անվերածելի փարրերի արփադրյալի միակությունը հասկացվում է հետևյալ կերպ: Միևնույն փարրի երկու $a = \varepsilon p_1 \dots p_n$ և $a = \delta q_1 \dots q_m$ ներկայացումները համարվում են հավասար, եթե կամայական p_i համար կգտնվի նրան ասոցիացված q_j և հակառակը՝ կամայական q_i համար կգտնվի նրան ասոցիացված p_j : Խմբավորենք ասոցիացված փարրերը $a = \varepsilon p_1 \dots p_n$ ներկայացման մեջ, կստանանք՝ $a = \mu p_{i_1}^{s_1} p_{i_2}^{s_2} \dots p_{i_k}^{s_k}$, որպեսզի $\mu \in A^*$ և $r \neq t \Rightarrow p_r$ և p_t անվերածելի փարրերն ասոցիացված չեն: Երկու $a = \varepsilon p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n}$ և $a = \delta q_1^{t_1} \dots q_m^{t_m}$ ներկայացումները հավասար են, եթե $n = m$ և յուրաքանչյուր p_i համար կգտնվի նրան ասոցիացված q_j , որ $s_i = t_j$, իսկ յուրաքանչյուր q_j համար կգտնվի նրան ասոցիացված p_i , որ $s_i = t_j$: Պարզ է, որ $p_i^{s_i} = \lambda_i q_{j_i}^{t_{j_i}}$, $\lambda_i \in A$ և $\varepsilon = \delta \lambda_1 \dots \lambda_n$:

Դյուրին է նկատել, որ ֆակտորիալ օղակում անվերածելի փարրով ծնված իդեալը պարզ է: Իսկապես, դիցուք p -ն անվերածելի է: Դիփարկենք դրանով ծնված (p) իդեալը և ստուգենք այդ իդեալի պարզությունը: Դիցուք $ab \in (p)$: Կգտնվի c , որ $ab = pc$: Քանի որ օղակը ֆակտորիալ է, ապա ab -ն ունի միակ ներկայացում անվերածելի փարրերի արփադրյալի միջոցով, որը կհամընկնի pc -ն նման ներկայացման հետ, որը պարունակում է p -ին ասոցիացված փարր: Ուստի p -ին ասոցիացված փարր կպարունակի անհրաժեշտորեն կամ a -ի ներկայացումն անվերածելի փարրերով կամ էլ b -ի ներկայացումը: Ներկաբար, կամ $a \in (p)$ կամ էլ $b \in (p)$ և (p) իդեալը պարզ է: Այս պարճառով պարզ իդեալ ծնող փարրերը կոչվում են օղակի **պարզ փարրեր**:

Ֆակտորիալ օղակում ստանդարտ եղանակով, օգտվելով պարզ փարրերի վերլուծությունից, կարելի է սահմանել փարրերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի գաղափարները:

ՕՐԻՆԱԿ:

Դիփարկենք $R[x]$ իրական գործակիցներով բազմանդամների օղակը: Դյուրին է ստուգել, որ

$$18x^4 - 12x^3 + 20x^2 - 12x + 2 = f^2(x)g(x),$$

որպեղ $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x^2 + 2$ բազմանդամներն անվերածելի են: Պարզ է, որ $f(x)$ -ն ասոցիացված է $x - \frac{1}{3}$, իսկ $g(x)$ -ը՝ $x^2 + 1$ բազմանդամին, ուստի

$$18x^4 - 12x^3 + 20x^2 - 12x + 2$$

բազմանդամի անվերածելի արտադրիչների $(3x-1)^2(2x^2+2)$ և $18(x^2+1)(x-\frac{1}{3})^2$ վերլուծությունները հավասար են:

Թեորեմ 2.8. Ամբողջ գլխավոր իդեալների օղակը ֆակտորիալ է:

Ապացույց. Սկզբից կապացուցենք, որ կամայական ոչ զրոյական փարր ներկայացվում է անվերածելի փարրերի արտադրյալով, իսկ հետո կապացուցենք այդ ներկայացման միակությունը:

Նշանակենք S -ով այն (a) գլխավոր իդեալների բազմությունը, որ a -ն չի ներկայացվում անվերածելի փարրերի արտադրյալով: Պարզ է, որ եթե $(a) \in S$, ապա a -ն ոչ անվերածելի է, ոչ էլ միավոր:

Ցույց փանք, որ եթե $(a) \in S$, ապա գոյություն ունի մեկ այլ $(a_1) \in S$, որ $(a) \subset (a_1)$:

Նկատենք, որ եթե $(a) \in S$, ապա $a = bc$, որպեղ $b, c \notin A^*$: Ակնհայտ է, որ $(a) \subseteq (b)$ և $(a) \subseteq (c)$: Նամոզվենք, որ $(a) \subset (b)$ և $(a) \subset (c)$: Իսկապես, դիցուք $(a) = (b)$: Նշանակում է, որ $b = ad$: Ուստի $a = bc = adc$ և $a(1 - dc) = 0$: Քանի որ $a \neq 0$ և օղակն ամբողջ է, ապա $1 - dc = 0$ և $c \in A^*$: Նմանապես ստուգում ենք, որ $(a) \neq (c)$:

Պարզ է, որ b և c փարրերից առնվազն մեկը չունի ներկայացում անվերածելի արտադրիչներով և կամ $(b) \in S$ կամ էլ $(c) \in S$, քանի որ հակառակ դեպքում իրար կցագրելով b -ի և c -ի ներկայացումներն անվերածելի փարրերի արտադրյալներով կստանանք a -ի համապատասխան ներկայացումը: Այսպիսով ստացանք մեկ նոր փարր S -ից ((b) -ն կամ (c) -ն, որը նշանակենք (a_1) -ով), որի համար $(a) \subset (a_1)$:

Վերը նշվածից հետևում է, որ եթե $S \neq \emptyset$, ապա S -ում գոյություն ունի իդեալների անվերջ շղթա՝

$$(a_0) \subset (a_1) \subset \dots \subset (a_n) \subset \dots$$

Դիփարկենք $\bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i)$ բազմությունը: Դա իդեալ է: Իսկապես, եթե $x, y \in \bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i)$, ապա $x \in (a_{i_1})$ և $y \in (a_{i_2})$ որոշակի i_1 և i_2 համար: Ակնհայտ է, որ

$x, y \in (a_{\max(i_1, i_2)})$ և

$$x - y \in (a_{\max(i_1, i_2)}) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i) :$$

Նմանապես՝

$$x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i) \Rightarrow x \in (a_{i_1}) \Rightarrow xy \in (a_{i_1}) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i) :$$

Քանի որ A օղակը գլխավոր իդեալների օղակ է, ապա գոյություն ունի $b \in A$, որ $(b) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i)$: Ուստի $b \in (a_k)$ որոշակի k -ի համար: Պարզ է, որ $(b) \subseteq (a_k)$: Մյուս կողմից $(a_k) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i) = (b)$ և $(b) = (a_k)$: Սրացանք հակասություն, քանի որ $\exists x \in (a_{k+1}) \setminus (a_k)$ և $\bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i) = (a_k) \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} (a_i)$: Ուրեմն $S = \emptyset$ և օղակի յուրաքանչյուր փարր ունի ներկայացում անվերածելի փարրերի արքադրյալով: Ապացուցենք այժմ, որ այդ ներկայացումը միակն է:

Սկզբից ապացուցենք մի օժանդակ պնդում՝ եթե $p \cdot a \cdot b$ և p -ն անվերածելի է, ապա կան $p \cdot a$, կան $p \cdot b$: Իսկապես, դիցուք a -ն չի բաժանվում p -ի վրա: Դիցուք d -ն a -ի և p -ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարն է, այսինքն՝ $a = dx$ և $p = dy$: Քանի որ p -ն անվերածելի է, ապա կան $d \in A^*$ կան $y \in A^*$: Դիցուք $y \in A^*$: Այս դեպքում $d = py^{-1}$ և $a = py^{-1}x$ ինչն անհնար է: Ուրեմն՝ $d \in A$ և $(d) = A$: Սակայն, ինչպես գիտենք (Պնդում 2.7), $A = (d) = (a, p)$ և գոյություն ունեն $x_0, y_0 \in A$, որ $1 = ax_0 + py_0$: Բազմապարկելով վերջին հավասարության աջ և ձախ մասերը b -ով՝ կստանանք՝ $b = abx_0 + bpy_0$ և b -ն բաժանվում է p -ի վրա:

Եթե $p \cdot a^k$ և a -ն չի բաժանվում p -ի վրա, ապա ինչպես ցույց տվեցինք վերը՝ $1 = ax_0 + py_0$: Ուստի $a^{k-1} = a^k x_0 + a^{k-1} p y_0$ և $p \cdot a^{k-1}$: Շարունակելով պրոցեսը կստանանք, որ $p \cdot a$ ինչը հակասում է այն բանին, որ a -ն չի բաժանվում p -ի վրա: Ուրեմն եթե $p \cdot a^k$, ապա $p \cdot a$:

Այսպիսով ապացուցել ենք, որ եթե օղակի վերջավոր քանակությամբ փարրերի արքադրյալը բաժանվում է անվերածելի փարրի վրա, ապա արքադրիչներից առնվազն մեկը կբաժանվի այդ անվերածելի փարրի վրա:

Դիցուք փրված են միևնույն փարրի երկու ներկայացումներ անվերածելի արքադրյալների միջոցով՝

$$\varepsilon_1 p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n} = \varepsilon_2 q_1^{t_1} \dots q_m^{t_m} :$$

Ակնհայտ է, որ $\varepsilon_2 q_1^{t_1} \dots q_m^{t_m}$ փարբը բաժանվում է p_1 -ի վրա: Միավոր ε_2 -ը չի բաժանվում p_1 -ի վրա: Նակառակ դեպքում $\varepsilon_2 = p_1 x \Rightarrow 1 = p_1 x \varepsilon_2^{-1}$ և անվերածելի p_1 -ը միավոր է: Ուրեմն q_1, \dots, q_m փարբերից ճիշտ մեկը (հիշենք, որ q_1, \dots, q_m փարբերից ոչ մի զույգ ասոցիացված չէ) բաժանվում է p_1 -ի վրա: Պարզության համար ենթադրենք, որ դա q_1 -ն է՝ $q_1 = p_1 \delta_1$ և ակնհայտորեն $\delta_1 \in A^*$: Ստանում ենք, որ $\varepsilon_1 p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n} = \varepsilon_2 q_1^{t_1} \dots q_m^{t_m}$: Եթե $s_1 \neq t_1$, ասենք $s_1 > t_1$, ապա $\varepsilon_1 p_1^{s_1} \dots p_n^{s_n} - \varepsilon_2 \delta_1 q_1^{t_1} \dots q_m^{t_m} = 0$ և

$$p_1^{t_1} (\varepsilon_1 p_1^{s_1-t_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n} - \varepsilon_2 \delta_1 q_1^{t_2} \dots q_m^{t_m}) = 0 :$$

