

приведемъ вѣроятности смерти для лицъ женскаго пола въ возрастѣ 56 — 64 лѣтъ изъ венгерской таблицы смертности (1900—1901 г.г.) ¹⁾.

		Вѣроятность умереть въ теченіе слѣдующаго года жизни на 1.000.
Въ возрастѣ	56 л.	27,75
» »	57 »	23,63
» »	58 »	35,89
» »	59 »	17,35
» »	60 »	48,24
» »	61 »	23,08
» »	62 »	49,28
» »	63 »	43,79
» »	64 »	43,65

Кромѣ выравниванія, при построеніи таблицъ смертности приходится, въ зависимости отъ свойства имѣющихся данныхъ, производить и рядъ другихъ исправленій и вычисленій, какъ то учесть эмиграціи и иммиграціи, интерполированіе, когда умершіе и живущіе распределены не по одностолѣтнимъ возрастнымъ группамъ, и когда таблица основывается на данныхъ двухъ или болѣе переписей и пр. Къ интерполированію прибѣгаютъ иногда и въ случаяхъ крайней неточности основныхъ данныхъ.

VII.

Средняя и вѣроятная продолжительность жизни населенія.

Таблицы смертности даютъ возможность опредѣлить рядъ біометрическихъ величинъ, изъ коихъ наиболѣе важными являются величины средней продолжительности жизни.

Средняя продолжительность жизни или, сокращенно, средняя жизнь, обозначаемая символомъ E_x , представляетъ то число лѣтъ, которое въ среднемъ предстоитъ прожить одному лицу изъ данной совокупности родившихся или изъ совокупности лицъ, достигшихъ извѣстнаго возраста. Величина эта, естественно, различная для различныхъ возрастовъ. E_0 обозначаетъ среднюю продолжительность жизни при рожденіи, E_{20} —среднюю продолжительность предстоящей жизни для достигшихъ 20 лѣтъ, E_{40} —среднюю продолжительность предстоящей жизни для достигшихъ 40 лѣтъ и т. д. Если бы мы имѣли возможность прослѣдить очень большое число новорожденныхъ или сверстниковъ, достигающихъ каждаго послѣдующаго года жизни, до ихъ смерти и вычислили бы ту сумму лѣтъ, которая прожита всѣми данными новорожденными, и тѣ суммы лѣтъ,

¹⁾ Mortalitätstafel der Länder der Ungarischen Krone.—Ungarische Statistische Mitteilungen, Bd. II.

которые прожиты отдѣльно всѣми сверстниками каждаго даннаго возраста, то раздѣливъ указанные числа лѣтъ на числа лицъ, изъ которыхъ состояла первоначальная группа родившихся и первоначальныя группы лицъ, достигшихъ каждаго послѣдующаго года жизни, мы бы и получили рядъ величинъ, указывающихъ, сколько лѣтъ въ среднемъ прожито каждымъ лицомъ, входившимъ въ первоначальныя группы родившихся и группы сверстниковъ, т. е. величины средней продолжительности жизни для каждаго возраста. Получить эти величины путемъ непосредственнаго наблюденія, очевидно, невозможно, но ихъ не трудно получить изъ таблицы смертности.

Предположимъ, что всѣ умершіе по таблицѣ смертности при переходѣ отъ возраста x къ возрасту $x+1$ умерли въ началѣ соответственныхъ однолѣтнихъ возрастныхъ промежутковъ, т. е. тотчасъ по достиженіи возраста x , $x+1$, $x+2$. . . лѣтъ. Если принять за предѣльный возрастъ доживающихъ 99 лѣтъ, т. е., что возрастъ, до котораго по данной таблицѣ никто не доживаетъ, равняется 100 лѣтъ, то число прожитыхъ въ общей сложности лѣтъ (Q) лицами, составляющими, напр., группу родившихся (l_0), изъ которыхъ исходитъ таблица смертности, составитъ;

$$Q = 0 \cdot d_0 + 1 \cdot d_1 + 2 \cdot d_2 + 3 \cdot d_3 + \dots + 99 \cdot d_{99};$$

$$\text{такъ какъ } d_0 = l_0 - l_1, d_1 = l_1 - l_2 \text{ и т. д.}$$

$$\text{то } Q = l_1 - l_2 + 2 l_2 - 2 l_3 + 3 l_3 - 3 l_4 + \dots 98 l_{98} - 98 l_{99} + 99 l_{99} \\ \text{или } Q = l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{99} \quad (1).$$

Если, наоборотъ, предположить, что всѣ умершіе при переходѣ отъ возраста x къ возрасту $x+1$ лѣтъ умерли въ концѣ соответственныхъ возрастныхъ промежутковъ, т. е. въ концѣ даннаго года жизни, то

$$Q = 1 \cdot d_0 + 2 \cdot d_1 + 3 \cdot d_2 + \dots + 100 \cdot d_{99} \\ Q = l_0 - l_1 + 2 l_1 - 2 l_2 + 3 l_2 - 3 l_3 + \dots 99 l_{98} - 99 l_{99} + 100 l_{99} \\ Q = l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_{99} \quad (2).$$