Օղակի ամբողջությունից ստանում ենք

$$\varepsilon_1 p_1^{s_1-t_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n} = \varepsilon_2 \delta_1 q_1^{t_2} \dots q_m^{t_m}$$

և ձախ մասը բաժանվում է p_1 -ի վրա, իսկ աջ մասը՝ ոչ (քանի որ q_2, \dots, q_m փարբերն ասոցիացված չեն p_1 -ի հետ): Ուստի $s_1 = t_1$ և օգրվելով օղակի ամբողջությունից՝

$$\varepsilon_1 p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n} = \varepsilon_2 \delta_1 q_1^{t_2} \dots q_m^{t_m} :$$

Կրկնելով վերը շարադրված դափողությունները կստանանք, որ կգրնվի $\delta_2 \in A^*$, որ

$$\varepsilon_1 p_3^{s_3} \dots p_n^{s_n} = \varepsilon_2 \delta_1 \delta_2 q_1^{t_3} \dots q_m^{t_m} :$$

Շարունակելով պրոցեսը՝ կբացառենք բոլոր p_i փարբերը ձախ մասում: Որևէ քայլում q_j -ները չեն կարող սպառվել p_i -ներից շուրջ և նույնպես p_i -ները չեն կարող սպառվել q_j -ներից շուրջ, ուստի $n = m$ և թեորեմն ամբողջությամբ ապացուցված է:

Ինչպես գիտենք, որևէ դաշտից գործակիցներով բազմանդամների օղակը գլխավոր իդեալների օղակ է, ուստի ստանում ենք՝

Նեքրևանք. Եթե K -ն դաշտ է, ապա K դաշտից գործակիցներով բազմանդամների $K[x]$ օղակը ֆակտորիալ է:

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

Դիփարկենք $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{m + n\sqrt{-3} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ օղակը: Այս օղակում նորմը սահմանվում է բնական եղանակով՝ $\|m + n\sqrt{-3}\| = (m + n\sqrt{-3})(m - n\sqrt{-3}) =$

$m^2 + 3n^2$: Այս օղակը ֆակտորիալ չէ, քանի որ $2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$:
 Դյուրին է համոզվել, որ 2-ը և $1 \pm \sqrt{-3}$ անվերածելի են և ասոցիացված չեն:
 Իսկապես, դիցուք $2 = (m + n\sqrt{-3})(p + q\sqrt{-3})$: Ունենք $\|2\| = 4 = (m^2 + 3n^2)(p^2 + 3q^2)$: Ակնհայտ է, որ $p^2 + 3q^2 \neq 2$, հետևաբար $m^2 + 3n^2 = 4$ և $p^2 + 3q^2 = 1$: Այսպեղից բխում է, որ $q = 0$, $p = \pm 1$ և $p + q\sqrt{-3}$ -ը միավոր է:
 Ակնհայտ է նաև, որ օղակի միակ միավորներն են ± 1 փարբերը, ուստի 2-ը և $1 \pm \sqrt{-3}$ ասոցիացված չեն:

Դիփարկենք $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ -ի ընդլայնումը՝

$$\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right] = \left\{ \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{-3} \mid x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \pmod{2} \right\} :$$

Դյուրին է ստուգել, որ փեղափոխելի օղակ է (փեսեք վերը դիփարկված $\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right]$ օղակի օրինակը): $\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right]$ -ը գլխավոր իդեալների օղակ է:
 Նամոզվենք դրանում: Դիցուք $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right]$ և $\beta \neq 0$: Բաժանենք α -ն β -ի վրա որպես սովորական կոմպլեքս թվեր՝ $\alpha = \beta\gamma$ և գրենք γ -ն $\frac{\hat{x}}{2} + \frac{\hat{y}}{2}\sqrt{-3}$ փեսքով:
 Նշանակենք $\gamma_1 = \frac{\{\hat{x}\}}{2} + \frac{\{\hat{y}\}}{2}\sqrt{-3}$: Եթե $\{\hat{x}\} \equiv \{\hat{y}\} \pmod{2}$ բաղդաբարումը սիսալ է, ապա γ_1 -ում փոխարինենք $\{\hat{x}\}$ -ը նյուս մտրակա ամբողջ թվով այնպես, որ $\{\hat{x}\} \equiv \{\hat{y}\} \pmod{2}$ բաղդաբարումը լինի ստույգ: Պարզ է, որ $\|\gamma - \gamma_1\| \leq \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4^2} = \frac{7}{16} < 1$: Այժմ նշանակենք $\delta = \alpha - \beta\gamma_1$: Ստանում ենք, որ

$$\begin{aligned} \|\delta\| &= \|\alpha - \beta\gamma_1\| = \|\alpha - \beta\gamma + \beta\gamma - \beta\gamma_1\| = \\ &= \|\beta\gamma - \beta\gamma_1\| = \|\beta\| \|\gamma - \gamma_1\| < \|\beta\| : \end{aligned}$$

Այսինքն մենք սահմանեցինք $\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right]$ -ում մնացորդով բաժանում: Մնում է կրկնել այն դարողությունը, որ կարարել էինք Գաուսյան ամբողջ թվերի օղակի համար:

$\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right]$ օղակում 2-ը և $1 \pm \sqrt{-3}$ -ն ասոցիացված են: Իսկապես, $2 \times \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = 1 + \sqrt{-3}$ և $\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$ փարբերը միավորներ են, քանի որ $\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \times \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} = 1$: Այսինքն 4-ի $2 \cdot 2$ և $(1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$ ներկայացումները նույնն են:

2.12. Ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների օղակի

Ֆակտորիալությունը

Այժմ ապացուցենք, որ $\mathbb{Z}[x]$ ամբողջ գործակիցներով բազմանդամների օղակը (որն ինչպես գիտենք գլխավոր իդեալների օղակ չէ) ֆակտորիալ է: Այսինքն ֆակտորիալ օղակների դասն ավելի լայն է, քան գլխավոր իդեալների օղակների դասը:

Սահմանում. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ բազմանդամի գործակիցների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կոչվում է բազմանդամի **պարունակություն** և նշանակվում է $\text{cont}(f)$ -ով:

Լեմմա 2.9 (Գաուսի Լեմմա). *Դիցուք $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$: Ստույգ է հետևյալ բանաձևը՝*

$$\text{cont}(fg) = \text{cont}(f)\text{cont}(g) :$$

Ապացույց. Ակնհայտ է, որ $f(x) = \text{cont}(f)f_1(x)$ և $g(x) = \text{cont}(g)g_1(x)$, որպեսզի $\text{cont}(f_1) = \text{cont}(g_1) = 1$: Պարզ է նաև, որ $f(x)g(x) = \text{cont}(f)\text{cont}(g)f_1(x)g_1(x)$ և $\text{cont}(fg) = \text{cont}(f)\text{cont}(g)\text{cont}(f_1g_1)$: Ուստի բավական է ապացուցել, որ $\text{cont}(f_1) = \text{cont}(g_1) = 1 \Rightarrow \text{cont}(f_1g_1) = 1$:

Դիցուք $f_1(x) = \alpha_0 + \dots + \alpha_n x^n$, $\alpha_n \neq 0$ և $g_1(x) = \beta_0 + \dots + \beta_m x^m$, $\beta_m \neq 0$: Ցույց տանք, որ $\text{cont}(f_1g_1)$ -ը չի բաժանվում և ոչ մի p պարզ թվի վրա: Դիցուք α_r -ը և β_s -ը համապատասխանաբար $f_1(x)$ -ի և $g_1(x)$ -ի ամենամեծ համարի գործակիցներն են, որ չեն բաժանվում p -ի վրա: Դյուրին է ստուգել, որ $f_1(x)g_1(x)$ -ում x^{r+s} -ի գործակիցը հավասար է

$$\alpha_r \beta_s + \alpha_{r+1} \beta_{s-1} + \dots + \alpha_{r-1} \beta_{s+1} + \dots$$

Պարզ է, որ $\alpha_r \beta_s$ -ը չի բաժանվում p -ի վրա, իսկ բոլոր մնացած գումարելիները (եթե դրանք կան) բաժանվում են p -ի վրա, քանի որ պարունակում են կամ r -ից մեծ համարի $f_1(x)$ -ի գործակիցներ կամ էլ s -ից մեծ համարի $g_1(x)$ -ի գործակիցներ: Ուստի լեմմն ապացուցված է:

Դնդում 2.10. *Դիցուք $\mathbb{Q}[x]$ -ը ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամների օղակն է: Յուրաքանչյուր $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ միարժեքորեն ներկայացվում է*

$f(x) = \frac{m}{n} f_1(x)$ *դիստրոփ*, *որտեղ* $f_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\text{cont}(f_1) = 1$ *և* $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *դրական հայրարարով անկրճարելի կոտորակ է:*

Ապացույց. $f(x) = \frac{m}{n} f_1(x)$ ներկայացման գոյությունն ակնհայտ է՝ բավական է ընդհանուր հայրարարի բերել $f(x)$ -ի գործակիցները և դուրս բերել փակագծից այդ ընդհանուր հայրարարը, ապա դուրս բերել գործակիցների ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը:

Ապացուցենք միակությունը: Դիցուք $f(x) = \frac{m}{n} f_1(x) = \frac{r}{s} f_2(x)$: Բազմապարկենք երկու կողմերը ns -ով՝ $msf_1(x) = nr f_2(x)$: Ուստի $ms = \text{cont}(msf_1) = \text{cont}(nr f_2) = nr$: Քանի որ $(m, n) = (r, s) = 1$, այսինքն $\frac{m}{n}$ -ը և $\frac{r}{s}$ -ն անկրճարելի են, ապա n -ը բաժանվում է s -ի վրա և ընդհակառակը՝ s -ը բաժանվում է n -ի վրա, ուրեմն՝ $n = s$: Նմանապես ստանում ենք, որ $m = r$: Այսպետից էլ բխում է, որ $f_1(x) = f_2(x)$:

Դնդում 2.11. *Եթե* $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *և* $f(x) = g(x)h(x)$, *որտեղ* $g(x), h(x) \in \mathbb{Q}$, *ապա* $f(x) = kg_1(x)h_1(x)$, *որտեղ* $k \in \mathbb{Z}$, $g_1(x), h_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\text{cont}(g_1) = \text{cont}(h_1) = 1$:

Ապացույց. Նամաձայն Դնդում 2.10-ի՝ ունենք՝ $f(x) = m f_1(x)$, $g(x) = \frac{p}{q} g_1(x)$, $h(x) = \frac{r}{s} h_1(x)$, ընդ որում

$$\text{cont}(f_1) = \text{cont}(g_1) = \text{cont}(h_1) = (p, q) = (r, s) = 1 :$$

Ուրեմն

$$m f_1(x) = f(x) = g(x)h(x) = \frac{p}{q} \frac{r}{s} g_1(x)h_1(x)$$

և

$$qsm f_1(x) = pr g_1(x)h_1(x) :$$

Նամաձայն Գաուսի լեմմի՝

$$qsm \times \text{cont}(f_1) = pr \times \text{cont}(g_1) \text{cont}(h_1)$$

և $qsm = pr$: Քանի որ $(p, q) = (r, s) = 1$, ստանում ենք, որ p -ն բաժանվում է s -ի վրա իսկ r -ը՝ q -ի վրա: Ներկայացնենք $\frac{pr}{qs}$ -ն ամբողջ թիվ է և $f(x) = kg_1(x)h_1(x)$, որտեղ $k = \frac{pr}{qs}$:

Այսպետից անմիջապես բխում է՝

Պնդում 2.12. Եթե $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ անվերածելի է $\mathbb{Z}[x]$ -ում, ապա այն անվերածելի է նաև $\mathbb{Q}[x]$ -ում: $\mathbb{Z}[x]$ օղակի անվերածելի բազմանդամներն են պարզ թիվ հանդիսացող հասարարուն բազմանդամները և $\mathbb{Q}[x]$ -ում անվերածելի 1 պարունակությամբ բազմանդամները:

Թեորեմ 2.13. $\mathbb{Z}[x]$ օղակը ֆակտորիալ է:

Ապացույց. Ակնհայտ է, որ $\mathbb{Z}[x]$ -ն ամբողջ է: Դիցուք $f(x) \neq 0$: Քանի որ \mathbb{Q} -ն դաշտ է, ապա համաձայն Թեորեմ 2.8-ի հեքլանքի $\mathbb{Q}[x]$ -ը ֆակտորիալ է և գոյություն ունի $f(x)$ -ի վերլուծությունն անվերածելի բազմանդամների $\mathbb{Q}[x]$ -ում: Նամաձայն Պնդում 2.11-ի՝ փոխարինելով $\mathbb{Q}[x]$ -ի անվերածելի բազմանդամները 1 պարունակությամբ ասոցիացվածներով $\mathbb{Z}[x]$ -ից կստանանք $f(x)$ -ի հեքլայ ներկայացումը՝ $f(x) = mg_1(x) \dots g_r(x)$, որպեսզի $m \in \mathbb{Z}$, $g_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ և $\text{cont}(g_i) = 1$, $i = 1, \dots, r$:

Դիցուք փրված է $f(x)$ -ի մեկ այլ վերլուծություն անվերածելի բազմանդամների $\mathbb{Z}[x]$ -ում $f(x) = nh_1(x) \dots h_s(x)$, որպեսզի $n \in \mathbb{Z}$, $h_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ և $\text{cont}(h_i) = 1$, $i = 1, \dots, s$: $\mathbb{Q}[x]$ օղակի ֆակտորիալությունից հեքլում է, որ $r = s$ և արքադրիչների վերադասավորումից հեքլո $g_i(x) = \frac{p_i}{q_i} h_i(x)$: Ուրեմն՝ $q_i g_i(x) = p_i h_i(x)$ և անցնելով պարունակություններին ստանում ենք $q_i = p_i$, այսինքն՝ $g_i(x) = h_i(x)$: Թեորեմն ապացուցված է:

Փոխարինելով \mathbb{Z} -ը կամայական ֆակտորիալ օղակով և \mathbb{Q} -ն այդ օղակի քանորդների դաշտով և կրկնելով վերը շարադրված դաբողությունները՝ կարելի է ապացուցել հեքլայ թեորեմը:

Թեորեմ 2.14. Եթե A -ն ֆակտորիալ օղակ է, ապա $A[x]$ -ը նույնպես ֆակտորիալ է: Ֆակտորիալ է նաև $A[x_1, \dots, x_n]$ օղակը, x_1, \dots, x_n փոփոխականների A -ից գործակիցներով բազմանդամների օղակը:

2.13. Էվկլիդեսյան (Էվկլիդյան) օղակներ

Ֆակտորիալ օղակների կարևոր ենթադաս են կազմում Էվկլիդեսյան օղակները: Մասնավորապես դրանց դասին են պատկանում ամբողջ թվերի օղակը, դաշտից գործակիցներով բազմանդամների օղակները, Գաուսյան ամբողջ թվերի օղակը:

Էվքլիդեսյան օղակներն ամբողջ և գլխավոր իդեալների օղակներ են, ուստի դրանք ֆակտորիալ են:

Սահմանում. A ամբողջ օղակը կոչվում է **Էվքլիդեսյան օղակ**, եթե նրա յուրաքանչյուր ոչ զրոյական a փարրին կարելի է համապատասխանեցնել որոշակի ամբողջ թիվ՝ $|a|$ (որը կանվանենք **Էվքլիդեսյան նորմ**), այնպես, որ փրկի ունենան հետևյալ պայմանները.

1. $|a| \geq 0$;
2. $a = bc \Rightarrow |b| \leq |a|$;
3. $(\forall a, b \in A, b \neq 0) (\exists q, r \in A) a = bq + r$ և $|r| < |b|$ եթե $r \neq 0$ (Էվքլիդեսյան բաժանման հնարավորությունը):

ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ:

1. Ամբողջ թվերի \mathbb{Z} օղակի համար նորմը թվի բացարձակ արժեքն է:
2. Որևէ K դաշտից գործակիցներով բազմանդամների $K[x]$ օղակի համար նորմը բազմանդամի աստիճանն է:
3. $\mathbb{Z}[i]$ Գաուսյան ամբողջ թվերի օղակի դեպքում $m + in$ թվի նորմը $(m + in)(m - in) = m^2 + n^2$ թիվն է:
4. Դյուրին է ստուգել, որ K դաշտից գործակիցներով աստիճանային շարքերը կազմում են ամբողջ օղակ, որը նշանակվում է $K[[x]]$ -ով: Շարքի նորմը դա x -ի ամենափոքր աստիճանի ցուցիչն է:
5. $\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \right]$ օղակում $\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{-3}$ փարրի նորմը $\left\| \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{-3} \right\| = \frac{x^2}{4} + 3\frac{y^2}{4}$ է:

Պնդում 2.15. *Էվքլիդեսյան օղակը գլխավոր իդեալների օղակ է:*

Ապացույց. Դիցուք A օղակը Էվքլիդեսյան է և B -ն իդեալ է A -ում: Դիցուք $B \neq \{0\}$ և $B \neq A$ (ակնհայտ է, որ բավական է դիտարկել այս դեպքը): Դիցուք $0 \neq b \in B$ և $|b|$ -ն փոքրագույնն է B -ի փարրերի համար: Այժմ վերցնենք B -ի կամայական a փարր և բաժանենք այն b -ի վրա՝ համաձայն Էվքլիդեսյան օղակի սահմանման 3. պայմանի: Կստանանք $a = bq + r$ և, հետևաբար, $r = a - bq \in B$:

Դիցուք $|b| = 0$: Եթե $r \neq 0$, ապա $|r| < |b| = 0$, ինչն անհնար է: Ուրեմն $r = 0$ և իդեալի բոլոր փարրերը պարզիկ են b -ին, վերջինս էլ իդեալի ծնիչն է՝ $B = (b)$:

Դիցուք $|b| > 0$: Եթե $r \neq 0$ ապա $|r| < |b|$ և $|b|$ -ն փոքրագույնը չէ, ինչն անհնար է: Ուրեմն $r = 0$ և $B = (b)$:

Նեպրևանք. Էվքլիդեսյան օղակը ֆակտորիալ է:

Ինչպես փեսել էինք, $\mathbb{Z}[x]$ օղակը ֆակտորիալ է, բայց գլխավոր իդեալների օղակ չէ: Այսինքն, գլխավոր իդեալների օղակները ֆակտորիալ օղակների իսկական ենթադաս է: Ցույց փանք, որ Էվքլիդեսյան օղակներն էլ գլխավոր իդեալների օղակների իսկական ենթադասն են: Դրա համար բավական է նշել մի գլխավոր իդեալների օղակ, որն Էվքլիդեսյան չէ: Այդպիսի օղակ է

$$\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right] = \left\{ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \sqrt{-19} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{2} \right\}$$

օղակը: Արդեն համոզվել ենք, որ սա գլխավոր իդեալների օղակ է: Ապացուցենք, որ այն Էվքլիդեսյան չէ:

Դիցուք $\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right]$ -ն Էվքլիդեսյան է և $\alpha \in \mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right]$ Էվքլիդեսյան նորմը նշանակենք $|\alpha|$ -ով: Նիշենք, որ $\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right]$ օղակի կոմպլեքս նորմը սահմանել էինք որպես $\left\| \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \sqrt{-19} \right\| = \frac{a^2}{4} + 19 \frac{b^2}{4}$:

Դիցուք U -ն $\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right]$ -ի բոլոր ոչ զրոյական փարրերի բազմությունն է, որոնց Էվքլիդեսյան նորմը մինիմալն է: Եթե α -ն միավոր է (ունի հակադարձ ըստ բազմապարկման), ապա կամայական ոչ զրոյական փարր բաժանվում է α -ի վրա առանց մնացորդի: Ուստի համաձայն Էվքլիդեսյան նորմի 2. հատկության ստանում ենք, որ $|\alpha|$ չի գերազանցում U -ի փարրերի նորմին և ուրեմն $\alpha \in U$: Մյուս կողմից, եթե $\beta \in U$, ապա համաձայն Էվքլիդեսյան նորմի 3. հատկության $1 = \beta\gamma + \delta$: Եթե $\delta \neq 0$, ապա $|\delta| < |\beta|$ և սրացանք ոչ զրոյական փարր, որի Էվքլիդեսյան նորմը փոքր է $|\beta|$ -ից, ինչն անհնար է: Ուստի՝ $\delta = 0$ և $1 = \beta\gamma$, այսինքն β -ն միավոր է: Այսպիսով ստանում ենք, որ U -ն համընկնում է $\mathbb{Z} \left[\frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right]$ -ի միավորների բազմության հետ:

Ապացուցենք այժմ, որ $U = \{1, -1\}$:

Դիցուք $\alpha = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \sqrt{-19}$ փարրը միավոր է՝ $\alpha\alpha^{-1} = 1$ և $\|\alpha\| \|\alpha^{-1}\| = 1$: Քանի որ կոմպլեքս նորմը ամբողջ ոչ բացասական թիվ է, ապա $\|\alpha\| = \frac{a^2}{4} + 19 \frac{b^2}{4} = 1$: Ուրեմն $a^2 + 19b^2 = 4$ ինչը հնարավոր է միայն, երբ $b = 0$ և $a = \pm 2$: Նեպրևաբար $\alpha = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \sqrt{-19} = \pm 1$:

Դիցուք $\alpha \notin \{0, 1, -1\}$ և ունի նվազագույն հնարավոր Էվքլիդեսյան նորմը: Էվքլիդեսյան նորմի 3. հատկության համաձայն՝ $2 = \alpha\beta + \delta$ և կամ $\delta = 0$ կամ էլ

$|\delta| < |\alpha|$: Ներկաբար $\delta \in \{0, 1, -1\}$: Եթե $\delta = 1$, ապա $1 = \alpha\beta$ և α -ն միավոր է, այսինքն $\alpha \in U = \{1, -1\}$, ինչն անհնար է: Ուրեմն $\delta \in \{0, -1\}$ և կամ $2 = \alpha\beta$ կամ էլ $3 = \alpha\beta$: Այսպեղից բխում է, որ կամ $\alpha = \pm 2$ կամ $\alpha = \pm 3$: Ապացուցենք դա: Ստուգենք, որ 2-ը պարզ թիվ է $\mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$ -ում (հիշենք, որ $\mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right]$ -ը ֆակտորիալ օղակ է): Դիցուք $2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{-19} \right) \left(\frac{c}{2} + \frac{d}{2}\sqrt{-19} \right)$: Անցնելով կոմպլեքս նորմերին ստանում ենք՝

$$\|2\| = 4 = \left\| \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{-19} \right\| \left\| \frac{c}{2} + \frac{d}{2}\sqrt{-19} \right\| :$$

Եթե ոչ $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{-19}$ -ը, ոչ էլ $\frac{c}{2} + \frac{d}{2}\sqrt{-19}$ -ը միավոր չեն, ապա

$$\left\| \frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{-19} \right\| = \left\| \frac{c}{2} + \frac{d}{2}\sqrt{-19} \right\| = 2 :$$

Ներկաբար, $a^2 + 19b^2 = c^2 + 19d^2 = 8$, որպեղից ստանում ենք $b = d = 0$ և $a^2 = c^2 = 8$, ինչն անհնար է: Նմանապես վարվելով ապացուցվում է, որ 3-ն էլ պարզ է: Իսկապես $\|3\| = 9$ և $a^2 + 19b^2 = c^2 + 19d^2 = 12$, ինչն անհնար է: Քանի որ α -ն միավոր չէ և 2-ն ու 3-ը պարզ թվեր են, $2 = \alpha\beta$ և $3 = \alpha\beta$ պայմաններից հեքսում է, որ կամ $\alpha = \pm 2$, կամ $\alpha = \pm 3$:

Այժմ, համաձայն Էվքլիդեսյան նորմի 3. հարկություն, բաժանենք $\frac{1+\sqrt{-19}}{2}$ -ը α -ի վրա՝ $\frac{1+\sqrt{-19}}{2} = \alpha\beta + \delta$ և կամ $\delta = 0$, կամ էլ $|\delta| = |\alpha|$: Ուստի՝ $\delta \in \{0, 1, -1\}$ և $\frac{1+\sqrt{-19}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{-19}}{2} - 1$, $\frac{1+\sqrt{-19}}{2} + 1$ թվերից մեկը բաժանվում է α -ի վրա, այսինքն կամ ± 2 -ի, կամ էլ ± 3 -ի վրա: Ունենք $\|\pm 2\| = 4$ և $\|\pm 3\| = 9$: Նաշվենք $\frac{1+\sqrt{-19}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{-19}}{2} - 1$, $\frac{1+\sqrt{-19}}{2} + 1$ թվերի կոմպլեքս նորմերը.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right\| &= \left\| \frac{1+\sqrt{-19}}{2} - 1 \right\| = \frac{1}{4} + 19 \times \frac{1}{4} = 5, \\ \left\| \frac{1+\sqrt{-19}}{2} + 1 \right\| &= \left\| \frac{3+\sqrt{-19}}{2} \right\| = \frac{9}{4} + 19 \times \frac{1}{4} = 7 : \end{aligned}$$

Դիցուք $x \in \left\{ \frac{1+\sqrt{-19}}{2}, \frac{1+\sqrt{-19}}{2} - 1, \frac{1+\sqrt{-19}}{2} + 1 \right\}$: Ունենք՝ $x = \alpha\beta$ և $\|x\| = \|\alpha\| \|\beta\|$, հեքսում է, որ $\|x\|$ -ը բաժանվում է առանց մնացորդի $\|\alpha\|$ -ի վրա: Սակայն $\|x\| \in \{5, 7\}$ և $\|\alpha\| \in \{4, 9\}$ և $\|x\|$ -ը չի կարող բաժանվել առանց մնացորդի $\|\alpha\|$ -ի վրա: Ուրեմն օղակը չի կարող լինել Էվքլիդեսյան:

2.14. Դաշարի բնութագրիչը

Դիցուք F -ը դաշար է: Բնական է **ենթադաշար** անվանել F -ի այն K ենթաօղակները, որոնք փակ են հակադարձի հաշվման գործողության նկատմամբ, այսինքն՝ եթե $\alpha \in K$, ապա $\alpha^{-1} \in K$:

Յուրաքանչյուր $n \in \mathbb{Z}$ համար \bar{n} -ով նշանակենք F -ի հետևյալ փարրը՝

$$\bar{n} = \begin{cases} \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{|n| \text{ հասր}}, & \text{եթե } n > 0, \\ -\underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{|n| \text{ հասր}}, & \text{եթե } n < 0: \end{cases}$$

Նամարում ենք, որ $\bar{0} = 0$:

Դիտարկենք F -ի հետևյալ ենթաօղակը՝ $F_0 = \{\bar{n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$: Դյուրին է ստուգել, որ F_0 -ն իսկապես ենթաօղակ է: Պարզ է նաև, որ կամայական դաշար (նաև կամայական փրեդափոխելի օղակ) պարունակում F_0 ենթաօղակը: Պարզ է նաև, որ $p = nm \Rightarrow \bar{p} = \bar{n}\bar{m}$:

Պարզ է, որ կամ F_0 -ի բոլոր փարրերը փարբեր են, կամ էլ կգտնվեն երկու հավասար փարրեր: Երկու հավասար փարրերի գոյությունը համարժեք է այնպիսի \bar{n} -ի գոյությանը, որ $\bar{n} = 0$ և $n > 0$:

Դիցուք F_0 -ի բոլոր փարրերը փարբեր են: Այդ դեպքում ակնհայտ է, որ F_0 -ն իզոմորֆ է որպես օղակ ամբողջ թվերի \mathbb{Z} օղակին: Այդ իզոմորֆիզմը փրվում է յուրաքանչյուր $n \in \mathbb{Z}$ ամբողջ թվին համապատասխանեցնելով \bar{n} փարրը: Քանի որ F -ը դաշար է, ապա այն պարունակում է F_0 -ի հետ մեկտեղ F_0 -ի ոչ գրոյական փարրերի հակադարձները, որոնք կազմում են F_0 -ի քանորդների դաշարը, որն իր հերթին իզոմորֆ է ամբողջ թվերի օղակի քանորդների դաշարին, այսինքն ռացիոնալ թվերի դաշարին: Այսպիսով սրացանք, որ եթե F_0 -ի բոլոր փարրերը փարբեր են, ապա դաշարը պարունակում է ռացիոնալ թվերի դաշարին իզոմորֆ ենթադաշար:

Դիտարկենք մյուս դեպքը: Դիցուք այժմ կգտնվի $p > 0$, որ $\bar{p} = 0$: Կհամարենք, որ p -ն նվազագույնն է: Եթե p -ն բաղադրյալ է՝ $p = nm$, ապա $\bar{p} = \bar{n}\bar{m}$: Քանի որ F -ը դաշար է և ուրեմն ամբողջ օղակ է, սրանում ենք՝ կամ $\bar{n} = 0$ կամ $\bar{m} = 0$: Ոստի p -ն նվազագույնը չէ: Ներևաբար նվազագույն p -ն, որ $p > 0$ և $\bar{p} = 0$ պարփաղիր պարզ թիվ է: Այս դեպքում F_0 -ն իզոմորֆ է

ըստ $\text{mod } p$ -ի \mathbb{Z}_p մնացքների օղակին՝ $\bar{n} = \bar{m} \Leftrightarrow n \equiv m \pmod p$: Ստացվում է, որ $F_0 = \{0, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$: Քանի որ p պարզ մոդուլի դեպքում \mathbb{Z}_p -ն դաշտ է (բոլոր ոչ զրոյական փարբերը կունենան հակադարձներ ըստ բազմապարկման), ուրեմն F_0 -ն դաշտ է և այն նույնացվում է \mathbb{Z}_p -ն: Այսպիսով այս դեպքում դաշտը պարունակում է \mathbb{Z}_p -ն իզոմորֆ ենթադաշտ:

Ամփոփելով վերը ստացվածը՝

յուրաքանչյուր դաշտ կամ պարունակում է ռացիոնալ թվերի դաշտին իզոմորֆ ենթադաշտ և անվերջ է, կամ էլ պարունակում է պարզ մոդուլով մնացքների դասերին իզոմորֆ ենթադաշտ:

Նշված F_0 ենթադաշտը կոչվում է **դաշտի պարզ ենթադաշտ**:

Առաջին դեպքում ասում են, որ դաշտի **բնութագրիչը** 0 է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ p է: F դաշտի նութագրիչը նշանակում են $\text{char}(F)$ նշանով:

Այսուհետև $\underbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{|n| \text{ անգամ}}$ փարբը կնշանակենք $n\alpha$ -ով: Պարզ է, որ

$$n\alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \dots + \alpha}_{|n| \text{ անգամ}} = (1 + 1 + \dots + 1)\alpha = \bar{n}\alpha$$