Въ дѣйствительности смертныя случаи происходятъ не въ началѣ и не въ концѣ даннаго года жизни, а болѣе или менѣе равномерно распределяются на данный возрастной промежутокъ, и число прожитыхъ лѣтъ будетъ близко къ среднему арифметическому изъ Q по формулѣ (1) и Q по формулѣ (2).

$$Q = \frac{1}{2} l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_{99} \\ Q = \frac{1}{2} l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \dots + l_{x+n} + \dots + l_w$$

Раздѣливъ сумму прожитыхъ лѣтъ на число лицъ, составляющихъ первоначальную группу l_0 , l_x , l_{x+1} , l_{x+2} и т. д., мы и получимъ выраженіе средней продолжительности предстоящей жизни для родившихся или живущихъ возраста x , $x+1$, $x+2$ и т. д.

$$E_0 = 1/2 + \frac{1}{l_0}(l_1 + l_2 + \dots + l_{99})$$

$$E_x = 1/2 + \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} + \dots + \frac{l_{x+n}}{l_x} + \dots + \frac{l_{\omega}}{l_x}$$

$$\text{или } E_x = \frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \dots + l_{x+n} + \dots + l_{\omega}}{l_x} - 1/2$$

Такимъ образомъ, для опредѣленія величины средней жизни для даннаго возраста нужно сложить всѣ числа доживающихъ до послѣдовательныхъ возрастовъ по таблицѣ смертности, начиная съ чиселъ, доживающихъ до даннаго возраста и кончая числами доживающихъ до предѣльнаго возраста, раздѣлить полученную сумму на число доживающихъ до возраста, для котораго опредѣляется величина средней жизни, и изъ полученнаго частнаго вычесть $1/2$ года; или же можно сложить числа доживающихъ, начиная не съ даннаго возраста, а со слѣдующаго, раздѣлить полученную сумму на число доживающихъ до даннаго возраста и къ полученному частному прибавить $1/2$ года.

Средняя продолжительность предстоящей жизни лица въ возрастѣ x лѣтъ представляетъ математическое ожиданіе для лица возраста x лѣтъ продолжительности предстоящей ему жизни. Математическое ожиданіе какой нибудь величины опредѣляется въ теоріи вѣроятностей, какъ сумма всѣхъ возможныхъ значеній этой величины, помноженныхъ на соответствующую вѣроятность. Такъ какъ вѣроятность по достиженіи возраста x прожить

$$\text{одинъ годъ} = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \text{ а вѣроятность прожить второй годъ} = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

$$\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} = \frac{l_{x+2}}{l_x}, \text{ то математическое ожиданіе продолжительности жизни}$$

$$\text{въ два года равно суммѣ } \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+2}}{l_x}; \text{ математическое ожиданіе}$$

$$\text{продолжительности жизни въ 3 года равно суммѣ } \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+2}}{l_x} + \frac{l_{x+3}}{l_x},$$

и математическое ожиданіе всей предстоящей жизни составитъ:

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+2}}{l_x} + \dots + \frac{l_{x+n}}{l_x} + \dots + \frac{l_{\omega}}{l_x} \quad (a).$$

Такъ какъ въ приведенныхъ формулахъ не учтена вѣроятность прожить не весь первый годъ, а только извѣстную часть его, то, принимая равномерное распредѣленіе смертныхъ случаевъ въ теченіе года, каждое изъ l_x лицъ должно прожить еще $1/2$ года. Прибавляя къ суммѣ (а) $1/2$, мы получаемъ одну изъ вышеуказанныхъ формулъ для опредѣленія E_x .

$$E_x = 1/2 + \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{l_{x+2}}{l_x} + \dots + \frac{l_{x+n}}{l_x} + \dots + \frac{l_{\omega}}{l_x}$$

Выведенныя изъ таблицы смертности величины средней продолжительности предстоящей жизни выражаютъ для каждого даннаго возраста одной цифрой условія смертности, существующія во всѣхъ послѣдующихъ возрастныхъ періодахъ, а продолжительность жизни при рожденіи резюмируетъ существующія условія смертности съ самаго начала до конца жизни. Изъ этого очевидно большое научное и практическое значеніе величинъ средней жизни, какъ мѣрила жизнненности и смертности населенія. Численныя значенія средней продолжительности жизни, начиная отъ рожденія до возрастовъ 3—5 лѣтъ, постепенно увеличиваются, а затѣмъ начинаютъ плавно постепенно понижаться, доходя до 0 въ предѣльномъ табличномъ возрастѣ. На первый взглядъ такое явленіе, что продолжительность жизни, напр., 4-лѣтняго больше продолжительности жизни годовалаго ребенка, несмотря на то, что первый ужъ прожилъ 3 года, представляется не вполнѣ понятнымъ. Явленіе это стоитъ въ связи съ своеобразнымъ теченіемъ смертности въ раннемъ дѣтскомъ возрастѣ и уясняется изъ слѣдующихъ соображеній:

$$E_x = \frac{1/2 l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \dots}{l_x}$$

$$E_{x+1} = \frac{1/2 l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots}{l_{x+1}}$$