և, եթե $\text{char}(F) = p > 0$, ապա $n\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ կամ $n \equiv 0 \pmod p$: Ուստի, եթե $n \equiv 0 \pmod p$, ապա $n\alpha = 0$:

Դիցուք $\text{char}(F) = p > 0$: Ինչպես գիտենք, $(\alpha + \beta)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \alpha^k \beta^{p-k}$ և $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$: Ստանում ենք, որ $k!(p-k)!\binom{p}{k} = p!$: Եթե $0 < k < p$, ապա $k!(p-k)!$ թիվը չի բաժանվում p -ի վրա, քանի որ դա p -ից փոքր թվերի արտադրյալ է: Ուրեմն $\binom{p}{k}$ -ն բաժանվում է p -ի վրա առանց մնացորդի և $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod p$: Ներկայացնելով $(\alpha + \beta)^p = \alpha^p + \beta^p$: Նմանապես՝

$$(\alpha + \beta)^{p^2} = ((\alpha + \beta)^p)^p = (\alpha^p + \beta^p)^p = \alpha^{p^2} + \beta^{p^2}$$

և

$$(\alpha + \beta)^{p^m} = \alpha^{p^m} + \beta^{p^m} : \tag{2.13}$$

2.15. Վերջավոր դաշտեր

Այսուհետև կդիտարկենք միայն վերջավոր քանակությամբ փարբ պարունակող դաշտեր և դաշտ ասելով ի նկարի ենք ունենալու վերջավոր դաշտ: Այդ դաշտերը

նաև կոչվում են \mathbb{F} -ալոյալի դաշտեր: Ինչպես տեսանք, p բնութագրիչ ունեցող վերջավոր դաշտը պարունակում է իր մեջ \mathbb{Z}_p պարզ դաշտը: \mathbb{F} -ի K -ն F դաշտի ենթադաշտն է: \mathbb{F} -ում λ և α նկատելի, որ F -ը գծային տարածություն է K -ի նկատմամբ: Իսկապես, եթե $\lambda \in K$ և $\alpha \in F$, ապա $\lambda\alpha \in F$: Որպես գումարման գործողություն վերցնում ենք F -ի գումարումը: \mathbb{F} -ում գծային տարածության սահմանման բոլոր պայմաններն ակնհայտորեն բավարարված են: Քանի որ դաշտը վերջավոր է, ապա F -ը վերջավոր չափանի գծային տարածություն է և ունի վերջավոր բազիս: \mathbb{F} -ում F -ը m -չափանի է և K -ի տարրերի քանակը հավասար է q -ի: Ուրեմն, այն իզոմորֆ է (որպես գծային տարածություն) $V_m(K) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \mid \lambda_i \in K, i = 1, 2, \dots, m\}$ m -չափանի վեկտորական տարածությանը և F -ի տարրերի քանակը հավասար է $V_m(K)$ -ի տարրերի քանակին, որը հավասար է q^m : \mathbb{F} -ում այս դատողությունները $K = \mathbb{Z}_p$ դեպքին անմիջապես ստանում ենք՝

Պնդում 2.16. *Վերջավոր դաշտի տարրերի քանակը պարզ թվի (դաշտի բնութագրիչի) աստիճան է:*

Այսուհետև q տարր պարունակող դաշտը կնշանակենք F_q նշանով:

Ինչպես արդեն տեսել էինք մաքսիմալ իդեալների ուսումնասիրության ժամանակ (Թեորեմ 2.4-ի մասնավոր դեպքում), անվերածելի բազմանդամով ծնված գլխավոր իդեալի նկատմամբ կառուցված ֆակտոր-օղակը դաշտ է: \mathbb{F} -ում \mathbb{F}_p Թեորեմ 2.4-ի մասնավոր դեպքի դատողությունները p պարզ թվի համար F_{p^n} վերջավոր դաշտի կառուցման համար:

\mathbb{F} -ում $n \geq 2$ և $f(x)$ -ն անվերածելի բազմանդամ է F_p պարզ դաշտում և $\deg f = n$: Նամանայն \mathbb{F}_p -ի $F_p[x]/(f(x))$ ֆակտոր օղակը դաշտ է: Ինչպես ցույց էինք տվել \mathbb{F}_p -ի մասնավոր դեպքի ուսումնասիրության ժամանակ $F_p[x]/(f(x))$ դաշտի յուրաքանչյուր տարր (հարակից դաս ըստ $(f(x)) = \{f(x)g(x) \mid g(x) \in F_p[x]\}$ իդեալի) պարունակում է միարժեքորեն որոշված $h(x) \in F_p[x]$ մի բազմանդամ, որի համար $\deg h < \deg f$ կամ էլ այն զրոյական է: Ավելի ստույգ, հարակից դասի յուրաքանչյուր բազմանդամ տարր է միևնույն $h(x)$ մնացորդը: Քանի որ $\deg h < \deg f = n$, ապա $h(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$ և այդպիսի $h(x)$ բազմանդամների քանակը հավասար է p^n (քանի որ $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ գործակիցների ընտրության եղանակների քանակը p^n է): Ակնհայտ է նաև, որ յուրաքանչյուր հարակից դաս

պարունակում է ճիշտ մեկ հար բազմանդամ, որի աստիճանը փոքր է n -ից (քանի որ դրանց մնացորդները $f(x)$ -ի վրա բաժանելիս համընկնում են հենց այդ բազմանդամների հետ) կամ էլ այն գրոյական է: Այսպիսով սրացանք, որ $F_p[x]/(f(x))$ փարրերի քանակը հավասար է p^n -ի: Պարզ է որ, եթե որպես $F_p[x]/(f(x))$ դաշտի փարրերի՝ հարակից դասերի ներկայացուցիչներ վերցնենք համապատասխան $h(x)$ բազմանդամները, ապա հարակից դասերի նկատմամբ գումարումը և բազմապարկումը կհամապատասխանեն ըստ $\text{mod } f(x)$ -ի $h(x)$ բազմանդամների գումարմանը և բազմապարկմանը: Նշանակենք θ -ով $h(x) = x$ բազմանդամին համապատասխանող հարակից դասը: Դիցուք $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n$: Դիփարկենք $\beta_0 + \beta_1 \theta + \dots + \beta_n \theta^n$ հարակից դասը: Պարզ է, որ դրա համապատասխան $h(x)$ բազմանդամը $(\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n) \text{ mod } f(x)$ բազմանդամն է, որն հավասար է 0-ի: Այսինքն, θ -ն $f(x)$ բազմանդամի արմարն է $F_p[x]/(f(x))$ դաշտում: Այսպիսով կառուցեցինք F_{p^n} վերջավոր դաշտը: Ատում են, որ այս դեպքում F_{p^n} դաշտը սրացվում է F_p -ից վերջինին θ արմարը միացնելով:

Դյուրին է նկատել, որ որպես բազիս (հիշենք, որ դաշտը գծային փարածույթյուն է F_p -ի նկատմամբ) կարող ենք վերցնել $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ բազմանդամներին համապատասխանող հարակից դասերը, այսինքն F_{p^n} դաշտի $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$ փարրերը: Իսկապես, $h(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$ բազմանդամին համապատասխանող հարակից դասը դա $\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \dots + \alpha_{n-1} \theta^{n-1}$ դասն է: Ուստի F_{p^n} դաշտի յուրաքանչյուր փարր ներկայացվում է $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$ փարրերի գծային կոմբինացիայով: Պարզ է, որ $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$ փարրերը գծորեն անկախ են F_{p^n} -ի նկատմամբ: Իսկապես, դիցուք

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in F_p \text{ և } \gamma_0 + \gamma_1 \theta + \dots + \gamma_{n-1} \theta^{n-1} = 0 :$$

Սա նշանակում է, որ $\gamma_0 + \gamma_1 \theta + \dots + \gamma_{n-1} \theta^{n-1}$ փարրին համապատասխանող $h(x)$ բազմանդամը $\gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_{n-1} x^{n-1}$ բազմանդամն է, որը $f(x)$ -ի վրա բաժանելիս պետք է փա գրոյական մնացորդ, ինչը հնարավոր է միայն $\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{n-1} = 0$ դեպքում: Ուստի դաշտի կամայական փարր միարժեքորեն ներկայացվում է $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$ փարրերի գծային կոմբինացիայով:

Նկատենք, որ մենք ապացուցեցինք նաև, որ կամայական բազմանդամ

$F_p[x]$ -ից, որի համար θ -ն արմար է, առանց մնացորդի բաժանվում է $f(x)$ -ի վրա (քանի որ θ -ն արմար է այդպիսի բազմանդամի $f(x)$ -ի վրա բաժանելուց սրացված մնացորդի՝ $h(x)$ -ի համար): Այսինքն, $(f(x))$ իդեալը կազմված է բոլոր այն բազմանդամներից, որոնց համար θ -ն արմար է և $f(x)$ -ը ամենափոքր ասփիճանի այդպիսի բազմանդամներից մեկն է:

Այսպիսով տեսանք, որ F_{p^n} դաշտը կառուցելու համար բավական է ունենալ n -րդ ասփիճանի F_p -ի նկատմամբ որևէ անվերածելի բազմանդամ: Ստորև կապացուցենք, որ կամայական F_p -ի դեպքում բոլոր $n \geq 1$ -երի համար գոյություն ունեն n -րդ ասփիճանի անվերածելի բազմանդամներ: Այսինքն, բոլոր պարզ p թվերի և բոլոր $n \geq 1$ -երի համար գոյություն ունի F_{p^n} դաշտը:

ՕՐԻՆԱԿ:

Կառուցենք F_{3^2} դաշտը: Դրա համար վերցնենք $f(x) = 2 + x + x^2$ բազմանդամը, որն անվերածելի է $F_3[x]$ -ում: Այժմ F_{3^2} դաշտը դա $F_3[x]/(2 + x + x^2)$ դաշտն է, որի փարրերը 1 և θ փարրերի բոլոր գծային կոմբինացիաներից են բաղկացած (այստեղ θ միացվող արմարն է՝ $h(x) = x$ բազմանդամին համապատասխանող հարակից դասն է $F_3[x]/(2 + x + x^2)$ -ում): Թվարկենք F_{3^2} -ի փարրերը՝

$$F_{3^2} = \{0, 1, 2, \theta, 1 + \theta, 2 + \theta, 2\theta, 1 + 2\theta, 2 + 2\theta\} :$$

Կառուցենք գումարման և բազմապարկման աղյուսակները՝ կատարելով գումարում և բազմապարկում ըստ $\text{mod}(2 + x + x^2)$ -ի, այսինքն օգտվելով այն բանից, որ $2 + \theta + \theta^2 = 0$: Օրինակ՝ $\theta \times \theta = \theta^2 = -2 - \theta = 1 + 2\theta$:

Գումարման աղյուսակ

+	0	1	2	θ	$1 + \theta$	$2 + \theta$	2θ	$1 + 2\theta$	$2 + 2\theta$
0	0	1	2	θ	$1 + \theta$	$2 + \theta$	2θ	$1 + 2\theta$	$2 + 2\theta$
1	■	2	0	$1 + \theta$	$2 + \theta$	θ	$1 + \theta$	$2 + 2\theta$	2θ
2	■	■	1	$2 + \theta$	θ	$1 + \theta$	$2 + 2\theta$	2θ	$1 + 2\theta$
θ	■	■	■	2θ	$1 + 2\theta$	$2 + 2\theta$	0	1	2
$1 + \theta$	■	■	■	■	$2 + 2\theta$	2θ	1	2	0
$2 + \theta$	■	■	■	■	■	$1 + 2\theta$	2	0	1
2θ	■	■	■	■	■	■	θ	$1 + \theta$	$2 + \theta$
$1 + 2\theta$	■	■	■	■	■	■	■	$2 + \theta$	θ
$2 + 2\theta$	■	■	■	■	■	■	■	■	$1 + \theta$

Բազմապարկման աղյուսակ

\times	0	1	2	θ	$1 + \theta$	$2 + \theta$	2θ	$1 + 2\theta$	$2 + 2\theta$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	■	1	2	θ	$1 + \theta$	$2 + \theta$	2θ	$1 + 2\theta$	$2 + 2\theta$
2	■	■	1	2θ	$2 + 2\theta$	$1 + \theta$	θ	$2 + \theta$	$1 + \theta$
θ	■	■	■	$1 + \theta$	1	$1 + \theta$	$2 + \theta$	$2 + 2\theta$	2
$1 + \theta$	■	■	■	■	$2 + \theta$	2θ	2	θ	$1 + 2\theta$
$2 + \theta$	■	■	■	■	■	2	$2 + 2\theta$	1	θ
2θ	■	■	■	■	■	■	$1 + 2\theta$	$1 + \theta$	1
$1 + 2\theta$	■	■	■	■	■	■	■	2	2θ
$2 + 2\theta$	■	■	■	■	■	■	■	■	$2 + \theta$

Նաշվենք θ -ի աստիճանները՝

$$\theta^0 = 1,$$

$$\theta^1 = \theta,$$

$$\theta^2 = 1 + 2\theta,$$

$$\theta^3 = \theta(1 + 2\theta) = \theta + 2\theta^2 = \theta + 2(1 + 2\theta) = 2 + 2\theta,$$

$$\theta^4 = \theta(2 + 2\theta) = 2\theta + 2\theta^2 = 2\theta + 2 + 4\theta = 2,$$

$$\theta^5 = 2\theta,$$

$$\theta^6 = 2\theta^2 = 2 + \theta,$$

$$\theta^7 = \theta(2 + \theta) = 2\theta + \theta^2 = 2\theta + 1 + 2\theta = 1 + \theta,$$

$$\theta^8 = \theta(1 + \theta) = \theta + \theta^2 = \theta + 1 + 2\theta = 1 :$$

Սրացվում է, որ θ -ի աստիճաններով ներկայացվում են F_{3^2} դաշտի բոլոր ոչ զրոյական փարրերը, այսինքն ոչ զրոյական փարրերը կազմում են ցիկլիկ խումբ ըստ բազմապարկման: Ստորև կապացուցենք, որ դա փեղի ունի բոլոր վերջավոր դաշտերի համար:

Այսուհետև F_q^* -ով կնշանակենք F_q դաշտի ոչ զրոյական փարրերի բազմությունը, որն ակնհայտորեն կազմում է $q - 1$ կարգի խումբ ըստ բազմապարկման գործողության: F_q^* -ը կոչվում է դաշտի **մուլտիպլիկատիվ խումբ**: Ուրեմն յուրաքանչյուր $\alpha \in F_q^*$ բավարարում է $x^{q-1} = 1$ հավասարմանը, իսկ յուրաքանչյուր փարր F_q -ից՝ $x^q = x$ հավասարմանը: Քանի որ $x^q - x$ բազմանդամն ունի ոչ ավելի, քան q հար արմար, ապա ստույգ է, որ

$$x^q - x = \prod_{\alpha \in F_q} (x - \alpha) : \quad (2.14)$$

Պնդում 2.17. *Դիցուք $F_q \subset K$, որտեղ K -ն մեկ այլ վերջավոր դաշտ է: Որպեսզի K դաշտի α փարրը պարկանի F_q դաշտին անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\alpha^q = \alpha$:*

Ապացույց. $\alpha^q = \alpha$ պայմանը փեղի ունի միայն և միայն այն ժամանակ, երբ α -ն $x^q - x$ բազմանդամի արմարն է: Նամաձայն (2.14) բանաձևի՝ $x^q - x$ բազմանդամի արմարները F_q դաշտի բոլոր փարրերն են:

Պնդում 2.18. *F_q դաշտի մուլտիպլիկատիվ խումբը ցիկլիկ է:*

Ապացույց. Ունենք, որ F_q^* -ի կարգը (փարրերի քանակը) հավասար է $q - 1$: Դիտարկենք $q - 1$ -ի վերլուծությունը պարզ թվերի արտադրյալի՝ $q - 1 = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$: Նշանակենք $h_i = p_i^{k_i}$, $i = 1, 2, \dots, s$: Ինչպես գիտենք (Բեզուի թեորեմից) $x^{\frac{q-1}{p_i}} - 1$ բազմանդամի արմատների քանակը F_q^* -ում չի գերազանցում $\frac{q-1}{p_i}$ թիվը, ուստի կգտնվի $\alpha_i \in F_q^*$, որի համար $\alpha_i^{\frac{q-1}{p_i}} \neq 1$, $i = 1, 2, \dots, s$: Նշանակենք $\beta_i = \alpha_i^{\frac{q-1}{h_i}}$, $i = 1, 2, \dots, s$: Պարզ է, որ $\beta_i^{h_i} = \alpha_i^{q-1} = 1$, ուստի β_i -ի կարգը h_i -ի բաժանարար է, այսինքն p_i^m տեսքի թիվ է, որտեղ $m \leq k_i$: Եթե $m < k_i$, ապա $1 = \beta_i^{p_i^m}$ և

$$1 = \left(\beta_i^{p_i^m}\right)^{p_i^{k_i-m-1}} = \beta_i^{p_i^{k_i-1}} = \left(\alpha_i^{\frac{q-1}{h_i}}\right)^{p_i^{k_i-1}} = \alpha_i^{\frac{q-1}{p_i}} \neq 1 :$$

Ուստի $m = k_i$ և β_i -ի կարգը հավասար է h_i -ի:

Նշանակենք՝ $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s$: Ստուգենք, որ β -ի կարգը հավասար է $q - 1$ -ի, այսինքն β -ն F_q^* -ի ծնիչն է, ուստի F_q^* -ը ցիկլիկ խումբ է: Ակնհայտ է, որ $\beta^{q-1} = 1$: Դիցուք β -ի կարգը $q - 1$ -ի բաժանարար է, որը փարբեր է $q - 1$ -ից: Այդ դեպքում β -ի կարգը կլինի $\frac{q-1}{p_1}, \frac{q-1}{p_2}, \dots, \frac{q-1}{p_s}$ թվերից մեկի բաժանարարը: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ β -ի կարգը $\frac{q-1}{p_1}$ -ի բաժանարարն է: Այդ դեպքում $\beta^{\frac{q-1}{p_1}} = 1$ և $\beta_i^{\frac{q-1}{p_1}} = \left(\beta_i^{h_i}\right)^{p_1^{k_1-1} h_1 \dots h_{i-1} h_{i+1} \dots h_s} = 1$ բոլոր $i \in \{2, \dots, s\}$: Ուրեմն $\beta_1^{\frac{q-1}{p_1}} = 1$ և $\frac{q-1}{p_1}$ -ը պետք է լինի պարզիկ β_1 -ի կարգին՝ $h_1 = p_1^{k_1}$ -ին, սակայն դա այդպես չէ: Ներկայացրեք β -ի կարգը $q - 1$ է: Թեորեմն ապացուցված է:

2.16. Վերջավոր դաշտի ենթադաշտերը

Այժմ նկարագրենք վերջավոր դաշտի բոլոր ենթադաշտերը:

Պնդում 2.19.

1. $x^m - 1$ բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվում է $x^k - 1$ բազմանդամի վրա միայն և միայն այն դեպքում, երբ m -ը առանց մնացորդի բաժանվում է k -ի վրա;

2. a դրական թվի համար $a^m - 1$ -ը առանց մնացորդի բաժանվում է $a^k - 1$ -ի վրա միայն և միայն այն դեպքում, երբ m -ը առանց մնացորդի բաժանվում է k -ի վրա:

Ապացույց. Ապացուցենք 1.-ը: Ակնհայտ է, որ $m \geq k$: Բաժանենք մնացորդով m -ը k -ի վրա՝ $m = kt + r$, $0 \leq r < k$, ապա

$$\frac{x^m - 1}{x^k - 1} = x^r \frac{x^{kt} - 1}{x^k - 1} + \frac{x^r - 1}{x^k - 1} :$$

Քանի որ $\frac{x^{kt}-1}{x^k-1} = (x^k)^{t-1} + (x^k)^{t-2} + \dots + x^k + 1$, ապա $\frac{x^m-1}{x^k-1}$ -ը բազմանդամ է միայն և միայն այն դեպքում, երբ $\frac{x^r-1}{x^k-1}$ -ն է բազմանդամ: Սակայն ակնհայտ է, որ $\frac{x^r-1}{x^k-1}$ -ը բազմանդամ է միայն երբ $r = 0$:

Պնդման 2. կերպն ապացուցվում է նմանապես:

Թեորեմ 2.20. *Դիցուք տրված է F_{p^n} դաշտը: n -ի յուրաքանչյուր d բաժանարարի համար գոյություն ունի F_{p^n} դաշտի միակ F_{p^d} ենթադաշտը: F_{p^n} դաշտը այլ ենթադաշտեր չունի:*