Если $E_{x+1} >$ или $< E_x$, то и

$$\frac{1/2 l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots}{l_{x+1}} > \frac{1/2 l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \dots}{l_x}$$

$$\frac{1/2 l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \dots}{l_x} > \frac{1/2 l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots}{l_{x+1}}$$

$$\text{Такъ какъ } l_{x+2} + l_{x+3} + \dots = l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots - l_{x+1},$$

$$\begin{aligned} \text{то } l_x (l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots) - l_x \cdot l_{x+1} &> \\ &> l_{x+1} (l_{x+1} + l_{x+2} + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (l_x - l_{x+1}) (l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots) &\geq l_x \cdot l_{x+1} \\
 \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots}{l_{x+1}} &< \frac{l_x}{l_x - l_{x+1}} \\
 \frac{1}{2} + E_{x+1} &\geq \frac{l_x}{l_x - l_{x+1}} \\
 \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} &\geq \frac{1}{\frac{1}{2} + E_{x+1}},
 \end{aligned}$$

т. е. средняя продолжительность жизни для возраста x тогда больше или меньше средней продолжительности жизни для возраста $x + 1$, когда вероятность смерти для возраста x больше или меньше обратной величины увеличенной на $1/2$ года средней продолжительности жизни для возраста $x + 1$.

Численные значения средней продолжительности жизни могут быть определены только из таблицы смертности. Некоторые авторы в прежнее время пытались определить величину средней жизни путем различных эмпирических приближенных формул, приравнявая, напр., величину средней жизни к среднему возрасту умерших или определяя ее как обратную величину общего коэффициента смертности и т. п. Все эти попытки должны быть признаны совершенно ошибочными, как основанные на ошибочном предположении неподвижности населения. В стационарном населении, действительно, средняя продолжительность жизни равна среднему возрасту умерших или обратной величине коэффициента смертности или обратной же величине коэффициента рождаемости. В обычном же населении средний возраст умерших зависит от мѣняющихся чисел родившихся, миграционного движенія и измѣненій въ смертности отдѣльных поколѣній въ теченіе многихъ предыдущихъ лѣтъ, и вообще факторовъ, не имѣющихъ ничего общаго съ продолжительностью жизни, и отождествленіе средняго возраста умершихъ съ средней продолжительностью жизни нельзя обозначить иначе, какъ грубой ошибкой. Такой же грубой ошибкой являются и все опредѣленія средней продолжительности жизни изъ чиселъ родившихся и умершихъ или коэффициентовъ рождаемости и смертности, какъ, напр., формула Прайса, по которой средняя продолжительность жизни опредѣляется какъ среднее арифметическое изъ коэффициентовъ рождаемости и смертности. Полная ошибочность этой и аналогичныхъ формулъ явствуетъ уже изъ того, что въ формулѣ этой одну величину можно замѣнить другой, причемъ результатъ получается одинъ и тотъ же: напр., умирающее населеніе съ громаднымъ коэффициентомъ смертности 40 на 1.000 и рождаемостью 20,

по этой формулѣ, имѣетъ ту же среднюю продолжительность жизни въ 30 лѣтъ, какъ и быстро растущее населеніе съ рождаемостью 40 и низкой смертностью 20 на 1.000.

Вѣроятную продолжительность жизни (V_x) или, сокращенно, вѣроятную жизнь называется число лѣтъ, по истеченіи которыхъ изъ числа родившихся или сверстниковъ какого либо возраста остается въ живыхъ половина, или, иными словами, разность между тѣмъ возрастомъ $x + n$, въ которомъ по таблицѣ смертности остается въ живыхъ половина изъ даннаго числа l_x лицъ, и возрастомъ x . Вѣроятность для лицъ возраста x дожить и не дожить до возраста $x + n$ та-

кимъ образомъ одинаковы, т. е. $\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$

Въ таблицахъ смертности въ большинствѣ случаевъ нельзя найти чиселъ доживающихъ до извѣстнаго полнаго возраста, точно соответствующихъ половинѣ доживающихъ до возраста, для котораго опредѣляется вѣроятная продолжительность предстоящей жизни. Такъ, напр., по новой русской таблицѣ смертности изъ 100.000 родившихся мужского пола 50.239 доживаетъ до возраста 17 лѣтъ и 49.964 до возраста 18 лѣтъ, и вѣроятная жизнь при рожденіи находится между 17 и 18 годами; изъ 45.851 живущихъ въ возрастѣ 30 лѣтъ 23.195 доживаетъ до возраста 65 лѣтъ и 22.065 до возраста 66 лѣтъ, и вѣроятная жизнь для 30-лѣтняго находится между 35 и 36 годами и т. д.