Ապացույց. Ակնհայտ է, որ F_{p^n} դաշտի բոլոր ենթադաշտերն ունեն միևնույն բնութագրիչը, որը հավասար է p -ի: Դիցուք $F_{p^d} \subseteq F_{p^n}$: Ապացուցենք, որ d -ն n -ի բաժանարարն է: $F_{p^d}^*$ -ի փարրերը $p^d - 1$ հար են և բավարարում են $x^{p^d-1} - 1 = 0$ հավասարմանը, սակայն դրանք նաև $F_{p^n}^*$ -ից են և բավարարում են $x^{p^n-1} - 1 = 0$ հավասարմանը, ուստի համաձայն (2.14) բանաձևի՝ ստանում ենք, որ $x^{p^n-1} - 1$ բազմանդամը բաժանվում է $x^{p^d-1} - 1$ բազմանդամի վրա առանց մնացորդի: Նամաձայն Պնդում 2.19-ի 1. կերպի՝ $p^n - 1$ -ը բաժանվում է $p^d - 1$ -ի վրա, իսկ համաձայն նույն պնդման 2. կերպի՝ n -ը բաժանվում է d -ի վրա:

Դիցուք այժմ d -ն n -ի բաժանարարն է: Ապացուցենք, որ F_{p^n} դաշտը պարունակում է F_{p^d} ենթադաշտը և այն միակն է: Նշանակենք՝ $E = \{\alpha \in F_{p^n} \mid \alpha^{p^d} = \alpha\}$: Այս բազմությունը դաշտ է: Իսկապես, եթե $\alpha, \beta \in E$, ապա

$$(\alpha + \beta)^{p^d} \underbrace{=} \alpha^{p^d} + \beta^{p^d} = \alpha + \beta,$$

համաձայն (2.13)

$$(\alpha\beta)^{p^d} = \alpha^{p^d}\beta^{p^d} = \alpha\beta,$$

$$(\alpha^{-1})^{p^d} = (\alpha^{p^d})^{-1} = \alpha^{-1} \text{ կամայական } \alpha \neq 0 \text{ համար} :$$

Այսպիսով, $0, 1 \in E$, նաև $\alpha, \beta \in E \Rightarrow \alpha + \beta, \alpha\beta \in E$ և, վերջապես, $0 \neq \alpha \in E \Rightarrow \alpha^{-1} \in E$: Ուստի, E -ն դաշտ է:

Ունենք, որ E^* -ի փարբերը $x^{p^d-1} - 1$ բազմանդամի արմարներն են F_{p^n} դաշտում: Քանի որ d -ն n -ի բաժանարարն է, ապա համաձայն Պնդում 2.19-ի՝ $p^n - 1$ -ը բաժանվում է $p^d - 1$ -ի վրա և $x^{p^n-1} - 1$ բազմանդամը բաժանվում է $x^{p^d-1} - 1$ բազմանդամի վրա: Ուրեմն $x^{p^n} - x$ բազմանդամը բաժանվում է $x^{p^d} - x$ բազմանդամի վրա և կգտնվի մի $g(x)$ բազմանդամ, որ $x^{p^n} - x = (x^{p^d} - x)g(x)$ և $\deg g(x) = p^n - p^d$: Ինչպես գիտենք, $x^{p^n} - x$ բազմանդամն ունի ճիշտ p^n հար փարբեր պարզ (ոչ պարիկ) արմար, որոնք կազմում են F_{p^n} դաշտը: Քանի որ $x^{p^d} - x$ և $g(x)$ բազմանդամները $x^{p^n} - x$ -ի բաժանարարներն են, ապա դրանց արմարները նույնպես պարզ են (պարիկ չեն): Ակնհայտ է, որ $(x^{p^d} - x)g(x)$ -ի արմարների քանակը $x^{p^d} - x$ -ի և $g(x)$ -ի արմարների քանակների գումարն է: Եթե $x^{p^d} - x$ բազմանդամի արմարների քանակը p^d -ից փոքր է, ապա $x^{p^n} - x = (x^{p^d} - x)g(x)$ -ի արմարների քանակը կլինի փոքր $p^d + (p^n - p^d) = p^n$ -ից, ինչն անհնար է: Ներկայումս $x^{p^d} - x$ բազմանդամն ունի ճիշտ p^d հար փարբեր պարզ արմար, որոնք էլ կազմում են F_{p^d} դաշտը: Այսինքն՝ $E = F_{p^d}$:

Եթե H -ը մեկ այլ ենթադաշտ է F_{p^n} -ում և ունի p^d հար փարբ, ապա համաձայն Պնդում 2.17-ի՝ այդ փարբերը պետք է բավարարեն $x^{p^d} - x = 0$ հավասարմանը, այսինքն $H = E$: Թերեմն ապացուցված է:

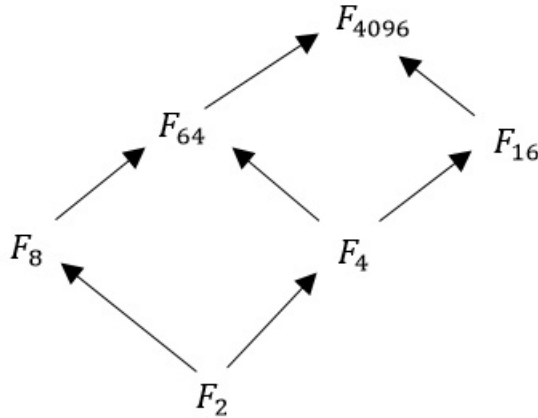
ՕՐԻՆԱԿ:

Նկարագրենք $F_{4096} = F_{2^{12}}$ դաշտի բոլոր ենթադաշտերը: Նամաձայն Թերեմ 2.20-ի սրանում ենք ենթադաշտերի ներդրվածության հերևյալ պարկերը:

2.17. Վերջավոր դաշտերի գոյությունը

Պնդում 2.21. Դիցուք $f(x) \in F_p[x]$ անվերածելի բազմանդամ է: $x^{p^k} - x$ բազմանդամը բաժանվում է առանց մնացորդի $f(x)$ -ի վրա միայն և միայն այն դեպքում, երբ k -ն բաժանվում է առանց մնացորդի $\deg f(x)$ -ի վրա:

Ապացույց. Դիցուք $\deg f(x) = n$ և $x^{p^k} - x$ -ը բաժանվում է $f(x)$ -ի վրա: Ինչպես գիտենք, F_{p^n} դաշտը սրացվում է որպես $F_p[x]/(f(x))$ և θ -ն x բազմանդամի հարակից դասն է: Գիտենք նաև, որ F_{p^n} դաշտի կամայական փարբ



ներկայացվում է $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$ փարրերի գծային կոմբինացիայով: Վերցնենք F_{p^n} դաշտի կամայական փարր՝ $\gamma_0 + \gamma_1\theta + \dots + \gamma_{n-1}\theta^{n-1}$, $\gamma_i \in F_p$, $i = 0, 1, \dots, n-1$: Քանի որ $\gamma_i \in F_p$ սրանում ենք՝ $\gamma_i^{p^k} = \gamma_i$ բոլոր $i = 0, 1, \dots, n-1$ համար: Բարձրացնենք $\gamma_0 + \gamma_1\theta + \dots + \gamma_{n-1}\theta^{n-1}$ փարրը p^k աստիճան՝

$$(\gamma_0 + \gamma_1\theta + \dots + \gamma_{n-1}\theta^{n-1})^{p^k} = \gamma_0 + \gamma_1\theta^{p^k} + \dots + \gamma_{n-1}(\theta^{p^k})^{n-1} :$$

Քանի որ $x^{p^k} - x$ -ը բաժանվում է $f(x)$ -ի վրա, այս $f(x)$ -ի արմատը նաև $x^{p^k} - x$ -ի արմատն է, ուստի θ -ն բավարարում է $\theta^{p^k} = \theta$ հավասարմանը և

$$(\gamma_0 + \gamma_1\theta + \dots + \gamma_{n-1}\theta^{n-1})^{p^k} = \gamma_0 + \gamma_1\theta + \dots + \gamma_{n-1}\theta^{n-1} :$$

Ուրեմն F_{p^n} դաշտի բոլոր փարրերը $x^{p^k} - x$ բազմանդամի արմատներն են, հետևաբար F_{p^n} -ը F_{p^k} -ի ենթադաշտն է և համաձայն Թեորեմ 2.20-ի՝ k -ն պետք է բաժանվի առանց մնացորդի n -ի վրա:

Դիցուք այժմ k -ն բաժանվում է առանց մնացորդի n -ի վրա: Ունենք, որ $\theta^{p^n} = \theta$ և θ -ն $x^{p^n} - x$ -ի արմատն է, հետևաբար, ինչպես արդեն պարզել ենք, $x^{p^n} - x$ -ը բաժանվում է $f(x)$ -ի վրա ($F_p[x]$ -ի բոլոր բազմանդամները, որոնց համար θ -ն արմատ է, բաժանվում են $f(x)$ -ի վրա): Նամաձայն Պնդում 2.19-ի՝ $x^{p^k} - x$ -ը իր հերթին բաժանվում է $x^{p^n} - x$ -ի վրա, ուստի $x^{p^k} - x$ -ը բաժանվում է $f(x)$ -ի վրա:

Թեորեմ 2.22. Դիցուք F_{p^n} դաշտը կառուցված է n -րդ աստիճանի անվերածելի բազմանդամի միջոցով, այսինքն F_{p^n} դաշտը ստացված

է որպէս $F_p[x]/(f(x))$ և θ -ն դա x բազմանդամի հարակից դասն է: Այս դեպքում $f(x)$ բազմանդամի բոլոր արմարները պարզ են (դրանց պարիկությունը 1 է), դրանք բոլորը պարկանում են F_{p^n} -ին և դրանք հերկայն են՝

$$\theta, \theta^p, \theta^{p^2}, \dots, \theta^{p^{n-1}} :$$

Ապացույց. Դիցուք $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$: Քանի որ θ -ն արմար է, ապա $f(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1 \theta + \dots + \alpha_n \theta^n = 0$: $f(x)$ -ի գործակիցները F_p դաշտից են, հերկաբար $\alpha_i^p = \alpha_i$, $i = 0, 1, \dots, n$:

Նաշվենք՝

$$\begin{aligned} f(\theta^p) &= \alpha_0 + \alpha_1 \theta^p + \alpha_2 (\theta^p)^2 + \dots + \alpha_n (\theta^p)^n = \\ &= \alpha_0 + \alpha_1^p (\theta)^p + \alpha_2^p (\theta^2)^p + \dots + \alpha_n^p (\theta^n)^p : \end{aligned}$$

Նամաձայն (2.13)-ի՝ սքանում ենք՝

$$f(\theta^p) = (\alpha_0 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \dots + \alpha_n \theta^n)^p = 0$$