Для болѣе точнаго опредѣленія величинъ вѣроятной продолжитель-

ности жизни примѣняется формула: $V_x = n + \frac{l_{x+n} - \frac{1}{2} l_x}{l_{x+n} - l_{x+n+1}}$, гдѣ n

обозначаетъ разность между возрастомъ x , для котораго опредѣляется величина вѣроятной жизни и тѣмъ возрастомъ $x + n$, въ которомъ остается въ живыхъ нѣсколько больше половины лицъ возраста x ; величины l_x , l_{x+n} , l_{x+n+1} обозначаютъ числа доживающихъ до возрастовъ x , $x + n$, $x + n + 1$.

Пользуясь вышеприведенными цифровыми примѣрами, находимъ:

$$V_0 = 17 + \frac{50239 - \frac{100.000}{2}}{50239 - 49964} = 17 \frac{239}{275} = 17,87$$

$$V_{30} = 35 + \frac{23195 - \frac{45851}{2}}{23195 - 22065} = 35 \frac{269}{1130} = 35,23.$$

Величины вѣроятной продолжительности жизни имѣютъ меньшее биометрическое значеніе, чѣмъ величины средней продолжительности жизни. Обѣ величины служатъ выраженіемъ большей или меньшей интенсивности вымиранія, резюмируя одной цифрой условія смертности, существующія въ послѣдующихъ возрастахъ. Но тогда такъ какъ числа средней жизни резюмируютъ условія смертности, существующія во всѣхъ послѣдующихъ возрастахъ до самаго конца жизни, числа вѣроятной жизни отражаютъ условія смертности, существующія лишь въ извѣстныхъ возрастныхъ предѣлахъ. Очевидно, поэтому, что обѣ величины не совпадаютъ, и что вѣроятная жизнь, какъ опредѣлитель смертности, уступаетъ средней жизни.

Многіе авторы пытались облечь зависимость смертности отъ возраста въ одну общую формулу и дать точный математическій законъ смертности. Попытки эти однако не увѣнчались успѣхомъ, въ виду крайней сложности и многочисленности факторовъ, влияющихъ на смертность, многіе изъ которыхъ пока даже не поддаются цифровому учету. Изъ такихъ попытокъ слѣдуетъ отмѣтить попытки де-Муавра ¹⁾, Ламберта ²⁾, Тиле ³⁾, Юнга ⁴⁾ Баббеджа ⁵⁾, Виттштейна ⁶⁾, Оршара ⁷⁾ и др.

Въ 1825 году англійскому ученому Гомпертцу ⁸⁾ удалось найти общую формулу, усовершенствованную впоследствии Мекхэмомъ ⁹⁾, выражающую зависимость между смертностью и возрастомъ,—формулу дающую для среднихъ возрастовъ результаты, близкіе къ полученнымъ изъ наблюденій. Формула эта, носящая названіе закона смертности Гомпертцъ-Мекхэма, не представляя строго-математическаго закона, является закономъ приближеннымъ, достаточно пригоднымъ для практическихъ цѣлей, и широко примѣняется для выравниванія таблицъ смертности и въ страховомъ дѣлѣ для страховыхъ расчетовъ. Законъ этотъ представляетъ законъ геометрической прогрессіи, по которому логарифмы вѣроятностей прожить слѣдующій годъ жизни слѣдуютъ закону геометрической прогрессіи ¹⁰⁾.

¹⁾ A. de Moivre. A treatise of annuities on lives. London. 1724.

²⁾ Lambert. Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung. II. Th. 1718.

³⁾ Journ. of the Institute of Actuaries. XVI.

⁴⁾ Ibidem. VI and VII.

⁵⁾ Ibidem. VI.

⁶⁾ Wittstein. Das mathematische Gesetz der menschlichen Sterblichkeit. 2 изд. Hannover, 1883.

⁷⁾ Journal of the Institute of Actuaries, VI.

⁸⁾ Gompertz. Law of human mortality. 1825.

⁹⁾ Journal of the Institute of Actuaries. XV.

¹⁰⁾ Подробности объ этомъ законѣ можно найти на русскомъ языкѣ въ книгѣ Б. О. Малешевского Математическая статистика, СПб. 1890, стр. 233 и сл., и въ болѣе элементарной формѣ въ книгѣ С. Е. Савича, Элементарная теорія страхования жизни и трудоспособности, 2 изд. СПб. 1909, стр. 121 и сл.