և θ^p -ն նույնպէս արմար է: Նմանապէս ապացուցվում է, որ արմարներ են նաև $\theta^{p^2}, \dots, \theta^{p^{n-1}}$ փարբերը:

Յույց փանք այժմ, որ $\theta, \theta^p, \theta^{p^2}, \dots, \theta^{p^{n-1}}$ արմարները փարբեր են: Դիցուք $\theta^{p^k} = \theta^{p^m}$, որպէլ $0 \leq k < m \leq n - 1$: Նավասարության երկու կողմերը բարձրացնենք p^{n-m} ասփիճան՝ $(\theta^{p^k})^{p^{n-m}} = (\theta^{p^m})^{p^{n-m}}$: Ուսփի, $\theta^{p^{n+k-m}} = \theta$ և θ -ն $x^{p^{n+k-m}} - x$ բազմանդամի արմարն է: Ինչպէս գիտենք $F_p[x]$ -ի յուրաքանչյուր բազմանդամ, որի համար θ -ն արմար է, բաժանվում է առանց մնացորդի $f(x)$ -ի վրա: Ներկաբար $x^{p^{n+k-m}} - x$ բազմանդամը բաժանվում է $f(x)$ -ի վրա: Նամաձայն Պնդում 2.21-ի՝ $n + k - m$ -ը բաժանվում է n -ի վրա: Սակայն $n + k - m < n$ և n -ը չի կարող լինել $n + k - m$ -ի բաժանարար: Ուսփի բոլոր $\theta, \theta^p, \theta^{p^2}, \dots, \theta^{p^{n-1}}$ արմարները փարբեր են: Քանի որ այս արմարների քանակը հավասար է $f(x)$ -ի ասփիճանին, ապա բոլոր արմարների պարիկությունը 1 է: Թերերմն ապացուցված է:

Թերերն 2.23. Դիցուք $P_d(x)$ -ը $F_p(x)$ -ում բոլոր d ասփիճանի անվերածելի նորմավորված (x փոփոխականի ամենամեծ ասփիճանի գործակիցը

հավասար է 1-ի) բազմանդամների արտադրյալն է: Ստույգ է հետևյալ բանաձևը՝

$$x^{p^n} - x = \prod_{d|n} P_d(x) :$$

Ապացույց. Նամաձայն Թեորեմ 2.8-ի հետևանքի՝ $F_p[x]$ -ը ֆակտորիալ օղակ է և $x^{p^n} - x$ բազմանդամը միարժեքորեն ներկայացվում է անվերածելի բազմանդամների արտադրյալով: Այդ ներկայացման մեջ յուրաքանչյուր անվերածելի արտադրիչ կփոխարինենք նրան աստղիացված նորմավորված բազմանդամով՝ փակագծերից դուրս հանելով x -ի ամենամեծ աստիճանի գործակիցը: Քանի որ $x^{p^n} - x$ բազմանդամը նորմավորված է, ապա այդ գործակիցների արտադրյալը կլինի հավասար 1-ի:

Նամաձայն Պնդում 2.21-ի՝ $f(x)$ անվերածելի բազմանդամը $x^{p^n} - x$ բազմանդամի բաժանարար է միայն և միայն այն դեպքում, երբ $\deg f(x)$ -ը n -ի բաժանարարն է: Ուրեմն $x^{p^n} - x$ -ը բոլոր այն անվերածելի նորմավորված բազմանդամների արտադրյալն է, որոնց աստիճանը n -ի բաժանարարն է: Թեորեմն ապացուցված է:

Նշանակենք N_d -ով $F_p[x]$ -ում բոլոր d աստիճանի անվերածելի նորմավորված բազմանդամների քանակը:

Թեորեմ 2.23-ի բանաձևի աջ և ձախ մասերի աստիճաններն իրար հավասարեցնելով ստանում ենք՝

$$p^n = \sum_{d|n} dN_d : \quad (2.15)$$

Թեորեմ 2.24. Յուրաքանչյուր $n \geq 1$ համար $F_p[x]$ -ում գոյություն ունի n -րդ աստիճանի անվերածելի բազմանդամ:

Ապացույց. $n = 1$ դեպքում կամայական գծային բազմանդամ անվերածելի է, այդ պարզառով համարենք, որ $n \geq 2$: (2.15)-ից հետևում է, որ $p^n \geq nN_n$ բոլոր $n \geq 1$ համար: Նշանակենք $[m]$ -ով m թվի ամբողջ մասը: Քանի որ n -ի ամենամեծ բաժանարարը կամ $\frac{n}{2}$ է (գույգ n -ի դեպքում), կամ էլ չի գերազանցում $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -ը, ապա

$$p^n = nN_n + \sum_{\substack{d|n \\ d \neq n}} dN_d \leq nN_n + \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} dN_d \leq$$

$$nN_n + \sum_{d=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p^d \leq nN_n + \frac{n}{2} p^{\frac{n}{2}}$$

և

$$nN_n \geq p^n - \frac{n}{2} p^{\frac{n}{2}} : \quad (2.16)$$

Մյուս կողմից, քանի որ $n \geq 2$, ապա

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2} > \frac{n^2}{4},$$

ուստի $2^{\frac{n}{2}} > \frac{n}{2}$: Ներկաբար $p^{\frac{n}{2}} \geq 2^{\frac{n}{2}} > \frac{n}{2}$ և $p^n > \frac{n}{2} p^{\frac{n}{2}}$: Վերջապես, (2.16)-ից սպանում ենք, որ $nN_n > 0$ և $N_n > 0$: Թեորեմն ապացուցված է:

Նեպևանք. Յուրաքանչյուր p պարզ թվի և $n \geq 1$ բնական թվի համար գոյություն ունի F_{p^n} վերջավոր դաշտը:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. С. Ленг. **Алгебра**. “Мир”, Москва, 1968.
2. Б. Л. ван дер Варден. **Алгебра**. “Наука”, Москва, 1979.
3. А. И. Кострикин. **Введение в алгебру**. “Наука”, Москва, 1977.
4. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. **Основы теории групп**. “Наука”, Москва, 1972.
5. М. Холл. **Теория групп**. ИЛ, Москва, 1962.
6. Р. Лидл, Г. Нидеррайтер. **Конечные поля**. Том 1, “Мир”, Москва, 1988.

ԱՌԱՐԿԱՅԱԿԱՆ ՑԱՆԿ

- p-ենթախումբ, 79
 «ուժեղ», ծնիչների բազմություն, 34
 արելյան խումբ, 6
 ազար խումբ, 45
 ամբողջ օղակ, 90
 ամենամեծ ընդհանուր
 բաժանարար, 112
 անվերածելի փարր, 111
 աջ հարակից դաս, 16
 ասոցիատիվության պայման, 5
 ասոցիացված փարրեր, 111
 գլխավոր իդեալ, 110
 գլխավոր իդեալներ, 110
 գլխավոր իդեալների օղակ, 110
 դաշտ, 83
 դաշտի բնութագրիչը, 132
 դաշտի նուկլիայիկապիվ խումբ, 137
 ենթադաշտ, 131
 ենթախմբի նորմալիզացիոն, 67
 ենթախմբի ինդեքս (դասիչ), 17
 ենթախումբ, 8
 ենթաօղակ, 85
 Էվրիդեսյան նորմ, 128
 Էվրիդեսյան օղակ, 128
 իդեալ, 88
 իդեալի ծնիչ, 110
 իդեալի ծնորդ կամ ծնիչ, 93
 իդեալների արտադրյալ, 99
 իդեալների գումար, 100
 իզոմորֆ խումբ, 85
 ինյեկտիվ արտապարկերում, 104
 ինվարիանտ ենթախումբ, 20
 խմբի գործողությունը բազմության
 վրա, 60
 խմբի կարգ, 17
 խումբ, 5
 ծնիչ բազմություն, 30
 ծնիչ, 25
 կանոնական հոմոմորֆիզմ, 24
 կիսախմբեր, 96
 հակադարձ փարր, 6
 հակադիր փարր, 6
 համալուծ ենթախումբ, 79
 հոմոմորֆ խումբ, 15
 հոմոմորֆիզմ, 14
 ձախ իդեալ, 88
 ձախ հարակից դաս, 16
 մաքսիմալ իդեալ, 90
 միավոր փարր, 5, 110
 միջուկ, 22
 մոնոիդներ, 96
 նշանափոխ խումբ, 10
 նորմալ ենթախումբ, 20

- ոչ փրիվիալ իդեալներ, 88
- ուղեծիր, 62
- ուղեծրի երկարությունը, 62
- ուղիղ արտադրյալ, 28
- պապկեր, 22
- պարզ ենթադաշտ, 132
- պարզ իդեալ , 90
- պարունակություն, 125
- սեփական ենթախմբեր, 9
- Միլովյան *p*-ենթախումբ, 79
- սիմետրիկ խումբ, 8
- սուրյեկտիվ, 103
- սրաբիլ խումբ, 62
- սրաբիլիզատոր, 62
- վերջավոր ծնված խումբ, 47
- փարրական գործողություններ, 50
- փարրի կարգ, 25
- փեղափոխելի, 6
- փեղափոխելի օղակ, 83
- փեղափոխության մաքրից, 11
- փրիվիալ ենթախումբ, 9
- փրիվիալ իդեալներ, 88
- ցիկլիկ ինդեքս, 69
- ցիկլիկ, 25
- քանորդների դաշտ, 98
- քանորդների օղակ, 98
- օղակ, 83
- օղակային իզոմորֆիզմ, 85
- օղակային հոմոմորֆիզմ, 85
- օղակի պարզ փարրեր, 120
- Փակտոր-բազմություն, 19
- Փակտորիալ օղակ, 119
- Փակտոր-խումբ, 21
- Փակտոր-օղակ, 87
- Փուրյեի դիսկրետ ուղիղ և հակադարձ ձևափոխություններ, 110
- Փուրյեի արագ ձևափոխություն, 110

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԱՐԱ ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

(ԽՄԲԵՐ, ՕՂԱՎԵՐ, ԴԱՇՏԵՐ)

Համակարգչային ձևավորումը՝ Լ. Ս. Էլբակյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Հրատ. սրբագրումը՝ Լ. Հովհաննիսյանի

Տպագրված է «ՎԱՌՄ» ՍՊԸ-ում:
Ք. Երևան, Տիգրան Մեծի 48, բն. 43

Ստորագրված է տպագրության՝ 27.11.2020:

Չափսը՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 9.25:

Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն

ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1

www.publishing.am



ՎՐԱՏԱՐԱԿՅՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ 2020
publishing.ysu.am